



Trường Đại học Bách khoa Hà Nội  
Viện Toán ứng dụng và Tin học

Bài tập Giải tích phức:  
Một số ứng dụng của lý thuyết thặng dư

*Sinh viên thực hiện:*  
20173520 – Nguyễn Đức Hùng

Hà Nội, tháng 5 năm 2019

# Mục lục

# 1 Chuỗi Laurent và thặng dư

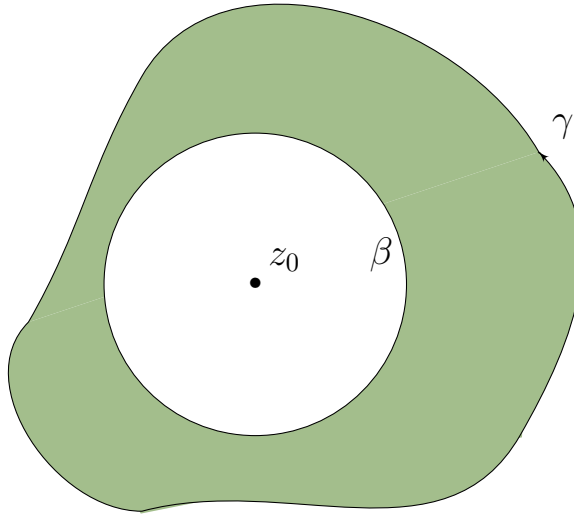
**Định nghĩa 1.1** (Chuỗi Laurent). Khai triển Laurent của hàm  $f(z)$  quanh điểm  $z_0$  là chuỗi lũy thừa:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

Trong đó  $a_n$  được xác định bởi:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (2)$$

Với  $\gamma$  là đường cong kín bao quanh  $z_0$  sao cho: tồn tại đường tròn  $\beta$  tâm  $z_0$ , bán kính  $r > 0$ ,  $f(z)$  giải tích trên miền được giới hạn bởi  $\beta \cap \gamma$ .



Hình 1: Đường cong  $\gamma$

Đặc biệt, khi  $n = -1$ , ta có:

$$a_{(-1)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \quad (3)$$

**Định nghĩa 1.2.**  $a_{-1}$  được gọi là thặng dư (residue) của  $f(z)$  tại điểm  $z_0$ . Ký hiệu:

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \quad (4)$$

Với một hàm  $f(z)$  bất kì giải tích trên miền  $D \setminus \{z_0\}$ ,  $z_0$  là cực điểm cấp  $n$  của  $f(z)$ , ta có thể tìm thặng dư của  $f(z)$  tại  $z_0$  bằng cách:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)] \Big|_{z=z_0} \quad (5)$$

Trong trường hợp  $z_0$  là cực điểm đơn giản:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z)}{q'(z)} \Big|_{z=z_0} \quad \text{với } f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad (6)$$

**Định lý 1.1.** Nếu hàm  $f(z)$  có các cực điểm  $z_k$  trên miền  $D$  giới hạn bởi đường cong  $C$ , ta có:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{\forall z_k} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

## 2 Một số ứng dụng của thặng dư

### 2.1 Phân tích lớp hàm hữu tỉ

Cho đa thức  $p, q \in \mathbb{C}[z]$  với  $\deg(p) + 1 \leq \deg(q)$ . Giả sử  $p$  có các không điểm  $z_1, \dots, z_n$  có các cấp tương ứng là  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Khi đó hàm  $f(z) = p(z)/q(z)$  có thể được viết

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(z-z_i)^j} \quad (7)$$

với các hằng số  $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ . Trong bài viết này, kết quả trên sẽ được thừa nhận không chứng minh.

Xét hàm phụ  $f(z) \cdot (z-z_\alpha)^{\beta-1}$  với  $0 \leq \alpha \leq n$  và  $1 \leq \beta \leq m_\alpha$ , ta có:

$$f(z) \cdot (z-z_\alpha)^{\beta-1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(z-z_i)^j} \cdot (z-z_\alpha)^{\beta-1} \quad (8)$$

$$= \dots + \frac{a_{\alpha,\beta}}{z-z_\alpha} + \dots \quad (9)$$

Dựa vào công thức (??) ta thấy hệ số  $a_{i,j}$  ở trên có thể được tính theo công thức:

$$a_{i,j} = \operatorname{Res}_{z=z_i} [f(z) \cdot (z-z_i)^{j-1}] \quad (10)$$

Thay công thức (??) vào (??) ta được:

$$f(z) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{(z - z_i)^j} \cdot \operatorname{Res}_{z=z_i} [f(z) \cdot (z - z_i)^{j-1}] \quad (11)$$

