

Mục lục

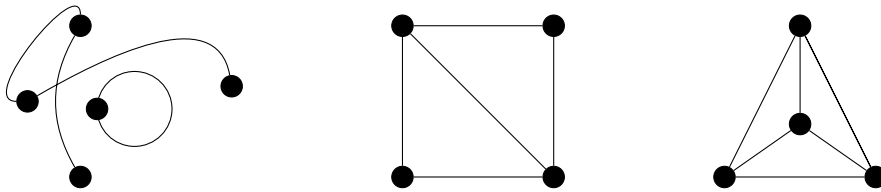
1	Đồ thị	2
2	Ma trận biểu diễn và đẳng cấu	4
3	Đường đi và chu trình	6
4	Bậc của các đỉnh trong đồ thị	8
5	Một số kĩ thuật trên đồ thị	8

1 Đồ thị

Định nghĩa 1.1. Đồ thị G là một cấu trúc rời rạc gồm các thành phần là tập $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, được gọi một cách tương ứng là tập đỉnh và tập cạnh của đồ thị. Ký hiệu: $G = (V, E)$.

Một số khái niệm liên quan:

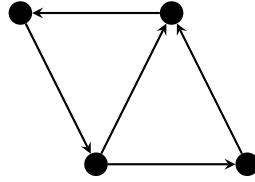
- Số cạnh của đồ thị gọi là *bậc của đồ thị*, kí hiệu: $n(G)$ (hoặc n).
- Mỗi phần tử thuộc $V(G)$ được gọi là một *đỉnh* của G . Một phần tử thuộc $E(G)$ được gọi là một *cạnh* của G .
- Một cạnh của G sẽ nối hai đỉnh của G . Nếu cạnh $v, u \in V(G)$ có cạnh nối giữa chúng thì nói u *kề* v . Cạnh được kí hiệu bằng một cặp đỉnh: $e = (u, v)$, khi đó u, v gọi là *đầu mút* của e .
- *Khuyên* là cạnh của đồ thị mà có hai đầu mút cùng là một đỉnh.
- *Hai cạnh song song* (hay còn gọi là *cạnh đôi*) là hai cạnh mà có chung cặp đầu mút.
- *Bậc của đỉnh v* là tổng số cạnh mà có u là đầu mút. Nếu v là đầu mút của một khuyên thì khuyên đó tính là 2 cạnh. Kí hiệu: $d(v)$
- *Bậc lớn nhất* trong G : $\Delta = \max_{v \in V} \{d(v)\}$
- *Bậc nhỏ nhất* trong G : $\delta = \min_{v \in V} \{d(v)\}$
- *Đường đi và chu trình*: (định nghĩa 3.1 và 3.2)



Hình 1: Minh họa một số đồ thị

Định nghĩa 1.2 (Đồ thị có hướng). Đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng $\iff \forall (u, v) \in E, (u, v)$ sắp thứ tự. Khi đó u gọi là *đỉnh ra*, v là *đỉnh vào*, cạnh (u, v) gọi là một *cung*.

Định nghĩa 1.3 (Đồ thị có trọng số). Là đồ thị mà mỗi cạnh của nó được gán với một trọng số.



Hình 2: Đồ thị có hướng

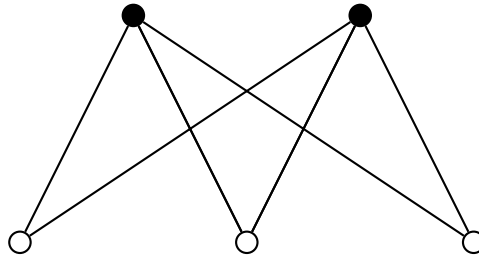
Định nghĩa 1.4 (Đồ thị con). Đồ thị H gọi là đồ thị con của $G \iff V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$. Kí hiệu: $H \subseteq G$. Nếu $H \subseteq G$ và $V(H) = V(G) = V$ thì ta gọi H là đồ thị con mở rộng của G .

