



**TRƯỜNG ĐẠI HỌC
BÁCH KHOA HÀ NỘI**
HANOI UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY



**VIỆN TOÁN ỨNG
DỤNG VÀ TIN HỌC**
SCHOOL OF APPLIED
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Seminar II:

**Ứng dụng toán tử tuyến tính đa trị trong việc tìm
bán kính điều khiển có cấu trúc của hệ chịu đa nhiễu**

Nguyễn Đức Hùng–20212498M

Phùng Anh Hùng–20212497M

Nguyễn Đức Anh–20211315M

Tháng 10, 2022

ONE LOVE. ONE FUTURE

Giới thiệu

Giới thiệu

Ảnh xạ đa trị

Bán kính điều khiển có cấu trúc

Bán kính điều khiển

Ví dụ

Đa nhiễu

Bán kính điều khiển dưới đa nhiễu

Ví dụ

Tài liệu tham khảo

◇ Hệ điều khiển tuyến tính:

$$\dot{x} = Ax + Bu, x \in \mathbb{K}^n, A \in \mathbb{K}^{n \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times m}, \quad (1)$$

◇ Hệ là điều khiển được

$$\text{rank} [A \mid B] = n, \quad (2)$$

Trong đó

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (3)$$

◇ Chịu nhiều

$$[A, B] \rightsquigarrow [\tilde{A}, \tilde{B}] = [A, B] + [\Delta_1, \Delta_2]. \quad (4)$$

◇ Khoảng cách đến trạng thái không điều khiển được:

$$r_{\mathbb{K}}(A, B) = \inf\{\|\Delta_1, \Delta_2\| : [\Delta_1, \Delta_2] \in \mathbb{K}^{n \times (n+m)}, \\ [A, B] + [\Delta_1, \Delta_2] \text{ là không điều khiển được}\}. \quad (5)$$

Giới thiệu

Giới thiệu

Ảnh xạ đa trị

Bán kính điều khiển có cấu trúc

Đa nhiễu

Tài liệu tham khảo

◇ Ánh xạ đa trị \mathcal{F}

$$\mathcal{F}: \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m \quad (6)$$

◇ Đồ thị của \mathcal{F}

$$\text{gr } \mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m: y \in \mathcal{F}(x)\} \quad (7)$$

◇ Miền xác định của \mathcal{F}

$$\text{dom } \mathcal{F} = \{x \in \mathbb{K}^n : \mathcal{F}(x) \neq \emptyset\} \quad (8)$$

◇ Nhân của \mathcal{F}

$$\ker \mathcal{F} = \{x \in \text{dom } \mathcal{F} : 0 \in \mathcal{F}(x)\} \quad (9)$$

◇ Chuẩn của \mathcal{F}

$$\|\mathcal{F}\| = \sup \left\{ \inf_{y \in \mathcal{F}(x)} \|y\| : x \in \text{dom } \mathcal{F}, \|x\| = 1 \right\} \quad (10)$$

Giới thiệu

Bán kính điều khiển có cấu trúc

Bán kính điều khiển

Ví dụ

Đa nhiệm

Tài liệu tham khảo

Nhiều có cấu trúc

$$[A, B] \rightsquigarrow [\tilde{A}, \tilde{B}] = [A, B] + D\Delta E \quad (11)$$

Bán kính điều khiển

$$r_{\mathbb{K}}^{D,E}(A, B) = \inf \left\{ \|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l \times q}, [\tilde{A}, \tilde{B}] \text{ không điều khiển được} \right\} \quad (12)$$

◇ Ánh xạ đơn trị

$$\begin{aligned} W_\lambda &: \mathbb{K}^{m+n} \rightarrow \mathbb{K}^n \\ W_\lambda(z) &= \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} z, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{13}$$

◇ Ánh xạ đa trị

$$\begin{aligned} EW_\lambda^{-1}D &: \mathbb{K}^l \rightrightarrows \mathbb{K}^q \\ (EW_\lambda^{-1}D)(u) &= E(W_\lambda^{-1}(Du)). \end{aligned} \tag{14}$$

Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ thì:

$$r_{\mathbb{C}}^{D,E}(A, B) = \frac{1}{\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \|EW_{\lambda}^{-1}D\|}. \quad (15)$$

◇ Cho $G \in \mathbb{C}^{n \times p}$, $\text{rank}_{\text{row}}(G) = n$, $\mathcal{F}_G(z) = Gz$

$$d(0, \mathcal{F}_G^{-1}(y)) = \|G^\dagger y\|, \quad \|\mathcal{F}_G^{-1}\| = \|G^\dagger\|. \quad (16)$$

◇ Cho $G \in \mathbb{C}^{n \times p}$, $\mathcal{F}_G(z) = Gz$

$$\mathcal{F}_G^\dagger(y) = \begin{cases} z & \text{s.t. } Gz = y, \|z\| = d(0, \mathcal{F}_G^{-1}(y)) \\ \emptyset & y \notin \text{im } \mathcal{F}_G. \end{cases} \quad (17)$$

