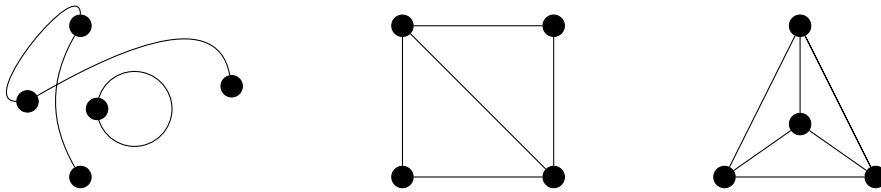


# 1 Đồ thị

**Định nghĩa 1.1.** Đồ thị  $G$  là một cấu trúc rời rạc gồm các thành phần là tập  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , được gọi một cách tương ứng là tập đỉnh và tập cạnh của đồ thị. Ký hiệu:  $G = (V, E)$ .

Một số khái niệm liên quan:

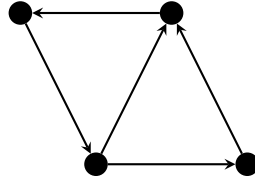
- Số cạnh của đồ thị gọi là *bậc của đồ thị*, kí hiệu:  $n(G)$  (hoặc  $n$ ).
- Mỗi phần tử thuộc  $V(G)$  được gọi là một *đỉnh* của  $G$ . Một phần tử thuộc  $E(G)$  được gọi là một *cạnh* của  $G$ .
- Một cạnh của  $G$  sẽ nối hai đỉnh của  $G$ . Nếu cạnh  $v, u \in V(G)$  có cạnh nối giữa chúng thì nói  $u$  *kề*  $v$ . Cạnh được kí hiệu bằng một cặp đỉnh:  $e = (u, v)$ , khi đó  $u, v$  gọi là *đầu mút* của  $e$ .
- *Khuyên* là cạnh của đồ thị mà có hai đầu mút cùng là một đỉnh.
- *Hai cạnh song song* (hay còn gọi là *cạnh đôi*) là hai cạnh mà có chung cặp đầu mút.
- *Bậc của đỉnh  $v$*  là tổng số cạnh mà có  $u$  là đầu mút. Nếu  $v$  là đầu mút của một khuyên thì khuyên đó tính là 2 cạnh. Kí hiệu:  $d(v)$
- *Bậc lớn nhất* trong  $G$ :  $\Delta = \max_{v \in V} \{d(v)\}$
- *Bậc nhỏ nhất* trong  $G$ :  $\delta = \min_{v \in V} \{d(v)\}$
- *Đường đi và chu trình*: (định nghĩa 3.1 và 3.2)



Hình 1: Minh họa một số đồ thị

**Định nghĩa 1.2** (Đồ thị có hướng). Đồ thị  $G = (V, E)$  là đồ thị có hướng  $\iff \forall (u, v) \in E, (u, v)$  sắp thứ tự. Khi đó  $u$  gọi là *đỉnh ra*,  $v$  là *đỉnh vào*, cạnh  $(u, v)$  gọi là một *cung*.

**Định nghĩa 1.3** (Đồ thị có trọng số). Là đồ thị mà mỗi cạnh của nó được gắn với một trọng số.



Hình 2: Đồ thị có hướng

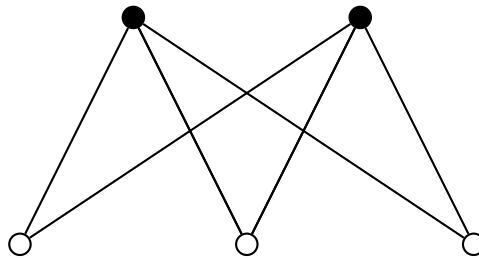
**Định nghĩa 1.4** (Đồ thị con). Đồ thị  $H$  gọi là đồ thị con của  $G \iff V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$ . Kí hiệu:  $H \subseteq G$ . Nếu  $H \subseteq G$  và  $V(H) = V(G) = V$  thì ta gọi  $H$  là đồ thị con mở rộng của  $G$ .

