TP4 - correction

Exercice 1

a.

```r
echantillon <- rnorm(30, 10, 2)
```

b.

(a)

L'estimateur de l'espérance par excellence est la moyenne d'échantillon. Son expression est :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

(b)

Sa réalisation sur notre échantillon est :

```r
xbar <- mean(echantillon)
xbar
```

```
## [1] 10.27633
```

Sa valeur est différente de l'espérance théorique. C'est une estimation basée sur l'échantillon généré. Cette différence est dûe aux *fluctuations d'échantillonage*.

(c)

L'estimateur de la variance est la variance d'échantillon. Son expression est :

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

(d)

Sa réalisation est :

```r
S2 <- sum( (echantillon-xbar)**2 )/30
S2
```

```
## [1] 3.823791
```

Même remarque que précédemment.

(e)

On peut montrer que cet estimateur est biaisé. Son espérance ne vaut pas la valeur du paramètre recherché, mais :

$$\mathbb{E}(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

On peut corriger cet estimateur :

$$S_c^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

Sa réalisation est :

```r
Sc2 <- sum( (echantillon-xbar)**2 )/29
Sc2
```

```
## [1] 3.955646
```

On peut montrer que :

$$\mathbb{E}(S_c^2) = \sigma^2$$

Cet estimateur de la variance n'est pas biaisé. Il est préférable au précédent.

c.

(a)

En toute généralité, cet intervalle pour μ au niveau de confiance $1-\alpha$ s'écrit :

$$\left]\overline{X} + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_c}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_c}{\sqrt{n}}\right[$$

(b)

Construisons l'intervalle de confiance pour l'espérance aux niveaux demandés.

```r
alpha <- c(0.1,0.05,0.01)

BI <- xbar + sqrt(Sc2)*qt(alpha/2, 29)/sqrt(30)
BS <- xbar + sqrt(Sc2)*qt(1-alpha/2, 29)/sqrt(30)

ICs <- cbind(alpha,BI,BS)
ICs
```

```
##      alpha       BI       BS
## [1,]  0.10 9.659343 10.89331
## [2,]  0.05 9.533667 11.01899
## [3,]  0.01 9.275433 11.27722
```

On observe qu'une grande confiance implque un grand intervalle de confiance.

(c)

L'estimation $\overline{X}$ de μ se situe *toujours* dans l'intervalle de confiance. La plupart du temps (avec une proba $1-\alpha$), l'espérance est contenue dans l'intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ (dépend des fluctuations d'échantillonnage).

(d)

En toute généralité, cet intervalle pour σ^2 au niveau de confiance $1-\alpha$ s'écrit :

$$\left](n-1)\frac{S_c^2}{k_{1-\alpha/2}}\ ;\ (n-1)\frac{S_c^2}{k_{\alpha/2}}\right[$$

Construisons l'intervalle de confiance pour la variance aux niveaux demandés.

```r
BI <- 29*var(echantillon)/qchisq(1-alpha/2, 29)
BS <- 29*var(echantillon)/qchisq(alpha, 29)

cbind(alpha,BI,BS)
```

```
##      alpha       BI       BS
## [1,]  0.10 2.695534 5.803077
## [2,]  0.05 2.508924 6.477940
## [3,]  0.01 2.191887 8.046442
```

L'estimation S_c^2 de σ^2 se situe *toujours* dans l'intervalle de confiance. La plupart du temps (avec une proba $1-\alpha$), la variance théorique est contenue dans l'intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ (dépend des fluctuations d'échantillonnage).

d.

- Pour l'espérance :

La statistque du test s'écrit

$$T = \sqrt{n}\frac{\mu - \overline{X}}{S_c}$$

et on peut montrer que sous H_0, elle suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté : $T \sim_{H_0} t(n-1)$.

