TP3 :

L'aiguille de Buffon :

NDAO
Moth Yacine
3A MAM

Exercice 1 :

1) On a :

$$\mathbb{P}(D=1) = \mathbb{P}\left(x \leq \frac{a}{2}\cos\theta\right) + \mathbb{P}\left(X > L - \frac{a}{2}\cos\theta\right)$$

$$= 1 + \mathbb{P}\left(X \leq \frac{a}{2}\cos\theta\right) - \mathbb{P}\left(X \leq L - \frac{a}{2}\cos\theta\right)$$

$$= 1 + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\frac{a}{2}\cos\theta} \frac{1}{L\pi} 1\!\!1_{[0,L]} \times 1\!\!1_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\, dx\, d\theta - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{L-\frac{a}{2}\cos\theta} \frac{1}{L\pi} 1\!\!1_{[0,L]} \times 1\!\!1_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\, dx\, d\theta$$

$$= 1 + \frac{1}{L\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{a}{2}\cos\theta} dx\, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{L-\frac{a}{2}\cos\theta} dx\, d\theta\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{L\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{2}\cos\theta\, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(L - \frac{a}{2}\cos\theta\right) d\theta\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{L\pi}\left(\left[\frac{a}{2}\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} - \left[L\theta - \frac{a}{2}\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\right)$$

$$= 1 + \frac{a}{2L\pi} + \frac{a}{2L\pi} - \frac{\cancel{L\pi}}{\cancel{L\pi}\times 2} + \frac{a}{2L\pi} - \frac{\cancel{L\pi}}{\cancel{L\pi}\times 2} + \frac{a}{2L\pi}$$

$$= 1 + \frac{4a}{2L\pi} - 1 = \frac{2a}{L\pi}$$

d'où $\mathbb{P}(D=1) = \dfrac{2a}{L\pi}$

Exercice 2 :

1) Montrons que $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$:

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \varphi(u, v)$

$$= \left(\sqrt{2V}\cos(2\pi u), \sqrt{2V}\sin(2\pi u) \right)$$

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} -2\pi\sqrt{2V}\sin(2\pi u) & \dfrac{\sqrt{2}\cos(2\pi u)}{2\sqrt{V}} \\ 2\pi\sqrt{2V}\cos(2\pi u) & \dfrac{\sqrt{2}\sin(2\pi u)}{2\sqrt{V}} \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)\right) = \frac{-2\pi \times \cancel{2}\sqrt{V}}{\cancel{2}\sqrt{\cancel{2}V}}\left(\sin^2(2\pi u) + \cos^2(2\pi u)\right)$$

$$= -2\pi$$

D'autre part, ~~on a~~ cherchons φ^{-1} :

Pour cela, posons $\varphi(u, v) = (X_1, X_2)$

Alors on a : $\begin{cases} \sqrt{2V}\cos 2\pi u = X_1 \\ \sqrt{2V}\sin 2\pi u = X_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow X_1^2 + X_2^2 = 2V \Rightarrow V = \frac{X_1^2 + X_2^2}{2}$$

donc $\cos 2\pi u = \dfrac{X_1}{\sqrt{2V}} = \dfrac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}\right)$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{f_{U,V}\, \varphi^{-1}(x_1,x_2)}{|\det \operatorname{Jac} \varphi(u,v)|}$$

avec $\varphi^{-1}(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right), \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$

donc $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi} f_{U,V}\left(\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right), \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$

Or ~~U et sont~~ U et V sont indépendantes, donc

$$f_{U,V} = f_U \cdot f_V$$

$$U \sim \mathcal{U}([0,1]) \Rightarrow f_U = 1$$

$$V \sim \mathcal{E}(1) \Rightarrow f_V = e^{-v}$$

Ainsi, on a : $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{f_U\left(\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)\right)}_{=1} \cdot \underbrace{f_V\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)}_{=e^{-\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)}}$

$$\Rightarrow f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)}$$

d'où $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$

Exercice 3 :

$X=(U, V)$; $U \sim \Gamma(\alpha, \theta)$, $V \sim \Gamma(\beta, \theta)$

U et V indépendantes.

On pose $Y = \dfrac{U}{U+V}$ et $Z = U+V$.

1) Montrons que $f_Y(y) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(y)$.

