Fiche TP 3 : Probabilités avec

1 Variables aléatoires

Étudions tout d'abord comment s'utilise la loi normale sous `R`. Cette dernière est désignée par `norm`. Nous pouvons obtenir différents résultats concernant cette loi par :

- ⋆ `dnorm()` avec `d` pour densité, qui représente la fonction de densité de probabilité de la loi normale ;

- ⋆ `pnorm()` avec `p` pour probabilité, muni de l'option `lower.tail=TRUE`, qui représente la fonction de répartition de la loi normale :

$$x \mapsto \mathbb{P}(U \leqslant x), \quad \text{avec } U \sim \mathcal{N}(0,1);$$

- ⋆ `pnorm()` muni de l'option `lower.tail=FALSE`, qui représente la fonction :

$$x \mapsto \mathbb{P}(U > x), \quad \text{avec } U \sim \mathcal{N}(0,1);$$

- ⋆ `qnorm()` avec `q` pour quantile, qui représente la fonction réciproque de la fonction de répartition de la loi normale ;

- ⋆ `rnorm()` avec `r` pour random (aléatoire, du vieux français aller à randon, comme dans une randonnée), qui représente la fonction permettant de faire des tirages aléatoires selon une loi normale.

Pour d'autres lois de probabilités usuelles, on remplace `norm` par la dénomination `R` allouée. Le tableau ci-dessous indique les dénominations des lois les plus courantes :

Loi	Dénomination `R`	Paramètres
Normale	`norm`	mean,sd
Binomiale	`binom`	size,prob
Géométrique	`geom`	prob
Poisson	`pois`	lambda
Exponentielle	`exp`	rate
Khi-deux	`chisq`	df
Student	`t`	df
Fisher	`f`	df1,df2

D'une manière générale, si `xxx` désigne sous `R` une loi de probablité alors `dxxx`, `pxxx`, `qxxx` et `rxxx` représentent respectivement la fonction de densité de probablité (ou simplement les probabilités pour des variables discrètes), la fonction de répartition, la réciproque de cette dernière (pour les quantiles) et la fonction de génération aléatoire de cette loi.

2 Exercices

Exercice 1 Dans les expériences suivantes, reconnaître la loi de $\mathbf{X}$ et préciser ses paramètres ainsi que l'image de $\mathbf{X}$:

1. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On en choisit 5 au hasard que l'on aligne afin de former un mot de 5 lettres. $\mathbf{X}$ est le nombre de voyelles dans ce mot.
2. On range 20 objets dans 3 tiroirs. $\mathbf{X}$ est le nombre d'objets dans le premier tiroir.
3. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. $\mathbf{X}$ est le nombre de bosses.
4. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et sans remise 10 boules de l'urne. $\mathbf{X}$ est le nombre de boules vertes tirées.
5. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de cœur. $\mathbf{X}$ est le nombre de cartes que l'on a retournées.
6. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. $\mathbf{X}$ est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
7. On forme un jury de 6 individus choisis au hasard dans un groupe composé de 5 hommes et 4 femmes. $\mathbf{X}$ est le nombre de femmes dans ce jury.
8. On suppose que 1% des trêfles possèdent quatre feuilles. On cueille 100 trêfles. $\mathbf{X}$ est le nombre de trêfles à quatre feuilles cueillis.

Exercice 2

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 avec la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 1/3)$?
2. Donner toutes les probabilités associées à la loi $\mathcal{B}(10, 1/3)$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de 45 et strictement moins de 55 avec la loi binomiale $\mathcal{B}(100, 1/2)$?
4. Une pièce de monnaie déséquilibrée donne Pile 6 fois sur 10. Lors d'une séquence de lancers de cette pièce, quelle est la probabilité que Face apparaisse pour la première fois au 4$^{\text{ème}}$ lancer ? Pour cela, on utilisera la fonction `dgeom` puis on comparera avec la probabilité calculée à la main. Que remarquez-vous ?
5. Quelle est la probabilité de dépasser strictement 4 pour une loi de Poisson de paramètre 2.7 ?
6. Donner un échantillon aléatoire simple de 10 valeurs de la loi $\mathcal{P}(2.7)$.

