COMPUTER ΑΝΑΛΥΣΗ – ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΟΔΟΣ 2012

Θέμα 1. (30%) Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις εξηγώντας συνοπτικά την απάντησή σας. Είναι δυνατόν μια μηχανή Turing να διαβάσει από την ταινία ένα σύμβολο που δεν ανήκει στο αλφάβητο εισόδου; Είναι δυνατόν η μηχανή να βρεθεί περισσότερες από μια φορές στην κατάσταση q_0; Είναι δυνατόν η μηχανή να βρεθεί περισσότερες από μια φορές στην κατάσταση $q_{\text{ΟΧΙ}}$; Πότε είναι δυνατόν ένας διαγνώστης να εγκλωβίζεται; Είναι δυνατόν μια πολυταινιακή μηχανή Turing να μην μετακινήσει καμία από τις κεφαλές της στο ίδιο βήμα; Είναι δυνατόν η συνάρτηση μεταβάσεων μιας ανταιτιοκρατικής (μη ντετερμινιστικής) μηχανής Turing να έχει τις δυο μεταβάσεις $(q_2, \alpha) \to (q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, A)$ και $(q_2, \alpha) \to (q_{\text{ΟΧΙ}}, \sqcup, A)$ όπου q_2 κατάσταση της μηχανής και α σύμβολο του αλφαβήτου εισόδου της;

Θέμα 2. Δίνεται η μηχανή Turing M με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	0	1	$\sqcup$
q_0	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, 0, A)$	$(q_1, 1, \Delta)$	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, 0, A)$
q_1	$(q_0, 1, \Delta)$	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, 0, A)$	$(q_1, 0, \Delta)$

α. (10%) Είναι η M διαγνώστης;

β. (20%) Ποιά είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\{0, 1\}$ που αναγνωρίζει η M;

Θέμα 3. Δίνονται γλώσσες L_1 και L_2 που ορίζονται πάνω στο ίδιο αλφάβητο εισόδου Σ.

α. (20%) Αποδείξτε ότι αν οι L_1 και L_2 (σε κοινό αλφάβητο Σ) είναι αναγνωρίσιμες, τότε και η γλώσσα $L_1 \cup L_2$ είναι αναγνωρίσιμη.

β. (10%) Δώστε παράδειγμα αναγνωρίσιμων γλωσσών L_1 και L_2 έτσι ώστε η γλώσσα $\overline{L_1} \cap L_2$ να είναι μη αναγνωρίσιμη.

Θέμα 4. (30%) Δείξτε ότι η γλώσσα

$$L = \{\langle M, q\rangle : \text{η } M \text{ είναι TM και φτάνει στην κατάσταση } q \text{ ξεκινώντας με κενή είσοδο}\}$$

δεν είναι διαγνώσιμη. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε αναγωγή και οποιοδήποτε γνωστό αποτέλεσμα μη διαγνωσιμότητας σας βολεύει.

<u>Θέμα 1 Απάντηση</u>

1)**Ναι** διότι μπορεί να διαβάσει από την ταινία το σύμβολο του κενού το οποίο δεν ανήκει στο αλφάβητο εισόδου

2)**Ναι** διότι μπορεί να βρίσκεται στην κατάσταση q_0 και διαβάζοντας ένα χαρακτήρα να παραμένει στην q_0 βάσει κάποιου κανόνα

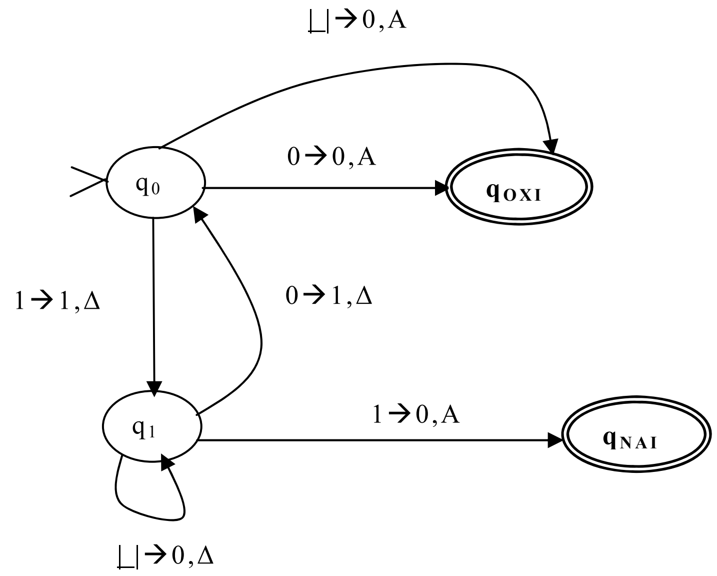
3)**Όχι** διότι η κατάσταση q_{OXI} είναι τερματική κατάσταση

4)**Ποτέ** διότι ένας (ντετερμινιστικός) διαγνώστης τερματίζει πάντα με οποιαδήποτε συμβολοσειρά εισόδου είτε στην κατάσταση αποδοχής (q_{NAI}) είτε στην κατάσταση απόρριψης (q_{OXI})

5)**Ναι** διότι μπορεί να υπάρχει κανόνας που να λέει ότι όταν διαβάσει ένα χαρακτήρα όλες οι κεφαλές να μείνουν στάσιμες στο βήμα αυτό.

6)**Ναι** διότι το χαρακτηριστικό μιας μη ντετερμινιστικής μηχανής Turing είναι ότι από μια κατάσταση με τον ίδιο χαρακτήρα μπορεί να εκτελεί διαφορετικές μεταβάσεις, άρα και οι 2 μεταβάσεις είναι εφικτές.

<u>Θέμα 2 Απάντηση</u>



α. Η μηχανή δεν είναι διαγνώστης διότι με είσοδο τη συμβολοσειρά 1 εγκλωβίζεται.
β. Η γλώσσα της μηχανής είναι: $1(01)^*1(0\cup1)^*$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Επειδή όταν η μηχανή φτάνει στην κατάσταση q_{NAI} η συμβολοσειρά εισόδου δεν έχει διαβαστεί εξολοκλήρου (αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι όταν φτάσει στην q_{NAI} δεν έχει διαβαστεί το κενό στην είσοδο) γιαυτό πρέπει στο τέλος της γλώσσας που περιγράφουμε με κανονική έκφραση να προσθέσουμε $(0\cup1)^*$

<u>Θέμα 3 Απάντηση</u>
α. Αφού η L_1 είναι αναγνωρίσιμη άρα υπάρχει ΜΤ M_1 που την αναγνωρίζει . Αφού η L_2 είναι αναγνωρίσιμη άρα υπάρχει ΜΤ M_2 που την αναγνωρίζει. Θα κατασκευάσουμε ΜΤ Μ′ που θα αναγνωρίζει τη γλώσσα $L_1\cup L_2$

Μ′=″Με είσοδο w
1. Τρέξε παράλληλα τις M_1 και M_2.
2. Αν αποδεχτεί είτε η M_1 είτε η M_2 τότε ΑΠΟΔΕΞΟΥ″

Παρατήρηση. Αν έδινε διαγνώσιμες γλώσσες L_1 και L_2 και ζητούσε απόδειξη ως προς την ένωση τότε η απόδειξη θα ήταν:
α. Αφού η L1 είναι διαγνώσιμη άρα υπάρχει ΜΤ Μ1 που διαγιγνώσκει τη γλώσσα L1, Αφού η L2 είναι διαγνώσιμη άρα υπάρχει ΜΤ Μ2 που διαγιγνώσκει τη γλώσσα L2. Θα κατασκευάσουμε ΜΤ Μ′ που διαγιγνώσκει τη γλώσσα L1∪L2

Μ′=″Με είσοδο w
1. Τρέξε τη Μ1 με είσοδο w. Αν αποδεχτεί τότε ΑΠΟΔΕΞΟΥ
2. Τρέξε τη Μ2 με είσοδο w. Αν αποδεχτεί τότε ΑΠΟΔΕΞΟΥ, αλλιώς ΑΠΕΡΡΙΨΕ″

β.
1. Ως γλώσσα L_1 θεωρούμε την $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$. Η γλώσσα αυτή είναι αναγνωρίσιμη.

2. Ως γλώσσα L_2 θεωρούμε την Σ^* . Η γλώσσα αυτή είναι αναγνωρίσιμη

3. Η γλώσσα $\overline{L_1}\cap L_2=\overline{ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}}\cap\Sigma^*=\overline{ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}}$. Όμως η γλώσσα $\overline{ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}}$ είναι μη αναγνωρίσιμη

Παρατήρηση
✓ Η Κλάση των Διαγνώσιμων Γλωσσών είναι κλειστή ως προς την ένωση, την τομή, το συμπλήρωμα και τη συναρμογή

✓ Η Κλάση των Αναγνωρίσιμων Γλωσσών είναι κλειστή ως προς την ένωση, την τομή και τη συναρμογή αλλά δεν είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα.

<u>Θέμα 4 Απάντηση</u>
Υποθέτουμε ότι η γλώσσα L είναι διαγνώσιμη, άρα ∃ διαγνώστης R γιαυτή. Θα κάνουμε αναγωγή από την $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$ στην L. Κατασκευάζουμε ΤΜ S:

S=″Με είσοδο <M,w> όπου M TM και w συμβολοσειρά

1. Κατασκεύασε μια νέα TM M′
   a. Με είσοδο z
   b. Αν z≠″″ απέρριψε
   c. Αν z=″″ προσομοίωσε τη M με είσοδο w. Αν η M αποδεχτεί το w τότε φτάσε στην q_{NAI} αλλιώς εγκλωβίσου (αυτό το βήμα είναι η αναγωγή)
2. Τρέξε την R με είσοδο <M′, q_{NAI}>
3. Αν αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ
4. Αν απορρίψει ΑΠΕΡΡΙΨΕ″

Η MT S που κατασκευάσαμε είναι διαγνώστης της γλώσσας $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι η $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη, άρα και η L είναι μη διαγνώσιμη

Παρατήρηση 1-Συμπεράσματα Αναγωγής

Αν A≤B και B διαγνώσιμη⇒A διαγνώσιμη
Αν A≤B και A μη διαγνώσιμη⇒B μη διαγνώσιμη
Αν A≤B και B αναγνωρίσιμη⇒A αναγνωρίσιμη
Αν A≤B και A μη αναγνωρίσιμη ⇒B μη αναγνωρίσιμη
Αν A≤B τότε $\overline{A} \leq \overline{B}$

Παρατήρηση 2

Όταν ζητείται αναγωγή σε μια γλώσσα L διαβάζουμε τον ορισμό της γλώσσας L και αν περιέχει τη λέξη τερματίζει τότε κάνουμε αναγωγή από τη γλώσσα $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$≤L, ενώ αν δεν περιέχει τη λέξη τερματίζει τότε κάνουμε αναγωγή από τη γλώσσα $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$≤L,

<u>Παρατήρηση 3-Πιθανές Ερωτήσεις</u>

1)Μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη αν και μόνο αν υπάρχει πολυταινιακή μηχανή Turing που να την αναγνωρίζει→Σωστό διότι κάθε αναγνωρίσιμη γλώσσα αναγνωρίζεται από κάποια μονοταινιακή μηχανή Turing που αποτελεί ειδική περίπτωση πολυταινιακής μηχανής Turing

2)Για κάθε αιτιοκρατική (ντετερμινιστική) μηχανή Turing υπάρχει ισοδύναμη αντιαιτιοκρατική (μη ντετερμινιστική)→Λάθος ισχύει ακριβώς το αντίθετο δηλαδή για κάθε αντιαιτιοκρατική μηχανή Turing υπάρχει ισοδύναμη αιτιοκρατική

3)Μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη ή διαγνώσιμη αντίστοιχα αν και μόνο αν υπάρχει αιτιοκρατική μηχανή Turing που την αναγνωρίσει ή τη διαγιγνώσκει αντίστοιχα→Λάθος πρέπει να υπάρχει αντιαιτιοκρατική μηχανή Turing που την αναγνωρίσει ή τη διαγιγνώσκει

4)Οι αναγνωρίσιμες γλώσσες είναι κλειστές ως προς το συμπλήρωμα→Λάθος

5)Μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing αποδέχεται την είσοδο της όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που να οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής→Σωστό

6)Μια ντετερμινιστική μηχανή Turing αποδέχεται την είσοδο της όταν υπάρχει ακολουθία φάσεων c1,c2,…ck που να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- Η c_1 είναι η εναρκτήρια φάση της M με είσοδο w
- Κάθε c_i αποδίδει την c_{i+1}
- Η φάση c_k είναι αποδεκτική

7)Η ταινία της μηχανής Turing έχει πεπερασμένο μήκος→Λάθος έχει άπειρο μήκος

8)Οι ειδικές καταστάσεις αποδοχής και τερματισμού προκαλούν τον άμεσο τερματισμό του υπολογισμού→Σωστό

9)Σε μια αντιαιτιοκρατική MT οι μεταβάσεις q_0→ q_{NAI},0,A και q_0→ q_2,0,Δ είναι εφικτές

ΙΟΥΝΙΟΣ 2012

α. (20%) Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις εξηγώντας συνοπτικά την απάντησή σας. Είναι δυνατόν μια μηχανή Turing να διαβάσει από την ταινία ένα σύμβολο που δεν ανήκει στο αλφάβητο εισόδου; Είναι δυνατόν η μηχανή να βρεθεί περισσότερες από μια φορές στην (αρχική) κατάσταση q_0; Πότε είναι δυνατόν ένας διαγνώστης να εγκλωβίζεται; Είναι δυνατόν να ισχύουν ταυτόχρονα οι προτάσεις $P \neq NP$ και ΚΛΙΚΑ $\in P$;

β. (15%) Αποδείξτε ότι αν οι γλώσσες L και $\overline{L}$ είναι αναγνωρίσιμες, τότε είναι και διαγνώσιμες.

