1 Giới thiệu

Một trong những khái niệm cơ bản của lý thuyết điều khiển là khả năng điều khiển (controllability). Hệ điều khiển tuyến tính $\dot{x} = Ax + Bu, x \in \mathbb{K}^n, A \in \mathbb{K}^{n\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, với $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$ được gọi là điều khiển được nếu với trạng thái ban đầu bất kỳ $x(0) = x_0$ và trạng thái cuối bất kì x_1, tồn tại $T > 0$ và một hàm điều khiển có thể đo được $u(t) \in \mathbb{K}^m, 0 \leq t \leq T$ sao cho $x(T) = x_1$. Khi đó ta gọi cặp ma trận $(A, B) \in \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times m}$ là điều khiển được.

Với cặp (A, B) điều khiển được, người ta tính toán khoảng cách $r_{\mathbb{K}}(A, B)$ đến trạng thái không điều khiển được:

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{K}}(A,B) = \inf\{ &\|\Delta_1, \Delta_2\| : [\Delta_1, \Delta_2] \in \mathbb{K}^{n\times(n+m)} \\ &, [A,B] + [\Delta_1, \Delta_2] \text{ là không điều khiển được}\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

$\|\cdot\|$ biểu thị một chuẩn ma trận (matrix norm). $r_{\mathbb{K}}(A, B)$ cho biết cần gây nhiễu cặp ma trận (A, B) bao nhiêu để hủy tính điều khiển của nó.

Vấn đề (1.1) có tầm quan trọng lớn trong lý thuyết điều khiển và đã thu hút được nhiều sự chú ý của các nhà nghiên cứu trong những năm gần đây. Một trong những kết quả nổi tiếng nhất công thức được Eising chứng minh:

$$r_{\mathbb{C}}(A, B) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}([A - \lambda I B]), \tag{1.2}$$

Trong đó $\sigma_{\min}$ kí hiệu giá trị kì dị nhỏ nhất của ma trận, chuẩn ma trận trong (1.2) là chuẩn phổ (spectral norm) hoặc chuẩn Frobenius

(Frobenius norm). Chứng minh của (1.2) dựa trên điều kiện Hautus về khả năng điều khiển:

$$
\begin{aligned}
(A, B) \in \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times m} &\text{ là điều khiển được} && (1.3)\\
\iff \operatorname{rank}[A - \lambda i, B] &= n,\ \forall \lambda \in \mathbb{C} && (1.4)
\end{aligned}
$$

Được thúc đẩy bởi sự phát triển trong lý thuyết bán kính ổn định, vấn đề về tính toán khoảng cách có cấu trúc đến trạng thái không điều khiển được khi cặp (A, B) bị nhiễu affine:

$$[A, B] \rightsquigarrow \left[\tilde{A}, \tilde{B}\right] = [A, B] + D\Delta E,\ \Delta \in \mathcal{D}, \tag{1.5}$$

Với $D \in \mathbb{K}^{n\times l}, E \in \mathbb{K}^{q\times(n+m)}$ là ma trận cấu trúc cho trước và $\mathcal{D} \subset \mathbb{K}^{l\times q}$là lớp nhiễu cho trước. Trường hợp $\mathcal{D} = \mathbb{C}^{l\times q}$đã được xem xét trong một bài báo, với một số công thức về khoảng cách có cấu trúc đến trạng thái không điều khiển được đã được chứng minh cho các chuẩn phổ ma trận.

Trong báo cáo này, ta thiết lập các công thức về khoảng cách có cấu trúc đến trạng thái không điều khiển được trong trường hợp tổng quát hơn, khi ma trận A và B chịu nhiều nhiễu:

$$[A, B] \rightsquigarrow \left[\tilde{A}, \tilde{B}\right] = [A, B] + \sum_{i=1}^{N} D_i \Delta_i E_i, \tag{1.6}$$

Kĩ thuật chính là sử dụng một số dữ kiện đã biết từ lý thuyết về toán tử tuyến tính đa trị trong việc biểu diễn các phương trình và đánh giá các chuẩn của ma trận liên quan đến tính toán.

Cụ thể ta có các tiến hành theo quy trình:

- Nhớ lại một số ký hiệu và kết quả sơ bộ về toán tử tuyến tính đa giá trị
- Giải quyết trường hợp hệ ma trận nhiễu có cấu trúc dạng (1.5) và

suy ra khoảng cách có cấu trúc đến trạng thái không điều khiển được.