Le quantile de niveau α d'une loi $\mathcal{L}$ suivie par une variable aléatoire X est défini par :

$$\mathbb{P}(X \leqslant q_\alpha) = \alpha$$

Il en découle que sous H_0 :

$$\mathbb{P}_{H_0}(u_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant T \leqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

On va exploiter cet encadrement pour retrouver l'expression de l'intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$:

$$u_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \sqrt{n}\frac{\mu - \overline{X}}{S_c} \leqslant u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{S_c}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \mu - \overline{X} \leqslant \frac{S_c}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\overline{X} - \frac{S_c}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + \frac{S_c}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

- Pour la variance :

La statistique du test s'écrit

$$K = \frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2}$$

et on peut montrer que sous H_0, K suit une loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté : $K \sim_{H_0} \chi^2(n-1)$.

On peut donc l'encadrer par des quantiles bien choisis :

$$\mathbb{P}(k_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant K \leqslant k_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

De la même manière que précédemment, on exploite cet encadrement.

$$k_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2} \leqslant k_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{k_{\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)S_c^2} \leqslant \frac{1}{\sigma^2} \leqslant \frac{k_{1-\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)S_c^2}$$

$$\frac{(n-1)S_c^2}{k_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S_c^2}{k_{\frac{\alpha}{2}}}$$

Réaliser un test statistique, c'est vérifier l'appartenance ou non d'une statistique à une région d'acceptation. Ceci est équivalent à vérifier l'appartenance ou non d'une valeur testée à un intervalle de confiance.

Exercice 3

```
masses.cp <- as.numeric(unlist(strsplit("0.81 0.84 0.83 0.80 0.85 0.86 0.85 0.83 0.84 0.80", split = "

n <- length(masses.cp)
```

1. Le cahier des charges impose une masse moyenne de $\mu_0 = 0,83g$. On souhaite par conséquent tester les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 0,83 \\ H_1 &: \mu \neq 0,83 \end{aligned}$$

On dispose de trois méthodes :

- On calcule la statistique T et on la compare à la région d'acceptation délimitée par les quantiles de la loi de Student $t(n-1)$ aux niveaux $\frac{\alpha}{2}$ et $1-\frac{\alpha}{2}$ après avoir choisi un seuil de significativité α raisonnable (typiquement 5%).
- On calcule les bornes de l'intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ après avoir choisi un seuil de significativité α raisonnable (typiquement 5%).
- On calcule la $p-$valeur associée et on la compare à un seuil de significativité α raisonnable (typiquement 5%).

Ces trois méthodes donneront toujours la même conclusion si elles sont réalisées avec la même valeur pour α.

2. Réalisons les trois méthodes.

- Statistique/quantiles

La statistique se calcule suivant la formule :

$$T = \sqrt{n}\frac{\mu_0 - \overline{X}}{S_c}$$

On trouve alors pour $\alpha = 5\%$:

```
alpha <- 0.05

t <- sqrt(n)*(0.83 - mean(masses.cp))/sd(masses.cp)
c(qt(alpha/2, n-1), t, qt(1-alpha/2, n-1))
```

```
## [1] -2.2621572 -0.1483405  2.2621572
```

La réalisation t de la statistique T se trouve entre les quantiles aux niveaux $\frac{\alpha}{2}$ et $1-\frac{\alpha}{2}$. Formellement, on a l'encadrement :

$$u_{\frac{\alpha}{2}} < T < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

où u désigne le quantile adapté.

Le test n'est donc pas significatif. On conserve l'hypothèse nulle H_0.

- Intervalle/valeur

L'intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ se calcule suivant les formules :

$$\left]\overline{X}+\frac{S_c}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\ ;\ \overline{X}+\frac{S_c}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right[$$

Au niveau de confiance $0,95$, on trouve :

```
BI <- mean(masses.cp) + sd(masses.cp)*qt(alpha/2, n-1)/sqrt(n)
BS <- mean(masses.cp) + sd(masses.cp)*qt(1-alpha/2, n-1)/sqrt(n)

c(BI, 0.83, BS)
```

```
## [1] 0.8157502 0.8300000 0.8462498
```

Formellement, on a :

$$\mu_0 \in \left]\overline{X}+\frac{S_c}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\ ;\ \overline{X}+\frac{S_c}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right[$$

La valeur testée se trouve dans l'intervalle de confiance. Le test n'est pas significatif, on conserve l'hypothèse nulle H_0.

