Polytech Lyon, MAM 3, 2023-2024

Travaux Tutorés 1 (TT1) en Optimisation Continue

Problème

Partout dans la suite $\|\cdot\|$ *désigne la norme euclidienne et* n *un nombre dans* $\mathbb{N}^*$.

L'objectif de ce travail est l'étude d'un problème de **contrôle optimal** d'un système qui évolue à des temps discrets $t_0, t_1, \cdots t_n$ avec n assez grand, $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$.

On suppose que **l'état** du système au moment t_k est caractérisé par $x_k \in \mathbb{R}$ et que le passage du l'état au moment t_k à l'état au moment t_{k+1} peut être contrôlée par un **contrôle** $u_{k+1} \in \mathbb{R}$. En fait on suppose que le passage de l'état x_k à l'état x_{k+1} est donné par une expression qui dépend de x_k et de u_{k+1} ; nous considérons ici le cas simple où cette expression est **linéaire**. Nous supposons aussi que **l'état initial** x_0 est donné. Nous avons alors la **loi d'évolution** suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = a x_k + b u_{k+1}, & k \in [[0, n-1]] \\ x_0 \in \mathbb{R} & \text{donné} \end{cases} \tag{1}$$

avec $a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$.

Le but du travail est de trouver les contrôles $u_1, u_2, \cdots u_n$ qui minimise une certaine fonction coût f dépendant des états et des contrôles. On introduit les vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (vecteur état) et $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (vecteur contrôle). On se donne $\alpha > 0$ et $d \in \mathbb{R}$ et on définit la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$u \in \mathbb{R}^n \mapsto f(u) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \frac{\alpha}{2}(x_n - d)^2$$

où les vecteurs u et x sont liés par le relation (1).

Remarquons que la fonction f dépend seulement du contrôle u et de l'état final x_n.

On cherche alors à minimiser la fonction f, c'est à dire, trouver $u^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(u^*) \leq f(u), \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque : Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ donné il existe un unique $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant (1) (l'élément x_{k+1} est bien définit si on connait x_k et u_{k+1}). Nous notons par x^u le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ obtenu par (1) et qui dépend de u. On peut alors écrire

$$f(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha}{2}(x_n^u - d)^2, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n.$$

(*Un exemple physique d'un tel systme est l'évolution de la température dans une chambre ; l'état* x_k *est la température au moment* t_k *et le contrôle* u_{k+1} *est la source de chaleur* ($u_{k+1} > 0$

correspond au chauffage et $u_{k+1} < 0$ correspond à la climatisation). On suppose pour simplifier qu'on a la loi d'évolution suivante :

$$x_{k+1} - x_k = -\beta x_k + u_{k+1} \quad \textit{avec} \quad \beta > 0$$

qui s'explique par le fait que le changement de température $x_{k+1} - x_k$ entre les moments t_k et t_{k+1} est due à la source de chaleur (le terme u_{k+1}) et à la perte de chaleur à travers les murs (le terme $-\beta x_k$). On voit facilement que cette loi est de la forme (1) avec $a = 1 - \beta$ et $b = 1$. Dans la fonction objectif f la partie $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} u_k^2$ représente le coût du chauffage et la partie $\frac{\alpha}{2}(x_n - d)^2$ avec un $\alpha > 0$ grand vient du fait que nous souhaitons que la température x_n au moment final t_n (x_n = l'état final) soit "la plus proche que possible" d'une température désirée qui est d donnée ; ce terme $\frac{\alpha}{2}(x_n - d)^2$ "pénalise" l'éloignement de x_n par rapport à d.)

Partie I.

Le but de cette partie est de montrer que le fonction f est quadratique et fortement convexe.

Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ on considère $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} y_{k+1} = a y_k + b u_{k+1}, & k \in [[0, n-1]] \\ y_0 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

et on notera $y = y^u$.

On introduit aussi $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ donné par

$$\begin{cases} w_{k+1} = a w_k, & k \in [[0, n-1]] \\ w_0 = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

et on observe que w ne dépend pas de u.

Ia) On se propose de montrer que l'application $u \in \mathbb{R}^n \mapsto y^u \in \mathbb{R}^n$ est linéaire. Pour cela on considère $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ arbitraires et on cherche à montrer l'égalité $y^{\gamma u + \delta v} = \gamma y^u + \delta y^v$.