- Xem xét mô hình tổng quát hơn (1.6) và thiết lập một số giới hạn cho khoảng cách đến trạng thái không điều khiển được.

- Minh họa kết quả bằng ví dụ

2 Cơ sở

Trước khi vào phần này ta điểm qua một số ký hiệu. Ký hiệu:

- $\mathbb{K}$ là trường số, có thể là $\mathbb{C}$ hoặc $\mathbb{R}$,
- n, m, k, l, q, N là các số nguyên dương,
- $\mathbb{K}^{n\times m}$ là tập các ma trận cỡ $n \times m$, $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n\times 1}$ là không gian véc tơ n chiều với chuẩn véc tơ $\|\cdot\|$,
- $A^* \in \mathbb{K}^{n\times m}$ là ma trận liên hợp của $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$,
- Không gian $(\mathbb{K}^n)^* = \{u^* \colon u \in \mathbb{K}^n\}$ là không gian đối ngẫu của $\mathbb{K}^n$, $(\mathbb{K}^n)^*$ là không gian hàng với chuẩn đối ngẫu,
- Với $u^* \in (\mathbb{K}^n)^*$, $x \in \mathbb{K}^n$, ký hiệu $u^*(x) = u^* x$,
- Với một tập $M \subset \mathbb{K}^n$, ký hiệu $M^\perp = \{u^* \in \mathbb{K}^* \colon u^* x = 0 \ \forall x \in M\}$.

Ký hiệu $\mathcal{F} \colon \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$ là ánh xạ đa trị. Đồ thị của $\mathcal{F}$, định nghĩa bởi

$$\operatorname{gr}\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \colon y \in \mathcal{F}(x)\}. \tag{2.1}$$

Nếu $\operatorname{gr} F$ là không gian tuyến tính con của $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$ thì $\mathcal{F}$ gọi là toán tử tuyến tính đa trị. Tập xác định và nhân của $\mathcal{F}$ là

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}\mathcal{F} &= \{x \in \mathbb{K}^n \colon \mathcal{F}(x) \neq \emptyset\}, \\ \ker\mathcal{F} &= \{x \in \operatorname{dom}\mathcal{F} \colon 0 \in \mathcal{F}(x)\}. \end{aligned}$$

Theo định nghĩa, $\mathcal{F}(0)$ là không gian tuyến tính con, và với $x \in \operatorname{dom}\mathcal{F}$, ta có

$$y \in \mathcal{F}(x) \iff \mathcal{F}(x) = y + \mathcal{F}(0). \tag{2.2}$$

Cho một toán tử tuyến tính đa trị $\mathscr{F}: \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$, chuẩn véc tơ trên không gian $\mathbb{K}^n$ và $\mathbb{K}^m$, ta có chuẩn của $\mathscr{F}$ định nghĩa bởi

$$\|\mathscr{F}\| = \sup\left\{\inf_{y\in\mathscr{F}(x)} \|y\| : x \in \operatorname{dom}\mathscr{F}, \|x\| = 1\right\}. \tag{2.3}$$

Từ định nghĩa, ta có

$$\inf_{y\in\mathscr{F}(x)} \|y\| \leq \|\mathscr{F}\| \, \|x\| \quad \forall x \in \operatorname{dom}\mathscr{F},$$

và, nếu $\mathscr{F}$ là đơn trị thì

$$\|\mathscr{F}(x)\| \leq \|\mathscr{F}\| \, \|x\| \quad \forall x \in \operatorname{dom}\mathscr{F}. \tag{2.4}$$

Nếu các chuẩn đang được xét là chuẩn Ơ cờ lít (tức là $\|x\| = \sqrt{x^*x}$) thì từ (2.2) ta có

$$y \in \mathscr{F}(x), y^* \in \mathscr{F}(0)^{\perp} \implies d(0, \mathscr{F}(x)) := \inf_{z\in\mathscr{F}(x)} \|z\| = \|y\|. \tag{2.5}$$

Với một toán tử đa trị $\mathscr{F}: \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$, ta có toán tử liên hợp

$$\begin{gathered}\mathscr{F}^*\colon (\mathbb{K}^m)^* \rightrightarrows (\mathbb{K}^n)^*, \\ \mathscr{F}^*(v^*) = \{u^* \in (\mathbb{K}^m)^* : u^*x = v^*y \,\forall (x,y) \in \operatorname{gr} F\}.\end{gathered}$$

và toán tử nghịch đảo

$$\begin{gathered}\mathscr{F}^{-1}\colon \operatorname{im}\mathscr{F} \rightrightarrows \mathbb{K}^n, \\ \mathscr{F}^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{K}^n\colon y \in \mathscr{F}(x)\}.\end{gathered}$$