Định nghĩa 1.5 (Đồ thị đầy đủ/clique). Đồ thị G là đồ thị đầy đủ (clique) \iff mọi đỉnh của G đều có cạnh nối giữa chúng. Đồ thị đầy đủ có n đỉnh được kí hiệu là K_n . Đồ thị \overline{G} được gọi là phủ của $G \iff V(G) = V(\overline{G})$ và $V(\overline{G}) = V(K_n) \setminus V(G)$



Hình 3: Đồ thị G và \overline{G}

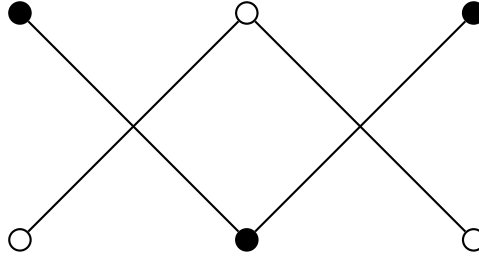
Định nghĩa 1.6 (Đồ thị hai phía). Đồ thị G là đồ thị 2 phía $\iff V(G) = V_1 \cup V_2$ với V_1, V_2 là tập độc lập, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Nếu $\forall u \in V_1, v \in V_2, v$ kề u thì G gọi là đồ thị hai phía đầy đủ và được kí hiệu là $K_{m,n}$ (với $m = |V_1|, n = |V_2|$).



Hình 4: Đồ thị hai phía đầy đủ $K_{2,3}$

Định nghĩa 1.7 (Tập độc lập). Tập độc lập trong đồ thị G được định nghĩa bởi $S = \{v \in V(G) \mid \text{không có cặp đỉnh nào kề nhau}\}$

Định nghĩa 1.8 (Đồ thị liên thông). Đồ thị G gọi là liên thông $\iff \forall u, v \in V, \exists$ đường đi từ u tới v . Ngược lại, nếu $\exists u, v \in V, \nexists$ đường đi từ u tới v thì G là đồ thị **không** liên thông.



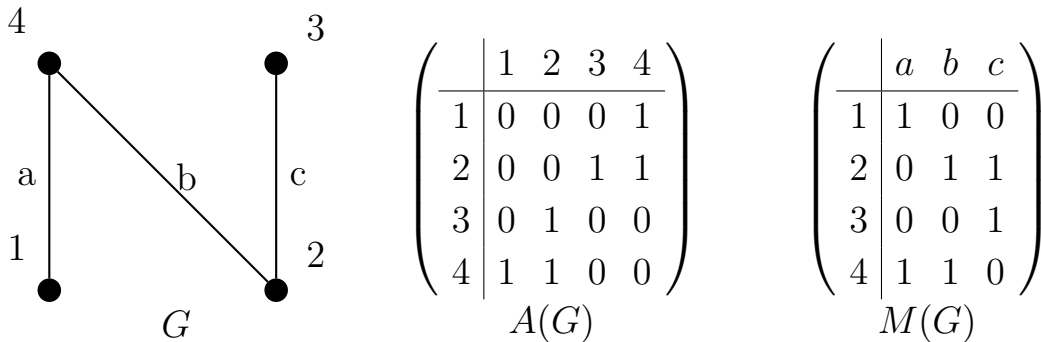
Hình 5: Đồ thị không liên thông

Định nghĩa 1.9 (Đồ thị chính quy). *Đồ thị G gọi là đồ thị chính quy nếu $\delta(G) = \Delta(G) = k$, khi đó ta gọi G là k - chính quy.*

2 Ma trận biểu diễn và đẳng cấu

Đồ thị G có thể được biểu diễn bằng một ma trận $A(G) = [a_{ij}]$ với a_{ij} là số cạnh nối giữa v_i và v_j . Nếu G là đồ thị có hướng, a_{ij} sẽ là số cung đi từ v_i tới v_j .

Nếu cạnh e có đầu mút là đỉnh v thì e gọi là cạnh kề của v . Đồ thị G cũng có thể biểu diễn bằng ma trận $M = [m_{ij}]$, trong đó $m_{ij} = 1$ nếu đỉnh v_i có cạnh kề e_j . Trong trường hợp G là đồ thị có hướng, $m_{ij} = 1$ nếu v_i là đỉnh ra và -1 nếu v_i là đỉnh vào của e_j . Nếu không rơi vào những trường hợp trên thì $m_{ij} = 0$.

