

*Các mô hình ngẫu nhiên và ứng dụng:*

# CHUYỂN ĐỘNG BROWN, MÔ HÌNH HỌC SÂU VÀ NHÚNG DỮ LIỆU

---

**Giảng viên hướng dẫn:** TS. Nguyễn Thị Ngọc Anh

**Học viên:** Nguyễn Đức Hùng ~ 20212498M

Hà Nội, Tháng 03 năm 2023

1. Giới thiệu

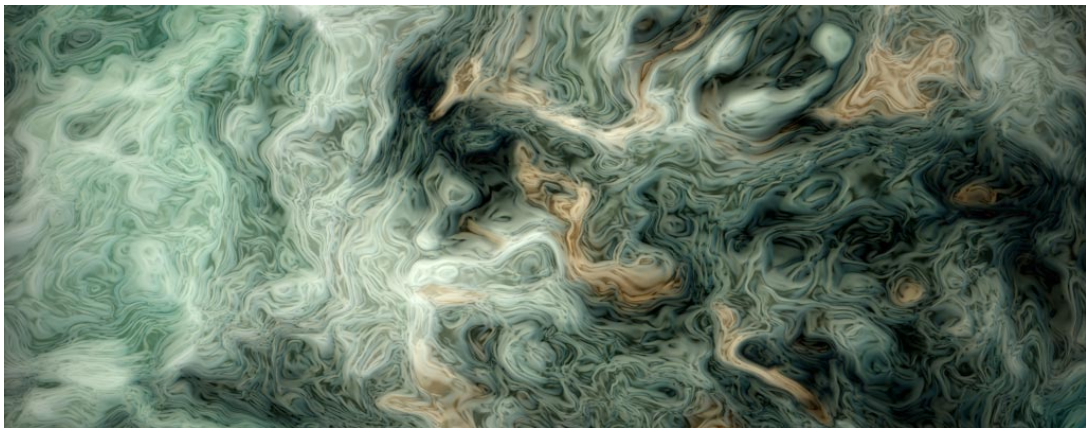
2. Chuyển động Brown

3. Chuyển động Brown và Transformer

4. Chuyển động Brown và  $\Delta$ VAE

5. Kết luận

- ◇ Vật lý
- ◇ Tài chính
- ◇ ???



**Hình 1.** Inigo Quilez— $f(p) = \text{fBM}(p + \text{fBM}(p + \text{fBM}(p)))^{(1)}$

1. Giới thiệu
2. Chuyển động Brown
3. Chuyển động Brown và Transformer
4. Chuyển động Brown và  $\Delta$ VAE
5. Kết luận

## Mệnh đề 1

Chuyển động Brown hầu chắc chắn không khả vi tại  $t > 0$ [2].

---

[2]Kempthorne Peter và cộng sự. “Lecture 17: Stochastic Processes II”. Trong: *Topics in Mathematics with Applications in Finance–18.S096*. MIT OpenCourseWare. Cambridge MA, 2013

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \quad (1)$$

$$\mathbb{E}[(\Delta B_t)^2] = \mathbb{E}[(B_{t+\Delta t} - B_t)^2] \quad (2)$$

$$= \text{Var}[\Delta B_t] + \mathbb{E}[\Delta B_t] = \Delta t. \quad (3)$$

Giải tích

$$df(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt, \quad (4)$$

Giải tích Itô

$$\begin{aligned} df(t, B_t) &= \frac{\partial f}{\partial x} dB_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dB_t)^2 \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t. \end{aligned} \quad (5)$$



1. Giới thiệu
2. Chuyển động Brown
3. Chuyển động Brown và Transformer
4. Chuyển động Brown và  $\Delta$ VAE
5. Kết luận

## Định nghĩa 1 (Layer Normalization)

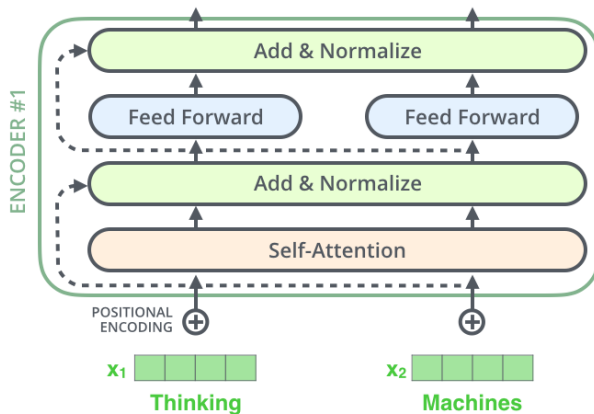
$$\text{LayerNorm}(x) = \frac{x - \mathbb{E}[x]}{\sqrt{\text{Var}[x]}} \cdot \gamma + \beta, \quad (6)$$

