NDAO Moth Yacine

TT1 Optimisation continue

Polytech Lyon 3A MAM 2023-2024

Problème

I-a-a1)

on a $\begin{cases} \left(y^{\gamma u+\delta v}\right)_{k+1} = a\left(y^{\gamma u+\delta v}\right)_k + b(\gamma u_{k+1}+\delta v_{k+1}) \\ \left(y^{\gamma u+\delta v}\right)_0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(y^{\gamma u+\delta v}\right)_1 = b(\gamma u_1+\delta v_1)$

Pour simplifier posons $\tilde{y} = y^{\gamma u+\delta v}$

$\tilde{y}_1 = b(\gamma u_1+\delta v_1)$.

$\tilde{y}_2 = ab\gamma u_1 + ab\delta v_1 + b\gamma u_2 + b\delta v_2$

$= ab(\gamma u_1+\delta v_1) + b(\gamma u_2+\delta v_2)$

$\tilde{y}_3 = a^2b(\gamma u_1+\delta v_1) + ab(\gamma u_2+\delta v_2) + b(\gamma u_3+\delta v_3)$

Par conjecture, on a :

$$\tilde{y}_n = a^{n-1}b(\gamma u_1+\delta v_1) + a^{n-2}b(\gamma u_2+\delta v_2) + a^{n-3}b(\gamma u_3+\delta v_3) + \dots + b(\gamma u_n+\delta v_n) \quad (*)$$

On va le démontrer par récurrence :

* Initialisation : évident, $\tilde{y}_1 = a^{1-1} b(\gamma u_1 + \delta v_1)$.

* Hérédité : Supposons $(*)$ vrai, et montrons que

$$\tilde{y}_{n+1} = a^{n} b(\gamma u_1 + \delta v_1) + a^{n-1} b(\gamma u_2 + \delta v_2) + a^{n-2} b(\gamma u_3 + \delta v_3) + \cdots + b(\gamma u_{n+1} + \delta v_{n+1}).$$

Or on a :
$$\tilde{y}_{n+1} = a\tilde{y}_n + b(\gamma u_{n+1} + \delta v_{n+1})$$
$$= a\left(a^{n-1} b(\gamma u_1 + \delta v_1) + a^{n-2} b(\gamma u_2 + \delta v_2) + \cdots + b(\gamma u_n + \delta v_n)\right) + b(\gamma u_{n+1} + \delta v_{n+1})$$
$$= a^{n} b(\gamma u_1 + \delta v_1) + a^{n-1} b(\gamma u_2 + \delta v_2) + \cdots + ab(\gamma u_n + \delta v_n) + b(\gamma u_{n+1} + \delta v_{n+1})$$

Conclusion :

$$\left(y^{\gamma u + \delta v}\right)_k = a^{k-1} b(\gamma u_1 + \delta v_1) + a^{k-2} b(\gamma u_2 + \delta v_2) + a^{k-3} b(\gamma u_3 + \delta v_3) + \cdots + b(\gamma u_k + \delta v_k)$$

Ainsi en posant $\gamma = 1$, $\delta = 0$, on obtient

$$(y^u)_k = a^{k-1} b u_1 + a^{k-2} b u_2 + a^{k-3} b u_3 + \cdots b u_k$$

$\gamma = 0$ et $\delta = 1 \Rightarrow$

$$(y^v)_k = a^{k-1} b v_1 + a^{k-2} b v_2 + \cdots + b v_k$$

Ia_2) En multipliant par γ à $(y^u)_k$ et δ à $(y^v)_k$, on obtient :

$$(\gamma y^u + \delta y^v)_k = a^{k-1} b(\gamma u_1 + \delta v_1) + a^{k-2} b(\gamma u_2 + \delta v_2) + \dots + b(\gamma u_k + \delta v_k)$$

$$\Rightarrow (y^{\gamma u + \delta v})_k = (\gamma y^u + \delta y^v)_k$$

Ia_3)

L'application $u \in \mathbb{R}^n \longmapsto y^u \in \mathbb{R}^n$ est linéaire.

I-b).

On raisonnons par récurrence pour montrer que

$$(x^u)_k = y^u_k + w_k, \quad \forall k$$

* Pour $k = 1$, on a : $(x^u)_1 = a x_0^u + b u_1 = a x_0 + b u_1$

$$y^u_1 + w_1 = a \underbrace{y_0}_{=0} + b u_1 + a \underbrace{w_0}_{x_0}$$

$$= a x_0 + b u_1$$

$$\Rightarrow x^u_1 = y^u_1 + w_1.$$

* Supposons que $x^u_k = y^u_k + w_k$.

On a : $x^u_{k+1} = a x^u_k + b u_{k+1}$

$$= a(y^u_k + w_k) + b u_{k+1}$$

$$= a y^u_k + b u_{k+1} + a w_k$$

$$= y^u_{k+1} + w_{k+1}$$

<u>Conclusion</u> : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, on a : $x_k^u = y_k^u + w_k$

donc $\boxed{x^u = y^u + w}$.