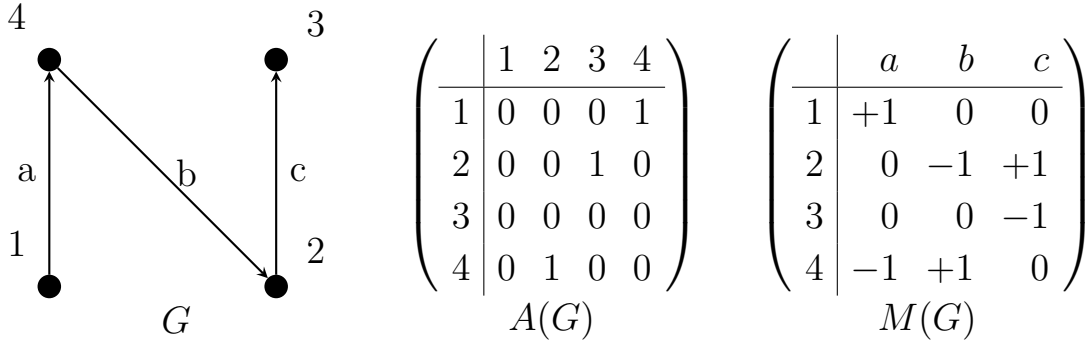


Hình 6: Biểu diễn đồ thị G

Một đồ thị có thể có nhiều ma trận $A(G)$ hoặc $M(G)$ khác nhau, tùy vào cách đánh số cạnh/đỉnh. Sau đây là một số tính chất:

- Nếu $A(G)$ là ma trận đối xứng thì đồ thị G vô hướng.
- Nếu $A(G)$ đối xứng, $a_{ij} \in \{0, 1\}$ và $a_{ii} = 0$ thì G là đồ thị đơn giản.

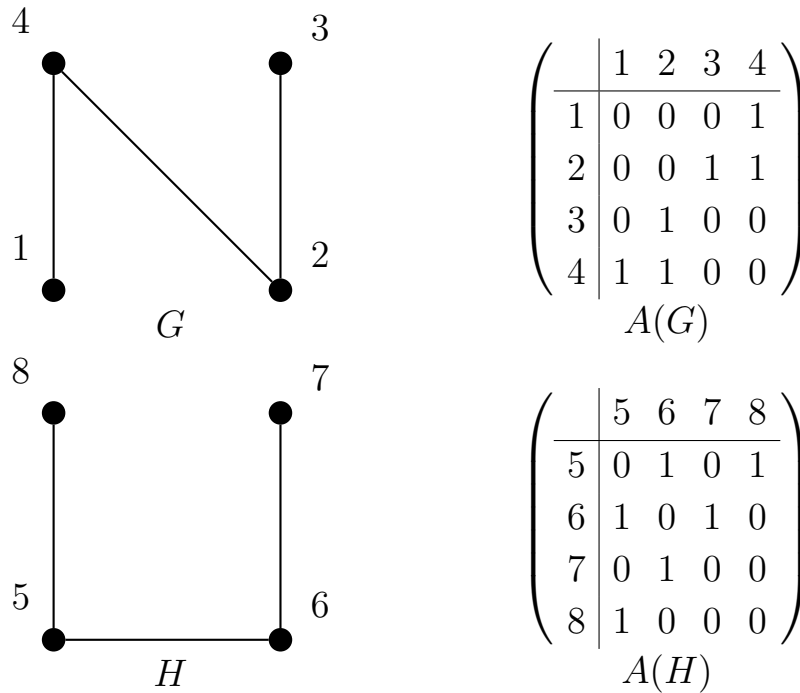
Định nghĩa 2.1 (Đẳng cấu). *Một đẳng cấu giữa G và H là ánh xạ*



Hình 7: Biểu diễn đồ thị G (có hướng)

$f : V(G) \rightarrow V(H)$ sao cho $\forall u, v \in V(G)$ thì $f(u)f(v) \in V(H)$. Nếu tìm được một đẳng cấu từ G tới H và ngược lại, ta nói G và H đẳng cấu nhau.

Đồ thị G và H được gọi là đẳng cấu \iff có thể áp dụng biến đổi trên hàng của $A(G)$ và áp dụng biến đổi tương tự trên cột của $A(G)$ để thu được $A(H)$.



Hình 8: Đẳng cấu H và G

Trong hình 8, đẳng cấu f được xác định: $f(1) = 8$; $f(2) = 6$; $f(3) = 7$; $f(4) = 5$. Từ ma trận $A(G)$ có thể thu được $A(H)$ bằng cách đổi chỗ hai hàng 1, 4 và rồi đổi chỗ hai cột tương ứng.

Đẳng cấu đồ thị là quan hệ tương đương, do đó ta có các lớp tương đương. Một lớp tương đương đẳng cấu đồ thị được biểu diễn bằng một đồ thị không được gán nhãn. Để thấy đồ thị G và H trong hình 8 cùng thuộc một

lớp tương đương. Ta kí hiệu $G = H$ thay vì $G \cong H$. Tương tự, khi nói H là đồ thị con của G , điều này có nghĩa H đẳng cấu với một đồ thị con của G , hay G chứa một bản sao của H .