On a : $U = Y(U+V)$ et $Z = U+V$

$\Leftrightarrow U = YZ$ et $V = Z-U = Z(1-Y)$

$f_{U,V} = f_U \cdot f_V$ car U et V indépendantes.

$$= \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\theta u} \cdot \frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)} v^{\beta-1} e^{-\theta v}$$

$$= \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} u^{\alpha-1} v^{\beta-1} e^{-\theta(u+v)}.$$

D'autre part, on a : $f_{Y,Z}(y,z) = f_{U,V}(u(y,z), v(y,z)) |J|$

avec $(U, V) = (YZ, Z(1-Y))$

$$\Rightarrow |J| = \det \begin{pmatrix} Z & Y \\ -Z & 1-Y \end{pmatrix} = Z - ZY + ZY = Z$$

$$f_{Y,Z}(y,z) = \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha-1} y^{\alpha-1} z^{\beta-1} (1-y)^{\beta-1} e^{-\theta z} \times z$$

$$= \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} z^{\alpha+\beta-1} (1-y)^{\beta-1} e^{-\theta z}$$

Or $f_Y(y) = \int_0^{+\infty} f_{Y,Z}(y,z)\, dz$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} z^{\alpha+\beta-1} (1-y)^{\beta-1} e^{-\theta z}\, dz$$

$$= \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{+\infty} \theta^{\alpha+\beta} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta z}\, dz$$

$$= \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \Gamma(\alpha+\beta) \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta z}\, dz}_{=1}$$

d'où $f_Y(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

2) Déterminons la loi de Z.

Transformée de Laplace : $\varphi_{U+V}(t) = \mathbb{E}\left(e^{-t(U+V)}\right)$

$$= \mathbb{E}\left(e^{-tU}\right)\mathbb{E}\left(e^{-tV}\right)$$ car U et V sont indépendant

Or $$\mathbb{E}\left(e^{-tU}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-tu} f_U(u)\,du$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-tu} \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\theta u}\,du$$

$$= \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u(t+\theta)}\,du$$

Posons $x = u(t+\theta)$. alors $dx = (t+\theta)\,du$

$$\mathbb{E}\left(e^{-tU}\right) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(t+\theta)^{\alpha-1}} e^{-x} \times \frac{1}{(t+\theta)}\,dx$$

$$= \frac{\theta^\alpha}{(t+\theta)^\alpha} \times \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$$

$$= \left(\frac{\theta}{t+\theta}\right)^{\alpha} \times \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha) = \left(\frac{\theta}{t+\theta}\right)^{\alpha}$$

de même, on a $$\mathbb{E}\left(e^{-tV}\right) = \left(\frac{\theta}{t+\theta}\right)^{\beta}$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_{U+V}(t) = \left(\frac{\theta}{t+\theta}\right)^{\alpha} \times \left(\frac{\theta}{t+\theta}\right)^{\beta}$$

$$= \left(\frac{\theta}{t+\theta}\right)^{\alpha+\beta}$$

d'où $Z \sim \Gamma(\alpha+\beta, \theta)$

3) Y et Z sont-elles indépendantes.

D'une part, on a : $f_{Y,Z}(y,z) = \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} z^{\alpha+\beta-1} (1-y)^{\beta-1} e^{-\theta z}$

d'autre part ; $f_Y(y) \cdot f_Z(z) = \frac{\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \times \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta z} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$

$$= \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta z} = f_{Y,Z}$$

d'où Y et Z sont indépendantes

Exercice 5 :

1) Montrons que $\mathbb{P}\left(U < \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{C}$

on a : $\mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{T}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{f(x)}{cg(x)}} f_U(u)\,du$ mais puisque $f(x) \leq cg(x)$, alors $\frac{f(x)}{cg(x)} \leq 1$

$= \int_0^{\frac{f(x)}{cg(x)}} f_U(u)\,du = \frac{f(x)}{cg(x)}$, Or $f(x) = g(x)$ quand $UT \geq 1$

d'où $\boxed{\mathbb{P}\left(U < \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{C}}$