- Statistique/$p-$valeur

La $p-$valeur est la probabilité, conditionnellement à l'hypothèse nulle (en d'autres termes : on suppose que H_0 est vérifiée), que la statistique prenne une valeur au moins aussi extrême que celle observée. Elle correspond donc à la vraisemblance de l'échantillon vis-à-vis de l'hypothèse nulle.

Point épistémologie : notons t la réalisation (valeur numérique) de la statistique T. Formellement, la $p-$valeur s'écrit ici :

$$p_{val}=\mathbb{P}(T<-t\mid H_0)+\mathbb{P}(T>t\mid H_0)=2\times\mathbb{P}(T>t\mid H_0)$$

C'est donc une probabilité qui porte sur la réalisation de la statistique (ou de l'échantillon). L'erreur à ne *jamais* faire est de la confondre avec :

$$\mathbb{P}(H_0\mid T=t)$$

ou toute variation de cette expression avec H_0 en premier. Celles-ci correspondent à la probabilité que l'hypothèse nulle soit vraie, au regard des données observées. Il s'agit donc de la *plausibilité* de l'hypothèse H_0.

Voici un petit exemple pour ne pas confondre les deux :

> J'ai réussi tous mes examens alors que je portais une patte de lapin autour du cou.
>
> Si ma patte de lapin porte bonheur, alors il est normal que j'aie réussi mes examens. L'hypothèse est vraisemblable puisqu'elle expliquerait mes résultats *si elle était vraie* : $\mathbb{P}(observation\mid H_0)$ élevée.

En revanche, il est beaucoup moins plausible que ma patte de lapin ait fonctionné que, disons, mes révisions et mon travail personnel : on réussit plus probablement ses examens en travaillant qu'en s'en remettant à des grigri, donc $\mathbb{P}(H_0 \mid \textit{observation})$ faible.

On peut calculer la $p-$valeur en utilisant la *formule d'inversion* déjà évoquée :

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant x) = 1 - F_X(x)$$

donc :

$$p_{val} = 2 \times (1 - F_T(|t|))$$

On calcule :

```
2 * ( 1 - pt(abs(t), n-1) )
```

```
## [1] 0.8853445
```

On retrouve cette valeur, ainsi que cette de t et l'intervalle de confiance, à l'aide de la fonction `t.test` :

```
t.test(masses.cp, mu = 0.83, conf.level = 0.95)
```

```
##
##  One Sample t-test
##
## data:  masses.cp
## t = 0.14834, df = 9, p-value = 0.8853
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 0.83
## 95 percent confidence interval:
##  0.8157502 0.8462498
## sample estimates:
## mean of x
##     0.831
```

Ici, la $p-$valeur est bien supérieure au seuil de significativité $\alpha = 0.05$. Le test n'est pas significatif, on conserve l'hypothèse nulle H_0.

Voici une aide-mémoire pour retenir les caractéristiques de ces trois méthodes.

méthode	critère	conclusion	décision
Statistique/quantiles	$T \in]u_{\frac{\alpha}{2}} ~;~ u_{1-\frac{\alpha}{2}}[$	non-significatif	H_0
	$T \notin]u_{\frac{\alpha}{2}} ~;~ u_{1-\frac{\alpha}{2}}[$	significatif	H_1
Intervalle de confiance/valeur	$\mu_0 \in \left]\overline{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_c}{\sqrt{n}} ~;~ \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_c}{\sqrt{n}}\right[$	non-significatif	H_0
	$\mu_0 \notin \left]\overline{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_c}{\sqrt{n}} ~;~ \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_c}{\sqrt{n}}\right[$	significatif	H_1
$p -$ valeur	$p \leqslant \alpha$	non-significatif	H_0
	$p < \alpha$	significatif	H_1

