

# Mục lục

<b>1</b>	<b>Chuỗi Laurent và thặng dư</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Một số ứng dụng của thặng dư</b>	<b>3</b>
2.1	Phân tích lớp hàm hữu tỉ . . . . .	3
2.2	Nội suy đa thức . . . . .	4

# 1 Chuỗi Laurent và thặng dư

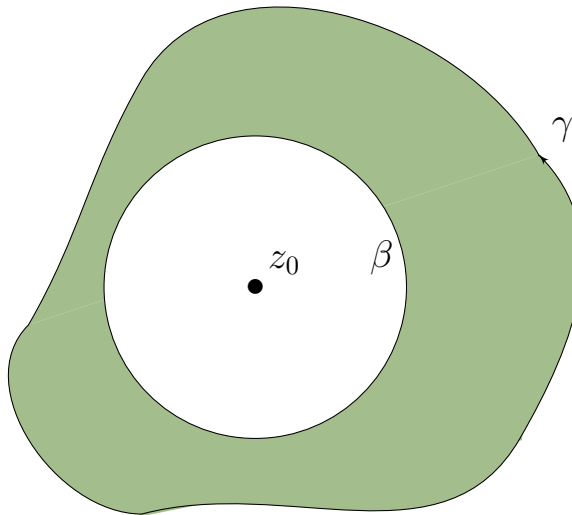
Khai triển Laurent của hàm  $f(z)$  quanh điểm  $z_0$  là chuỗi lũy thừa:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (1)$$

Trong đó  $a_n$  được xác định bởi:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (2)$$

Với  $\gamma$  là đường cong kín bao quanh  $z_0$  sao cho: tồn tại đường tròn  $\beta$  tâm  $z_0$ , bán kính  $r > 0$ ,  $f(z)$  giải tích trên miền được giới hạn bởi  $\beta \cap \gamma$ .



Hình 1: Đường cong  $\gamma$

Đặc biệt, khi  $n = -1$ , ta có:

$$a_{(-1)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \quad (3)$$

$a_{-1}$  được gọi là thặng dư (residue) của  $f(z)$  tại điểm  $z_0$ . Ký hiệu:

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \quad (4)$$

Với một hàm  $f(z)$  bất kì giải tích trên miền  $D \setminus \{z_0\}$ ,  $z_0$  là cực điểm cấp  $n$  của  $f(z)$ , ta có thể tìm thặng dư của  $f(z)$  tại  $z_0$  bằng cách:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)] \Big|_{z=z_0} \quad (5)$$

Trong trường hợp  $z_0$  là cực điểm đơn giản:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z)}{q'(z)} \Big|_{z=z_0} \quad \text{với } f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad (6)$$

## 2 Một số ứng dụng của thặng dư

### 2.1 Phân tích lớp hàm hữu tỉ

Cho đa thức  $p, q \in \mathbb{C}[z]$  với  $\deg(p) + 1 \leq \deg(q)$ . Giả sử  $p$  có các không điểm  $z_1, \dots, z_n$  có các cấp tương ứng là  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Khi đó hàm  $f(z) = p(z)/q(z)$  có thể được viết

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(z-z_i)^j} \quad (7)$$

với các hằng số  $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ . Trong bài viết này, kết quả trên sẽ được thừa nhận không chứng minh.

Xét hàm phụ  $f(z) \cdot (z-z_\alpha)^{\beta-1}$  với  $0 \leq \alpha \leq n$  và  $1 \leq \beta \leq m_\alpha$ , ta có:

$$f(z) \cdot (z-z_\alpha)^{\beta-1} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(z-z_i)^j} \cdot (z-z_\alpha)^{\beta-1} \quad (8)$$

$$= \dots + \frac{a_{\alpha,\beta}}{z-z_\alpha} + \dots \quad (9)$$

Dựa vào công thức (9) ta thấy hệ số  $a_{i,j}$  ở trên có thể được tính theo công thức:

$$a_{i,j} = \operatorname{Res}_{z=z_i} [f(z) \cdot (z-z_i)^{j-1}] \quad (10)$$

Thay công thức (10) vào (7) ta được:

$$f(z) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{(z-z_i)^j} \cdot \operatorname{Res}_{z=z_i} [f(z) \cdot (z-z_i)^{j-1}] \quad (11)$$