2)

$$\mathbb{P}(X \in B \mid U \leq \tfrac{1}{T}) = \mathbb{P}\left(\frac{U \leq \frac{1}{T} \cap X \in B}{\mathbb{P}(U \leq \frac{1}{T})} \right)$$

$$= \frac{\cancel{\mathbb{P}(U < \frac{1}{T})}\, \mathbb{P}(X \in B)}{\cancel{\mathbb{P}(U < \frac{1}{T})}}$$ car X et U sont indépendantes

$$= \mathbb{P}(X \in B)$$

$$= \int_B f(x)\, dx$$

projet simulation aléatoire

January 1, 2024

Exercice 1: Réponse à la question2

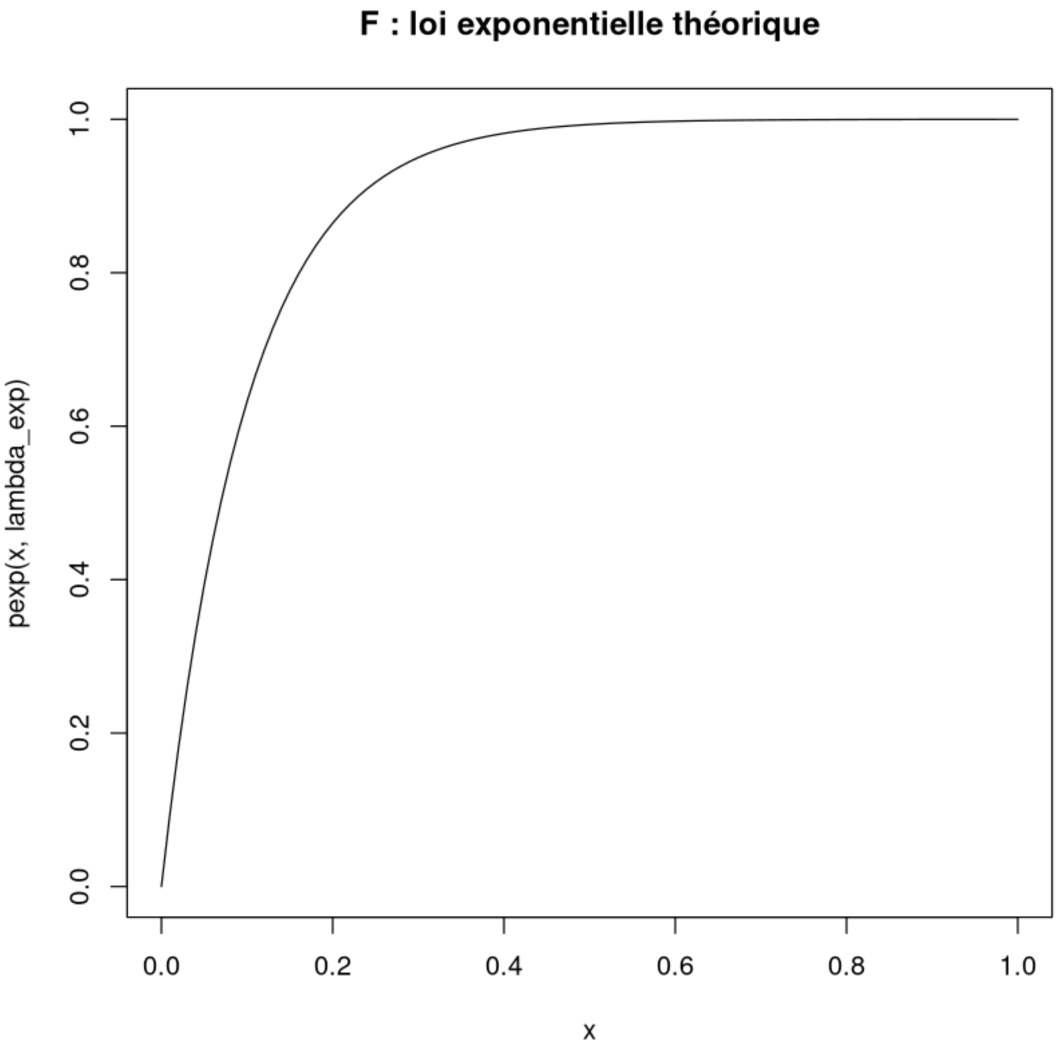
[14]:
```
# Initialisation des paramètres
L = 2 # largeur des lattes, L >= a > 0
a = 1 # longueur de l'aiguille, L > a > 0
p = (2 * a) / (pi * L) # p théorique
n = 100000
nb_p = 0   # On réalise n lois uniformes
tetas = runif(n) * pi - (pi / 2) # sur [-pi/2, pi/2]
Xs = runif(n) * L # sur [0, L]

# On calcule la proportion de valeurs dans [0, p[
for (i in 1:n) {
  # On définit X et teta
  teta = tetas[i]
  X = Xs[i]
  # On crée les bornes de nos intervalles
  V_1 = (a / 2) * cos(teta)
  V_2 = L - (a / 2) * cos(teta)
  if (!(X > V_1 && X < V_2)) {
    nb_p = nb_p + 1
  }
}

# On calcule alors une p approchée
p_a = nb_p / n

# Il nous reste plus qu'à résoudre l'équation et d'afficher pi
pi_a = (2 * a) / (p_a * L)

# Affichage des résultats
cat("p théorique :", p, "\n")
cat("p approchée :", p_a, "\n")
cat("pi théorique :", pi, "\n")  # Il semble y avoir une erreur ici, devrait
 ↪être pi au lieu de pi théorique
cat("pi approchée :", pi_a, "\n")
```