γ. (10%) Είναι οι παρακάτω δύο προτάσεις ισοδύναμες;

- Υπάρχει απαριθμητής που απαριθμεί τη γλώσσα L.
- Υπάρχει μη ντετερμινιστική (ανταιτιοκρατική) TM που αναγνωρίζει τη γλώσσα L.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

Θέμα 2. (20%) Δίνεται η μηχανή Turing M με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μετάβασ[ης] που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	a	$\sqcup$
q_0	(q_1, a, Δ)	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, A)$
q_1	(q_2, a, Δ)	(q_1, a, A)
q_2	(q_0, a, Δ)	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, \sqcup, \Delta)$

Ποιά είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\{a\}$ που αναγνωρίζει η M;

Θέμα 3. (20%) Δώστε ορισμούς για τις γλώσσες ΑΠΟΔΟΧΗ/TM και ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM. Είναι [η] γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/TM απεικονιστικά αναγώγιμη στην ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM;

Θέμα 4. (20%) Δείξτε ότι η γλώσσα

$$L = \{\langle M, w\rangle : \text{η } M \text{ είναι TM και τερματίζει απορρίπτοντας με είσοδο } w\}$$

δεν είναι διαγνώσιμη. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε αναγωγή και οποιοδήποτε γνωστό αποτέλεσ[μα] μη διαγνωσιμότητας σας βολεύει.

Θέμα 5. (20%) Το πρόβλημα ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΣΥΝΟΛΟ ΜΑΥΡΩΝ ΚΟΜΒΩΝ (ΚΣΜΚ) ορίζεται ως ε[ξής]:

Δίνεται γράφημα στο οποίο κάποιοι από τους κόμβους είναι μαύροι και οι υπόλοιποι άσπροι και ένας ακέραιος K. Υπάρχει σύνολο S με K μαύρους κόμβους τέτοιο ώστε κάθε άσπρος κόμβος του γραφήματος να είναι γειτονικός με τουλάχιστον έναν μαύρο κόμβο του S;

Δείξτε ότι το πρόβλημα ΚΣΜΚ είναι NP-πλήρες. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε (απεικονιστ[ική]) αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου και οποιοδήποτε γνωστό αποτέλεσμα NP-πληρότητας σας βολ[εύει].

Θέμα 1 –Απάντηση

α.

1)**Ναι διότι μπορεί να διαβάσει από την ταινία το σύμβολο του κενού το οποίο δεν ανήκει στο αλφάβητο εισόδου αλλά ανήκει στο αλφάβητο ταινίας**

2)Ναι διότι μπορεί να βρίσκεται στην κατάσταση q_0 και διαβάζοντας ένα χαρακτήρα από την ταινία να παραμείνει στην ίδια κατάσταση q_0 εκτός και αν είναι τερματική

3)Ποτέ διότι ένας διαγνώστης τερματίζει πάντα

4)
- Η ΚΛΙΚΑ είναι NP-πλήρες πρόβλημα. Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε άλλο NP-πλήρες πρόβλημα ανάγεται στην ΚΛΙΚΑ σε χρόνο πολυωνυμικό.
- Αν ΚΛΙΚΑ ε P μπορεί να λυθεί σε χρόνο πολυωνυμικό. Άρα οποιοδήποτε πρόβλημα από την κλάση NP μπορεί να λυθεί επίσης σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως δεν γίνεται η ΚΛΙΚΑ ε P και $P \neq NP$.

Παρατηρήσεις σχετικά με P και NP

- ✓ P=Σύνολο (Κλάση) γλωσσών που λύνονται σε χρόνο πολυωνυμικό
- ✓ NP= Σύνολο (Κλάση) γλωσσών που λύνονται σε χρόνο εκθετικό και επαληθεύονται σε χρόνο πολυωνυμικό
- ➢ Η ΚΛΙΚΑ είναι ένας πλήρης συνδεδεμένος υπογράφος
- ➢ Το ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ είναι το συμπλήρωμα της κλίκας δηλ. ένας πλήρης υπογράφος που όλες οι κορυφές του δεν συνδέονται με ακμή
- ➢ Το ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ είναι ένα σύνολο κορυφών στις οποίες καταλήγουν όλες οι ακμές ενός γραφήματος.
- ➢ Το 3-SAT είναι ένα σύνολο λογικών τύπων που αποτελείται από όρους και σε κάθε όρο βρίσκονται ακριβώς 3 λογικές μεταβλητές γραμμένες σε ΣΚΜ
- ✓ Το πρόβλημα εντοπισμού κλίκας σε ένα γράφημα είναι πρόβλημα NP-πλήρες.
- ✓ Μια γλώσσα B είναι NP-πλήρης αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες;
  - o Η γλώσσα B ανήκει στην κλάση NP
  - o Μια γνωστή γλώσσα A που NP-πλήρης ανάγεται στη γλώσσα B σε χρόνο πολυωνυμικό
- ✓ Εάν η B είναι γλώσσα NP-πλήρης και $B \in P$ τότε P=NP
- ✓ Μια γλώσσα ανήκει στην κλάση NP αν και μόνο αν υπάρχει MT αντιαιτιοκρατικού πολυωνυμικού χρόνου που τη διαγιγνώσκει
- ✓ NP είναι η κλάση όλων των γλωσσών που δέχονται επαληθευτή πολυωνυμικού χρόνου
- ✓ P είναι η κλάση όλων των γλωσσών που μπορούν να διαγνωστούν σε χρόνο πολυωνυμικό από κάποια αιτιοκρατική μονοταινιακή μηχανή Turing
- ✓ Αν $A \leq_P B$ και $B \in P$ τότε $A \in P$
- ✓ Αν η γλώσσα B είναι NP-πλήρης και η $C \in NP$ και $B \leq_P C$ και $B \in P$ τότε και η C είναι NP-πλήρης

β.

Θα δείξουμε ότι αν η L είναι αναγνωρίσιμη και η $\overline{L}$ είναι αναγνωρίσιμη τότε η L είναι διαγνώσιμη. Αφού η L είναι αναγνωρίσιμη άρα $\exists$ TM M_1 που την αναγνωρίζει. Ομοίως αφού η $\overline{L}$ είναι αναγνωρίσιμη $\exists$ TM M_2 που την αναγνωρίζει. Κατασκευάζουμε TM M ως εξής:

M=″Με είσοδο w όπου w συμβολοσειρά

1. Εκτελούμε ταυτόχρονα (παράλληλα) τις M_1 και M_2.
2. Αν η M_1 αποδέχεται w τότε ΑΠΟΔΕΧΟΜΑΣΤΕ, ενώ αν η M_2 αποδέχεται w ΑΠΟΡΡΙΠΤΟΥΜΕ″

Η M είναι διαγνώστης της L διότι:

- ✓ Αν η M_1 αποδέχεται w τότε $w \in L$ άρα η M αποδέχεται την L
- ✓ Αν η M_2 αποδέχεται w τότε $w \notin L$ άρα η M απορρίπτει την L

Αφού η L είναι διαγνώσιμη τότε και η $\overline{L}$ είναι διαγνώσιμη λόγω κλειστότητας των διαγνώσιμων γλωσσών ως προς το συμπλήρωμα.

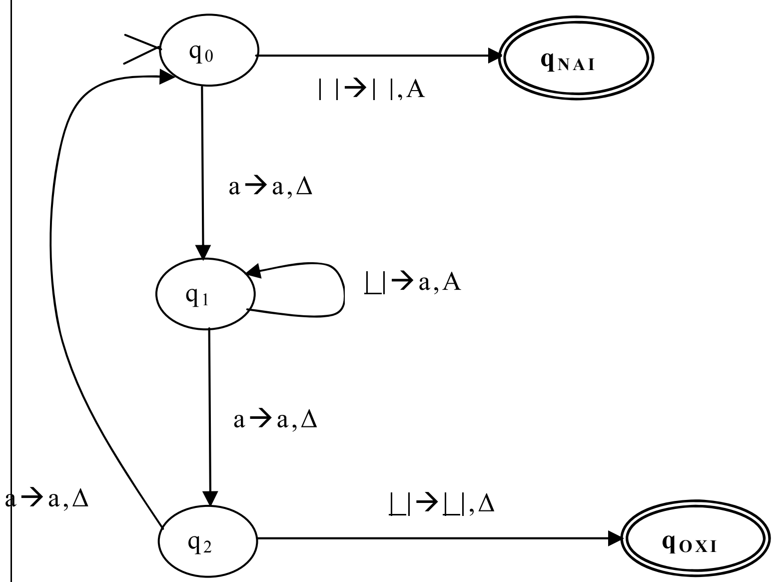
γ.

- ✓ Όταν μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη τότε υπάρχει μη ντετερμινιστική (αντιαιτιοκρατική) ΜΤ που την αναγνωρίζει
- ✓ Όταν μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη τότε υπάρχει απαριθμητής που απαριθμεί τη γλώσσα
- ✓ Άρα οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες

Παρατήρηση

- ✓ Η Κλάση των Διαγνώσιμων Γλωσσών είναι κλειστή ως προς την ένωση, την τομή, το συμπλήρωμα και τη συναρμογή
- ✓ Η Κλάση των Αναγνωρίσιμων Γλωσσών είναι κλειστή ως προς την ένωση, την τομή και τη συναρμογή δεν είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα.

<u>Θέμα 2 Απάντηση</u>



α. Η γλώσσα είναι $a(aaa)^{*}\cup(aaa)^{*}$ ή $(a\cup\varepsilon)^{*}\cup(aaa)^{*}$

Παρατήρηση
Η συγκεκριμένη μηχανή είναι διαγνώστης ΔΙΟΤΙ ΤΕΡΜΑΤΙΖΕΙ ΓΙΑ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΥΜΒΟΛΟΣΕΙΡΑ.

<u>Θέμα 3 –Απάντηση</u>

α.

ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}={<M,w>|η Μ είναι μια ΤΜ που αποδέχεται τη λέξη w}

ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM}={<M>|η Μ είναι ΤΜ και L(M)=∅}

Παρατήρηση
Επιπλέον είναι βασικές οι γλώσσες:

- ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}={<M,w>|η Μ είναι μια ΤΜ που τερματίζει με είσοδο w}
- ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ_{TM}={<M_1,M_2>|οι M_1 και M_2 είναι ΤΜ και $L(M_1)=L(M_2)$}

β. Έστω ότι η ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM} ανάγεται στην ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM} δηλ έστω ότι ισχύει: $\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM} \leq_m \text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}$, Από τις ιδιότητες της αναγωγής θα ισχύει ότι $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}} \leq_m \overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}}$. Γνωρίζουμε ότι η γλώσσα $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}}$ είναι μη αναγνωρίσιμη, άρα τότε και η γλώσσα $\overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}}$ θα είναι επίσης μη αναγνωρίσιμη. Αυτό είναι άτοπο διότι η γλώσσα $\overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}}$ είναι αναγνωρίσιμη.

Παρατήρηση

Μια γλώσσα A είναι απεικονιστικά αναγώγιμη σε μια γλώσσα B (δηλ. $A \leq_m B$) αν υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ έτσι ώστε για κάθε w: $w \in A \Leftrightarrow f(w) \varepsilon B$. Η συνάρτηση f ονομάζεται αναγωγή της A στη B.

<u>Θέμα 4 –Απάντηση</u>

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα L είναι διαγνώσιμη, άρα ∃ διαγνώστης R γιαυτή. Θα κάνουμε αναγωγή από την $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$ στην L. Κατασκευάζουμε TM S:

S=″Με είσοδο <M, w> όπου w συμβολοσειρά και M TM

1. Κατασκευάζουμε μια TM M′
    a. Με είσοδο x
    b. Αν x≠w απέρριψε
    c. Αν x=w προσομοίωσε τη M με είσοδο w. Αν η M τερματίζει με είσοδο w τότε τερμάτισε απορρίπτοντας την είσοδο w αλλιώς εγκλωβίσου
2. Τρέξε την R με είσοδο < M′,w>
3. Αν αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ
4. Αν απορρίψει ΑΠΕΡΡΙΨΕ″

Η MT S που κατασκευάσαμε είναι διαγνώστης της γλώσσας $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι η $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη άρα και η L είναι μη διαγνώσιμη

<u>Θέμα 5 –Απάντηση</u>

Θέλουμε να δείξουμε ότι το πρόβλημα ΚΣΜΚ είναι NP-πλήρες. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να αποδείξουμε 2 ιδιότητες:

- Το πρόβλημα ΚΣΜΚ ανήκει στην κλάση NP
- Κάποιο άλλο γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα μπορεί να αναχθεί στο ΚΣΜΚ σε χρόνο πολυωνυμικό

Α Συνθήκη: ΚΣΜΚ ∈ NP

Κατασκευάζουμε μια μηχανή Turing V η οποία επαληθεύει το πρόβλημα σε χρόνο πολυωνυμικό ως εξής:

- V=”Με είσοδο <(G(V, E), S,K) όπου G γράφημα, V σύνολο των κορυφών του G και E σύνολο των ακμών του κG και S ένα σύνολο μαύρων κόμβων μεγέθους K
- 1 Εξετάζουμε αν ο αριθμός K<|V| όπου |V| το πλήθος κορυφών του G. Αν ναι συνεχίζουμε αλλιώς απορρίπτουμε
- 2. Εξετάζουμε αν οι K κόμβοι του συνόλου S αποτελούν κόμβους του γραφήματος G. Αν ναι συνεχίζουμε αλλιώς απορρίπτουμε
- 3. Εξετάζουμε τοποθετώντας στο γράφημα G τους κόμβους του S, αν κάθε άσπρος κόμβος του γραφήματος G είναι γειτονικός με τουλάχιστον ένα μαύρο κόμβο του συνόλου S. Αν ναι ΑΠΟΔΕΧΟΜΑΣΤΕ αλλιώς απορρίπτουμε”

Βήμα 1➔Κόστος O(1)

Βήμα 2➔Κόστος O(|V|)

Βήμα 3➔Κόστος $O(|V|^2)$

Συνολικό κόστος $O(|V|^2)$. Συνεπώς η MT V επαληθεύει το πρόβλημα ΚΣΜΚ σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το πλήθος των κορυφών του γραφήματος άρα το ΚΣΜΚ ∈NP.

Β Συνθήκη: ΚΛΙΚΑ≤ΚΣΜΚ

Θα κάνουμε αναγωγή από ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα και συγκεκριμένα από το πρόβλημα της ΚΛΙΚΑΣ στο πρόβλημα του ΚΣΜΚ. Για να κάνουμε αυτή την αναγωγή πρώτα να κατασκευάσουμε ένα στιγμιότυπο του ΚΣΜΚ από ένα στιγμιότυπο της ΚΛΙΚΑΣ.. Ξεκινάμε από ένα γράφημα G που έχει κλίκα μεγέθους K, χρωματίζουμε μαύρους όλους τους κόμβους της ΚΛΙΚΑΣ και μετά συνδέουμε με ακμές κάθε άσπρη κορυφή του γραφήματος με ένα τουλάχιστο κόμβο της ΚΛΙΚΑΣ. Άρα το καινούργιο γράφημα G’ που προκύπτει έχει ΚΣΜΚ.