**Định nghĩa 1.5** (Đồ thị đầy đủ/clique). Đồ thị  $G$  là đồ thị đầy đủ (clique)  $\iff$  mọi đỉnh của  $G$  đều có cạnh nối giữa chúng. Đồ thị đầy đủ có  $n$  đỉnh được kí hiệu là  $K_n$ . Đồ thị  $\overline{G}$  được gọi là phủ của  $G \iff V(G) = V(\overline{G})$  và  $V(\overline{G}) = V(K_n) \setminus V(G)$



Hình 3: Đồ thị  $G$  và  $\overline{G}$

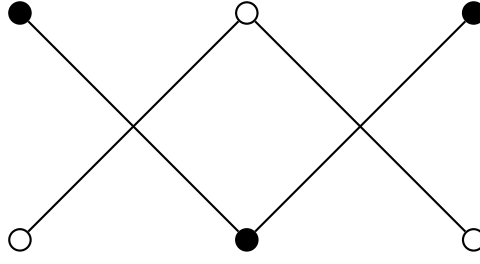
**Định nghĩa 1.6** (Đồ thị hai phía). Đồ thị  $G$  là đồ thị 2 phía  $\iff V(G) = V_1 \cup V_2$  với  $V_1, V_2$  là tập độc lập,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Nếu  $\forall u \in V_1, v \in V_2, v$  kề  $u$  thì  $G$  gọi là đồ thị hai phía đầy đủ và được kí hiệu là  $K_{m,n}$  (với  $m = |V_1|, n = |V_2|$ ).



Hình 4: Đồ thị hai phía đầy đủ  $K_{2,3}$

**Định nghĩa 1.7** (Tập độc lập). Tập độc lập trong đồ thị  $G$  được định nghĩa bởi  $S = \{v \in V(G) \mid \text{không có cặp đỉnh nào kề nhau}\}$

**Định nghĩa 1.8** (Đồ thị liên thông). Đồ thị  $G$  gọi là liên thông  $\iff \forall u, v \in V, \exists$  đường đi từ  $u$  tới  $v$ . Ngược lại, nếu  $\exists u, v \in V, \nexists$  đường đi từ  $u$  tới  $v$  thì  $G$  là đồ thị **không** liên thông.

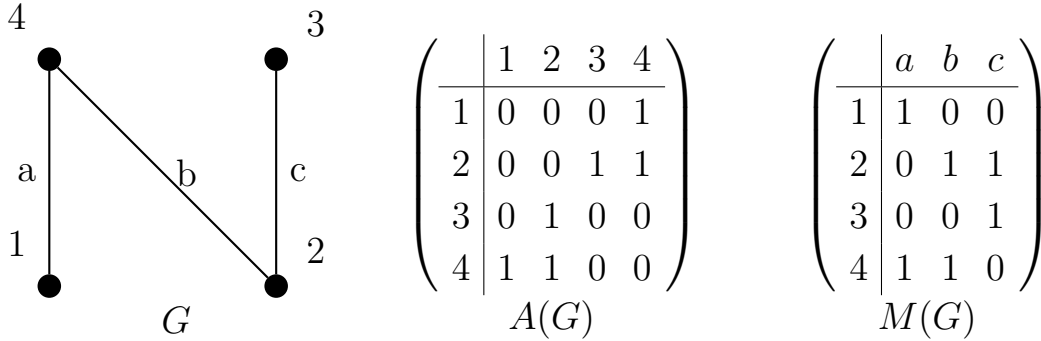


Hình 5: Đồ thị không liên thông

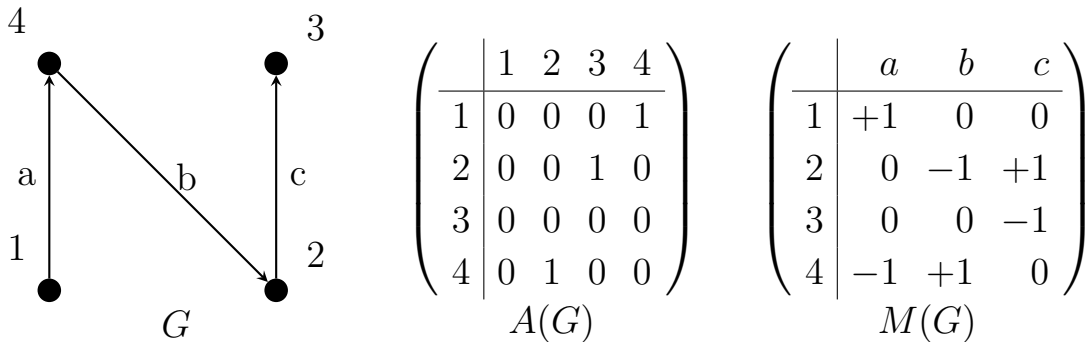
## 2 Ma trận biểu diễn và đẳng cấu

Đồ thị  $G$  có thể được biểu diễn bằng một ma trận  $A(G) = [a_{ij}]$  với  $a_{ij}$  là số cạnh nối giữa  $v_i$  và  $v_j$ . Nếu  $G$  là đồ thị có hướng,  $a_{ij}$  sẽ là số cung đi từ  $v_i$  tới  $v_j$ .