Các toán tử $\mathscr{F}^*$ và $\mathscr{F}^{-1}$ cũng là tuyến tính đa trị. Đồng thời, ta có các tính chất:

- $(\mathscr{F}^*)^* = \mathscr{F}$, đối ngẫu của đối ngẫu cũng là đối ngẫu,
- $(\mathscr{F}^*)^{-1} = (\mathscr{F}^{-1})^*$, đối ngẫu của nghịch đảo là nghịch đảo của đối ngẫu, do đó có thể ký hiệu là $\mathscr{F}^{*-1}$,
- $\|\mathscr{F}\| = \|\mathscr{F}^{-1}\|$, chuẩn của nghịch đảo bằng chuẩn của ánh xạ ban đầu.

Ánh xạ $\mathcal{F}$ là toàn ánh (tức $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^m$) khi và chỉ khi $\mathcal{F}$ là đơn ánh, tức $\mathcal{F}^{*-1}(0) = \{0\}$, hay F^{*-1} là đơn trị. Xét $\mathcal{F}: \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^m$, $g: \mathbb{K}^m \rightrightarrows \mathbb{K}^l$ là toán tử tuyến tính đa trị, toán tử $g\mathcal{F}: \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^l$ được định nghĩa bởi $g\mathcal{F}(x) = g(\mathcal{F}(x))$ với mọi $x \in \operatorname{dom}\mathcal{F}$ và cũng là tuyến tính đa trị. Toán tử $g\mathcal{F}$ có một số tính chất:

- $\mathcal{F}(0) \subset \operatorname{dom} g \implies \|g\mathcal{F}\| \leq \|g\| \|F\|$,
- $\operatorname{im}\mathcal{F} \subset \operatorname{dom} g \implies (g\mathcal{F})^* = \mathcal{F}^* g^*$.

Nếu $\mathcal{F}$ là đơn trị, $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_G(x) = Gx$, với $G \in \mathbb{K}^{m\times n}$ và $x \in \mathbb{K}^n$, thì hiển nhiên $\|\mathcal{F}_G\| = \|G\|$. Trong một dãy, khi làm việc với toán tử tuyến tính đa trị, ta dùng ký hiệu $\mathcal{F}_G(x) = G(x)$. Toán tử đối ngẫu $(\mathcal{F}_G)^*: (\mathbb{K}^m)^* \to (\mathbb{K}^n)^*$ cũng là đơn trị được cho bởi $(\mathcal{F}_G)^*(v^*) = v^* G^*$. Để đơn giản hoá vấn đề, ta đồng nhất $(\mathcal{F}_G)^*$ với G^*, tức

$$(\mathcal{F}_G)^*(v^*) = G^*(v^*) = v^* G, \quad \forall v^* \in (\mathbb{K}^m)^*.$$

Chú ý: $G^* v$ được hiểu là tích của ma trận $G^* \in \mathbb{K}^{n\times m}$ với véc tơ $v \in \mathbb{K}^n$ và $(G^* v)^* = G^*(v^*)$.

3 Khoảng cách cấu trúc dưới nhiễu tuyến tính

Giả sử cặp ma trận $(A, B) \in \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n}$ là điều khiển được và có dạng affine

$$[A, B] \rightsquigarrow \left[\widetilde{A}, \widetilde{B}\right] = [A, B] + D\Delta E,$$

trong đó $D \in \mathbb{K}^{n\times l}$, $E \in \mathbb{K}^{q\times(n+m)}$ là những ma trận cho trước và $\Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}$ là ma trận nhiều loạn. Những ma trận cấu trúc D và E quyết định cấu trúc của nhiều loạn $D\Delta E$.