Στη συνέχεια θα δείξουμε την ισοδυναμία:

Το γράφημα G έχει ΚΛΙΚΑ μεγέθους K⇔ το γράφημα G′ έχει ΚΣΜΚ μεγέθους K

Β1) Ευθύ

Έστω ότι το γράφημα G έχει κλίκα μεγέθους K. Από τον τρόπο που κατασκευάσαμε το γράφημα G’ είναι προφανές ότι αυτό περιέχει ΚΣΜΚ μεγέθους K.

Β2)Αντίστροφο

Έστω ότι το γράφημα G′ έχει ΚΣΜΚ μεγέθους K. Συνδέουμε όλους τους μαύρους κόμβους του G′ ανά δύο μεταξύ τους ώστε να σχηματιστεί ΚΛΙΚΑ μεγέθους K. Το γράφημα G που προκύπτει περιέχει ΚΛΙΚΑ.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2012

α. (25%) Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις εξηγώντας συνοπτικά την απάντησή σας. Είναι δυνατόν μια μηχανή Turing να διαβάσει από την ταινία ένα σύμβολο που δεν ανήκει στο αλφάβητο ταινίας; Είναι δυνατόν η μηχανή να βρεθεί περισσότερες από μια φορές στην (αρχική) κατάσταση q_0; Είναι δυνατόν η μηχανή να μην φθάνει ποτέ (δηλ., για καμία συμβολοσειρά εισόδου) στην κατάσταση αποδοχής; Υπάρχουν πεπερασμένες γλώσσες που είναι μη διαγνώσιμες; Είναι δυνατόν να ισχύουν ταυτόχρονα οι προτάσεις $P \neq NP$ και ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ $\in P$;

β. (15%) Δώστε τους ορισμούς των γλωσσών ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM, ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM, ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM

γ. (15%) Δίνεται αναγνωρίσιμη αλλά μη διαγνώσιμη γλώσσα L. Δείξτε ότι η γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/TM δεν είναι απεικονιστικά αναγώγιμη στην $\overline{L}$.

Θέμα 2. Δίνεται η μηχανή Turing M με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων πο[υ] δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	a	$\sqcup$
q_0	(q_1, a, Δ)	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, \sqcup, A)$
q_1	(q_2, a, Δ)	(q_1, a, A)
q_2	(q_3, a, Δ)	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, A)$
q_3	(q_0, a, Δ)	(q_3, a, A)

α. (10%) Είναι η M διαγνώστης; Τεκμηριώστε την απάντησή σας.

β. (15%) Ποιά είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\{a\}$ που αναγνωρίζει η M;

Υπόδειξη: Εξετάστε πώς δουλεύει η TM για συμβολοσειρές μήκους $4k$, $4k+1$, $4k+2$, και $4k+3$, όπου k μη αρνητικός ακέραιος.

Θέμα 3. (20%) Δείξτε ότι η γλώσσα

$$L = \{\langle M \rangle : \text{η } M \text{ είναι TM και αποδέχεται κάθε συμβολοσειρά εισόδου}\}$$

δεν είναι διαγνώσιμη. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε αναγωγή και οποιοδήποτε γνωστό αποτέλεσμα μη διαγνωσιμότητας σας βολεύει.

Θέμα 4. (20%) Το πρόβλημα 3SAT-7 ορίζεται ως εξής:

Δίνεται λογικός τύπος ϕ σε συζευκτική κανονική μορφή, με κάθε φράση του να περιέχει τρία λεξιγράμματα. Υπάρχουν τουλάχιστον επτά διαφορετικές αναθέσεις λογικών τιμών στις μεταβλητές που ικανοποιούν τον ϕ.

Δείξτε ότι το πρόβλημα 3SAT-7 είναι NP-πλήρες. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε (απεικονιστική) αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου και οποιοδήποτε γνωστό αποτέλεσμα NP-πληρότητας σας βολεύει.

Θέμα 1 –Απάντηση

α.

1)Όχι διότι από την ταινία διαβάζει αποκλειστικά σύμβολα που ανήκουν στο αλφάβητο της π.χ. διαβάζει τον κενό χαρακτήρα

2)Ναι διότι να βρίσκεται στην κατάσταση q_0 και διαβάζοντας ένα χαρακτήρα από την ταινία να παραμένει στην ίδια κατάσταση q_0 ή μπορεί να βρίσκεται σε κάποια άλλη κατάσταση και διαβάζοντας ένα χαρακτήρα από την ταινία να επιστρέψει στην κατάσταση q_0

3)Ναι είναι δυνατόν μια TM να εγκλωβίζεται για όλες τις συμβολοσειρές εισόδου

4)Όχι γιατί μπορούμε για μια πεπερασμένη γλώσσα να κατασκευάσουμε μια TM που να διαγιγνώσκει όλες τις συμβολοσειρές της

5)Επειδή το πρόβλημα ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ είναι NP-πλήρες οποιοδήποτε NP-πλήρες πρόβλημα ανάγεται στο ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ σε χρόνο πολυωνυμικό. Αν ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ $\in$ P τότε οποιοδήποτε άλλο πρόβλημα από την κλάση NP λύνεται επίσης σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως δεν γίνεται το ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ ε P και P≠NP.

Παρατήρηση

ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ είναι ένα σύνολο κορυφών στις οποίες καταλήγουν όλες οι ακμές του γραφήματος.

β.

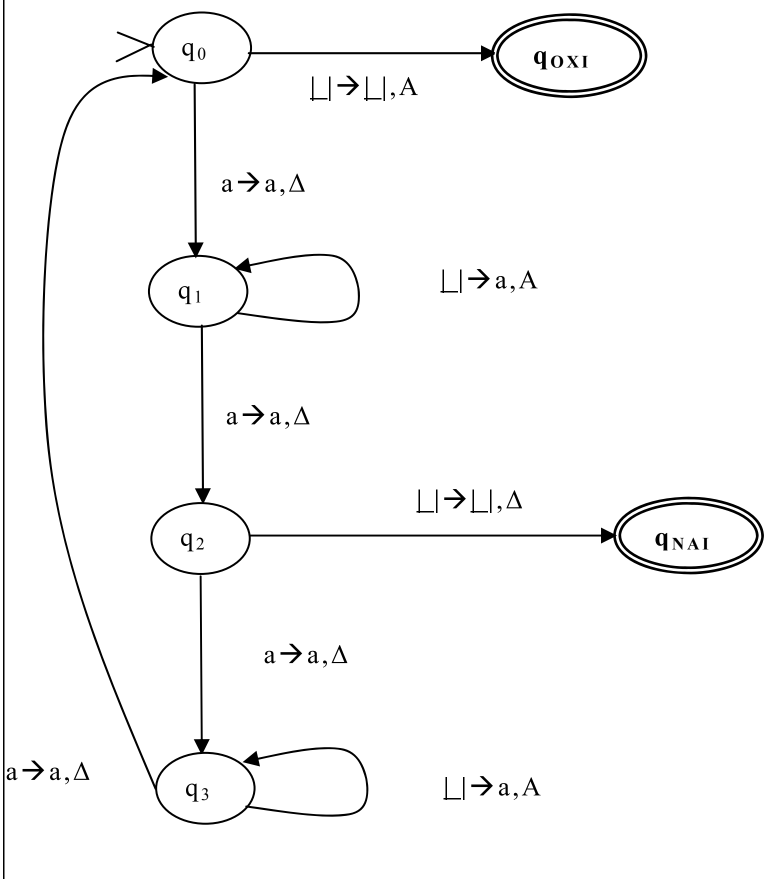
ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}={<M,w>|η M είναι TM που τερματίζει με είσοδο w}

ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM}={<M>|η M είναι TM ΜΕ $L(M)=\emptyset$}

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ_{TM}={<M_1,M_2>|οι M_1,M_2 είναι TM και $L(M_1)=L(M_2)$}

γ. Έστω ότι η $\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM} \leq \overline{L}$, άρα και η $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}} \leq L$. Επειδή η L είναι αναγνωρίσιμη τότε προκύπτει ότι και η $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}}$ είναι αναγνωρίσιμη. Άτοπο διότι η $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}}$ είναι μη αναγνωρίσιμη γλώσσα.

<u>Θέμα 2 Απάντηση</u>



α. Παρατηρούμε ότι με είσοδο τη συμβολοσειρά a η TM εγκλωβίζεται, άρα δεν διαγνώστης.
β. Η γλώσσα της μηχανής είναι $aa(aaaa)^*$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Επειδή όταν η μηχανή φτάνει στην κατάσταση q_{NAI} η συμβολοσειρά εισόδου έχει διαβαστεί εξολοκλήρου (αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι φτάνει στην q_{NAI} με το χαρακτήρα κενού) γιαυτό ΔΕΝ πρέπει στο τέλος της γλώσσας που περιγράφουμε να προσθέσουμε κάτι άλλο.

<u>Θέμα 3 –Απάντηση</u>

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα L είναι διαγνώσιμη, άρα $\exists$ διαγνώστης R γιαυτή. Θα κάνουμε αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM} στην L. Κατασκευάζουμε TM S:
S="Με είσοδο <M, w> όπου w συμβολοσειρά και M TM

1. Κατασκεύασε μια TM M′
    a. Με οποιαδήποτε είσοδο x
    b. Προσομοίωσε τη M με είσοδο w. Αν η M αποδέχεται την είσοδο w τότε η M′ αποδέχεται τη x, αλλιώς εγκλωβίσου
2. Τρέξε την R με είσοδο <M′>
3. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ
4. Αν η R απορρίψει ΑΠΕΡΡΙΨΕ″

Η MT S που κατασκευάσαμε είναι διαγνώστης της γλώσσας $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι η $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη, άρα και η L είναι μη διαγνώσιμη

<u>Θέμα 4 –Απάντηση</u>
Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα 3SAT-7 είναι NP-πλήρες θα πρέπει:
α)Το 3SAT-7 να ανήκει στην κλάση NP
β)Οποιοδήποτε άλλο γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα να ανάγεται σε αυτό σε χρόνο πολυωνυμικό

Όσον αφορά την $1^η$ προϋπόθεση το 3SAT-7 ανήκει στην κλάση NP καθώς με είσοδο ένα λογικό τύπο φ σε συζευκτική κανονική μορφή με 3 λεξιγράμματα ανά φράση και 7 αναθέσεις τιμών μπορούμε να επαληθεύσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν αυτές οι αναθέσεις τιμών είναι διαφορετικές μεταξύ τους και αν όντως επαληθεύουν το λογικό τύπο φ.
Όσον αφορά τη $2^η$ προϋπόθεση θα ανάγουμε τη γλώσσα 3SAT στη γλώσσα 3SAT-7. Για κάθε λογικό τύπο φ με 3 λεξιγράμματα ανά φράση κατασκευάζουμε το λογικό τύπο φ′ προσθέτοντας μια φράση με 3 λεξιγράμματα στον φ, δηλαδή $φ' = φ\wedge(a\vee b\vee c)$ όπου οι μεταβλητές a, b, c δεν εμφανίζονται στον φ. Προφανώς η κατασκευή του φ′ γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το μέγεθος της εισόδου. Οι βασικές παρατηρήσεις για την απόδειξη ορθότητας της αναγωγής είναι:

- Αν ο φ είναι αληθεύσιμος, τότε υπάρχουν 8 διαφορετικές αναθέσεις τιμών (άρα και 7) για τις μεταβλητές που εμφανίζονται στον φ και τις επιπλέον μεταβλητές a, b, c. Αυτό προκύπτει αν πάρουμε μια ανάθεση που αληθοποιεί τον φ και τη συνδυάσουμε με τις 7 αναθέσεις τιμών που αληθοποιούν τη φράση $a\vee b\vee c$.
- Αν ο φ δεν είναι αληθεύσιμος, τότε δεν υπάρχει καμία αληθής ανάθεση για τον φ′

Συμπεραίνουμε ότι ο φ είναι αληθεύσιμος αν και μόνο αν ο φ′ έχει τουλάχιστον 7 διαφορετικές αληθείς τιμοδοσίες και ολοκληρώνεται η απόδειξη ορθότητας της αναγωγής.

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2013 ΑΤΥΠΗ

Θέμα 1.

α. (10%) Δώστε τους ορισμούς των γλωσσών ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM και ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM.

β. (10%) Δείξτε ότι η γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/TM δεν είναι απεικονιστικά αναγώγιμη στην ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM.

γ. (10%) Είναι δυνατόν η συνάρτηση μεταβάσεων μιας ανταιτιοκρατικής (μη ντετερμινιστικής) μηχανής Turing να έχει τις δυο μεταβάσεις $(q_2, \alpha) \to (q_{\text{ΝΑΙ}}, \alpha, A)$ και $(q_2, \alpha) \to (q_{\text{ΟΧΙ}}, \sqcup, \Delta)$, όπου q_2 κατάσταση της μηχανής και α σύμβολο του αλφαβήτου εισόδου της;

δ. (10%) Πότε μπορεί να εγκλωβιστεί ένας διαγνώστης;

ε. (10%) Είναι δυνατόν μια μηχανή Turing να μη φθάνει ποτέ ούτε στην κατάσταση αποδοχής $q_{\text{ΝΑΙ}}$ ούτε στην κατάσταση απόρριψης $q_{\text{ΟΧΙ}}$;

Θέμα 2. Δίνεται η μηχανή Turing M με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	a	$\sqcup$
q_0	(q_1, a, Δ)	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, a, A)$
q_1	(q_2, a, Δ)	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, a, A)$
q_2	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, A)$	(q_0, a, A)

α. (15%) Ποιες συμβολοσειρές του αλφαβήτου $\{a\}$ αποδέχεται η M; Τι κάνει για τις υπόλοιπες συμβολοσειρές του αλφαβήτου $\{a\}$;

β. (10%) Είναι η M διαγνώστης; Τεκμηριώστε την απάντησή σας.

Θέμα 3. (25%) Δείξτε ότι η γλώσσα

$$L = \{\langle M \rangle : \text{η } M \text{ είναι μηχανή Turing και τερματίζει με είσοδο τη συμβολοσειρά 'ααα'}\}$$

δεν είναι διαγνώσιμη. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε αναγωγή και οποιοδήποτε γνωστό αποτέλεσμα μη διαγνωσιμότητας σας βολεύει.