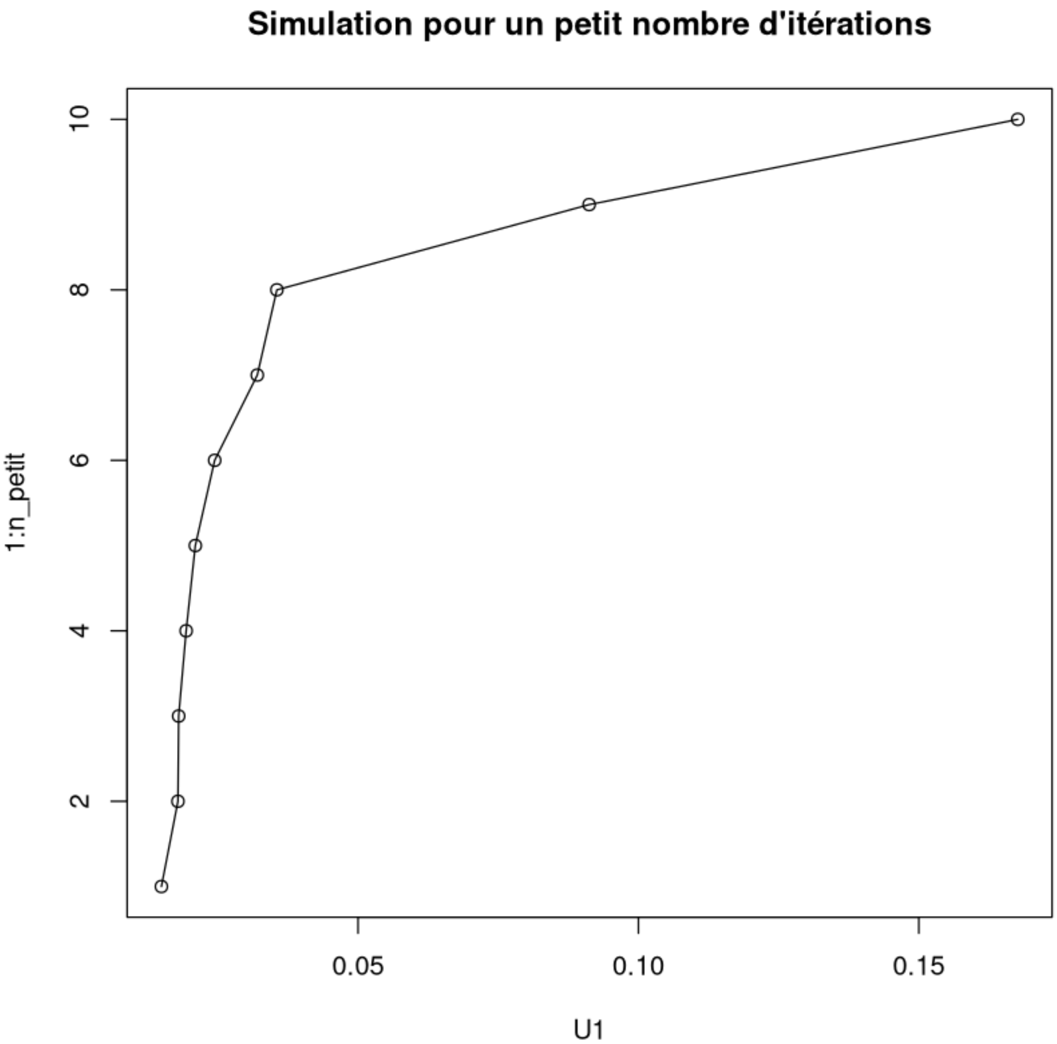
```
p théorique : 0.3183099
p approchée : 0.31741
```