Giới thiệu

Bán kính điều khiển có cấu trúc

Bán kính điều khiển

Ví dụ

Đa nhiệm

Tài liệu tham khảo

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad (18)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 + 1 & \delta_2 + 1 \\ \delta_1 + 1 & \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

$$[A, B] \rightsquigarrow [A, B] + D\Delta E, \quad (22)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

$$\begin{aligned}\left(E[A - \lambda I, B]^{-1} D\right)(v) &= E[A - \lambda I, B]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ &= E[A - \lambda I, B]^{-1} \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned} [A - \lambda I, B]^{-1} \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} : [A - \lambda I, B] \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}, \forall p, q, r \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} q + r - \lambda p \\ q - p\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}, \forall p, q, r \in \mathbb{C} \right\}. \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(E[A - \lambda I, B]^{-1} D\right)(v) &= \left\{ E \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} q + r - \lambda p \\ q - p\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}, \forall p, q, r \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} p + q \\ r \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} q + r - \lambda p \\ q - p\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}, \forall p, q, r \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} q + v + q\lambda \\ v - q + \lambda(v + q\lambda) \end{bmatrix} : q \in \mathbb{C} \right\}. \tag{27}
\end{aligned}$$

$$ax_1 + x_2 = b \quad (28)$$

$$x_1 = q + v + q\lambda, \quad (29)$$

$$x_2 = v - q + \lambda(v + q\lambda). \quad (30)$$

$$\diamond \quad q = q_0, q = q_1 \implies a = 1 - \lambda, b = 2v.$$

$$(1 - \lambda)x_1 + x_2 = 2v, \quad (31)$$

$$x_1 = q + v + q\lambda, \quad (32)$$

$$x_2 = v - q + \lambda(v + q\lambda). \quad (33)$$

◇ $\lambda = -1$

$$x_1 = v, \quad (34)$$

$$x_2 = 0, \quad (35)$$

$$d\left(0, \left(E[A - \lambda I, B]^{-1} D\right)(v)\right) = |v|. \quad (36)$$

◇ $\lambda \neq -1, (\mathbb{C}, \|\cdot\|_\infty)$

$$\begin{aligned} 2|v| &= |(1 - \lambda)x_1 + x_2| \\ &\leq |(1 - \lambda)x_1| + |x_2| \\ &\leq (|1 - \lambda| + 1) \max\{|x_1|, |x_2|\} \\ &= (|1 - \lambda| + 1) \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty \end{aligned} \quad (37)$$

◇ $\lambda \neq -1, (\mathbb{C}, \|\cdot\|_\infty)$

$$\frac{2|\nu|}{|\lambda - 1| + 1} \leq \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty. \quad (38)$$

◇ Dấu bằng:

$$x_1 = e^{i\varphi} x_2, \quad (39)$$

$$x_2 = \frac{2\nu}{1 + |\lambda - 1|} \quad (40)$$

$$-(\lambda - 1) e^{i\varphi} = |\lambda - 1| \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
\|E[A - \lambda I, B]^{-1} D\| &= \sup_{|v|=1} d\left(0, E[A - \lambda I, B]^{-1} D(v)\right) \\
&= \begin{cases} \sup_{|v|=1} \left\{ \inf \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \right\} & \lambda \neq -1, \\ \sup_{|v|=1} \{ \inf |v| \} & \lambda = -1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sup_{|v|=1} \left\{ \frac{2|v|}{|\lambda-1|+1} \right\} & \lambda \neq -1, \\ \sup_{|v|=1} \{|v|\} & \lambda = -1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{|\lambda-1|+1}, & \lambda \neq -1, \\ 1 & \lambda = -1. \end{cases} \tag{42}
\end{aligned}$$

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\| E [A - \lambda I, B]^{-1} D \right\| = 2, \quad (43)$$

$$r_{\mathbb{C}}^{D,E} (A, B) = \frac{1}{2}. \quad (44)$$

Giới thiệu

Bán kính điều khiển có cấu trúc

Đa nhiễu

Bán kính điều khiển dưới đa nhiễu

Ví dụ

Tài liệu tham khảo

◇ Hệ chịu đa nhiễu

$$[A, B] \rightsquigarrow [\tilde{A}, \tilde{B}] = [A, B] + \sum_{i=1}^N D_i \Delta_i E_i. \quad (45)$$

◇ Nhiễu

$$\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_N) \in \Pi_{i=1}^N \mathbb{C}^{l_i \times q_i} \quad (46)$$

$$\|\Delta\| = \sum_{i=1}^N \|\Delta_i\| \quad (47)$$

◇ Bán kính điều khiển

$$r_{\mathbb{C}}^{\text{mp}}(A, B) = \inf \left\{ \|\Delta\| : \Delta = (\Delta_i)_{i \in \underline{N}}, [A, B] + \sum_{i=1}^N D_i \Delta_i E_i \text{ không điều khiển được} \right\}. \quad (48)$$