Θέμα 4. (25%) Έστω ΜΕΓΑΛΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $= \{\langle G \rangle :$ το G είναι μη κατευθυνόμενο γράφημα που εμπεριέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο με $m/3$ ή περισσότερους κόμβους, όπου m το πλήθος όλων των κόμβων$\}$. Δείξτε ότι το πρόβλημα ΜΕΓΑΛΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ είναι NP-πλήρες. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε (απεικονιστική) αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου και οποιοδήποτε γνωστό αποτέλεσμα NP-πληρότητας σας βολεύει, π.χ., ΚΛΙΚΑ, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ, κλπ.

Θέμα 1 –Απάντηση

α.

$\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}=\{\langle M\rangle|$η M είναι TM ΜΕ $L(M)=\varnothing\}$

$\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{TM}=\{\langle M_1,M_2\rangle|$οι M_1,M_2 είναι TM και $L(M_1)=L(M_2)\}$

β.

Έστω ότι η ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM} ανάγεται στην ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM} δηλ έστω ότι: $\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM} \le \text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}$, Από τις ιδιότητες της αναγωγής θα ισχύει ότι $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}}_{TM} \le \overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}}_{TM}$. Γνωρίζουμε ότι η γλώσσα $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}}_{TM}$ είναι μη αναγνωρίσιμη, άρα και τότε και η γλώσσα $\overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}}_{TM}$ θα είναι επίσης μη αναγνωρίσιμη. Αυτό είναι άτοπο διότι η γλώσσα $\overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}}_{TM}$ είναι αναγνωρίσιμη.

γ. Ναι διότι μια μη ντετερμινιστική MT μπορεί, ανάλογα με τη μετάβαση που θα ακολουθήσει, να αποδέχεται και να απορρίπτει την ίδια συμβολοσειρά δ. Ποτέ διότι το χαρακτηριστικό ενός διαγνώστη είναι ότι τερματίζει πάντα

ε. Ναι διότι είναι δυνατόν μια ΜΤ να εγκλωβιστεί μια συγκεκριμένη είσοδο και να μην φτάσει ποτέ ούτε στην κατάσταση αποδοχής q_{NAI} ούτε στην κατάσταση απόρριψης q_{OXI}

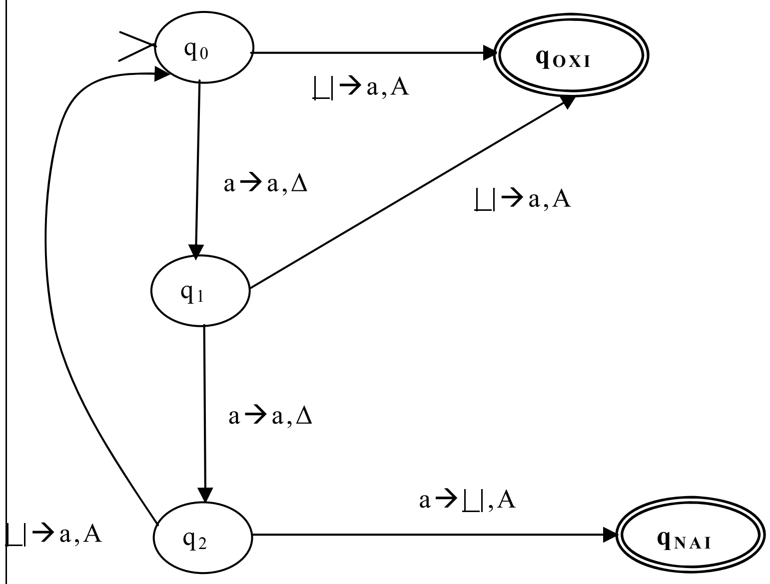
Παρατήρηση

Αν είχαμε μια μη ντετερμινιστική ΜΤ (αντιαιτιοκρατική) και δίνονταν οι μεταβάσεις:

- ✓ (q2,a)→(q3,b,A)
- ✓ (q2,a)→(q4,a,Δ)

τότε αυτές θα ήταν αποδεκτές διότι μπορούμε από μια κατάσταση με το ίδιο σύμβολο να εκτελέσουμε διαφορετικές μεταβάσεις

<u>Θέμα 2 –Απάντηση</u>



α. Η Μ αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές του αλφαβήτου {a} της μορφής $aaaa^*$. Τις υπόλοιπες συμβολοσειρές είτε τις απορρίπτει π.χ. το ε, a κ.λ.π. είτε εγκλωβίζεται αν πάρει π.χ. τη συμβολοσειρά aa.

β. Η Μ δεν είναι διαγνώστης διότι αν λάβει τη συμβολοσειρά aa εγκλωβίζεται.

<u>Θέμα 3 –Απάντηση</u>

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα L είναι διαγνώσιμη, άρα ∃ διαγνώστης R γιαυτή. Θα κάνουμε αναγωγή από την $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$ στην L. Κατασκευάζουμε TM S:

S=″Με είσοδο <M,w> όπου Μ ΤΜ και w συμβολοσειρά

1. Κατασκεύασε μια ΤΜ M_1:

    a. Με είσοδο z

    b. Αν z≠″aaa″ ΑΠΕΡΡΙΨΕ

    c. αλλιώς αν z=″aaa″ προσομοίωσε την Μ με είσοδο w. Αν η Μ τερματίσει με είσοδο w τότε τερμάτισε αλλιώς εγκλωβίσου

2. Τρέξε τον R με είσοδο <M_1>

3. Αν αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ

4. Αν απορρίψει ΑΠΕΡΡΙΨΕ″

Η ΜΤ S που κατασκευάσαμε είναι διαγνώστης της γλώσσας $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι η γλώσσα $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη άρα και η γλώσσα L είναι μη διαγνώσιμη

<u>Θέμα 4 –Απάντηση</u>

Θέλουμε να δείξουμε ότι το πρόβλημα ΜΕΓΑΛΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ είναι NP-πλήρες. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να ι-σχύουν 2 ιδιότητες:

- ➢ Το πρόβλημα ΜΕΓΑΛΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ανήκει στην κλάση NP
- ➢ Κάποιο άλλο γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα μπορεί να αναχθεί στο ΜΕΓΑΛΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ σε χρόνο πολυωνυμικό

Α Συνθήκη: ΜΕΓΑΛΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\in$ NP

Θα κατασκευάσουμε ΜΤ και θα δείξουμε ότι επαληθεύει το πρόβλημα ΜΕΓΑΛΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ σε χρόνο πολυωνυμικό

V=”Με είσοδο <G(m,n), K> όπου G μη κατευθυνόμενο γράφημα με m κορυφές και n ακμές και K ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k

1. Εξέτασε αν το k είναι μεγαλύτερο ή ίσο του m/3 όπου m το πλήθος κορυφών του G. Αν ναι συνέχισε αλλιώς ΑΠΕΡΡΙΨΕ
2. Εξέτασε αν οι κόμβοι του K ανήκουν στο γράφημα G. Αν ναι συνέχισε αλλιώς ΑΠΕΡΡΙΨΕ
3. Εξέτασε αν οι κόμβοι του K αποτελούν ανεξάρτητο σύνολο του G. Αν ναι ΑΠΟΔΕΞΟΥ αλλιώς ΑΠΕΡΡΙΨΕ”

Η πολυπλοκότητα της V είναι η εξής:
Βήμα 1: O(1)
Βήμα 2: O(m)
Βήμα 3: O(m^2)

Η συνολική πολυπλοκότητα της V είναι O(m^2). Συνεπώς η MT V επαληθεύει το πρόβλημα ΜΕΓΑΛΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το πλήθος κορυφών του γραφήματος και συνεπώς το ΜΕΓΑΛΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\in$ NP

Β Συνθήκη: ΚΛΙΚΑ$\leq$ ΜΕΓΑΛΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ (ΜΑΣ)

Θα κάνουμε αναγωγή από ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα και συγκεκριμένα από το πρόβλημα της ΚΛΙΚΑΣ στο πρόβλημα του ΜΑΣ. Για να κάνουμε αυτή την αναγωγή πρώτα να κατασκευάσουμε ένα στιγμιότυπο του ΜΑΣ από ένα στιγμιότυπο της ΚΛΙΚΑΣ.. Ας υποθέσουμε ότι το γράφημα G έχει ΚΛΙΚΑ. Αν το μέγεθος της ΚΛΙΚΑΣ είναι τουλάχιστον m/3 κόμβοι τότε διαγράφοντας όλες τις ακμές της ΚΛΙΚΑΣ παίρνουμε ένα νέο γράφημα G′ που περιέχει ΜΑΣ μεγέθους τουλάχιστον m/3. Αν όμως το μέγεθος της ΚΛΙΚΑΣ είναι μικρότερο από m/3 κόμβους, τότε επεκτείνουμε την ΚΛΙΚΑ συνδέοντας πλήρως και άλλους κόμβους μεταξύ τους ώστε το μέγεθος της νέας ΚΛΙΚΑΣ που θα προκύψει να είναι τουλάχιστον m/3 κόμβοι. Μετά διαγράφουμε και πάλι όλες τις ακμές της επεκταμένης ΚΛΙΚΑΣ και το νέο γράφημα G′ που θα προκύψει περιέχει ΜΕΓΑΛΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ μεγέθους τουλάχιστον m/3 κόμβων.

Στη συνέχεια θα δείξουμε την ισοδυναμία:
Το γράφημα G έχει ΚΛΙΚΑ μεγέθους m/3 κόμβων $\Leftrightarrow$ το γράφημα G′ έχει ΜΑΣ μεγέθους m/3 κόμβων

Β1) Ευθύ

Έστω ότι το γράφημα G έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους m/3 κόμβων. Από τον τρόπο που κατασκευάσαμε το γράφημα G’ είναι προφανές ότι αυτό περιέχει ΜΑΣ μεγέθους m/3 κόμβων.

Β2)Αντίστροφο

Έστω ότι το G’ έχει ΜΑΣ μεγέθους m/3 κόμβων. Το γράφημα G που προκύπτει συνδέοντας ανά δύο όλους τους κόμβους που αποτελούν ανεξάρτητο σύνολο περιέχει ΚΛΙΚΑ μεγέθους m/3 κόμβων.

ΠΡΟΟΔΟΣ 2013

Ενδιάμεση εξέταση – Απρίλιος 2013

Θέμα 1.

α. (20%) Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις εξηγώντας συνοπτικά την απάντησή σας. Είναι δυνατόν μια μηχανή Turing να διαβάσει από την ταινία ένα σύμβολο που δεν ανήκει στο αλφάβητο ταινίας; Είναι δυνατόν η μηχανή να βρεθεί περισσότερες από μια φορές στην κατάσταση $q_{\text{ΝΑΙ}}$; Πότε λέμε ότι μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing αποδέχεται την είσοδό της; Πότε μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing ονομάζεται διαγνώστης;

β. (10%) Δείξτε ότι οι προτάσεις 'Υπάρχει πολυταινιακή μηχανή Turing που αναγνωρίζει τη γλώσσα L' και 'Υπάρχει απαριθμητής που απαριθμεί τη γλώσσα L' είναι ισοδύναμες.

Θέμα 2. Δίνεται η μηχανή Turing M με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	0	1	⊔
q_0	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, 0, A)$	$(q_1, 1, \Delta)$	$(q_0, 1, A)$
q_1	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, 0, A)$	$(q_0, 1, \Delta)$	$(q_1, 1, A)$

α. (10%) Είναι η M διαγνώστης; Εξηγήστε την απάντησή σας.

β. (20%) Ποιά είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\{0, 1\}$ που αναγνωρίζει η M;

Θέμα 3. (30%) Δώστε ορισμό για τις γλώσσες ΑΠΟΔΟΧΗ/TM, ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM, ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM, ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/TM. Δώστε παράδειγμα δυο μη αναγνωρίσιμων γλωσσών που η τομή τους είναι διαγνώσιμη γλώσσα.

Θέμα 4. (30%) Δείξτε ότι η γλώσσα

$$L = \{\langle M, q\rangle : \text{η } M \text{ είναι TM και φτάνει στην κατάσταση } q \text{ ξεκινώντας με είσοδο 'aaa'}\}$$

δεν είναι διαγνώσιμη. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε αναγωγή και οποιοδήποτε γνωστό αποτέλεσμα μη διαγνωσιμότητας σας βολεύει.

Θέμα 1α-Απάντηση

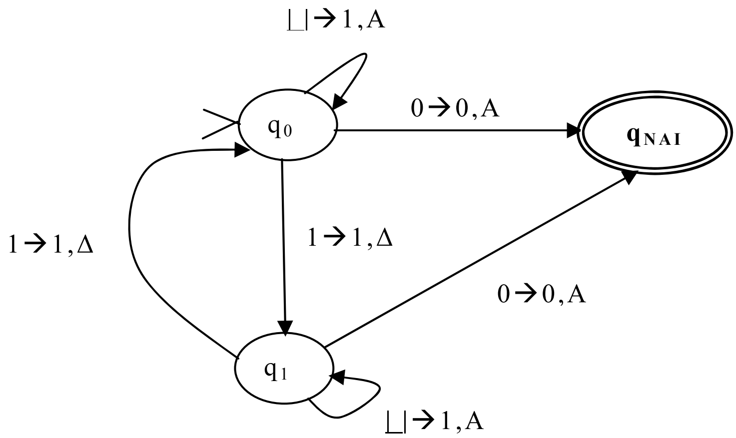
1)Όχι διότι μπορεί να διαβάσει από την ταινία μόνο χαρακτήρες που ανήκουν στο αλφάβητο ταινίας (Επίσης στην ταινία γράφονται μόνο σύμβολα που ανήκουν στο αλφάβητο της ταινίας)

2)Όχι διότι το q_{NAI} είναι τερματική κατάσταση και αν βρεθεί σε αυτή τότε τερματίζει (το ίδιο ισχύει και για την κατάσταση q_{OXI})
3)Όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που να οδηγεί στην κατάσταση αποδοχής (Μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing απορρίπτει την είσοδο της αν δεν υπάρχει κανένα μονοπάτι που να οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής)
4)Όταν υπάρχει για κάθε συμβολοσειρά εισόδου τουλάχιστον ένα μονοπάτι που να την οδηγεί είτε σε κατάσταση αποδοχής είτε σε κατάσταση απόρριψης.