Nếu cạnh  $e$  có đầu mút là đỉnh  $v$  thì  $e$  gọi là cạnh kề của  $v$ . Đồ thị  $G$  cũng có thể biểu diễn bằng ma trận  $M = [m_{ij}]$ , trong đó  $m_{ij} = 1$  nếu đỉnh  $v_i$  có cạnh kề  $e_j$ . Trong trường hợp  $G$  là đồ thị có hướng,  $m_{ij} = 1$  nếu  $v_i$  là đỉnh ra và  $-1$  nếu  $v_i$  là đỉnh vào của  $e_j$ . Nếu không rơi vào những trường hợp trên thì  $m_{ij} = 0$ .



Hình 6: Biểu diễn đồ thị  $G$



Hình 7: Biểu diễn đồ thị  $G$  (có hướng)

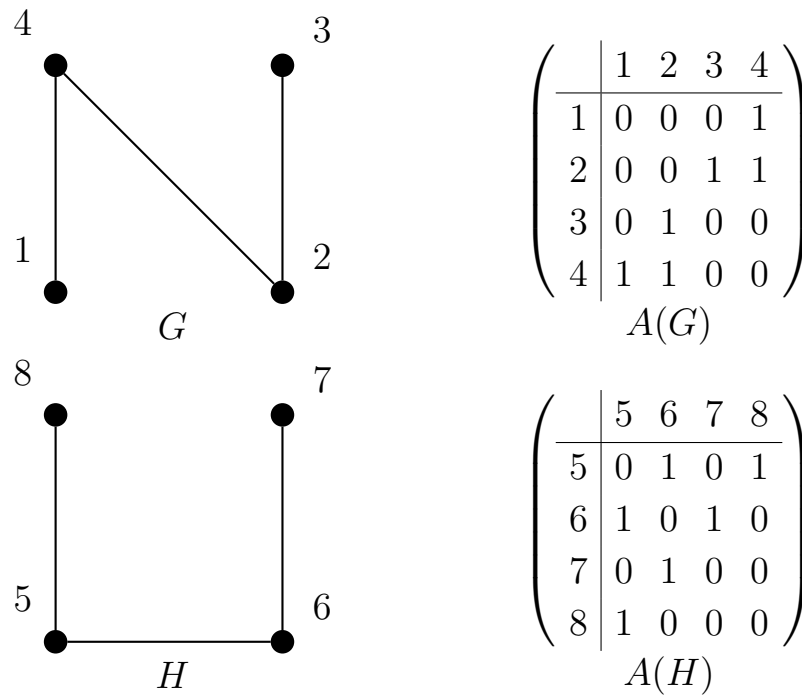
Một đồ thị có thể có nhiều ma trận  $A(G)$  hoặc  $M(G)$  khác nhau, tùy vào

cách đánh số cạnh/đỉnh. Sau đây là một số tính chất:

- Nếu  $A(G)$  là ma trận đối xứng thì đồ thị  $G$  vô hướng.
- Nếu  $A(G)$  đối xứng,  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  và  $a_{ii} = 0$  thì  $G$  là đồ thị đơn giản.

**Định nghĩa 2.1** (Đồng cấu). Một đồng cấu giữa  $G$  và  $H$  là ánh xạ  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  sao cho  $\forall u, v \in V(G)$  thì  $f(u)f(v) \in E(H)$ . Nếu tìm được một đồng cấu từ  $G$  tới  $H$  và ngược lại, ta nói  $G$  và  $H$  đồng cấu nhau.

Đồ thị  $G$  và  $H$  được gọi là đồng cấu  $\iff$  có thể áp dụng biến đổi trên hàng của  $A(G)$  và áp dụng biến đổi tương tự trên cột của  $A(G)$  để thu được  $A(H)$ .



Hình 8: Đồng cấu  $H$  và  $G$

Trong hình 8, đồng cấu  $f$  được xác định:  $f(1) = 8$ ;  $f(2) = 6$ ;  $f(3) = 7$ ;  $f(4) = 5$ . Từ ma trận  $A(G)$  có thể thu được  $A(H)$  bằng cách đổi chỗ hai hàng 1, 4 và rồi đổi chỗ hai cột tương ứng.

Đồng cấu đồ thị là quan hệ tương đương, do đó ta có các lớp tương đương. Một lớp tương đương đồng cấu đồ thị được biểu diễn bằng một đồ thị không được gán nhãn. Để thấy đồ thị  $G$  và  $H$  trong hình 8 cùng thuộc một lớp tương đương. Ta kí hiệu  $G = H$  thay vì  $G \cong H$ . Tương tự, khi nói  $H$  là đồ thị con của  $G$ , điều này có nghĩa  $H$  đồng cấu với một đồ thị con của  $G$ , hay  $G$  chứa một bản sao của  $H$ .