Trong trường hợp  $f(z)$  chỉ có cực điểm đơn giản, (10) trở thành:

$$f(z) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{z - z_i} \cdot \operatorname{Res}_{z=z_i} f(z) \quad (12)$$

**Ví dụ:** Phân tích hàm  $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}$ . Các cực điểm của  $f(z)$  bao gồm:

$$\begin{aligned} z &= i && (\text{Cực điểm đơn giản}) \\ z &= 0 && (\text{Cực điểm cấp 2}) \end{aligned}$$

Tính các thặng dư cần thiết:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=i} f(z) &= \frac{1}{[z^2(z-i)]' \Big|_{z=i}} \\ &= -1 \\ \operatorname{Res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} [f(z) \cdot z^2] \Big|_{z=0} \\ &= 1 \\ \operatorname{Res}_{z=0} f(z)(z-0) &= \frac{1}{[z(z-i)]' \Big|_{z=0}} \\ &= i \end{aligned}$$

Sử dụng công thức (11) ta được:

$$f(z) = \frac{-1}{z-i} + \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2}$$

## 2.2 Nội suy đa thức

**Định nghĩa 2.1** (Đa thức nội suy). Cho tập dữ liệu  $\{(z_i, y_i)\}_{i=0}^n \subset \mathbb{C}^2$ , trong đó không có  $z_i$  nào trùng nhau. Một đa thức  $p \in C[z]$  với  $\deg(p) \leq n$  thỏa mãn

$$p(z_i) = y_i$$

được gọi là đa thức nội suy từ tập dữ liệu đã cho.

**Định lý 2.1** (Nghiệm duy nhất). Với mỗi tập dữ liệu như trên, tồn tại duy nhất một đa thức nội suy  $p$ . (Chỉ thừa nhận không chứng minh)

**Định nghĩa 2.2** (Đa thức nội suy Lagrange). Cho tập dữ liệu  $\{(z_i, y_i)\}_{i=0}^n \subset \mathbb{C}^2$ . Đa thức nội suy Lagrange từ tập dữ liệu trên được định nghĩa:

$$L(z) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(z) \quad (13)$$

với  $l_i(z)$  là:

$$l_i(z) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{z - z_k}{z_i - z_k} \quad (14)$$

Đặt hàm phụ  $w(z)$ :

$$w(z) = (z - z_0) \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_{n-1}) \cdot (z - z_n) \quad (15)$$

Nhận xét:

$$w'(z_i) = \frac{w(z)}{z - z_i} \Big|_{z=z_i} \quad (16)$$

Dựa vào (15), (16) viết lại (14):

$$l_i(z) = \frac{w(z)}{w'(z)(z - z_i)} \quad (17)$$

Xét hàm  $F(t)$  và  $G(t)$  định nghĩa bởi:

$$F(t) = \frac{w(z) - w(t)}{(z - t)} \quad (18)$$

$$G(t) = w(t) \quad (19)$$

Vì  $\frac{F}{G}(t)$  có các cực điểm đơn giản tại  $z_i$ , ta có:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{t=z_i} \frac{F(t)}{G(t)} &= \frac{F(z_i)}{G'(z_i)} \\ &= \frac{w(z)}{(z - z_i)w'(z_i)} \end{aligned} \quad (20)$$

Dựa vào (15), (16), (17) và (20), ta có công thức mới cho đa thức nội suy Lagrange:

$$L(z) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \operatorname{Res}_{z=z_i} \frac{F}{G}(z) \quad (21)$$

Gọi  $\gamma$  là đường tròn đủ lớn sao cho  $z_i \in \text{int}(\gamma)$ ,  $i = \overline{0, n}$ ;  $f$  là hàm đơn trị giải tích trên  $\text{int}(\gamma)$  thỏa mãn  $f(z_i) = y_i$ . Dựa vào (21) có dạng khác của đa thức nội suy Lagrange:

$$L(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{w(z) - w(t)}{(z - t) \cdot w'(t)} f(t) dt \quad (22)$$