Θέμα 1β-Απάντηση

- Μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη αν υπάρχει πολυταινιακή μηχανή Turing που να την αναγνωρίζει
- Μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη αν υπάρχει απαριθμητής που την απαριθμεί
- Από αυτές τις δύο ιδιότητες προκύπτει ότι οι προτάσεις είναι ισοδύναμες

Θέμα 2-Απάντηση



α. Η μηχανή δεν είναι διαγνώστης διότι με είσοδο 11 ή 1 εγκλωβίζεται. Επίσης με είσοδο την κενή συμβολοσειρά εγκλωβίζεται

β. Η γλώσσα που αναγνωρίζει η μηχανή είναι $1^*0(0\cup1)^*$

Παρατήρηση: Όταν φτάνουμε στην κατάσταση αποδοχής και η συμβολοσειρά δεν έχει εξαντληθεί τότε προσθέτουμε στο τέλος της μια κανονική έκφραση για όλες τις συμβολοσειρές του αλφαβήτου.

Θέμα 3-Απάντηση

α.

- ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM}={<M> | η M είναι TM με $L(M)=\varnothing$}
- ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ_{TM}={<M_1,M_2> | οι M_1, M_2 είναι TM και $L(M_1)=L(M_2)$}
- ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}={<M,w> | η M είναι μια TM που αποδέχεται τη λέξη w}
- ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}={<M,w> | η M είναι μια TM που τερματίζει με είσοδο w}
- ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ_{TM}={<M>|η M είναι TM με L(M) κανονική γλώσσα} (ΑΥΤΗ ΔΕ ΖΗΤΕΙΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ)

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ ΕΙΝΑΙ ΜΗ ΔΙΑΓΝΩΣΙΜΕΣ. ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΟΙ ΓΛΩΣΣΕΣ ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM} ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ_{TM} ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΜΗ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΙΜΕΣ. Η ΓΛΩΣΣΑ $\overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}}$ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΙΜΗ. ΕΠΙΣΗΣ Η ΓΛΩΣΣΑ $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}}$ ΕΙΝΑΙ ΜΗ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΙΜΗ.

β. Δύο μη αναγνωρίσιμες γλώσσες είναι η $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}}$ και η ΚΕΝΟΤΗΤΑ. Έστω ότι η τομή τους είναι μια Διαγνώσιμη Γλώσσα δηλ. έστω ότι $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}} \cap \text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}$ = ΔΙΑΓΝΩΣΙΜΗ ΓΛΩΣΣΑ. Λόγω κλειστότητας των διαγνώσιμων γλωσσών ως προς το συμπλήρωμα ομοίως θα είναι διαγνώσιμη και η γλώσσα $\overline{\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}} \cap \text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}} = \text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM} \cup \overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}}$. Όμως γνωρίζουμε ότι η γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM} όπως και η $\overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}}$ είναι αναγνωρίσιμες γλώσσες, άρα θα είναι και η ένωση τους αναγνωρίσιμη γλώσσα λόγω της κλειστότητας των αναγνωρίσιμων γλωσσών ως προς την ένωση. Συνεπώς καταλήγουμε σε κάτι αληθές, άρα η αρχική υπόθεση ισχύει οπότε η γλώσσα $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}} \cap \text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}$ είναι όντως διαγνώσιμη.

Θέμα 4-Απάντηση

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα L είναι διαγνώσιμη, άρα ∃ διαγνώστης R γιαυτή. Θα κάνουμε αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM} στην L. Κατασκευάζουμε TM S ως εξής:
S=″Με είσοδο <M, w> όπου M TM και w λέξη

1. Κατασκεύασε μια νέα TM M′

a. Με είσοδο z

b. Αν z≠″ααα″ απέρριψε

c. Αν z=″ααα″ προσομοίωσε τη M με είσοδο w. Αν η M αποδεχτεί το w τότε η M′ φτάνει στην q_{NAI} αλλιώς εγκλωβίζεται (αυτό το βήμα είναι η αναγωγή)

2. Τρέξε την R με είσοδο <M′, q_{NAI}>

3. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ

4. Αν η R απορρίψει, ΑΠΕΡΡΙΨΕ″

Η ΜΤ S που κατασκευάσαμε είναι διαγνώστης της γλώσσας ΑΠΟΔΟΧΗ$_{TM}$. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι η ΑΠΟΔΟΧΗ$_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη άρα και η L είναι μη διαγνώσιμη

ΙΟΥΝΙΟΣ 2013

Εξέταση Ιουνίου 2013 – Ενδεικτικές λύσεις

Θέμα 1.

α. (10%) Δείξτε ότι αν οι γλώσσες L_1 και L_2 είναι αναγνωρίσιμες τότε και η ένωσή τους $L_1 \cup L_2$ είναι αναγνωρίσιμη.

β. (25%) Δίνεται η μηχανή Turing M με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	a	$\sqcup$
q_0	(q_1, a, Δ)	(q_0, a, A)
q_1	(q_2, a, Δ)	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, \sqcup, A)$
q_2	(q_0, a, Δ)	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, A)$

Ποιά είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\{a\}$ που αναγνωρίζει η M; Είναι η M διαγνώστης;

γ. (15%) Δίνεται η μη ντετερμινιστική μηχανή Turing N με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	a	$\sqcup$
q_0	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, A)$ (q_1, a, Δ)	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, \sqcup, A)$
q_1	(q_0, a, A)	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, \sqcup, A)$

Ποιά είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\{a\}$ που αναγνωρίζει η N; Είναι η N διαγνώστης;

<u>Θέμα 1α-Αναλυτική Απάντηση</u>

Αφού η L1 είναι αναγνωρίσιμη άρα υπάρχει ΜΤ Μ1 που αναγνωρίζει τη γλώσσα L1, Αφού η L2 είναι αναγνωρίσιμη άρα υπάρχει ΜΤ Μ2 που αναγνωρίζει τη γλώσσα L2. Θα κατασκευάσουμε ΜΤ Μ′ που αναγνωρίζει τη γλώσσα L1∪L2

Μ′="Με είσοδο w

3. Τρέξε παράλληλα (ταυτόχρονα) τις Μ1 και Μ2 με είσοδο w
4. Αν αποδεχτεί είτε η Μ1 είτε η Μ2 τότε ΑΠΟΔΕΞΟΥ»

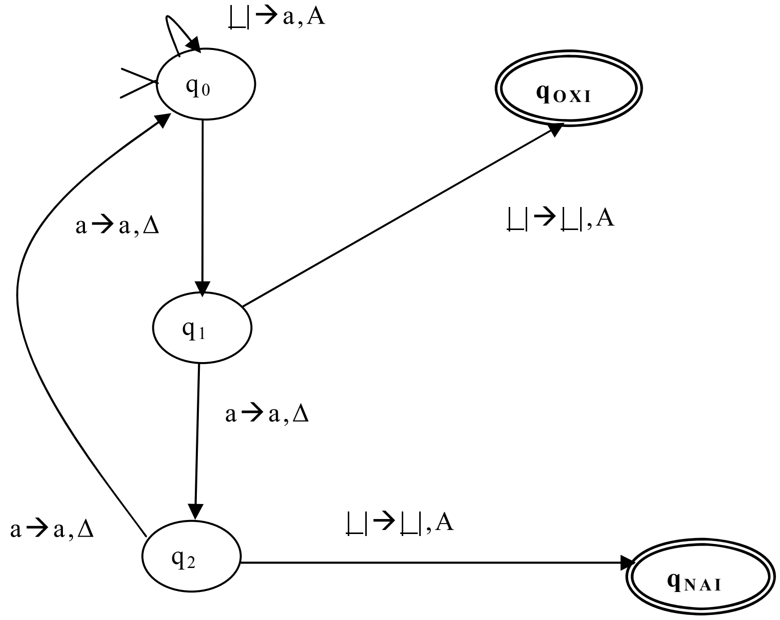
Ενδεικτικές λύσεις:

α. Άσκηση 3.16 από το βιβλίο του Sipser. Η λύση βρίσκεται στη σελίδα 187 όπου χρησιμοποιώντας τις μηχανές M_1 και M_2 που αναγνωρίζουν τις γλώσσες L_1 και L_2 κατασκευάζουμε μηχανή M που αναγνωρίζει την ένωση $L_1 \cup L_2$ εκτελλώντας τις παράλληλα/εναλλάξ. Ένα συνηθισμένο λάθος που γίνεται εδώ είναι να εκτελείται πρώτα η μηχανή M_1 που αναγνωρίζει τη γλώσσα L_1 και, εφόσον αποδεχτεί, να εκτελείται η μηχανή M_2 που αναγνωρίζει τη γλώσσα L_2. Σε αυτή την περίπτωση, η μηχανή M_1 μπορεί να μην τερματίζει και η μηχανή M_2 να μην τρέξει ποτέ.

β. Η γλώσσα που αναγνωρίζει η M είναι η $(aa + aaa)(aaa)^*$. Είναι διαγνώστης γιατί απορρίπτει τις υπόλοιπες συμβολοσειρές (κενή και $a(aaa)^*$). Πολλές απαντήσεις δεν περιείχαν τις συμβολοσειρές $aaa(aaa)^*$.

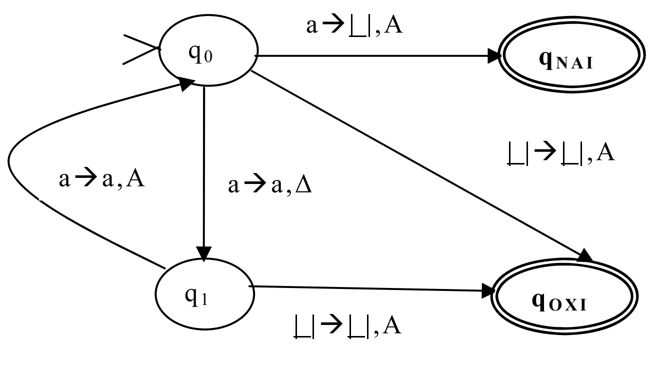
γ. Η γλώσσα που αναγνωρίζει η N είναι η aa^*. Δεν είναι διαγνώστης γιατί για είσοδο aa εγκλωβίζεται σε κινήσεις μεταξύ των καταστάσεων q_0 και q_1. Προσοχή στους ορισμούς για τις μη ντετερμινιστικές μηχανές. Για να βρούμε τη γλώσσα (δηλ., το σύνολο των συμβολοσειρών που αποδέχεται η N), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η N μπορεί να καταλήξει σε $q_{\text{ΝΑΙ}}$ με οποιαδήποτε μη κενή είσοδο. Για να απαντήσουμε αν είναι διαγνώστης, αρκεί να βρούμε μια είσοδο για την οποία η μηχανή εγκλωβίζεται ακολουθώντας κάποιες από τις δυνατές μεταβάσεις της.

<u>Θέμα 1β-Αναλυτική Απάντηση</u>
Η ΜΤ Μ είναι η εξής:



Η γλώσσα που αναγνωρίζει η ΜΤ είναι aa(aaa)* ∪ aaa(aaa)*
Η ΤΜ ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΓΝΩΣΤΗΣ ΔΙΟΤΙ ΤΕΡΜΑΤΙΖΕΙ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΣΥΜΒΟΛΟΣΕΙΡΑ ΕΙΣΟΔΟΥ

<u>Θέμα 1γ-Αναλυτική Απάντηση</u>
Η ΜΤ Ν είναι η εξής:



Με είσοδο το aa η μηχανή εγκλωβίζεται και συνεπώς δεν είναι Διαγνώστης. Βέβαια μπορεί και να τερματίσει, αλλά ΑΝ ΣΕ ΜΙΑ ΜΗ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΗ ΜΤ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΣΤΩ ΚΑΙ ΕΝΑ ΜΟΝΟΠΑΤΙ ΠΟΥ ΟΔΗΓΕΙ ΣΕ ΕΓΚΛΩΒΙΣΜΟ ΤΟΤΕ Η ΜΗΧΑΝΗ ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΕΓΚΛΩΒΙΖΕΤΑΙ ΚΑΙ ΔΕΝ ΑΠΟΤΕΛΕΙ ΔΙΑΓΝΩΣΤΗ.

Αν τερματίσει τότε η κανονική έκφραση αα* μας καλύπτει σε κάθε περίπτωση.

Θέμα 2.

α. (10%) Δώστε τους ορισμούς των γλωσσών ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM και ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM.

β. (10%) Δείξτε ότι η γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/TM δεν είναι απεικονιστικά αναγώγιμη στην ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM.

γ. (25%) Δείξτε ότι η γλώσσα

$$L = \{\langle M \rangle : \text{η } M \text{ είναι μηχανή Turing και απορρίπτει κάθε συμβολοσειρά}\}$$

δεν είναι διαγνώσιμη.

Ενδεικτικές λύσεις:

α. Σελίδες 219 και 220 από το βιβλίο του Sipser. Περιφραστικές απαντήσεις καταλήγουν σχεδόν σίγουρα να είναι λανθασμένες.

β. Άσκηση 5.5 από το βιβλίο του Sipser. Η λύση βρίσκεται στη σελίδα 249.

γ. Εδώ χρειάζεται αναγωγή από κάποια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα. Πολλοί έκαναν την λανθασμένη παρατήρηση ότι η L είναι η γλώσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM. Αυτό δεν ισχύει. Η γλώσσα L αποτελείται από όλες τις μηχανές Turing που απορρίπτουν κάθε συμβολοσειρά ενώ η ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM αποτελείται από όλες τις TM που απορρίπτουν ή εγκλωβίζονται για κάθε συμβολοσειρά εισόδου. Αυτά είναι διαφορετικά πράγματα.

Θα παρουσιάσουμε μια τέτοια αναγωγή από τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/TM. Κάποιες από τις σωστές λύσεις που προτάθηκαν χρησιμοποίησαν ελαφρώς διαφορετική αναγωγή από τη γλώσσα ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM. Για την αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ/TM, ξεκινάμε υποθέτοντας ότι η L είναι διαγνώσιμη και έστω R ο διαγνώστης της. Κατασκευάζουμε τη μηχανή S.

$S =$ για είσοδο $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκεύασε την TM M_1 που λειτουργεί ως εξής:

   $M_1 =$ για είσοδο x

   1. Προσομοίωσε την M με είσοδο w
   2. Αν αποδεχτεί, απόρριψε (τη συμβολοσειρά x)
   3. Αν απορρίψει, εγκλωβίσου (ή αποδέξου τη συμβολοσειρά x)

2. Εκτέλεσε την R με είσοδο $\langle M_1 \rangle$
3. Αν αποδεχτεί, αποδέξου
4. Αν απορρίψει, απόρριψε.

Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι η R αποδέχεται την M_1 (δηλ., η M_1 απορρίπτει κάθε συμβολοσειρά εισόδου και επομένως η $\langle M_1 \rangle$ ανήκει στην L) αν και μόνο αν η M αποδέχεται την w (δηλ., $\langle M, w \rangle \in$ ΑΠΟΔΟΧΗ/TM). Επομένως, η S είναι διαγνώστης για την ΑΠΟΔΟΧΗ/TM, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι μη διαγνώσιμη γλώσσα. Άτοπο!

Θέμα 2-Αναλυτική Απάντηση

α.

$\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}=\{\langle M\rangle \mid \text{η } M \text{ είναι TM και } L(M)=\varnothing\}$

$\text{ΠΕΡΑΤΩΣΗ}_{TM}=\{\langle M,w\rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM που τερματίζει με είσοδο } w\}$

β.

Έστω ότι η $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$ ανάγεται στην $ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM}$ δηλ έστω ότι ισχύει: $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM} \leq ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM}$, Από τις ιδιότητες της αναγωγής θα ισχύει ότι $\overline{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM} \leq \overline{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}$. Γνωρίζουμε ότι η γλώσσα $\overline{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}$ είναι μη αναγνωρίσιμη, άρα και τότε και η γλώσσα $\overline{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}$ θα είναι επίσης μη αναγνωρίσιμη. Αυτό είναι άτοπο διότι η γλώσσα $\overline{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}$ είναι αναγνωρίσιμη.

γ.

L={<M>| H M είναι TM και απορρίπτει κάθε συμβολοσειρά}

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα L είναι διαγνώσιμη, άρα ∃ διαγνώστης R γιαυτή. Θα κάνουμε αναγωγή από την $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$ στην L. Κατασκευάζουμε TM S:

S=″Με είσοδο <M, w> όπου w συμβολοσειρά και M TM

1. Κατασκευάζουμε μια TM M′
   - Με είσοδο x
   - Προσομοίωσε τη M με είσοδο w. Αν η M αποδεχτεί την w τότε απέρριψε αλλιώς εγκλωβίσου
2. Τρέξε την R με είσοδο <M′>
3. Αν αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ
4. Αν απορρίψει ΑΠΕΡΡΙΨΕ″

Η MT S που κατασκευάσαμε είναι διαγνώστης της γλώσσας $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι η $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη άρα και η L είναι μη διαγνώσιμη

Θέμα 3.

α. (5%) Είναι δυνατόν να ισχύουν ταυτόχρονα οι προτάσεις $3SAT \in P$ και $P \neq NP$;

β. (25%) Έστω 3SAT-37 $= \{\langle\phi\rangle$: ο ϕ είναι λογικός τύπος σε συζευκτική κανονική μορφή με τρία λεξιγράμματα ανά φράση και έχει τουλάχιστον 37 διαφορετικές αληθείς τιμοδοσίες$\}$. Δείξτε ότι το πρόβλημα 3SAT-37 είναι NP-πλήρες.

Ενδεικτικές λύσεις:

α. Γνωρίζουμε ότι η 3SAT είναι NP-πλήρης γλώσσα. Επομένως, από τον ορισμό της NP-πληρότητας, οποιαδήποτε γλώσσα του NP ανάγεται πολυωνυμικά στην 3SAT. Αν η 3SAT διαγιγνώσκεται ντετερμινιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε οποιαδήποτε γλώσσα του NP διαγιγνώσκεται ντετερμινιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο. Άρα $P = NP$. Επομένως, οι δυο προτάσεις δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα. Η χρήση της ιδιότητας της NP-πληρότητας είναι απολύτως απαραίτητη για να απαντηθεί σωστά το ερώτημα.

β. Θυμηθείτε την άσκηση για την NP-πληρότητα της γλώσσας 3SAT-7 που παρουσιάσαμε στο μάθημα. Καταρχάς, η 3SAT-37 ανήκει στην κλάση NP καθώς με είσοδο έναν λογικό τύπο ϕ σε συζευκτική κανονική μορφή με τρία λεξιγράμματα ανά φράση και 37 αναθέσεις τιμών στις μεταβλητές μπορώ να επαληθεύσω σε πολυωνυμικό χρόνο αν αυτές οι αναθέσεις είναι διαφορετικές και αν όντως αληθεύουν το λογικό τύπο. Για την ολοκλήρωση της απόδειξης θα ανάγουμε πολυωνυμικά τη γλώσσα 3SAT στην 3SAT-37. Για κάθε λογικό τύπο ϕ σε συζευκτική κανονική μορφή με τρία λεξιγράμματα ανά φράση κατασκευάζω το λογικό τύπο ϕ' προσθέτοντας δυο φράσεις με τρία λεξιγράμματα στον ϕ, δηλ., $\phi' = \phi \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (d \vee e \vee f)$, όπου οι μεταβλητές a, b, c, d, e, f δεν εμφανίζονται στον ϕ. Προφανώς, η κατασκευή του ϕ' γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το μέγεθος του ϕ. Οι κρίσιμες παρατηρήσεις για την απόδειξη ορθότητας της αναγωγής είναι:

- Αν ο ϕ είναι αληθεύσιμος, τότε υπάρχουν τουλάχιστον 49 (άρα και τουλάχιστον 37) διαφορετικές αληθείς αναθέσεις τιμών για τις μεταβλητές που εμφανίζονται στον ϕ και τις επιπλέον μεταβλητές a, b, c, d, e, f. Αυτό προκύπτει αν πάρουμε μια ανάθεση που αληθοποιεί τον ϕ και τη συνδυάσουμε με τις 7 αναθέσεις τιμών που αληθοποιούν τη φράση $(a \vee b \vee c)$ και τις 7 αναθέσεις τιμών που αληθοποιούν τη φράση $(d \vee e \vee f)$.
- Αν ο ϕ δεν είναι αληθεύσιμος, τότε δεν υπάρχει καμμιά αληθής ανάθεση για τον ϕ'.

Συμπεραίνουμε ότι ο ϕ είναι αληθεύσιμος αν και μόνο αν ο ϕ' έχει τουλάχιστον 37 διαφορετικές αληθείς τιμοδοσίες και η απόδειξη ορθότητας της αναγωγής ολοκληρώθηκε. Ένα κλασσικό λάθος που αρκετοί έκαναν εδώ ήταν να προσθέσουν μια φράση με έξι λεξιγράμματα στον ϕ. Δυστυχώς, ένας τέτοιος λογικός τύπος δεν ανήκει ποτέ στη γλώσσα 3SAT-37 καθώς δεν περιέχει τρία λεξιγράμματα ανά φράση.

<u>Θέμα 3β-Αναλυτική Απάντηση</u>

Για να δείξουμε ότι το 3SAT-37 είναι NP-πλήρες πρέπει να δείξουμε ότι:
α)ανήκει στην κλάση NP
β)οποιοδήποτε άλλο NP-πλήρες πρόβλημα ανάγεται σε αυτό σε χρόνο πολυωνυμικό

Για το α) κατασκευάζουμε τον ακόλουθο επαληθευτή:
M= ″Με είσοδο <φ, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{37}$> όπου φ λογικός τύπος σε 3SAT-37 μορφή και α_1, α_2, α_{37} αποτιμήσεις αλήθειας (τιμοδοσίες)

1. Εξέτασε κάθε μια τιμοδοσία από τις α_1, α_2, α_{37} αν είναι έγκυρη δηλ. αν δίνει μόνο μια τιμή σε κάθε λεξίγραμμα. Αν ναι συνέχισε αλλιώς ΑΠΕΡΡΙΨΕ
2. Εξέτασε αν κάθε τιμοδοσία είναι διαφορετική από τις υπόλοιπες. Αν ναι συνέχισε αλλιώς ΑΠΕΡΡΙΨΕ
3. Εξέτασε αν αντικαθιστώντας τις τιμές κάθε τιμοδοσίας στο λογικό φ ότι ο φ επαληθεύεται. Αν ναι ΑΠΟΔΕΞΟΥ αλλιώς ΑΠΕΡΡΙΨΕ

Ο χρόνος του επαληθευτή είναι πολυωνυμικός στο μέγεθος της εισόδου, άρα το πρόβλημα ανήκει 3SAT-37 στην κλάση NP.

Για το β) κάνουμε αναγωγή από το 3SAT στο 3SAT-37 ως εξής:

Πρώτα κατασκευάζουμε ένα στιγμιότυπο του 3SAT-37 ως εξής: Έστω φ μια πρόταση του 3SAT και φ′ μια λογική πρόταση που προκύπτει προσθέτοντας σε κάθε όρο της φ δύο επιπλέον όρους ως εξής: $\varphi' = \varphi \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (d \vee e \vee f)$ Υπάρχουν τουλάχιστον 49 (άρα και τουλάχιστον 37) διαφορετικές αναθέσεις για τις μεταβλητές της φ και για τις επιπλέον μεταβλητές a, b, c, d, e, f. Αυτό προκύπτει αν πάρουμε μια ανάθεση αλήθειας που επαληθεύει (αληθοποιεί) τον φ και τη συνδυάσουμε με τις 7 αναθέσεις τιμών που αληθοποιούν τη φράση $(a \vee b \vee c)$ και τις 7 αναθέσεις τιμών που αληθοποιούν τη φράση $(d \vee e \vee f)$. Στη συνέχεια θα δείξουμε την ισοδυναμία:

φ ικανοποιήσιμος λογικός τύπος του 3SAT↔ φ′ ικανοποιήσιμος λογικός τύπος του 3SAT-37

Ευθύ

Έστω φ ικανοποιήσιμος λογικός τύπος του 3SAT, άρα υπάρχει τιμοδοσία που τον επαληθεύει. Για τον όρο φ′ που κατασκευάσαμε υπάρχουν τουλάχιστον 37 διαφορετικές τιμοδοσίες που τον αληθεύουν, άρα φ′ ικανοποιήσιμος λογικός τύπος.

Αντίστροφο

Έστω φ′ ικανοποιήσιμος λογικός τύπος, άρα υπάρχει τιμοδοσία που τον επαληθεύει. Άρα κάθε πρόταση του όρου $\varphi' = \varphi \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (d \vee e \vee f)$ είναι αληθής οπότε αν αφαιρέσουμε τις προτάσεις $(a \vee b \vee c)$ και $(d \vee e \vee f)$ και η πρόταση φ θα είναι ικανοποιήσιμη.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2013

Θέμα 1. (25%) Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις εξηγώντας συνοπτικά την απάντησή σας. Είναι δυνατόν μια μηχανή Turing να διαβάσει από την ταινία ένα σύμβολο που δεν ανήκει στο αλφάβητο ταινίας; Είναι δυνατόν η μηχανή να βρεθεί περισσότερες από μια φορές στην (αρχική) κατάσταση q_0; Πότε είναι δυνατόν ένας (ντετερμινιστικός) διαγνώστης να εγκλωβίζεται; Πότε λέμε ότι μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing αποδέχεται την είσοδό της; Πότε μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing ονομάζεται διαγνώστης;

Θέμα 2. Δίνεται η μηχανή Turing M με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	a	$\sqcup$
q_0	(q_1, a, Δ)	$(q_{\text{ΝΑΙ}}, \sqcup, A)$
q_1	(q_2, a, Δ)	(q_1, a, A)
q_2	(q_3, a, Δ)	$(q_{\text{ΟΧΙ}}, \sqcup, A)$
q_3	(q_0, a, Δ)	(q_1, a, A)

α. (10%) Είναι η M διαγνώστης; Τεκμηριώστε την απάντησή σας.

β. (15%) Ποιά είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\{a\}$ που αναγνωρίζει η M;

Υπόδειξη: Εξετάστε πώς δουλεύει η ΤΜ για συμβολοσειρές μήκους $4k$, $4k+1$, $4k+2$, και $4k+3$, όπου k μη αρνητικός ακέραιος.

Θέμα 3.

α. (10%) Δώστε τους ορισμούς των γλωσσών ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ και ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/ΤΜ.

β. (15%) Έστω γλώσσα L τέτοια ώστε τόσο η ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ όσο και η ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ να είναι απεικονιστικά αναγώγιμες στην L. Δείξτε ότι οι γλώσσες L και $\overline{L}$ δεν είναι αναγνωρίσιμες.

γ. (20%) Δείξτε ότι η γλώσσα

$$L = \{\langle M\rangle : \text{η } M \text{ είναι ΤΜ και εγκλωβίζεται με είσοδο την κενή συμβολοσειρά}\}$$

δεν είναι διαγνώσιμη.

Θέμα 4.

α. (25%) Έστω 3SAT-8 $= \{\langle\phi\rangle$: ο ϕ είναι λογικός τύπος σε συζευκτική κανονική μορφή με τρία λεξιγράμματα ανά φράση και έχει τουλάχιστον 8 διαφορετικές αληθείς τιμοδοσίες$\}$. Δείξτε ότι το πρόβλημα 3SAT-8 είναι NP-πλήρες.

β. (5%) Είναι δυνατόν να ισχύουν ταυτόχρονα οι προτάσεις 3SAT-8 $\in P$ και $P \neq NP$;

Θέμα 1-Απάντηση

1)Όχι διότι από την ταινία μπορεί να διαβάσει αποκλειστικά και μόνο χαρακτήρες που ανήκουν στο αλφάβητο ταινίας

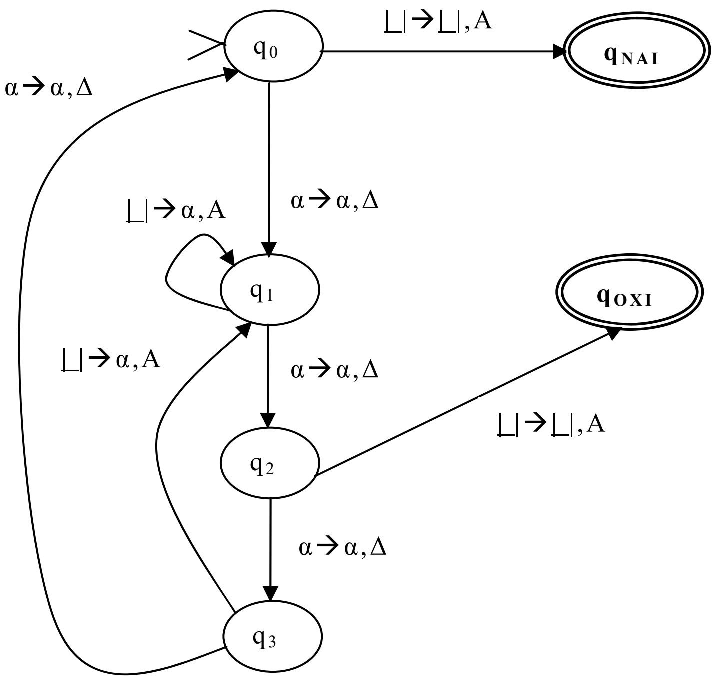
2)Ναι διότι μπορεί να βρίσκεται στην κατάσταση q_0 και διαβάζοντας ένα χαρακτήρα να παραμένει στην q_0 βάσει κάποιου κανόνα

3)Ποτέ διότι ένας (ντετερμινιστικός) διαγνώστης τερματίζει πάντα με οποιαδήποτε συμβολοσειρά εισόδου είτε στην κατάσταση αποδοχής ($q_{\text{ΝΑΙ}}$) είτε στην κατάσταση απόρριψης ($q_{\text{ΟΧΙ}}$)

4)Όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που να οδηγεί τη μηχανή στην κατάσταση αποδοχής (Μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing απορρίπτει την είσοδο της αν δεν υπάρχει κανένα μονοπάτι που να οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής)

5)Όταν υπάρχει για κάθε συμβολοσειρά εισόδου τουλάχιστον ένα μονοπάτι που να την οδηγεί είτε σε κατάσταση αποδοχής είτε σε κατάσταση απόρριψης.