Đẳng cấu bảo toàn quan hệ "kề nhau" giữa các cạnh, do đó nếu muốn chứng minh hai đồ thị không đẳng cấu, ta chỉ cần chỉ ra một đặc tính nào đó liên quan tới đỉnh mà chúng khác nhau (*bậc của các đỉnh, kích cỡ của clique lớn nhất hoặc chu kỳ nhỏ nhất...*).

Hai đồ thị  $G$  và  $H$  đẳng cấu  $\iff \overline{G}$  đẳng cấu  $\overline{H}$ .

**Định nghĩa 2.2** (tự đẳng cấu). Một tự đẳng cấu là một đẳng cấu của đồ thị  $G$  với chính nó.  $G$  gọi là chuyển tiếp đỉnh  $\iff (\forall u, v \in V) (\exists f : f(u) = v)$ . Tương tự,  $G$  gọi là chuyển tiếp cạnh  $\iff (\forall e_1, e_2 \in E) (\exists f : f(e_1) = e_2)$ .

### 3 Đường đi và chu trình

**Định nghĩa 3.1** (đường đi). Một **đường đi** (kí hiệu  $W$ ) có độ dài  $k$  là một dãy các **đỉnh và cạnh**  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$  với  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ . Độ dài của một đường đi kí hiệu là  $l(W)$ . Đỉnh  $v_0$  gọi là đỉnh đầu và  $v_k$  gọi là đỉnh cuối. Nếu không có cạnh nào lặp lại, đường đi gọi là đơn. Nếu không có đỉnh nào lặp lại, đường đi gọi là sơ cấp.

**Định nghĩa 3.2** (chu trình). Một chu trình là một đường đi đơn mà có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau. Nếu chỉ có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau thì chu trình gọi là sơ cấp.

Có thể thấy chu trình với độ dài 1 là một khuyên.

**Mệnh đề 3.1.** Đồ thị  $G$  là liên thông  $\iff (\exists uv \in E)(u \in V_1)(v \in V_2)$  với mọi  $V_1, V_2 \neq \emptyset$  mà  $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$  ( $V_1, V_2$  là phân hoạch không rỗng của  $V$ )

*Chứng minh.* Giả sử  $G$  liên thông. Khi đó tồn tại một đường đi sơ cấp từ  $u$  tới  $v$ , trên đường đi đó, sau đỉnh cuối cùng của  $V_1$  mà nó đi qua là cạnh nối giữa  $V_1$  và  $V_2$ . Giả sử  $G$  không liên thông. Chứng minh được chiều xuôi. Gọi  $H$  là một thành phần liên thông của  $G$ , chọn  $V_1 = V(H)$ . Khi đó không có cạnh nào của  $G$  có một đầu mút thuộc  $V_1$  và đầu mút còn lại thuộc  $V_2$ . Bằng cách đảo về chứng minh được chiều ngược.  $\square$

**Định lý 3.1.** Một cạnh của  $G$  là cạnh cắt  $\iff$  cạnh đó không thuộc chu trình sơ cấp nào.

*Chứng minh.* Gọi  $e = (uv)$  là một cạnh trong thành phần liên thông  $H$  của  $G$ . Nếu đồ thị thu được từ  $H$  bỏ đi  $e$  (kí hiệu  $H - e$ ) vẫn liên thông,

thì tồn tại một đường đi sơ cấp từ  $u$  tới  $v$ . Có thể thấy đường đi này nếu gắn thêm cạnh  $e$  sẽ tạo thành một chu trình sơ cấp. Vậy nếu  $e$  không phải cạnh cắt thì sẽ thuộc một chu trình sơ cấp. Nếu  $e$  là cạnh cắt,  $H$  bỏ đi  $e$  không liên thông, không tồn tại đường đi từ  $u$  tới  $v$ . (TBA?)  $\square$

**Mệnh đề 3.2.** Cho đồ thị  $G = (V, E)$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  với  $n \geq 3$ . Nếu có ít nhất 2 trong các đồ thị con  $G - v_1, G - v_2, \dots, G - v_n$  ( $G$  xóa đi đỉnh  $v_i$ ) liên thông thì  $G$  liên thông.

*Chứng minh.* Giả sử  $G$  không liên thông,  $H_i$ ,  $i = \overline{1, k}$  là các thành phần liên thông của  $G$ . Nếu xóa một đỉnh khỏi  $H_i$  thì không làm thay đổi số thành phần liên thông, trừ khi  $H_i = K_1$  (giảm đi còn  $k - 1$  thành phần liên thông). Nếu 2 trong số  $G - v_1, G - v_2, \dots, G - v_n$  liên thông thì  $k = 2$  và  $H_1 = H_2 = K_1$ , mâu thuẫn với  $n \geq 3$ .  $\square$