◇ Ký hiệu

$$P \preceq Q \iff \|Px\| \leq \|Qx\|, \quad \forall x \in \mathbb{C}^m \quad (49)$$

◇ $H \in \mathbb{C}^{k \times (n+m)}$, $E_i \preceq H \forall i \in \underline{N}$

$$\left[\max_{i \in \underline{N}} \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \|HW_{\lambda}^{-1}D_i\| \right]^{-1} \leq r_{\mathbb{C}}^{\text{mp}}(A, B) \leq \left[\max_{i \in \underline{N}} \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \|E_i W_{\lambda}^{-1}D_i\| \right]^{-1}. \quad (50)$$

◇ $E_i = \alpha_i E_1$, $\alpha_i \in \mathbb{C} \forall i \in \underline{N}$,

$$r_{\mathbb{C}}^{\text{mp}}(A, B) = \left[\max_{i \in \underline{N}} \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \|E_i W_{\lambda}^{-1}D_i\| \right]^{-1}. \quad (51)$$

Giới thiệu

Bán kính điều khiển có cấu trúc

Đa nhiễu

Bán kính điều khiển dưới đa nhiễu

Ví dụ

Tài liệu tham khảo

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad (52)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \delta_1 & 1 + \delta_2 & 0 \\ -2 + \delta_3 & 0 & 1 + \delta_4 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

$$\begin{aligned}
 E_1 [A - \lambda I, B]^{-1} D_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= E_1 [A - \lambda I, B]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} p \\ x + \lambda p \\ 0 \end{bmatrix} : p \in \mathbb{C} \right\}, \tag{59}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_2 [A - \lambda I, B]^{-1} D_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= E_2 [A - \lambda I, B]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ y + (\lambda^2 + 2)p \end{bmatrix} : p \in \mathbb{C} \right\}. \tag{60}
 \end{aligned}$$

$$\left\| E_1 [A - \lambda I, B]^{-1} D_1 \right\| = \frac{1}{1 + |\lambda|}, \quad (61)$$

$$\left\| E_2 [A - \lambda I, B]^{-1} D_2 \right\| = \frac{1}{1 + |\lambda^2 + 2|}. \quad (62)$$

$$\begin{aligned}
 H[A - \lambda I, B]^{-1} D_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= [A - \lambda I, B]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} p \\ x + \lambda p \\ \lambda x + (\lambda^2 + 2)p \end{bmatrix} : p \in \mathbb{C} \right\}, \quad (63)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H[A - \lambda I, B]^{-1} D_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= [A - \lambda I, B]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} p \\ \lambda p \\ y + (\lambda^2 + 2)p \end{bmatrix} : p \in \mathbb{C} \right\}. \quad (64)
 \end{aligned}$$

◇ Chọn $p = 0$ và $p = -\frac{x}{\lambda}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

$$d\left(0, H[A - \lambda I, B]^{-1} D_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \leq \min \left\{ \max \{|x|, |\lambda x|\}, \left| \frac{2x}{\lambda} \right| \right\} \leq \sqrt{2} |x|. \quad (65)$$

$$\implies \left\| H[A - \lambda I, B]^{-1} D_1 \right\| \leq \sqrt{2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (66)$$

◇ Dấu bằng với $\lambda = \sqrt{2}i$:

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\| H[A - \lambda I, B]^{-1} D_1 \right\| = \sqrt{2}. \quad (67)$$

◇ Tương tự, với $p = 0$:

$$d\left(0, H[A - \lambda I, B]^{-1} D_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \leq |y|, \quad (68)$$


$$\left\| H[A - \lambda I, B]^{-1} D_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leq 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (69)$$

◇ Dấu bằng khi $\lambda = \sqrt{2}i$:

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\| H[A - \lambda I, B]^{-1} D_2 \right\| = 1. \quad (70)$$

◇ Ước lượng bán kính điều khiển

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\max\{1, \sqrt{2}\}} \leq r_{\mathbb{C}}^{\text{mp}}(A, B) \leq \frac{1}{\max\left\{\sup \frac{1}{1+|\lambda|}, \sup \frac{1}{1+|\lambda^2+2|}\right\}} = 1. \quad (71)$$

-  Nguyen Khoa Son and Do Duc Thuan.
The structured distance to uncontrollability under multi-perturbations: An approach using multi-valued linear operators.
Systems & Control Letters, 59(8):476–483, 2010.
ISSN 0167-6911.
doi: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2010.06.007>.
URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016769111000071X>.

Cảm ơn mọi người đã chú ý lắng nghe!