Trong trường hợp  $f(z)$  chỉ có cực điểm đơn giản, (??) trở thành:

$$f(z) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{z - z_i} \cdot \operatorname{Res}_{z=z_i} f(z) \quad (12)$$

**Ví dụ 2.1.** Phân tích hàm  $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}$ . Các cực điểm của  $f(z)$  bao gồm:

$$\begin{aligned} z &= i && \text{(Cực điểm đơn giản)} \\ z &= 0 && \text{(Cực điểm cấp 2)} \end{aligned}$$

Tính các thặng dư cần thiết:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=i} f(z) &= \frac{1}{[z^2(z-i)]'} \Big|_{z=i} \\ &= -1 \\ \operatorname{Res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} [f(z) \cdot z^2] \Big|_{z=0} \\ &= 1 \\ \operatorname{Res}_{z=0} f(z)(z-0) &= \frac{1}{[z(z-i)]'} \Big|_{z=0} \\ &= i \end{aligned}$$

Sử dụng công thức (??) ta được:

$$f(z) = \frac{-1}{z-i} + \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2}$$

## 2.2 Nội suy đa thức

**Định nghĩa 2.1** (Đa thức nội suy). Cho tập dữ liệu  $\{(z_i, y_i)\}_{i=0}^n \subset \mathbb{C}^2$ , trong đó không có  $z_i$  nào trùng nhau. Một đa thức  $p \in C[z]$  với  $\deg(p) \leq n$  thỏa mãn

$$p(z_i) = y_i$$

được gọi là đa thức nội suy từ tập dữ liệu đã cho.

**Định lý 2.1** (Nguyên duy nhất). Với mỗi tập dữ liệu như trên, tồn tại duy nhất một đa thức nội suy  $p$ . (Chỉ thừa nhận không chứng minh)

**Định nghĩa 2.2** (Đa thức nội suy Lagrange). Cho tập dữ liệu  $\{(z_i, y_i)\}_{i=0}^n \subset \mathbb{C}^2$ . Đa thức nội suy Lagrange từ tập dữ liệu trên được định nghĩa:

$$L(z) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(z) \quad (13)$$

với  $l_i(z)$  là:

$$l_i(z) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{z - z_k}{z_i - z_k} \quad (14)$$

Đặt hàm phụ  $w(z)$ :

$$w(z) = (z - z_0) \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_{n-1}) \cdot (z - z_n) \quad (15)$$

Nhận xét:

$$w'(z_i) = \left. \frac{w(z)}{z - z_i} \right|_{z=z_i} \quad (16)$$

Dựa vào (??), (??) viết lại (??):

$$l_i(z) = \frac{w(z)}{w'(z)(z - z_i)} \quad (17)$$

Xét hàm  $F(t)$  và  $G(t)$  định nghĩa bởi:

$$F(t) = \frac{w(z) - w(t)}{(z - t)} \quad (18)$$

$$G(t) = w(t) \quad (19)$$

Vì  $\frac{F}{G}(t)$  có các cực điểm đơn giảm tại  $z_i$ , ta có:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{t=z_i} \frac{F(t)}{G(t)} &= \frac{F(z_i)}{G'(z_i)} \\ &= \frac{w(z)}{(z - z_i)w'(z_i)} \end{aligned} \quad (20)$$

Dựa vào (??), (??), (??) và (??), ta có công thức mới cho đa thức nội suy Lagrange:

$$L(z) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \operatorname{Res}_{z=z_i} \frac{F}{G}(z) \quad (21)$$

Gọi  $\gamma$  là đường tròn đủ lớn sao cho  $z_i \in \text{int}(\gamma)$ ,  $i = \overline{0, n}$ ;  $f$  là hàm đơn trị giải tích trên  $\text{int}(\gamma)$  thỏa mãn  $f(z_i) = y_i$ . Dựa vào (??) có dạng khác của đa thức nội suy Lagrange:

$$L(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{w(z) - w(t)}{(z - t) \cdot w(t)} f(t) dt \quad (22)$$

## 2.3 Biến đổi Laplace ngược

**Định nghĩa 2.3.** [Biến đổi Laplace] Cho  $f(t)$  là hàm xác định với  $t \in [0; +\infty)$ . Biến đổi Laplace của hàm  $f(t)$  được định nghĩa:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{I} \quad (23)$$