Đẳng cấu bảo toàn quan hệ "kề nhau" giữa các cạnh, do đó nếu muốn chứng minh hai đồ thị không đẳng cấu, ta chỉ cần chỉ ra một đặc tính nào đó liên quan tới đỉnh mà chúng khác nhau (*bậc của các đỉnh, kích cỡ của clique lớn nhất hoặc chu kì nhỏ nhất...*).

Hai đồ thị G và H đẳng cấu $\iff \overline{G}$ đẳng cấu \overline{H} .

Định nghĩa 2.2 (tự đẳng cấu). Một tự đẳng cấu là một đẳng cấu của đồ thị G với chính nó. G gọi là chuyển tiếp đỉnh $\iff (\forall u, v \in V) (\exists f : f(u) = v)$. Tương tự, G gọi là chuyển tiếp cạnh $\iff (\forall e_1, e_2 \in E) (\exists f : f(e_1) = e_2)$.

3 Đường đi và chu trình

Định nghĩa 3.1 (đường đi). Một **đường đi** (kí hiệu W) có độ dài k là một dãy các **đỉnh và cạnh** $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ với $e_i = (v_{i-1}, v_i)$. Độ dài của một đường đi kí hiệu là $l(W)$. Đỉnh v_0 gọi là đỉnh đầu và v_k gọi là đỉnh cuối. Nếu không có cạnh nào lặp lại, đường đi gọi là đơn. Nếu không có đỉnh nào lặp lại, đường đi gọi là sơ cấp.

Định nghĩa 3.2 (chu trình). Một chu trình là một đường đi đơn mà có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau. Nếu chỉ có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau thì chu trình gọi là sơ cấp.

Có thể thấy chu trình với độ dài 1 là một khuyên.

Mệnh đề 3.1. Đồ thị G là liên thông $\iff (\exists uv \in E)(u \in V_1)(v \in V_2)$ với mọi $V_1, V_2 \neq \emptyset$ mà $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (V_1, V_2 là phân hoạch không rỗng của V)

Chứng minh. Giả sử G liên thông. Khi đó tồn tại một đường đi sơ cấp từ u tới v , trên đường đi đó, sau đỉnh cuối cùng của V_1 mà nó đi qua là cạnh nối giữa V_1 và V_2 . Giả sử G không liên thông. Chứng minh được chiều xuôi. Gọi H là một thành phần liên thông của G , chọn $V_1 = V(H)$. Khi đó không có cạnh nào của G có một đầu mút thuộc V_1 và đầu mút còn lại thuộc V_2 . Bằng cách đảo về chứng minh được chiều ngược. \square

Định lý 3.1. Một cạnh của G là cạnh cắt \iff cạnh đó không thuộc chu trình sơ cấp nào.

Chứng minh. Gọi $e = (uv)$ là một cạnh trong thành phần liên thông H của G . Nếu đồ thị thu được từ H bỏ đi e (kí hiệu $H - e$) vẫn liên thông, thì tồn tại một đường đi sơ cấp từ u tới v . Có thể thấy đường đi này nếu gắn thêm cạnh e sẽ tạo thành một chu trình sơ cấp. Vậy nếu e không phải cạnh cắt thì sẽ thuộc một chu trình sơ cấp. Nếu e là cạnh cắt, H bỏ đi e không liên thông, không tồn tại đường đi từ u tới v . (TBA?) \square

Mệnh đề 3.2. Cho đồ thị $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ với $n \geq 3$. Nếu có ít nhất 2 trong các đồ thị con $G - v_1, G - v_2, \dots, G - v_n$ (G xóa đi đỉnh v_i) liên thông thì G liên thông.

Chứng minh. Giả sử G không liên thông, $H_i, i = \overline{1, k}$ là các thành phần liên thông của G . Nếu xóa một đỉnh khỏi H_i thì không làm thay đổi số thành phần liên thông, trừ khi $H_i = K_1$ (giảm đi còn $k - 1$ thành phần liên thông). Nếu 2 trong số $G - v_1, G - v_2, \dots, G - v_n$ liên thông thì $k = 2$ và $H_1 = H_2 = K_1$, mâu thuẫn với $n \geq 3$. \square

Hệ quả 3.1. Mọi đồ thị G mà chứa ít nhất một cạnh thì có ít nhất hai đỉnh không phải là đỉnh cắt

Định lý 3.2. Một đồ thị là một đồ thị hai phía \iff nó không chứa chu trình độ dài lẻ.