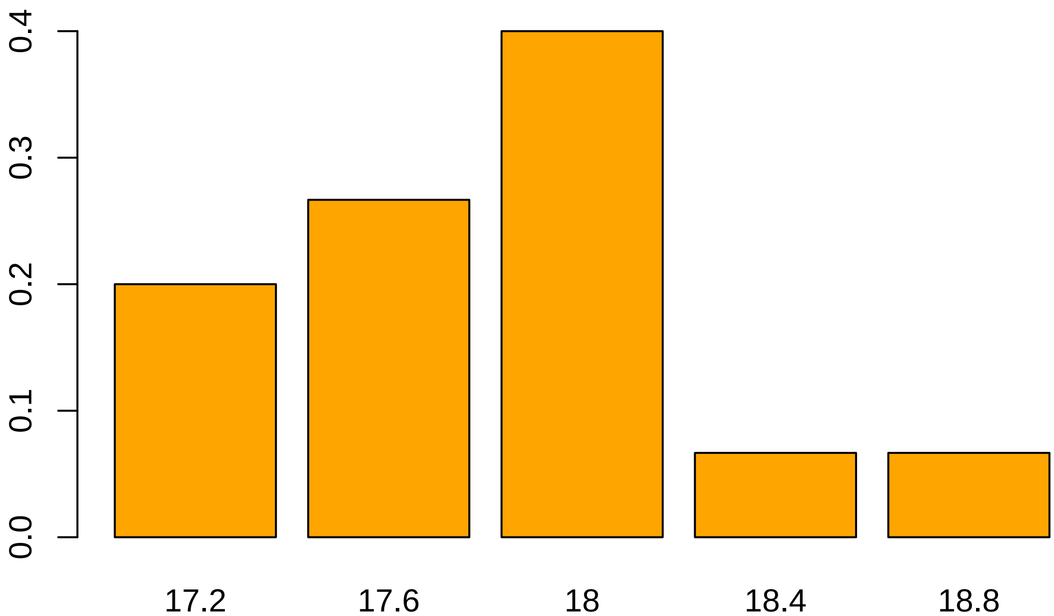
Exercice 4

On commence par reproduire des données brutes en accord avec le tableau fourni.

```
centres <- seq(17.2, 18.8, .4)
effectifs <- c(6, 8, 12, 2, 2)
donnees <- rep(centres, effectifs)
```

Il s'agit d'un tableau d'effectifs relatif à une subdivision par classes d'une variable quantitative. Une bonne représentation est un diagramme à barres accolées.

```
barplot(height = effectifs/sum(effectifs),
        names.arg = centres,
        col = 'orange')
```



On va tester au seuil de significativité $\alpha = 0.05$ les hypothèses suivantes :

$$H_0 \ : \ \mu = 18$$
$$H_1 \ : \ \mu \neq 18$$

```
t.test(donnees, mu = 18, conf.level = 0.95)
```

```
##
##  One Sample t-test
##
## data:  donnees
## t = -2.3113, df = 29, p-value = 0.02812
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 18
## 95 percent confidence interval:
##  17.64816 17.97851
## sample estimates:
## mean of x
##  17.81333
```

La $p-$valeur vaut environ 0.028, ce qui est inférieur au seuil de significativité. Le test est donc significatif, et on rejette l'hypothèse nulle H_0 au profit de l'hypothèse alternative H_1. On décide que le bijoutier est en infraction.

On remarque que si on avait exigé un niveau de confiance plus élevé, par exemple $1 - \alpha = 99\%$, on aurait conclu l'innocence du bijoutier puisqu'alors $0.028 \simeq p_{val} > \alpha = 0.01$.