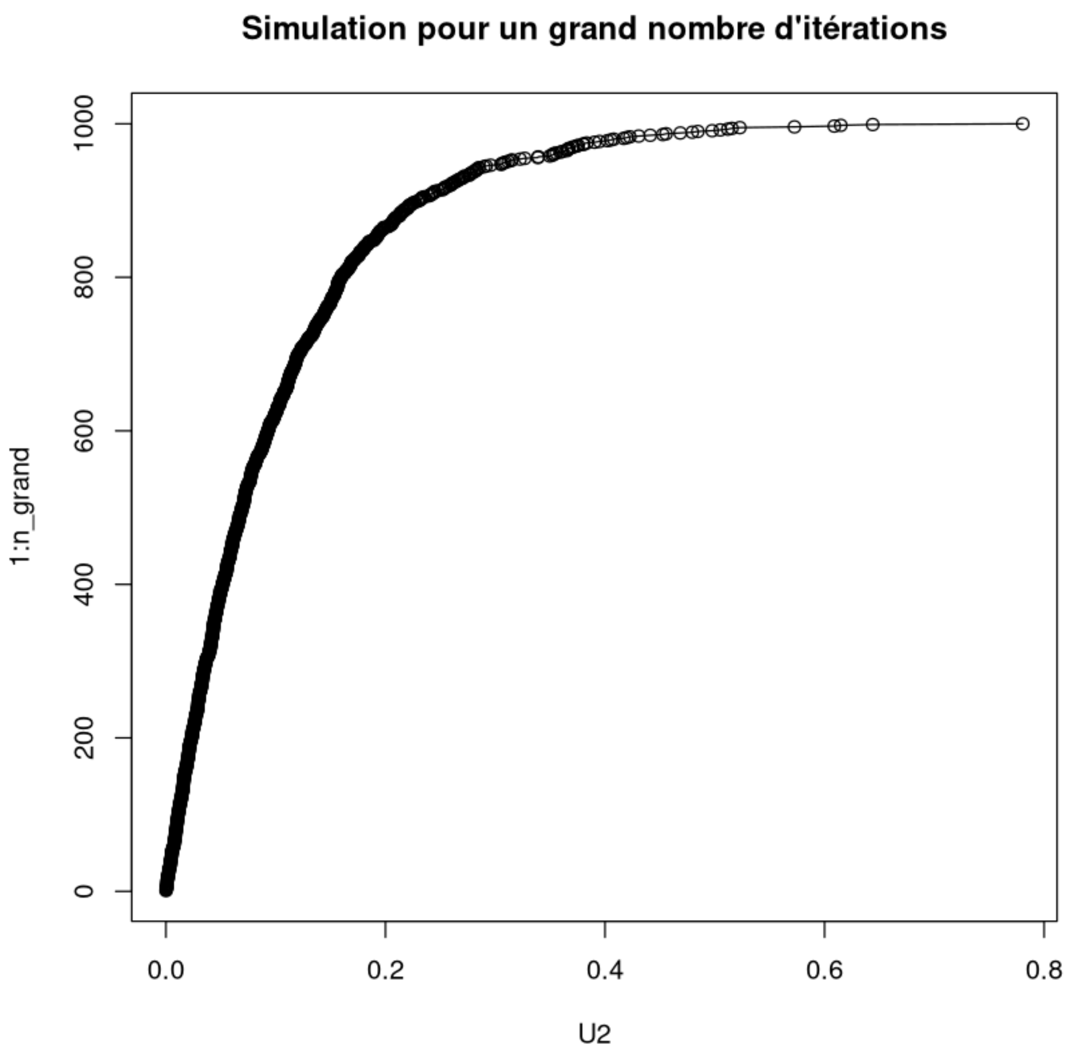
```
pi théorique : 3.141593
pi approchée : 3.150499
```