Θέμα 2-Απάντηση



α. Η μηχανή δεν είναι διαγνώστης διότι με είσοδο τη συμβολοσειρά α εγκλωβίζεται.
β. Η γλώσσα που αναγνωρίζει η Μ είναι η (αααα)*

Παρατήρηση

- Η Μ αποδέχεται την κενή συμβολοσειρά
- Η Μ εγκλωβίζεται με τη συμβολοσειρά α
- Η Μ απορρίπτει τη συμβολοσειρά αα
- Η Μ εγκλωβίζεται με τη συμβολοσειρά ααα
- Η Μ αποδέχεται τη συμβολοσειρά αααα
- Η Μ εγκλωβίζεται με τη συμβολοσειρά ααααα
- Η Μ απορρίπτει τη συμβολοσειρά αααααα
- Η Μ εγκλωβίζεται με τη συμβολοσειρά ααααααα
- Η Μ αποδέχεται τη συμβολοσειρά αααααααα

Θέμα 3-Απάντηση

α.

- $ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM}$={<M>|η Μ είναι ΤΜ με L(M)=∅}
- $ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ_{TM}$={<M_1,M_2>|οι M_1,M_2 είναι ΤΜ και $L(M_1)=L(M_2)$}

β.

Δίνεται ότι $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM} \leq L \Rightarrow \overline{ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}} \leq \overline{L}$. Αφού η γλώσσα $\overline{ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}}$ είναι μη αναγνωρίσιμη, άρα και η $\overline{L}$ είναι μη αναγνωρίσιμη γλώσσα.
Δίνεται ότι Αφού $ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM} \leq L$. Αφού η γλώσσα $ΚΕΝΟΤΗΤΑ_{TM}$ είναι μη αναγνωρίσιμη, άρα και η L είναι μη αναγνωρίσιμη γλώσσα.

γ.

L={<M>| Η Μ είναι ΤΜ και εγκλωβίζεται με είσοδο την κενή συμβολοσειρά}

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα L είναι διαγνώσιμη, άρα ∃ διαγνώστης R γιαυτή. Θα κάνουμε αναγωγή από την $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$ στην L. Κατασκευάζουμε ΤΜ S:
S=″Με είσοδο <M, w> όπου w συμβολοσειρά και Μ ΤΜ

1. Κατασκευάζουμε μια ΤΜ Μ′

a. Με είσοδο x
b. Αν x≠"" απέρριψε
c. Αν x="" προσομοίωσε τη M με είσοδο w. Αν η M αποδεχτεί την w τότε εγκλωβίσου, αλλιώς αποδέξου

2. Τρέξε την R με είσοδο <M′>
3. Αν αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ
4. Αν απορρίψει ΑΠΕΡΡΙΨΕ″

Η MT S που κατασκευάσαμε είναι διαγνώστης της γλώσσας ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι η ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM} είναι μη διαγνώσιμη άρα και η L είναι μη διαγνώσιμη

<u>Θέμα 4-Απάντηση</u>

Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα 3SAT-8 είναι NP-πλήρες θα πρέπει:

α)Το 3SAT-8 να ανήκει στην κλάση NP

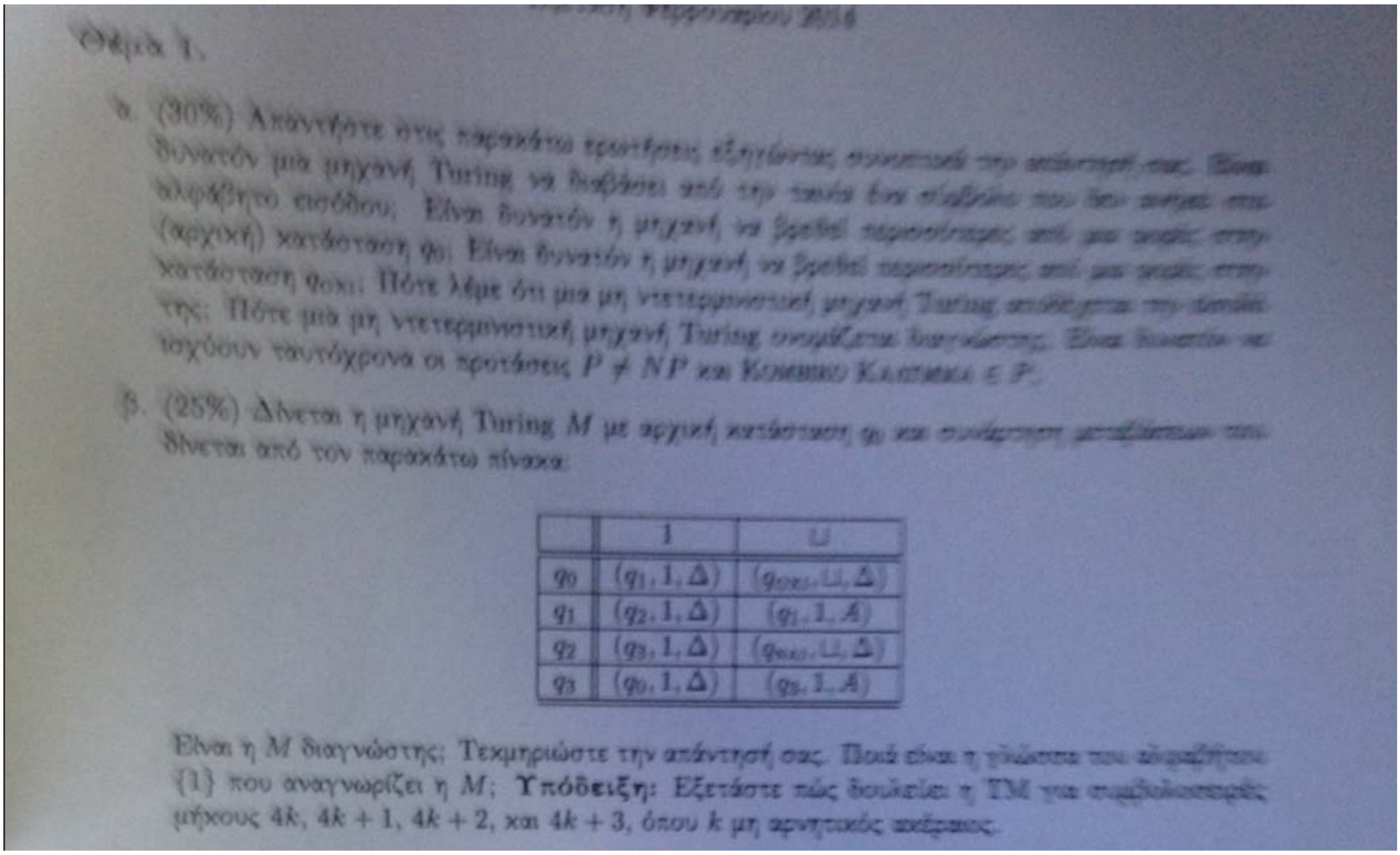
β)Οποιοδήποτε άλλο γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα να ανάγεται σε αυτό σε χρόνο πολυωνυμικό

Όσον αφορά την 1η προϋπόθεση το 3SAT-8 ανήκει στην κλάση NP καθώς με είσοδο ένα λογικό τύπο φ σε συζευκτική κανονική μορφή με 3 λεξιγράμματα ανά φράση και 8 αναθέσεις τιμών μπορούμε να επαληθεύσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν αυτές οι αναθέσεις τιμών είναι διαφορετικές μεταξύ τους και αν όντως επαληθεύουν το λογικό τύπο φ.
Όσον αφορά τη 2η προϋπόθεση θα ανάγουμε τη γλώσσα 3SAT στη γλώσσα 3SAT-8. Για κάθε λογικό τύπο φ με 3 λεξιγράμματα ανά φράση κατασκευάζουμε το λογικό τύπο φ′ προσθέτοντας μια φράση με 3 λεξιγράμματα στον φ, δηλαδή $\varphi' = \varphi \wedge (a \vee b \vee c)$ όπου οι μεταβλητές a, b, c δεν εμφανίζονται στον φ. Προφανώς η κατασκευή του φ′ γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το μέγεθος της εισόδου. Οι βασικές παρατηρήσεις για την απόδειξη ορθότητας της αναγωγής είναι:

- Αν ο φ είναι αληθεύσιμος, τότε υπάρχουν 8 διαφορετικές αναθέσεις τιμών για τις μεταβλητές που εμφανίζονται στον φ και τις επιπλέον μεταβλητές a, b, c. Αυτό προκύπτει αν πάρουμε μια ανάθεση που αληθοποιεί τον φ και τη συνδυάσουμε με τις 7 αναθέσεις τιμών που αληθοποιούν τη φράση $a \vee b \vee c$.
- Αν ο φ δεν είναι αληθεύσιμος, τότε δεν υπάρχει καμία αληθής ανάθεση για τον φ′

Συμπεραίνουμε ότι ο φ είναι αληθεύσιμος αν και μόνο αν ο φ′ έχει τουλάχιστον 8 διαφορετικές αληθείς τιμοδοσίες και ολοκληρώνεται η απόδειξη ορθότητας της αναγωγής.

<u>ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2014</u>



Θέμα 1.

α. (30%) Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις εξηγώντας συνοπτικά την απάντησή σας. Είναι δυνατόν μια μηχανή Turing να διαβάσει από την ταινία ένα σύμβολο που δεν ανήκει στο αλφάβητο εισόδου; Είναι δυνατόν η μηχανή να βρεθεί περισσότερες από μια φορές στην (αρχική) κατάσταση q_0; Είναι δυνατόν η μηχανή να βρεθεί περισσότερες από μια φορές στην κατάσταση $q_{οχι}$; Πότε λέμε ότι μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing αποδέχεται την είσοδό της; Πότε μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing ονομάζεται διαγνώστης; Είναι δυνατόν να ισχύουν ταυτόχρονα οι προτάσεις $P \neq NP$ και Κομβικο Καλυμμα $\in P$;

β. (25%) Δίνεται η μηχανή Turing M με αρχική κατάσταση q_0 και συνάρτηση μεταβάσεων που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	1	⊔
q_0	$(q_1, 1, \Delta)$	$(q_{οχι}, ⊔, \Delta)$
q_1	$(q_2, 1, \Delta)$	$(q_1, 1, A)$
q_2	$(q_3, 1, \Delta)$	$(q_{ναι}, ⊔, \Delta)$
q_3	$(q_0, 1, \Delta)$	$(q_3, 1, A)$

Είναι η M διαγνώστης; Τεκμηριώστε την απάντησή σας. Ποιά είναι η γλώσσα του αλφαβήτου $\{1\}$ που αναγνωρίζει η M; **Υπόδειξη:** Εξετάστε πώς δουλεύει η TM για συμβολοσειρές μήκους $4k$, $4k+1$, $4k+2$, και $4k+3$, όπου k μη αρνητικός ακέραιος.

<u>Θέμα 1-Απάντηση</u>

α.

1)**Ναι** διότι μπορεί να διαβάσει από την ταινία το σύμβολο του κενού το οποίο δεν ανήκει στο αλφάβητο εισόδου

2)**Ναι** διότι μπορεί να βρίσκεται στην κατάσταση q_0 και διαβάζοντας ένα χαρακτήρα να παραμένει στην q_0 βάσει κάποιου κανόνα

3)**Όχι** γιατί η κατάσταση $q_{οχι}$ είναι τελική κατάσταση και δεν μπορεί να βρεθεί 2 φορές σε μια τελική κατάσταση

4)Όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που να οδηγεί στην κατάσταση αποδοχής (Μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing απορρίπτει την είσοδο της αν δεν υπάρχει κανένα μονοπάτι που να οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής)

5)Όταν υπάρχει για κάθε συμβολοσειρά εισόδου τουλάχιστον ένα μονοπάτι που να την οδηγεί είτε σε κατάσταση αποδοχής είτε σε κατάσταση απόρριψης.

6)Επειδή το πρόβλημα ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ είναι NP-πλήρες οποιοδήποτε NP-πλήρες πρόβλημα ανάγεται στο ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ σε χρόνο πολυωνυμικό. Αν ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ $\in$ P τότε οποιοδήποτε άλλο πρόβλημα από την κλάση NP λύνεται επίσης σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως δεν γίνεται το ΚΟΜΒΙΚΟ ΚΑΛΥΜΜΑ ε P και $P \neq NP$.

β.
Η μηχανή δεν είναι διαγνώστης γιατί με είσοδο το 1 εγκλωβίζεται
Η γλώσσα που αναγνωρίζει είναι η 11(1111)*

Θέμα 2.

α. (10%) Δείξτε ότι η γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ δεν είναι απεικονιστικά αναγώγιμη στην ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ.

β. (25%) Δείξτε ότι η γλώσσα

$$L = \{\langle M, q\rangle : \text{η } M \text{ είναι TM και φτάνει στην κατάσταση } q \text{ ξεκινώντας με οποιαδήποτε είσοδο}\}$$

δεν είναι διαγνώσιμη. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε αναγωγή και οποιοδήποτε γνωστό αποτέλεσμα μη διαγνωσιμότητας σας βολεύει.