Definition 3.1. Cho chuẩn $\|\cdot\|$ trên $\mathbb{K}^{l\times q}$, một khoảng cách cấu trúc để một cặp (A, B) không điều khiển được dưới nhiễu affine được định nghĩa bởi

$$r_{\mathbb{K}}^{D,E}(A, B) = \inf\left\{\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{K}^{l\times q}, \left[\widetilde{A}, \widetilde{B}\right] = [A, B] + D\Delta E \text{ không điều khiển đượ}\right.$$

Nếu cặp (A, B) điều khiển được dưới mọi loại nhiễu thì $r_{\mathbb{K}}^{D,E}(A, B) = \infty$. Đại lượng $r_{\mathbb{K}}^{D,E}(A, B)$ được gọi là bán kính điều khiển được có cấu trúc của hệ $\dot{x} = Ax + Bu$.

Định nghĩa, với mỗi $\lambda \in \mathbb{C}$, ánh xạ đơn trị $W_\lambda \colon \mathbb{K}^{n+m} \to \mathbb{K}^n$ bởi $W_\lambda z = [A - \lambda I, B]\, z$ với mọi $z \in \mathbb{K}^{n+m}$; và ánh xạ đa trị

$$\begin{aligned} &EW^{-1}D \colon \mathbb{K}^l \rightrightarrows \mathbb{K}^q, \\ &\left(EW^{-1}D\right)(u) = E\left(W_\lambda^{-1}(Du)\right), \quad \forall u \in K^l. \end{aligned}$$

trong đó $W_\lambda^{-1} : \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^{n+m}$ là toán tử (đa trị) nghịch đảo của W_λ.

Theorem 3.1. *Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ thì:*

$$r_{\mathbb{C}}^{D,E}(A,B) = \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \left\| E W_\lambda^{-1} D \right\|}. \tag{3.1}$$

Chứng minh. Theo 1.3, khả năng điều khiển của (A,B)tương đương với thuộc tính toán tử W_λ toàn ánh với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$ hoặc tương đương W_λ^{*-1} là đơn trị với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$. Giả sử cặp $\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)$với $\left[\tilde{A}, \tilde{B}\right] = [A,B] + D\Delta E$ là không điều khiển được, với $\Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}$.

Từ đó suy ra rằng tồn tại $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sao cho toán tử tuyến tính $g_{\lambda_0,\Delta} := W_{\lambda_0} + D\Delta E : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^n$là không toàn ánh.

Do đó, tồn tại $y_0^* \in (\mathbb{C}^n)^*, y_0^* \neq 0$ sao cho

$$W_{\lambda_0}^*(y_0^*) + (E^*\Delta^*D^*)(y_0^*) = 0.$$

Vì $W_{\lambda_0}^{*-1}$ là đơn trị, ta có

$$y_0^* = -\left(W_{\lambda_0}^{*-1}E^*\Delta^*\right)(D^*(y_0^*)) \tag{3.2}$$

□

và do đó, $D^*(y_0^*) \neq 0$. Bằng cách thêm D^* vào hai vế, ta thu được:

$$D^*(y_0^*) = -\left(D^*W_{\lambda_0}^{*-1}E^*\right)(\Delta^*(D^*(y_0^*))).$$

Do đó, theo (2.4)

$$
\begin{aligned}
0 < \|D^*(y_0^*)\| &\leq \left\|D^* W_{\lambda_0}^{*-1} E^*\right\| \|\Delta^*(D^*(y_0^*))\| \\
&\leq \left\|D^* W_{\lambda_0}^{*-1} E^*\right\| \|\Delta^*\| \|D^*(y_0^*)\|.
\end{aligned}
$$

Do $\operatorname{im} W_{\lambda_0}^{-1} \subset \operatorname{dom} E = \mathbb{C}^{n+m}$, theo (2.10), $\left(EW_{\lambda_0}^{-1}\right)^* = W_{\lambda_0}^{-1*} E^* = W_{\lambda_0}^{*-1} E^*$. Ngoài ra, do W_{λ_0} là toàn ánh, $\operatorname{im} D \subset \operatorname{dom}\left(EW_{\lambda_0}^{-1}\right) = \mathbb{C}^n$. Áp dụng (2.10) một lần nữa, ta được:

$$
\left(EW_{\lambda_0}^{-1} D\right)^* = D^* \left(EW_{\lambda_0}^{-1}\right)^* = D^* W_{\lambda_0}^{*-1} E^*.
$$

Vì vậy, theo (2.8), ta có:

$$
\|\Delta^*\| = \|\Delta\| \geq \frac{1}{\left\|D^* W_{\lambda_0}^{*-1} E^*\right\|} = \frac{1}{\left\|EW_{\lambda_0}^{-1} D\right\|} \geq \frac{1}{\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\|EW_{\lambda}^{-1} D\right\|}.
$$