1) Simulation d'une loi exponentielle:

[4]:
```
# Paramètres et fonction d'inversion
n_petit <- 10
n_grand <- 1000
lambda_exp <- 10

F_inv_exp <- function(u, lambda_exp) {
  return(-(1 / lambda_exp) * log(1 - u))
}

# Simulation pour un petit nombre d'itérations
U1 <- sort(F_inv_exp(runif(n_petit), lambda_exp))

# Simulation pour un grand nombre d'itérations
U2 <- sort(F_inv_exp(runif(n_grand), lambda_exp))

# Tracé de la fonction de densité théorique
curve(pexp(x, lambda_exp), 0, 1, main = 'F : loi exponentielle théorique')

# Tracé des variables aléatoires générées pour n_petit
plot(U1, 1:n_petit, type = "o", main = "Simulation pour un petit nombre␣
 ↪d'itérations")

# Tracé des variables aléatoires générées pour n_grand
plot(U2, 1:n_grand, type = "o", main = "Simulation pour un grand nombre␣
 ↪d'itérations")

# Ajout de titres et légendes
par(mfrow = c(1, 3))
```


F : loi exponentielle théorique
pexp(x, lambda_exp)
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

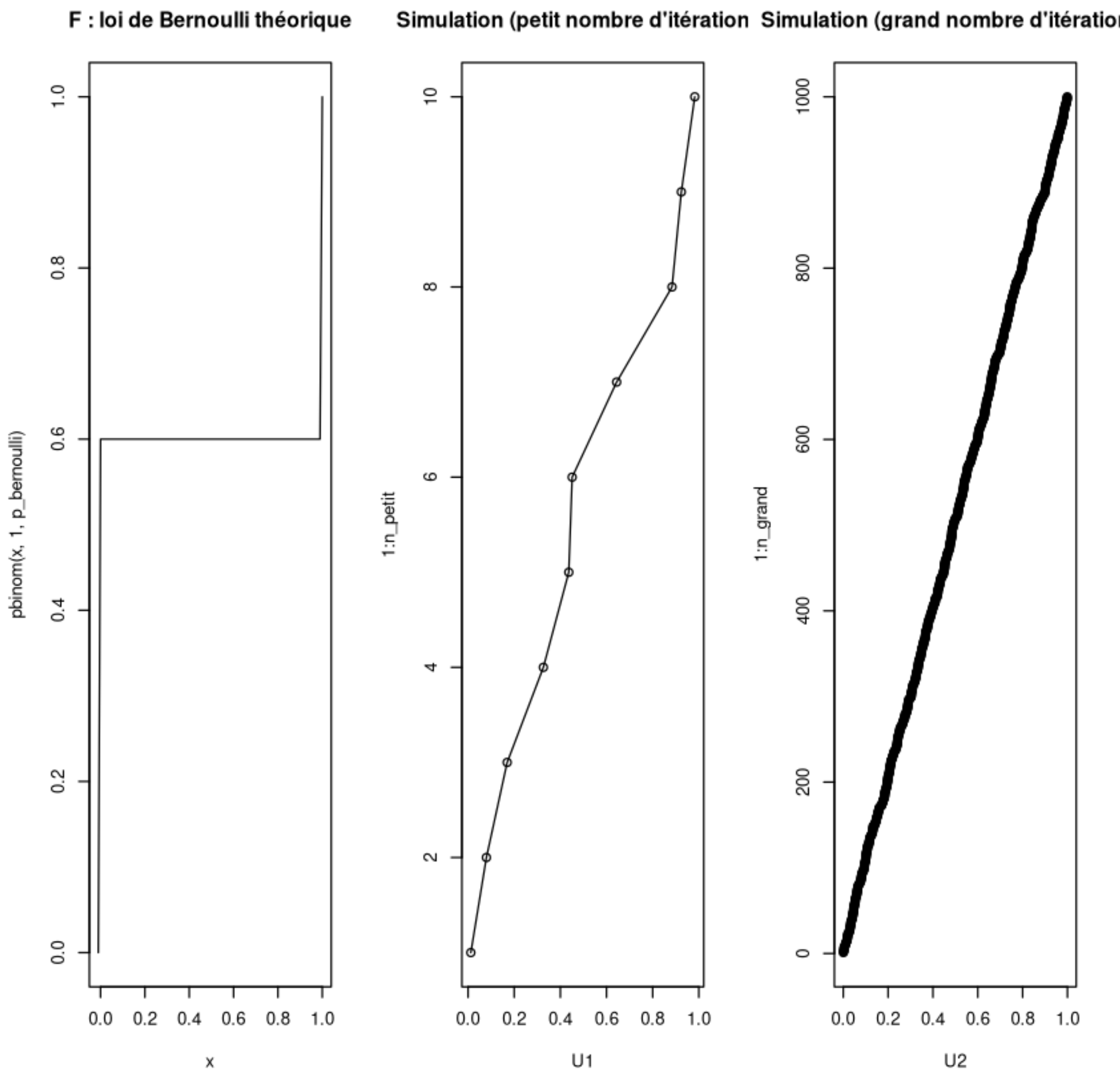

Simulation pour un petit nombre d'itérations
1:n_petit
2
4
6
8
10
0.05
0.10
0.15
U1



2) Simulation d'une loi de Bernoulli:

[7]:
```