Ainsi $x^u = Mu + w$

Posons $M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,n} \\ \vdots & & & \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \cdots & M_{n,n} \end{pmatrix}$

alors $Mu + w = \begin{pmatrix} M_{1,1} u_1 + M_{1,2} u_2 + \cdots + M_{1,n} u_n \\ \vdots \\ M_{n,1} u_1 + M_{n,2} u_2 + \cdots + M_{n,n} u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_n^u = M_{n,1} u_1 + M_{n,2} u_2 + \cdots + M_{n,n} u_n + w_n$

$\Rightarrow x_n^u = Su + w_n$

avec $S \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la dernière ligne de M.

I-c)

$$f(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha}{2}(x_n^u - d)^2, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$$

f est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ comme somme de deux fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$

- Montrons que f est fortement convexe.

On a : $(x_n^u - d)^2 = \langle x_n^u - d, x_n^u - d \rangle$

$= \langle Su + w_n - d, Su + w_n - d \rangle$

③

$$(x_n^u - d)^2 = \langle Su, Su \rangle + 2 \langle Su, w_n - d \rangle + \|w_n - d\|^2$$

$$= \langle S^T S u, u \rangle + 2 \langle Su, w_n - d \rangle + \|w_n - d\|^2$$

$$\Rightarrow f(u) = \frac{1}{2} \langle I_n u, u \rangle + \frac{\alpha}{2} \langle S^T S u, u \rangle + \alpha \langle Su, w_n - d \rangle + \frac{\alpha}{2} \|w_n - d\|^2$$

$$= \frac{1}{2} \langle (I_n + \alpha S^T S) u, u \rangle + \alpha \langle u, S^T(w_n - d) \rangle + \frac{\alpha}{2} \|w_n - d\|$$

On posera $R = \alpha S^T S + I_n$.

$R^T = I_n + \alpha S^T S = R$: R est symétrique.

Montrons que $S^T S$ est positive.
Soit $h \in \mathbb{R}^n$.

$\langle S^T S h, h \rangle = \langle Sh, Sh \rangle = \|Sh\|^2 \geq 0, \ \forall h \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow S^T S$ est positive.

Comme $\alpha > 0$, alors $\alpha S^T S$ l'est aussi.

Ainsi toute valeur propre μ de $\alpha S^T S$ est positive.

Soit ~~λ une valeur μ~~ λ une valeur propre de R.

alors $\lambda = 1 + \alpha \mu > 0$

$\Rightarrow R$ est symétrique définie positive.

f est une forme quadratique associée à la matrice R SDP ; f est fortement convexe.

I-d)

Puisque $\mathbb{R}^n$ est un fermé et f C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe un unique point de minimum u^* de f sur $\mathbb{R}^n$.

Partie II :

II-a)

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}\left(u_1^2 + \dots + u_n^2\right) = $$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\|u\|^2\right)}{\partial u_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(u_1^2 + \dots + u_j^2 + u_{j+1}^2 + \dots + u_n^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\, u_j$$

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\alpha}{2}\left(x_n^u - d\right)^2\right) = \alpha \frac{\partial x_n^u}{\partial u_j}\left(x_n^u - d\right).$$

d'où $\quad \dfrac{\partial f}{\partial u_j}(u) = u_j + \alpha\left(x_n^u - d\right)\dfrac{\partial}{\partial u_j} x_n^u$

II-b)

Il suffit de montrer que $\dfrac{\partial}{\partial u_j} x_n^u = z_n^{(j)}$

$$\cancel{x_n^u = SU + w_n = \begin{pmatrix} M_{n,1}U_1 + w_n \\ M_{n,2}u_2 + w_n \\ \vdots \\ M_{n,j}U_j + w_n \\ \vdots \\ M_{n,n}U_n + w_n \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ on a $x_n^U = SU + w_n = M_{n,1}U_1 + M_{n,2}U_2 + \dots + M_{n,j}U_j + \dots + M_{n,n}U_n + w_n$

$\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial u_j} x_n^U = M_{n,j} = \left(y^{e_j}\right)_n$

(4) .

on a $\underbrace{(y^{e_j})_n}_{= z_n^{(j)}} = a y^{e_j}_{n-1} + b(e_j)_n$

d'où $\frac{\partial f}{\partial u_j}(u) = u_j + \alpha(x_n^u - d)\, z_n^{(j)}$

II-c)

on a : $p_{k+1} z_{k+1}^{(j)} = a z_k^{(j)} p_{k+1} + b\, p_{k+1} (e_j)_{k+1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} z_{k+1}^{(j)} = a \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} z_k + b \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} \underbrace{(e_j)_{k+1}}_{= \mathbb{1}_{\{k+1=j\}}}$$

$$\overset{l=k+1}{\Longrightarrow} \sum_{l=1}^{n} p_l z_l^{(j)} = a \sum_{k=1}^{n-1} p_{k+1} z_k^{(j)} + a p_1 \underbrace{z_0^{(j)}}_{=0} + b\, p_j$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} p_k z_k^{(j)} = a \sum_{k=1}^{n-1} p_{k+1} z_k^{(j)} + b\, p_j} \quad (**)$$

$$(**) \Rightarrow p_n z_n^{(j)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_k z_k^{(j)} = a \sum_{k=1}^{n-1} p_{k+1} z_k^{(j)}$$

$$z_n^{(j)} p_n = \sum_{k=1}^{n-1} z_k^{(j)} \left(a\, p_{k+1} \cancel{z_k^{(j)}} - p_k\right) + b p_j$$