<u>Θέμα 2-Απάντηση</u>

α. Έστω ότι η ΑΠΟΔΟΧΗ$_{TM}$ ανάγεται στην ΚΕΝΟΤΗΤΑ$_{TM}$ δηλ έστω ότι ισχύει: ΑΠΟΔΟΧΗ$_{TM}$ $\leq_m$ΚΕΝΟΤΗΤΑ$_{TM}$, Από τις ιδιότητες της αναγωγής θα ισχύει ότι $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}} \leq_m \overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}}$. Γνωρίζουμε ότι η γλώσσα $\overline{\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{TM}}$ είναι μη αναγνωρίσιμη, άρα τότε και η γλώσσα $\overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}}$ θα είναι επίσης μη αναγνωρίσιμη. Αυτό είναι άτοπο διότι η γλώσσα $\overline{\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{TM}}$ είναι αναγνωρίσιμη.

β.
Υποθέτουμε ότι η γλώσσα L είναι διαγνώσιμη, άρα υπάρχει διαγνώστης R γιαυτή. Θα κάνουμε αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ$_{TM}$ στην L. Κατασκευάζουμε TM S:
S=″Με είσοδο <M,w> όπου M TM και w συμβολοσειρά

1. Κατασκεύασε μια νέα TM M′
   a. Με είσοδο z
   b. προσομοίωσε τη M με είσοδο w. Αν η M αποδεχτεί το w τότε φτάσε στην q_{NAI} αλλιώς εγκλωβίσου
2. Τρέξε την R με είσοδο <M′, q_{NAI}>
3. Αν αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ
4. Αν απορρίψει ΑΠΕΡΡΙΨΕ″

Η MT S που κατασκευάσαμε είναι διαγνώστης της γλώσσας ΑΠΟΔΟΧΗ$_{TM}$. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι η ΑΠΟΔΟΧΗ$_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη, άρα και η L είναι μη διαγνώσιμη

Θέμα 3.

(25%) Έστω ΑΡΚΕΤΑ ΜΕΓΑΛΗ ΚΛΙΚΑ = $\{\langle G\rangle$: το G είναι μη κατευθυνόμενο γράφημα που εμπεριέχει μια κλίκα με $n/3$ ή περισσότερους κόμβους, όπου n το πλήθος όλων των κόμβων$\}$. Δείξτε ότι το πρόβλημα ΑΡΚΕΤΑ ΜΕΓΑΛΗ ΚΛΙΚΑ είναι NP-πλήρες. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε (απεικονιστική) αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου και οποιοδήποτε γνωστό αποτέλεσμα NP-πληρότητας σας βολεύει.

<u>Θέμα 3-Απάντηση</u>

Θέλουμε να δείξουμε ότι το πρόβλημα ΑΡΚΕΤΑ ΜΕΓΑΛΗ ΚΛΙΚΑ είναι NP-πλήρες. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να αποδείξουμε 2 συνθήκες:

- Το πρόβλημα ΑΡΚΕΤΑ ΜΕΓΑΛΗ ΚΛΙΚΑ ανήκει στην κλάση NP
- Κάποιο άλλο γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα μπορεί να αναχθεί στο ΑΡΚΕΤΑ ΜΕΓΑΛΗ ΚΛΙΚΑ σε χρόνο πολυωνυμικό

Α Συνθήκη:
Κατασκευάζουμε μια μηχανή Turing V η οποία επαληθεύει το πρόβλημα σε χρόνο πολυωνυμικό ως εξής:

V=”Με είσοδο <(G(V, E), K,) όπου G γράφημα, V σύνολο των κορυφών του G, E σύνολο των ακμών του και K κλίκα

1. Εξετάζουμε αν το μέγεθος του K είναι μεγαλύτερο ή ίσο από n/3. Αν ναι συνεχίζουμε αλλιώς απορρίπτουμε

2. Εξετάζουμε αν οι K κόμβοι του συνόλου S αποτελούν κόμβους του γραφήματος G. Αν ναι ΑΠΟΔΕΧΟΜΑΣΤΕ αλλιώς απορρίπτουμε"

Η MT V επαληθεύει το πρόβλημα ΑΡΚΕΤΑ ΜΕΓΑΛΗ ΚΛΙΚΑ σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το πλήθος των κορυφών του γραφήματος άρα ανήκει στην NP.

Β Συνθήκη:
Θα κάνουμε αναγωγή από ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα και συγκεκριμένα από το πρόβλημα της ΚΛΙΚΑΣ στο πρόβλημα του ΑΡΚΕΤΑ ΜΕΓΑΛΗ ΚΛΙΚΑ. Για να κάνουμε αυτή την αναγωγή πρώτα να κατασκευάσουμε ένα στιγμιότυπο του ΑΡΚΕΤΑ ΜΕΓΑΛΗ ΚΛΙΚΑ από ένα στιγμιότυπο της ΚΛΙΚΑΣ.. Ξεκινάμε από το γράφημα G και κατασκευάζουμε ένα κλίκα μεγέθους τουλάχιστον n/3 κόμβους. Το γράφημα G' που έχει την κλίκα ανήκει προφανώς στο σύνολο ΑΡΚΕΤΑ ΜΕΓΑΛΗ Αντίστροφα αν έχουμε ένα στιγμιότυπο G' του προβλήματος ΑΡΚΕΤΑ ΜΕΓΑΛΗ ΚΛΙΚΑ τότε προσθέτοντας και άλλους κόμβους ώστε το πλήθος των κόμβων να γίνει n θα κατασκευάσουμε γράφημα G που ανήκει στην ΚΛΙΚΑ

Η αναγωγή γίνεται σε χρόνο πολυωνυμικό άρα **ΚΛΙΚΑ≤ΑΡΚΕΤΑ ΜΕΓΑΛΗ ΚΛΙΚΑ**

Πιθανά Θέματα

Άσκηση 1

Έστω ότι T={<M>| η M είναι TM που αποδέχεται τη w^R όποτε αποδέχεται τη w}. Δείξτε ότι η T είναι μη διαγνώσιμη.

Λύση

Έστω ότι η T είναι διαγνώσιμη και R ο διαγνώστης γιαυτή. Θα κατασκευάσουμε TM S που διαγιγνώσκει την ΑΠΟΔΟ-$ΧΗ_{TM}$={<M,w>|η M είναι TM που αποδέχεται την w}.

S=″Με είσοδο <M,w> όπου M TM και w συμβολοσειρά

1. Κατασκεύασε μια TM M′:

    a. Με είσοδο z

    b. Αν z≠01 και z≠10 ΑΠΕΡΡΙΨΕ

    c. Αν z=01 ΑΠΟΔΕΞΟΥ

    d. Αν z=10 προσομοίωσε την M με είσοδο w αν η M αποδεχτεί τότε ΑΠΟΔΕΞΟΥ αλλιώς ΕΓΚΛΩΒΙΣΟΥ

2. Τρέξε τον R με είσοδο <M′>

3. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ

4. Αν απορρίψει ΑΠΕΡΡΙΨΕ″

Άσκηση 2

Δείξτε ότι αν η A είναι αναγνωρίσιμη και $A \leq_m \overline{A}$ τότε η A είναι διαγνώσιμη

Λύση

Όταν $A \leq_m \overline{A}$ τότε και $\overline{A} \leq_m A$. Επειδή η A αναγνωρίσιμη προκύπτει ότι και η $\overline{A}$ είναι αναγνωρίσιμη από τις ιδιότητες της αναγωγής. Αφού λοιπόν η A και η $\overline{A}$ είναι αναγνωρίσιμες, άρα η A είναι διαγνώσιμη.

Άσκηση 3 (3.18 Sipser)

Άσκηση 3.18 (Sipser). Δείξτε ότι μια γλώσσα είναι διαγνώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει απαριθμητής που να την απαριθμεί με λεξικογραφική σειρά.

Λύση:

$\Longrightarrow$ Αν μία γλώσσα Λ είναι διαγνώσιμη τότε υπάρχει μία TM M_Λ που την διαγιγνώσκει. Θα κατασκευάσουμε ένα λεξικογραφικό απαριθμητή E_Λ που να απαριθμεί τη Λ λεξικογραφικά.

Η E_Λ:

1. Παράγουμε λεξικογραφικά όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$.
2. Πάρε την τρέχουσα λέξη w:
   a. Εκτέλεσε την M_Λ σε είσοδο w
   b. Αν η M_Λ αποδεχθεί τότε εκτύπωσε την w. Αν απορρίψει συνέχισε με το επόμενο w.

Δεδομένης της λεξικογραφικής διάταξης με την οποία παράγουμε τα w ο E_Λ απαριθμεί λεξικογραφικά την Λ.

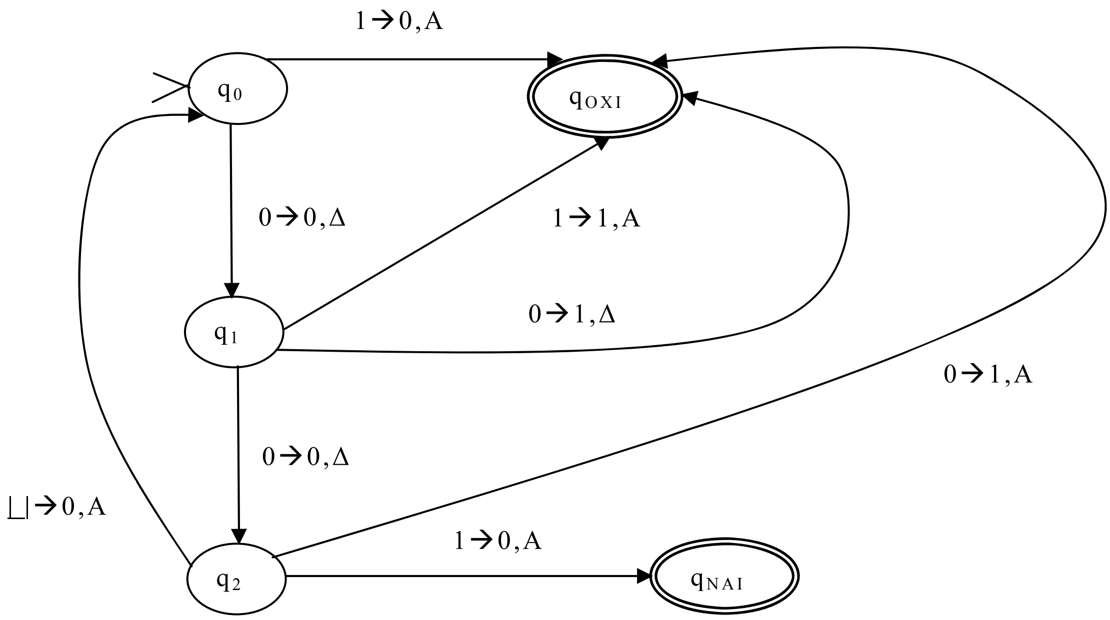
$\Longleftarrow$ Για να φτιάξουμε το διαγνωστή M_Λ από τον λεξικογραφικό απαριθμητή E_Λ θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι οι λέξεις είναι λεξικογραφικά παραγμένες από τον E_Λ. Για παράδειγμα, αν ισχύει $w < q$ (όπου το < είναι σε σχέση με τη λεξικογραφική διάταξη), για δύο λέξεις $w, q \in \Sigma^*$, τότε αποκλείεται η λέξη w να βρίσκεται στις λέξεις που θα εκτυπωθούν μετά την q.

Η M_Λ για είσοδο $\langle w \rangle$

1. Εκτέλεσε την E_Λ και για κάθε παραγόμενη έξοδο u:
   a. Αν $w > u$ συνέχισε με την επόμενη έξοδο της E_Λ
   b. Αν $w = u$ ΑΠΟΔΟΧΗ
   c. Αν $w < u$ ΑΠΟΡΡΙΨΗ

Άσκηση 4

α)Είναι η ακόλουθη μηχανή διαγνώστης;
β)Ποια η γλώσσα που αναγνωρίζει η μηχανή;



Λύση

α)Με είσοδο 00 εγκλωβίζεται, άρα δεν είναι διαγνώστης
β)Η γλώσσα είναι 001(0∪1)*

Άσκηση 4 (2.8 Sipser)

Έστω A={<M_1>, <M_2>,…} μια αναγνωρίσιμη γλώσσα η οποία αποτελείται από περιγραφές μηχανών Turing που αποτελούν διαγνώστες. Αποδείξτε ότι υπάρχει διαγνώσιμη γλώσσα D που δεν διαγιγνώσκεται από κανένα εκ των διαγνωστών που περιλαμβάνει η A.

Λύση

Θα το αποδείξουμε με άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι κάθε διαγνώστης ανήκει στην A. Επειδή η A είναι Turing αναγνωρίσιμη, τότε η A είναι και απαριθμήσιμη. Έστω M_i ο i-οστός διαγνώστης στην A. Μπορούμε να κατασκευάσουμε τον ακόλουθο διαγνώστη M_D ως εξής:

M_D ="Με είσοδο w

1. αποφάσισε τον αριθμό σειράς του w δηλ. αν w=x_i τότε ο δείκτης του w πρέπει να είναι i
2. Αποδέξου x_i αν η M_i Απορρίψει και Απέρριψε αν η M_i Αποδεχτεί

Προφανώς η M_D είναι διαγνώστης διότι όπως από φαίνεται από τα βήματα 1 και 2 πάντα τερματίζει. Η M_D είναι διαφορετική από κάθε M_i στην A το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι κάθε διαγνώστης είναι στην A.

Για να δείξουμε ότι η M_D είναι διαφορετική από κάθε M_i στην A έστω S={x_1, x_2,x_3} μια λίστα όλων των συμβολοσειρών σε μια κανονική σειρά ταξινόμησης (πρώτα κατά μέγεθος και μετά αλφαβητικά). Τότε η M_D μπορεί να προκύψει εφαρμόζοντας τη μέθοδο της διαγωνοποίησης όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

	x_1	x_2	x_3	…….
M_1	ΑΠΕΡΡΙΨΕ	ΑΠΟΔΕΞΟΥ	ΑΠΟΔΕΞΟΥ	
M_2	ΑΠΟΔΕΞΟΥ	ΑΠΟΔΕΞΟΥ	ΑΠΟΔΕΞΟΥ	
M_3	ΑΠΕΡΡΙΨΕ	ΑΠΟΔΕΞΟΥ	ΑΠΕΡΡΙΨΕ	
……				
M_D	ΑΠΟΔΕΞΟΥ	ΑΠΕΡΡΙΨΕ	ΑΠΟΔΕΞΟΥ	

Προφανώς η D είναι διαφορετική από κάθε γλώσσα που αποφασίζεται από τον M_i του οποίου η περιγραφή εμφανίζεται στην A.