# Nombre d'itérations pour la simulation
n_petit = 10
n_grand = 1000

# Paramètre de la loi de Bernoulli
p_bernoulli = 0.4

# Fonction d'inversion pour la loi de Bernoulli
F_inv_bernoulli = function(u, p_bernoulli) {
  return(ifelse(u < 1 - p_bernoulli, 0, 1))
}
```

```r
# Génération de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli pour un petit␣
↪nombre d'itérations
U1 = sort(runif(n_petit))
Bernoulli_simulated_petit = F_inv_bernoulli(U1, p_bernoulli)

# Génération de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli pour un grand␣
↪nombre d'itérations
U2 = sort(runif(n_grand))
Bernoulli_simulated_grand = F_inv_bernoulli(U2, p_bernoulli)

par(mfrow = c(1, 3))

# Tracé de la fonction de distribution cumulative théorique de la loi de␣
↪Bernoulli
curve(pbinom(x, 1, p_bernoulli), -0.01, 1, main = 'F : loi de Bernoulli␣
↪théorique')

# Tracé des variables aléatoires générées pour un petit nombre d'itérations
plot(x = U1, y = 1:n_petit, type = "o", main = "Simulation (petit nombre␣
↪d'itérations)")

# Tracé des variables aléatoires générées pour un grand nombre d'itérations
plot(x = U2, y = 1:n_grand, type = "o", main = "Simulation (grand nombre␣
↪d'itérations)")
```