II_d)

$$\begin{cases} p_k = a\, p_{k+1} \; ; \; k = n-1, n-2, \dots, 1 \\ p_n = \alpha(x_n^u - d) \end{cases}$$

En utilisant (5) et (8) montrer que $\frac{\partial f}{\partial u_j}(u) = u_j + b p_j$ $\forall j \in [\![1, n]\!]$

On a: $\frac{\partial f}{\partial u_j}(u) = u_j + \alpha(x_n^u - d)\frac{\partial}{\partial u_j} x_n^u$

$$= u_j + \alpha(x_n^u - d)\, z_n^{(j)}$$

$$= u_j + p_n z_n^{(j)}$$

$$= u_j + \sum_{k=1}^{n-1} z_k^{(j)} \underbrace{(a\cancel{p_{k+1}} - a p_{k+1})}_{=0} + b p_j$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u_j}(u) = u_j + b p_j}, \; \forall j \in [\![1, n]\!]$$

Partie III :

III_a)

le système (10) est donné par (1).

(11) est donné par : $x^u = y^u + w$

$$\Rightarrow x_0^* = y_0^u + w_0 = x_0$$

(12) est donné par (9) de même que (13)

(14) est donné par l'équation d'Euler: $\nabla f(u^*) = 0$

i.e $u^* + b p^* = 0$

⑤

III - b)

$(14) \Rightarrow u^* = -b p^*$

(10) devient : $x^*_{k+1} = a x^*_k - b^2 p^*_{k+1}$

(12) et (13) : $p^*_n = \alpha (x^*_n - d)$

$p^*_{n-1} = a\alpha (x^*_n - d)$

$p^*_{n-2} = a^2\alpha (x^*_n - d)$

$\vdots$

$p^*_k = a^{n-k}\alpha (x^*_n - d)$

Donc $u^*_k = -b\alpha a^{n-k}(x^*_n - d)$

et $x^*_{k+1} = a x^*_k - b^2\alpha a^{n-k+1}(x^*_n - d)$. (10')

Déterminons x^*_n :

En remplaçant k par $n-1$ dans (10'), on obtient :

$x^*_n = a x^*_{n-1} - b^2\alpha a^2 (x^*_n - d)$. (15)

k par $n-2$ donne :

$x^*_{n-1} = a x^*_{n-2} - b^2\alpha a^3 (x^*_n - d)$

$\Rightarrow x^*_n = a^2 x^*_{n-2} - b^2\alpha a^4 (x^*_n - d) - b^2\alpha a^2 (x^*_n - d)$

$= a^2 x^*_{n-2} - (b^2\alpha a^2 + b^2\alpha a^4)(x^*_n - d)$

$x^*_n = a^2 x^*_{n-2} - b^2\alpha (a^2 + a^4)(x^*_n - d)$ (16)

k par $n-3$ donne :

$$x_{n-2}^* = a x_{n-3}^* - b^2 \alpha a^4 (x_n^* - d).$$

$$\Rightarrow x_n^* = a^3 x_{n-3} - b^2 \alpha a^6 (x_n^* - d) - b^2 \alpha (a^2 + a^4)(x_n^* - d)$$

$$x_n^* = a^3 x_{n-3} - b^2 \alpha (a^2 + a^4 + a^6)(x_n^* - d) \quad (17).$$

(15), (16) et (17) donnent, par conjecture que :

$\forall k \in [\![1, n]\!]$

$$x_n^* = a^k x_{n-k}^* - b^2 \alpha (x_n^* - d) \sum_{i=1}^{k} a^{2i}$$

$$\underbrace{\left(1 + b^2 \alpha \sum_{i=1}^{k} a^{2i}\right)}_{>0} x_n^* = a^k x_{n-k}^* + b^2 \alpha d \sum_{i=1}^{k} a^{2i}$$

car $b \neq 0$ et $\alpha > 0$ et $a^{2i} \geq 0$

Pour $k = n$, on a :

$$\left(1 + b^2 \alpha \sum_{i=1}^{n} a^{2i}\right) x_n^* = a^n \underbrace{x_0^*}_{= x_0} + b^2 \alpha d \sum_{i=1}^{n} a^{2i}$$

Notons par M_n : $M_n = b^2 \alpha \sum_{i=1}^{n} a^{2i}$

$$\Rightarrow (1 + M_n) x_n^* = a^n x_0 + d M_n$$

$$x_n^* = \frac{a^n}{1 + M_n} x_0 + \frac{d M_n}{1 + M_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_k^* = -b \alpha a^{n-k} \left(\frac{a^n}{1 + M_n} x_0 + \frac{d M_n}{1 + M_n} - d \right)}$$