Exercice 3

1. À l'aide de la calculatrice `R`, calculer la valeur de la densité de la loi exponentielle $\mathcal{E}(0.7)$ au point 1.6. Comparer avec la valeur obtenue grâce à la fonction `dexp`.

2. De la même manière, calculer de deux façons différentes $\mathbb{P}(Y < 1.6)$, où $Y \sim \mathcal{E}(0.7)$.

3. Quelle est la probabilité de dépasser 1.96 pour la loi normale centrée réduite ?

4. Quel est le quantile d'ordre 0.975 de la loi normale centrée réduite ?

Exercice 4 La proportion des groupes sanguins en France est environ :

$$A : 44\%, \quad B : 13\%, \quad AB : 3\%, \quad O : 40\%$$

On considère la répartition des groupes sanguins dans un groupe de 50 étudiants.

1. Donner la loi exacte de la v.a. X égale au nombre d'étudiants du groupe O. Afficher avec `R` toutes les probabilités assoicées.

2. Donner la loi exacte de la v.a. Y égale au nombre d'étudiants du groupe AB. Afficher avec `R` toutes les probabilités associées.

3. Calculer $\mathbb{P}(Y \leq 4)$, $\mathbb{P}(Y \geq 3)$, l'espérance et la variance de Y en utilisant le logiciel `R`.

Exercice 5
Chez les hommes d'une certaine population, le tour de cou (en cm) est une variable aléatoire de loi normale de moyenne 37,75 et d'écart type 2,5. Un fabricant de chemises pour hommes propose 5 tailles selon le tour de cou comme suit :

taille	tour de cou (en cm)
XS	32,5 - 35
S	35 - 37,5
M	37,5 - 40
L	40 - 42,5
XL	42,5 - 45

1. Quelle proportion de chemises faut-il fabriquer dans chaque taille ?

2. Quelle proportion de la population n'aura pas de chemises correspondantes à sa taille ?

Exercice 6

1. On propose de comparer un échantillon de taille 1000 de loi $\mathcal{B}(20, 0.4)$. C'est ce que fait le code suivant :

```
n <- 20
p <- 0.4
tailleEchantillon <- 1000
echantillon<-rbinom(tailleEchantillon,n,p)
```

```
tabEffectifs<-NULL
x <- 0:n
for (i in x)  {tabEffectifs <- c(tabEffectifs,length(echantillon[echantillon==i]))}
print(table(echantillon,deparse.level=2))
tabFrequences<-tabEffectifs/tailleEchantillon
layout(matrix(1:2,1,2))
plot(x, tabFrequences, type = "h", lwd = 5, ylab = "freq(k)", lend ="square")
y2 <- dbinom(x, size=n, prob=p)    # évalue les probas
plot(x, y2, type = "h", lwd = 5, ylab = "P(X=k)", lend ="square")
x <- seq(0,19,0.1)
y <- dnorm(x,20*0.4,sqrt(20*0.4*0.6))
lines(x,y,col='red')
```

Expliquez les trois dernières lignes !

2. En suivant le modèle précédent, comparer une loi $\mathcal{B}(n,p)$ et une loi $\mathcal{P}(np)$ pour n “grand” et p tel que np soit “petit”.

Exercice 7 Commentez les lignes suivantes :

```
n <- 100
u <- rexp(n)
hist(u,probability=TRUE)
x <- seq(0,5,0.1)
y <- dexp(x)
lines(x,y,col='red')
```

puis

```
n <- 100
u <- rexp(n)
hist(log(1-u),probability=TRUE)
x <- seq(0,5,0.1)
y <- dexp(x)
lines(x,y,col='red')
```

Exercice 8
Quel théorème est illustré par le code ci-dessous ?

```
n <- 1000
X <- runif(n)
Y <- cumsum(X)
N <- seq(1,n, by=1)
plot(N, Y/N)
abline(h=0.5,col="red")
```