Polytech Lyon, MAM3A, 2023-2024

Analyse Numérique (AN)

Travaux Tutorés 1 (TT1)

Exercice 1.
Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné dans $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On considère aussi $T > 0$ et on pose $S = \Omega \times]0, T[\subset \mathbb{R}^2$. On se donne aussi une fonction $f \in C(\bar{S})$ et une autre fonction $g \in C(\bar{\Omega})$.
On se propose de donner une approximation numérique de l'EDP suivant appelé **l'équation de la chaleur d'évolution en dimension 1:**
trouver $u : S \to \mathbb{R}$ avec $u \in C^2(S) \cap C(\bar{S})$ solution du système suivant:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \quad \forall\, (x,t) \in S$$

avec

$$(2) \qquad u(a,t) = u(b,t) = 0, \quad \forall\, t \in [0,T]$$

et

$$(3) \qquad u(x,0) = g(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

L'équation (1) est **l'équation principale**, ensuite (2) représentent les **conditions au limite** et (3) c'est la **condition initiale**; nous considérons $x \in \Omega$ comme la **variable de l'espace** et $t \in]0, T[$ comme la **variable du temps**.

Dans la suite de l'exercice on fixe $M, N \in \mathbb{N}$ avec $M, N \geq 3$ assez grands, on pose $h = \frac{b-a}{N+1}$ (c'est le pas de discrétisation en espace) et $\tau = \frac{T}{M+1}$ (c'est le pas de discrétisation en temps).
On pose $x_i = a + ih$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots N+1\}$ et $t_j = j\tau$ pour tout $j \in \{0, 1, \cdots M+1\}$ et on note par $U_{i,j}$ une approximation de $u(x_i, t_j)$.
Les conditions au limites (2) nous donnent

$$U_{0,j} = U_{N+1,j} = 0, \quad \forall j \in [[0, M+1]].$$

Nous introduisons alors pour tout $j \in [[0, M+1]]$ le vecteur $U^{(j)}$ tel que $(U^{(j)})_i = U_{i,j}$ pour tout $i \in [[1, N]]$.

Pour tout $j \in [[1, M+1]]$ et $i \in [[1, N]]$ on va approcher en (1)
$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)$ par $\frac{1}{\tau}(U_{i,j} - U_{i,j-1})$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)$ par $\frac{1}{h^2}(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j})$.

Comme $u(x, 0)$ est connue (égale à $g(x)$) pour tout $x \in \Omega$ il est naturel de considérer le vecteur $U^{(0)}$ comme vecteur connu avec

$$(U^{(0)})_i = g(x_i), \quad \forall\, i \in [[1, N]].$$

a) Ecrire une approximation de (1) en (x_i, t_j) comme une relation de récurrence qui permet de trouver le vecteur $U^{(j)}$ en fonction du vecteur $U^{(j-1)}$, ceci pour tout j de 1 à $M+1$. Montrer que cette relation de récurrence s'écrit sous la forme

$$AU^{(j)} = \alpha U^{(j-1)} + b$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$ à trouver.
b) Montrer que A est une matrice SDP.

Exercice 2.
On se donne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\begin{cases} A_{ii} = \beta, & \forall\, i = 1, \cdots n \\ A_{i+1,i} = A_{i,i+1} = \alpha, & \forall\, i = 1, \cdots n-1. \end{cases}$$

Partie I). Le but de cette partie est de montrer qu'on peut trouver n valeurs propres réelles distinctes (et donc une base en $\mathbb{R}^n$ des vecteurs propres) de A.

On cherchera un vecteur propre arbitraire $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ de A sous la forme

$$x_k = \sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right), \quad \forall\, k = 1, 2, \cdots n \tag{4}$$

avec $m \in \{1, 2, \cdots n\}$. On observe alors que tout revient à trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha x_{k-1} + \beta x_k + \alpha x_{k+1} = \lambda x_k, \quad \forall\, k = 1, 2, \cdots n \tag{5}$$

où on étend la définition (4) de x_k à $k = 0$ et $k = n+1$.
Ia) Montrer que pour tout $m \in \{1, 2, \cdots n\}$ on a une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ (qu'on notera λ_m) donnée par

$$\lambda_m = \beta + 2\alpha \cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)$$

Ib) Montrer que les expressions de **Ia)** nous donnent exactement n valeurs propres distinctes de A; peut-il y en avoir d'autres?
Partie II). On suppose ici en plus $\beta \geq 2|\alpha|$. Montrer que A est une matrice symétrique et définie positive (matrice SDP).