Polytech Lyon, MAM3A, 2023 - 2024

Analyse Numérique (AN)

Travaux Tutorés 2 (TT2)

Problème (*Conditions suffisante pour consistance à l'ordre p*).
Avec le cadre général et le notations du cours, nous considérons le schéma numérique général (8.24), (8.25) vu en cours pour approcher le problème de Cauchy (8.1), (8.3). On va supposer dans ce travail que $d = 1$; on se donne aussi un $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f et Φ sont des fonctions de classe C^p sur leurs domaines de définition respectifs.
Le but de ce travail est de donner des conditions suffisantes pour que l'ordre de consistance du schéma soit au moins p.

Soit $y : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}$ une solution arbitraire de (8.1), (8.3). Rappelons que y est une fonction de classe C^{p+1} ; remarquons aussi que y est une fonction bornée car elle est continue sur le compact $[t_0, t_0 + T]$.
Pour tout $t \in [t_0, t_0 + T[$ et $h \in [0, h^*]$ assez petit tel que $t + h \leq t_0 + T$ nous avons les développements de Taylor suivants :

$$(1) \qquad y(t+h) = y(t) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} y^{(k)}(t)\, h^k + \frac{1}{(p+1)!} y^{(p+1)}(t + \theta_1 h)\, h^{p+1}$$

et

$$(2) \qquad \Phi(t, y(t), h) = \Phi(t, y(t), 0) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}(t, y(t), 0)\, h^k + \frac{1}{p!} \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(t, y(t), \theta_2 h)\, h^p$$

avec $\theta_1, \theta_2 \in]0, 1[$.

a) Montrer le résultat suivant : si on a

$$(3) \qquad \frac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}(t, y(t), 0) = \frac{1}{k+1} y^{(k+1)}(t), \quad \forall\, t \in [t_0, t_0 + T], \quad \forall\, k \in [[0, p-1]]$$

alors l'erreur de consistance satisfait

$$(4) \qquad R(t, y, h) = \left[\frac{1}{(p+1)!} y^{(p+1)}(t + \theta_1 h) - \frac{1}{p!} \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(t, y(t), \theta_2 h) \right] h^p.$$

b) Montrer que si les égalités de (3) sont satisfaites alors le schéma est consistant à l'ordre au moins p.

Nous donnons dans la suite une méthode pour calculer les fonctions $y^{(k+1)}$. On définit par récurrence une suite des fonctions $(f_k)_{k \in [[0,p]]}$, avec $f_k : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de manière suivante :

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{k+1}(t, x) = \frac{\partial f_k}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial f_k}{\partial x}(t, x)\, f(t, x), \quad \forall\, k \in [[0, p-1]], \quad \forall\, (t, x) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

demain - samedi 10 - 18h
dimanche 9h30 - 17h30

c) Montrer par récurrence sur k que pour tout $k \in [[0,p]]$ on a

$$f_k \text{ est de classe } C^{p-k} \quad \text{et} \quad y^{(k+1)}(t) = f_k(t, y(t)), \;\; \forall\, t \in [t_0, t_0 + T].$$

d) Montrer le résultat principal suivant :

Proposition : *Supposons qu'on a les égalités suivantes :*

$$(5) \qquad \frac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}(t, x, 0) = \frac{1}{k+1} f_k(t, x), \quad \forall\, (t, x) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}, \quad \forall\, k \in [[0, p-1]].$$

Alors le schéma considéré est consistant à l'ordre au moins p.

e) Application :

Montrer que le schéma de Runge-Kutta explicit d'ordre 2 vu en cours (voir (8.18) ou (8.19)) est consistant à l'ordre au moins 2.