Khi đó hàm  $f(t)$  được gọi là biến đổi Laplace ngược của hàm  $F(s)$ , ký hiệu

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = f(t) \quad (24)$$

**Định lý 2.2** (Sự tồn tại của biến đổi Laplace). Một hàm  $f(t)$  tồn tại biến đổi Laplace  $F(s)$  khi:

$$(\forall t \geq 0), (\exists M, k), |f(t)| < Me^{kt} \quad (25)$$

Hệ quả:

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \right| \\ &\leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-st} dt \\ &\leq \int_0^{\infty} Me^{kt-st} dt \\ &= \frac{M}{s - k} \end{aligned} \quad (26)$$

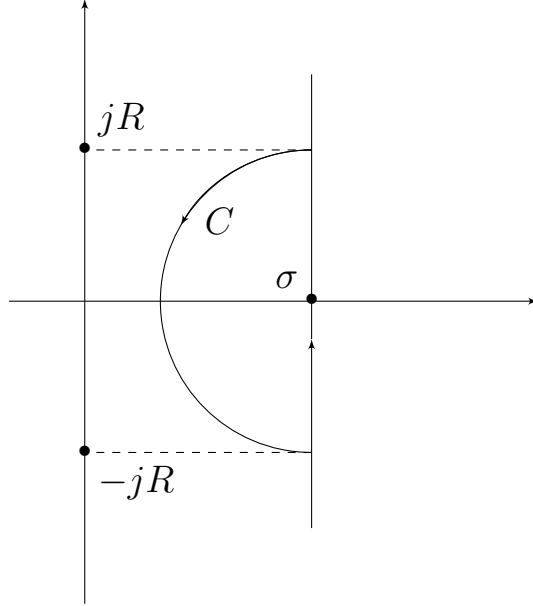
**Định nghĩa 2.4.** [Công thức Fourier – Mellin] Cho hàm  $f(t)$  xác định với  $t > 0$ ,  $f(t)$  có biến đổi Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

với  $s = \sigma + i\omega$ . Khi đó  $F(s)$  có biến đổi Laplace ngược:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)e^{st} dt \quad (27)$$

Từ công thức (??) ta sẽ đi tìm cách biến đổi Laplace ngược sử dụng lý thuyết thặng dư. Xét hàm  $F(s)e^{st}$  với các cực điểm  $\{s_k\}$ . Gọi  $C_1$  là nửa bên trái đường tròn tâm  $\sigma$  bán kính  $R$ ,  $d$  là đường thẳng  $\text{Re}(s) = \sigma$ . Đặt  $C = d \cup C_1$ . Chọn  $\sigma$  và  $R$  sao cho  $C$  chứa toàn bộ cực điểm của  $F(s)e^{st}$ .



Hình 2: Đường cong  $C$

Xét tích phân của  $F(s)e^{st}$  trên đường cong  $C$ :

$$\begin{aligned}
 \oint_C F(s)e^{st} ds &= \int_{C_1} F(s)e^{st} ds + \int_d F(s)e^{st} ds \\
 &= \int_{C_1} F(s)e^{st} ds + \int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} F(s)e^{st} ds \\
 &= 2\pi i \sum_{\substack{s=s_k \\ \forall s_k}} \text{Res } F(s)e^{st}
 \end{aligned} \tag{28}$$

Trên nửa đường tròn  $C_1$ ,  $s$  được cho bởi công thức  $s = \sigma + Re^{i\phi}$ ,  $\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$ . Theo hệ quả (??):

$$\begin{aligned}
 |F(s)| &< \frac{M}{s-k} \\
 \implies |F(\sigma + Re^{i\phi})| &< \frac{M}{\sigma - k + Re^{i\phi}} \rightarrow 0 \text{ khi } R \rightarrow \infty \\
 \implies \lim_{R \rightarrow \infty} |F(\sigma + Re^{i\phi})| &= 0
 \end{aligned}$$

hay:

$$\implies \forall \varepsilon > 0, \exists R, \left| F(\sigma + Re^{i/\phi}) \right| < \varepsilon \tag{29}$$