Ia1) Ecrire les relations de récurrence satisfaites par les composantes de $y^{\gamma u+\delta v}$, y^u et y^v.

Ia2) Montrer que les composantes de $y^{\gamma u+\delta v}$ et de $\gamma y^u + \delta y^v$ satisfont la même relation de récurrence avec la même donnée initiale.

Ia3) En déduire le résultat attendu.

On sait alors qu'il existe une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $y^u = Mu$, $\forall\, u \in \mathbb{R}^n$.

Ib) Montrer l'égalité

$$x^u = y^u + w$$

et en déduire qu'on a

$$x_n^u = Su + w_n \tag{4}$$

où $S \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est la dernière ligne de la matrice M.

Ic) Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que f est une fonction fortement convexe.
Id) En déduire l'existence et l'unicité d'un point de minimum u^* de f sur $\mathbb{R}^n$.

Partie II.

En général le calcul de la matrice M est difficile et on indique dans la suite un procédé efficace pour calculer ∇f sans avoir à calculer M. Il faut donc calculer $\frac{\partial f}{\partial u_j}(u)$ pour tous $u \in \mathbb{R}^n$ et $j \in [[1,n]]$.

IIa) Montrer qu'on a

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}(u) = u_j + \alpha(x_n^u - d)\frac{\partial}{\partial u_j}x_n^u.$$

IIb) En utilisant (4) et le fait que la j - ème colonne de M est y^{e_j} (où e_j est le j - ème élément de la base canonique en $\mathbb{R}^n$) montrer qu'on a

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}(u) = u_j + \alpha(x_n^u - d)z_n^{(j)} \tag{5}$$

où $z^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, $z^{(j)} = \begin{pmatrix} z_1^{(j)} \\ z_2^{(j)} \\ \dots \\ z_n^{(j)} \end{pmatrix}$ avec

$$z_{k+1}^{(j)} = az_k^{(j)} + b(e_j)_{k+1}, \quad k \in [[0, n-1]] \tag{6}$$

et

$$z_0^{(j)} = 0. \tag{7}$$

Nous voulons obtenir une expression plus simple pour $\frac{\partial f}{\partial u_j}(u)$ donc pour $\nabla f(u)$.

Pour cela considérons $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ arbitraire. On multiplie (6) par p_{k+1} et on fait la somme en k.

IIc) Montrer que nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^{(j)} p_k = a\sum_{k=1}^{n-1} z_k^{(j)} p_{k+1} + bp_j$$

et en déduire

$$z_n^{(j)} p_n = \cancel{a}\sum_{k=1}^{n-1} z_k^{(j)}(ap_{k+1} - p_k) + bp_j. \tag{8}$$

IId) On choisit p tel que ses composantes satisfont la relation de récurrence rétrograde :

$$\begin{cases} p_k &= ap_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \cdots 1 \\ p_n &= \alpha(x_n^u - d). \end{cases} \tag{9}$$

En utilisant (5) et (8) montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}(u) = u_j + bp_j, \quad \forall\, j \in [[1, n]]$$

c'est à dire

$$\nabla f(u) = u + bp$$

Le vecteur p s'appelle **variable adjointe** et le système (9) s'appelle **système adjoint.**

Partie III.

IIIa) Montrer que le point de minimum u^* de f satisfait le système d'optimalité suivant : il existe $x^*, p^* \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$x^*_{k+1} = ax^*_k + bu^*_{k+1}, \quad k = 0, 1, \cdots n-1 \tag{10}$$

$$x^*_0 = x_0 \tag{11}$$

$$p^*_k = ap^*_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \cdots 1 \tag{12}$$

$$p^*_n = \alpha(x^*_n - d) \tag{13}$$

$$u^* + bp^* = 0 \tag{14}$$

(ce système s'appelle **Principe de minimum de Pontryagin en version discrète**).

IIIb) Résoudre le système d'optimalité (10) - (14) pour trouver la solution u^*.

Indication : à l'aide de (14) exprimer u^* en fonction de p^* et le remplacer en (10). De (12) et (13) exprimer p en fonction de x^*_n et remplacer en (10).