## Định nghĩa 2 (Softmax)

$$\text{Softmax}(x) = \left[ \frac{\exp(x_j)}{\sum_{i=1}^d \exp(x_i)} \right]_{j=\overline{1,d}} \quad (7)$$

## Định nghĩa 3 (Scale-dot Attention)

$$\text{Attention}(Q, K, V) = \text{Softmax}\left(\frac{QK^{\top}}{\sqrt{d}}\right) \cdot V \quad (8)$$



Hình 2. Một lớp transformer

## Quan sát 1

- ♦ Tính chất chuẩn hoá[4]

$$\|\text{LayerNorm}(x)\| = \sqrt{d}; \quad (9)$$

- ♦ Ma trận chuyển[5]

$$p_{i,j} = \exp\left(\frac{-\|v_i - v_j\|^2}{2\sqrt{d}}\right); \quad (10)$$

- ♦ Thuật toán tối ưu bậc 2[5].

---

[4]Ruibin Xiong và cộng sự. *On Layer Normalization in the Transformer Architecture*. 2020

[5]Yingshi Chen. *The Brownian motion in the transformer model*. 2021

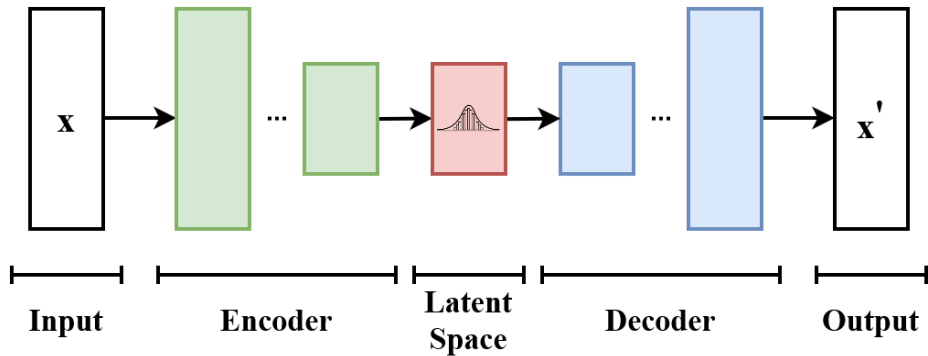
## Quan sát 2

- ◇ Multi-head?
- ◇ Kết nối tắt
- ◇ Lớp chiếu

$$y = f(x) + x; \quad (11)$$

$$y = x \cdot A^{\top} + b. \quad (12)$$

1. Giới thiệu
2. Chuyển động Brown
3. Chuyển động Brown và Transformer
4. Chuyển động Brown và  $\Delta$ VAE
5. Kết luận



Hình 3. Ý tưởng của VAE



- ◇ Không gian biến ẩn  $Z$ ;
- ◇ Phân phối biến ẩn  $\mathbb{P}_Z$ ;
- ◇ Họ phân phối mã hoá  $\mathbb{Q}_Z$ ;
- ◇ Họ phân phối giải mã  $\mathbb{P}_X$ ;
- ◇ Hàm đối biến  $g$ .

#### Định nghĩa 4 (Hàm mục tiêu)

$$L(x) = -\mathbb{E}_{z \sim \mathbb{Q}_Z^{\alpha(x)}} \left[ \log p_X^{\beta(z)}(x) \right] + D_{\text{KL}} \left( \mathbb{Q}_Z^{\text{enc}(x)} \parallel \mathbb{P}_Z \right). \quad (13)$$

## Sự phù hợp với dữ liệu

- ◇ Phân phối chuẩn/Gauss?
- ◇ Không gian  $\mathbb{R}^d$ ?
- ◇ Không gian con bất kỳ?

## Định nghĩa 5 (Xây dựng đối biến[3])

$$g: \Gamma \times (0, \infty) \times Z \rightarrow Z \quad (14)$$

$$g(\gamma, t, z) \sim \mathbb{Q}_Z^{t,z} \quad (15)$$

---

[3]Luis A. Perez Rey và cộng sự. “Diffusion Variational Autoencoders”. Trong: *Proceedings of the Twenty-Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI-20*. Soạn bởi Christian Bessiere. Main track. International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization, tháng 7 2020, tr. 2704–2710

Định nghĩa 6 (Xây dựng du động ngẫu nhiên[3])