Chứng minh. Giả sử G là một đồ thị hai phía, khi đó mọi đường đi trên G đều chuyển qua chuyển lại giữa các đỉnh thuộc V_1 và V_2 . Vì vậy, nếu muốn quay lại điểm bắt đầu thì đường đi buộc phải có độ dài chẵn.

Giả sử G không có chu trình độ dài chẵn. G liên thông. Chọn cố định điểm u thuộc $V(G)$. Với mọi điểm $v \in V(G)$, mọi đường đi từ u tới v đều phải có độ dài cùng chẵn hoặc cùng lẻ, nếu không sẽ tạo ra một chu trình độ dài lẻ (mâu thuẫn). Ta phân hoạch $V(G)$ thành 2 tập $V_1 = \{v \mid \text{đường đi từ } u \text{ tới } v \text{ độ dài lẻ}\}$ và $V_2 = \{v \mid \text{đường đi từ } u \text{ tới } v \text{ độ dài chẵn}\}$. Thấy được V_1 là một tập độc lập vì một cạnh nối giữa hai đỉnh của V_1 sẽ tạo ra một chu trình độ dài lẻ. Ta có điều tương tự với V_2 . Do đó G là một đồ thị hai phía. \square

4 Bậc của các đỉnh trong đồ thị

Định lý 4.1. Cho một đồ thị G , tổng bậc của các đỉnh trong G bằng 2 lần số cạnh của G .

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

Chứng minh. Với mỗi $e \in E(G)$, e có hai đầu mút, làm tăng bậc của 2 đỉnh đầu mút của nó lên 1 và do đó tăng tổng số bậc của đồ thị lên 2. \square

Hệ quả 4.1. Số đỉnh bậc lẻ trong một đồ thị luôn là số chẵn. Không có đồ thị chính quy nào có bậc lẻ.

Hệ quả 4.2. Đồ thị k – chính quy với n đỉnh có $nk/2$ cạnh.

5 Một số kĩ thuật trên đồ thị

Mệnh đề 5.1. Với $n > 2$, có $2^{C_{n-1}^2}$ đồ thị đơn giản với tập đỉnh $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ mà bậc của mỗi đỉnh đều chẵn.

Mệnh đề 5.2. Đồ thị đơn giản mà có nhiều hơn một đỉnh thì có hai đỉnh với bậc bằng nhau.

Chứng minh. Trong đồ thị với n đỉnh, bậc của các đỉnh nhận giá trị trong tập $\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$. Tuy nhiên, giá trị 0 và $n-1$ sẽ không xuất hiện cùng một lúc vì đỉnh có bậc $n-1$ sẽ kề với mọi đỉnh, đỉnh có bậc 0 là cô lập, 2 đỉnh như trên không thể cùng xuất hiện trong một đồ thị. Do đó, số giá trị bậc các đỉnh của G luôn bé hơn n , theo nguyên lí Dirichlet, mệnh đề được chứng minh. \square

Mệnh đề 5.3. Nếu G là đồ thị đơn giản với n đỉnh và $\delta(G) \geq (n-1)/2$ thì G liên thông.

Chứng minh. Lấy 2 đỉnh $u, v \in V(G)$. Giả sử u, v không kề nhau. Vì $\delta(G) \geq (n-1)/2$, sẽ có ít nhất $n-1$ cạnh để nối u hoặc v tới các đỉnh khác. Tuy nhiên chỉ có $n-2$ cạnh, do đó theo nguyên lí Dirichlet, sẽ có một đỉnh nào đó kề với cả u và v . Vậy mỗi cặp đỉnh trong G đều tồn tại một đường đi giữa chúng. \square

Định lý 5.1. *Cho đồ thị G không có khuyên. Khi đó G có một đồ thị con là đồ thị hai phía với ít nhất $|E(G)|/2$ cạnh*

Chứng minh. Phân hoạch tập đỉnh của G thành hai tập V_1 và V_2 . Lấy các cạnh $e = uv$ sao cho $u \in V_1$ và $v \in V_2$ đưa vào tập $E(H)$. Khi đó ta thu được đồ thị $H = (V_1, V_2, E(H))$ là đồ thị con 2 phía của G . Giả sử cạnh $v \in V(H)$ có ít hơn $|E(G)|/2$ cạnh nối với v . \square