Áp dụng (??) cho tích phân ở trên, ta có:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_1} F(s)e^{st} ds \right| &\leq \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} F(\sigma + Re^{i\phi}) e^{(\sigma + Re^{i\phi})t} d(\sigma + Re^{i\phi}) \right| \\
&\leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left| F(\sigma + Re^{i\phi}) e^{(\sigma + Re^{i\phi})t} i Re^{i\phi} \right| d\phi \\
&\leq R\varepsilon \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left| e^{(\sigma + R \cos \phi + Ri \sin \phi)t} \right| d(\phi) \\
&= R\varepsilon e^{\sigma t} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt \cos \phi} d(\phi) \\
&= R\varepsilon e^{\sigma t} \int_0^{\pi/2} e^{-Rt \sin \phi} d(\phi)
\end{aligned}$$

Vì trên đoạn  $(0, \pi/2)$ ,  $\sin(\phi) \leq 2\phi/\pi$  nên:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_1} F(s)e^{st} ds \right| &\leq R\varepsilon e^{\sigma t} \int_0^{\pi/2} e^{-Rt 2\phi/\pi} d(\phi) \\
&\leq \frac{\varepsilon R e^{\sigma t}}{t} (1 - e^{-Rt})
\end{aligned} \tag{30}$$

Do đó với mọi  $t > 0$  ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{C_1} F(s)e^{st} ds &= 0 \\
\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma - iR}^{\sigma + iR} F(s)e^{st} ds &= \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)e^{st} ds \\
\Rightarrow \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)e^{st} ds &= 2\pi i \sum_{\substack{s=s_k \\ \forall s_k}} \text{Res } F(s)e^{st}
\end{aligned} \tag{31}$$

Từ (??) và định nghĩa (??) thu được công thức biến đổi Laplace ngược dựa trên thặng dư của  $F(s)e^{st}$ :

$$f(z) = \sum_{\substack{s=s_k \\ \forall s_k}} \text{Res } F(s)e^{st} \tag{32}$$

**Ví dụ 2.2.** Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm  $F(s) = \frac{1}{s(s+4)}$ .

$F(s)$  có các cực điểm đơn giản  $s = 0$  và  $s = -4$ . Dễ thấy cực điểm của  $F(s)e^{st}$  cũng chính là cực điểm của  $F(s)$ . Ta tìm các thặng dư tương ứng:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{s=0} F(s)e^{st} &= \left. \frac{e^{st}}{s+4} \right|_{s=0} = \frac{1}{4} \\ \operatorname{Res}_{s=-4} F(s)e^{st} &= \left. \frac{e^{st}}{s} \right|_{s=-4} = \frac{e^{-4t}}{-4}\end{aligned}$$

Dùng công thức (??) ta thu được biến đổi Laplace ngược:

$$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{e^{-4t}}{4} \quad (33)$$

## 2.4 Tính tổng chuỗi vô hạn

Cho hàm  $f(z)$  có hữu hạn cực điểm trên  $\mathbb{C}$ . Xét chuỗi  $S$  định nghĩa bởi:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \quad (34)$$

**Định lý 2.3.** Giả sử  $f(z)$  có các cực điểm  $\{z_k\}$  và chuỗi  $S$  như trên hội tụ.  $f(z)$  thỏa mãn với  $M \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$  và  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 2$  thì  $f(z) < M/|z|^k$ . Khi đó chuỗi  $S$  có thể được đánh giá qua công thức:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_{\forall z_k} \operatorname{Res}_{z=z_k} \pi \cot(\pi z) f(z)$$

**Chứng minh:** Xét miền  $D = [-N - \alpha; N + \alpha]^2$  với  $N \in \mathbb{N}$ , gọi  $C$  là đường cong giới hạn  $D$ . Chọn  $\alpha$  sao cho  $\pi \cos(\pi z) f(z)$  giải tích trên  $C$  (chọn được vì  $f(z)$  có hữu hạn cực điểm còn  $\pi \cos(\pi z)$  chỉ có cực điểm nguyên). Theo công thức định lý ??, ta có:

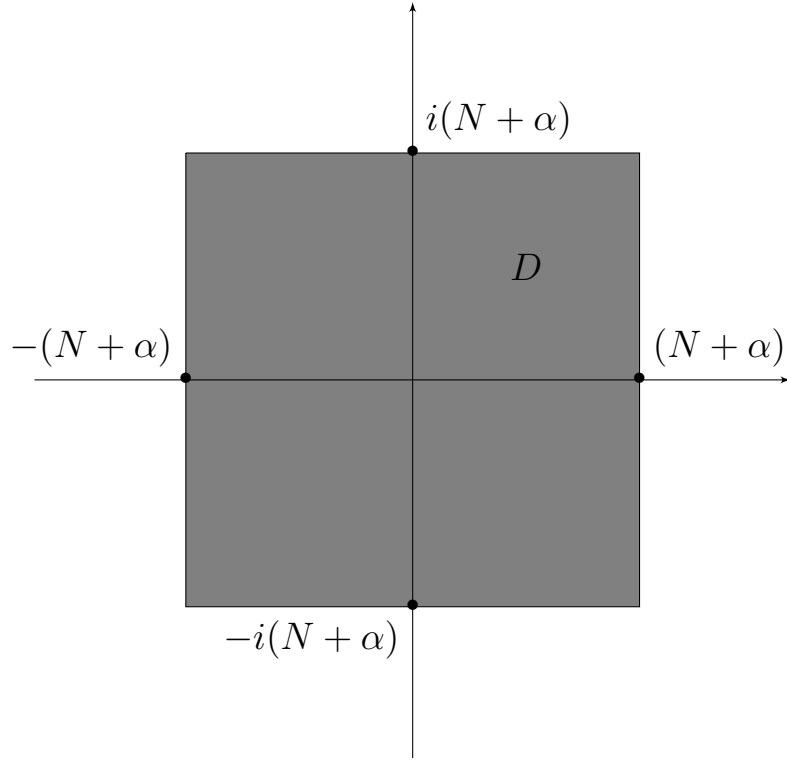
$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \pi \cot(\pi z) f(z) dz = \sum \operatorname{Res}_{z=z_k} \pi \cot(\pi z) f(z) \quad (35)$$

Hàm  $\pi \cot(\pi z)$  có các cực điểm cấp 1 tại  $n, n \in \mathbb{N}$ , đồng thời:

$$\operatorname{Res}_{z=n} \pi \cot(\pi z) = 1 \quad (36)$$

Do đó, công thức (??) trở thành:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \pi \cot(\pi z) f(z) dz = \sum_{\forall z_k} \operatorname{Res}_{z=z_k} \pi \cot(\pi z) f(z) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \notin \{z_k\}}}^{\infty} f(n) \quad (37)$$



Hình 3: Miền  $D$  và đường cong  $C$

Xét hàm  $\cot(\pi z)$ ,  $z = x + iy \in C$ , tồn tại số thực  $A > 0$  sao cho:

$$\begin{aligned}
 |\cot(\pi z)| &\leq \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| \\
 &\leq \frac{|e^{i\pi z}| + |e^{-i\pi z}|}{|e^{iz}| - |e^{-iz}|} \\
 &\leq \frac{e^{y\pi} + e^{-y\pi}}{e^{y\pi} - e^{-y\pi}} \\
 &= \frac{1 + e^{-2y\pi}}{1 - e^{-2y\pi}} \leq A
 \end{aligned} \tag{38}$$

Theo giả thiết và (??), ta có:

$$\begin{aligned}
 \left| \pi \int_C \cot(\pi z) f(z) dz \right| &\leq \pi AM \int_C \frac{dz}{|z|^k} \\
 &= \pi AM \int_C \frac{dz}{|z|^k}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Vì trên đường cong  $C$ ,  $|z| > N$  nên:

$$\left| \pi \int_C \cot(\pi z) f(z) dz \right| \leq \frac{8AM\pi}{N^k} (N + \alpha) \tag{40}$$

Vì  $k > 1$  nên khi  $N \rightarrow \infty$ , ta có:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_C \pi \cot(\pi z) f(z) dz = 0 \quad (41)$$

hay:

$$-\sum_{\substack{z=z_k \\ \forall z_k}} \text{Res } \pi \cot(\pi z) f(z) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \notin \{z_k\}}}^{\infty} f(n) \quad (42)$$

Vì loại bỏ một số hữu hạn các số hạng ra khỏi tổng vô hạn thì tổng vô hạn không làm thay đổi tổng đó, và vì tập các cực điểm  $\{z_k\}$  của  $f(z)$  là hữu hạn:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{\substack{z=z_k \\ \forall z_k}} \text{Res } \pi \cot(\pi z) f(z) \quad (\text{đpcm})$$

**Ví dụ 2.3.** Tính  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ . Hàm  $f(z) = 1/z^2$  có cực điểm tại  $z = 0$ . Ta tính thặng dư của  $\pi \cot(\pi z) f(z)$  tại  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=0} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} \cdot z^3 \right) \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

Theo định lý ??, ta có:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\text{Res}_{z=0} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

Vì hàm  $f(n)$  chẵn nên:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$