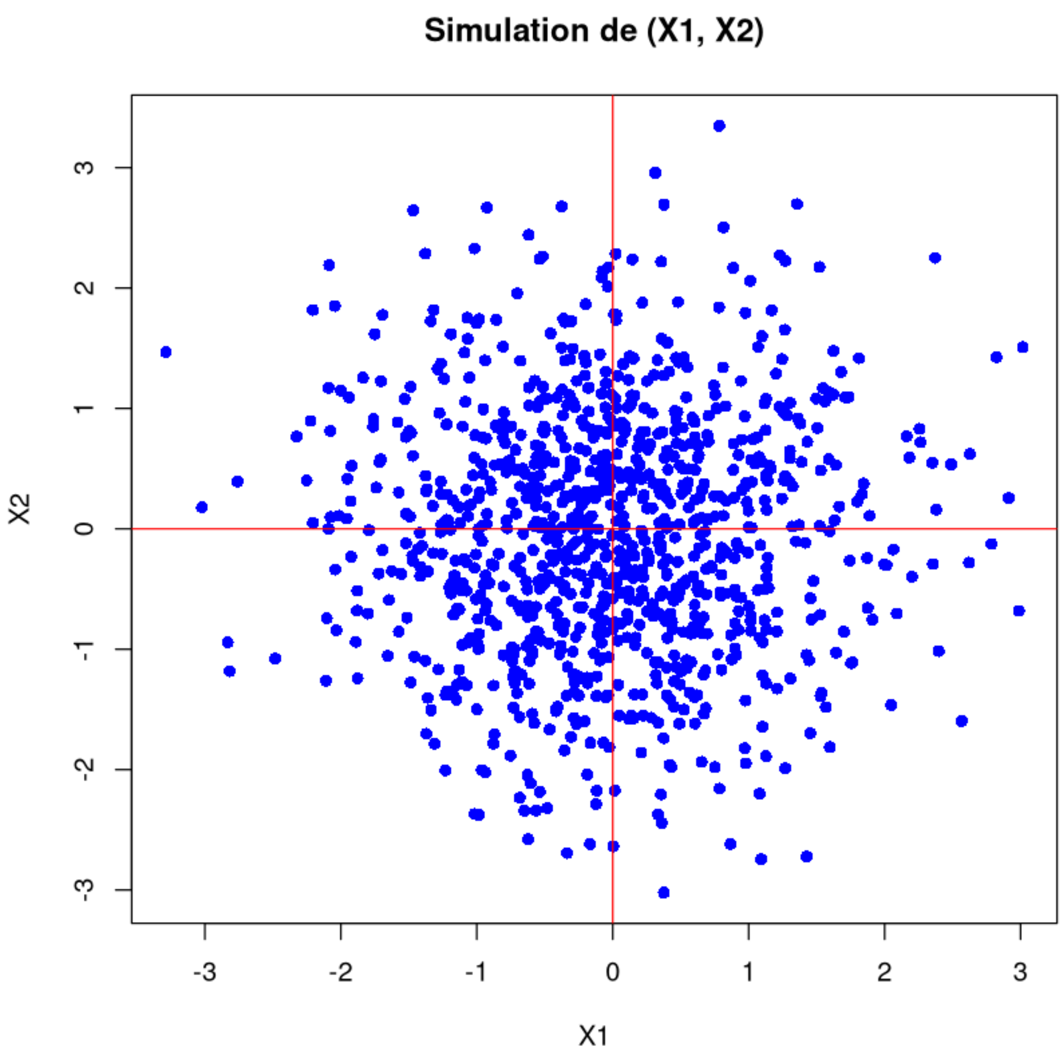


Exercice 2: Réponse à la question 2:

[9]:
```
# Nombre d'échantillons
n = 1000

# Simulation des variables U et V
U = runif(n, 0, 1)
V = rexp(n, 1)

# Transformation pour obtenir X1 et X2
X1 = sqrt(2 * V) * cos(2 * pi * U)
X2 = sqrt(2 * V) * sin(2 * pi * U)
```

```r
# Tracé des échantillons
plot(X1, X2, pch = 16, col = "blue", main = "Simulation de (X1, X2)")
abline(h = 0, v = 0, col = "red")

# Validation des moments caractéristiques
cov_matrix = cov(cbind(X1, X2))
cat("Matrice de covariance estimée :\n")
print(cov_matrix)
```

```
Matrice de covariance estimée :
            X1          X2
X1 0.931293472 0.004599612
X2 0.004599612 1.037383301
```



Exercice 4:

[11]:
```
# Nombre d'échantillons
n = 100000

# Génération de points aléatoires dans le carré C
X = runif(n, 0, 1)
Y = runif(n, 0, 1)

# Compteur pour les points dans le quart de disque D
points_in_D = sum(X^2 + Y^2 <= 1)

# Estimation de la probabilité que M appartienne à D
estimated_probability = points_in_D / n

# Estimation de
estimated_pi = estimated_probability * 4

# Affichage des résultats
cat("Estimation de  par la méthode de Monte-Carlo :", estimated_pi, "\n")
```

```
Estimation de  par la méthode de Monte-Carlo : 3.14248
```

Exercice 6:

[13]:
```
N <- 100000
abs <- numeric(N)
ord <- numeric(N)

for (i in 1:N) {
  repeat {
    u <- runif(1, -1, 1)
    v <- runif(1, 0, 1)
    y <- (2/pi) * sqrt(1 - u^2)

    if (v < y) {
      abs[i] <- u
      ord[i] <- v
      break
    }
  }
}

# Tracé des points acceptés
plot(abs, ord, cex = 0.2, main = "Méthode du rejet", xlab = "X", ylab =
 ↪"Densité")

# Tracé de la densité théorique
```

```
curve((2/pi) * sqrt(1 - x^2), from = -1, to = 1, add = TRUE, col = "red", lwd =
  2)
```