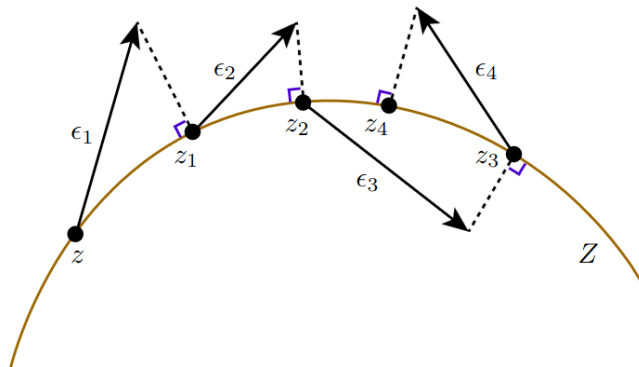
$$z_1 = P(z + \sqrt{\tau}\varepsilon_1), \quad (16)$$

$$z_2 = P(P(z + \sqrt{\tau}\varepsilon_1) + \sqrt{\tau}\varepsilon_2) \quad (17)$$

$$\vdots$$

---

[3]Luis A. Perez Rey và cộng sự. “Diffusion Variational Autoencoders”. Trong: *Proceedings of the Twenty-Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI-20*. Soạn bởi Christian Bessiere. Main track. International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization, tháng 7 2020, tr. 2704–2710



Hình 4. Du động ngẫu nhiên trên một mặt tròn  $Z$ . [3]

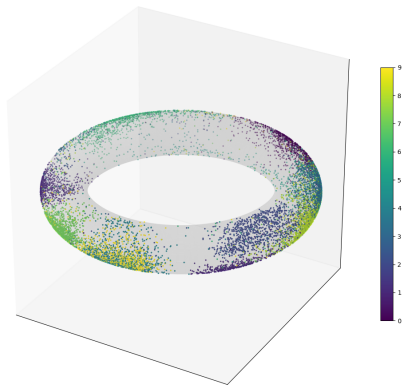
Định nghĩa 7 (Phép đổi biến với chuyển động Brown.[3])

$$g: \mathcal{E}^N \times (0, \infty) \times Z \rightarrow Z, \quad (18)$$

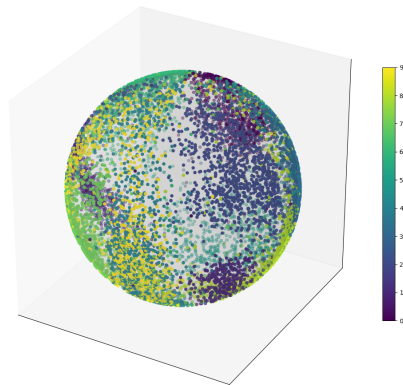
$$g(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N, t, z) = P\left(\dots P\left(P\left(z + \sqrt{\frac{t}{N}}\varepsilon_1\right) + \frac{t}{N}\varepsilon_2\right)\dots + \sqrt{\frac{t}{N}}\varepsilon_N\right). \quad (19)$$

---

[3]Luis A. Perez Rey và cộng sự. “Diffusion Variational Autoencoders”. Trong: *Proceedings of the Twenty-Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI-20*. Soạn bởi Christian Bessiere. Main track. International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization, tháng 7 2020, tr. 2704–2710



(a) Mặt hình xuyến



(b) Cầu đơn vị



1. Giới thiệu

2. Chuyển động Brown

3. Chuyển động Brown và Transformer

4. Chuyển động Brown và  $\Delta$ VAE

5. Kết luận

5.1 Kết quả đạt được

5.2 Cảm ơn

- ◇ Dùng chuyển động Brown kết hợp VAE để nhúng dữ liệu;
- ◇ Transformer ~ kết hợp, biến đổi chuyển động Brown;
- ◇ Giải thích lỗ hổng trong [5] với ý tưởng trong [3];
- ◇ Nhiều ứng dụng khác.

---

[5]Yingshi Chen. *The Brownian motion in the transformer model*. 2021

[3]Luis A. Perez Rey và cộng sự. “Diffusion Variational Autoencoders”. Trong: *Proceedings of the Twenty-Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI-20*. Soạn bởi Christian Bessiere. Main track. International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization, tháng 7 2020, tr. 2704–2710

Cảm ơn mọi người đã chú ý lắng nghe!

- [1] Elton P Hsu. “A brief introduction to Brownian motion on a Riemannian manifold”. Trong: *một bài giảng của Viện Toán, Đại học Northwestern* (2008). Mục 1.4 chứa lý thuyết cho phương pháp dùng phép chiếu trong nghiên cứu của  $\Delta$ VAE.
- [2] Kempthorne Peter và cộng sự. “Lecture 17: Stochastic Processes II”. Trong: *Topics in Mathematics with Applications in Finance–18.S096*. MIT OpenCourseWare. Cambridge MA, 2013.
- [3] Luis A. Perez Rey và cộng sự. “Diffusion Variational Autoencoders”. Trong: *Proceedings of the Twenty-Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI-20*. Soạn bởi Christian Bessiere. Main track. International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization, tháng 7 2020, tr. 2704–2710.

- [4] Ruibin Xiong và cộng sự. *On Layer Normalization in the Transformer Architecture*. 2020.
- [5] Yingshi Chen. *The Brownian motion in the transformer model*. 2021.