Do bất đẳng thức trên đúng với ma trận nhiễu bất kì $\Delta \in \mathbb{C}^{l \times q}$ sao cho $D\Delta E$ hủy khả năng điều khiển, ta có định nghĩa,

$$
r_{\mathbb{C}}^{D,E}(A, B) \geq \frac{1}{\sup_{\lambda \in C} \left\|EW_{\lambda}^{-1} D\right\|}.
$$

Để chứng minh bất đẳng thức ngược, với $\epsilon > 0$ nhỏ bất kì sao cho $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\|EW_{\lambda}^{-1} D\right\| - 2\epsilon > 0$, tồn tại $\lambda_\epsilon \in \mathbb{C}$ sao cho $\left\|D^* W_{\lambda_\epsilon}^{*-1} E^*\right\| = \|EW_{\epsilon}^{-1} D\| \geq \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\|EW_{\lambda}^{-1} D\right\| - \epsilon$. Do $D^* W_{\lambda_\epsilon}^{*-1} E^*$ là đơn trị, chuẩn của nó là chuẩn toán tử, do đó tồn tại $v_\epsilon^* \in (\mathbb{C}^q)^* : \|v_\epsilon^*\| = 1, v_\epsilon^* \in \operatorname{dom}\left(D^* W_{\lambda_\epsilon}^{*-1} E^*\right)$ sao cho:

$$
0 < \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\|EW_{\lambda}^{-1} D\right\| - 2\epsilon \leq \left\|EW_{\lambda_\epsilon}^{-1} D\right\| - \epsilon \leq \left\|\left(D^* W_{\lambda_\epsilon}^{*-1} E^*\right)(v_\epsilon^*)\right\|.
$$

Đặt $u_\epsilon^* = -W_{\lambda_\epsilon}^{*-1}(E^*(v_\epsilon^*)) \neq 0$,ta có $W_{\lambda_\epsilon}^*(u_\epsilon^*) = -E^*(v_\epsilon^*)$ và $D^*(u_\epsilon^*) = -\left(D^* W_{\lambda_\epsilon}^{*-1} E^*\right)(v_\epsilon^*) \neq 0$. Theo định lý Hahn-Banach, tồn tại $h \in \mathbb{C}^l$

sao cho $\|h\| = 1, (D^* (u_\epsilon^*))\, h = \|D^* (u_\epsilon^*)\|$. Do đó ta có thể định nghĩa $\Delta_\epsilon \in \mathbb{C}^{l\times q}$ bằng cách đặt

$$\Delta_\epsilon = \frac{1}{\|D^* (u_\epsilon^*)\|} h v_\epsilon^*.$$

Do đó, hiển nhiên là

$$\|\Delta_\epsilon\| = \|D^* (u_\epsilon^*)\|^{-1} = \left\|\left(D^* W_{\lambda_\epsilon}^{*-1} E^*\right)(v_\epsilon^*)\right\|^{-1} \leq \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \left\|E W_\lambda^{-1} D\right\| - 2\epsilon}.$$

Áp dụng (2.11), ta có $(\Delta_\epsilon^* D^*)(u_\epsilon^*) = \Delta_\epsilon^* (D^* (u_\epsilon^*)) = D^* (u_\epsilon^*)\, \Delta_\epsilon = v_\epsilon^*$. Do đó, $(E^* \Delta_\epsilon^* D^*)(u_\epsilon^*) = E^* (v_\epsilon^*)$ và $W_{\lambda_\epsilon}^* (u_\epsilon^*) + (E^* \Delta_\epsilon^* D^*)(u_\epsilon^*) = 0$,(với $u_\epsilon^* \neq 0$) hoặc tương đương với $W_{\lambda_0} + D\Delta_\epsilon E$ không toàn ánh. Suy ra cặp nhiễu $\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}\right)$ với $\left[\widetilde{A}, \widetilde{B}\right] = [A, B] + D\Delta_\epsilon E$ là không điều khiển được.

Do đó, theo định nghĩa,

$$r_{\mathbb{C}}^{D,E} (A, B) \leq \|\Delta_\epsilon\| \leq \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \left\|E W_\lambda^{-1} D\right\| - 2\epsilon}.$$

Bằng cách cho $\epsilon \to 0$, ta thu được bất đẳng thức ngược. $\Longrightarrow$ Điều phải chứng minh.

Lemma 3.1. *Giả sử $G \in \mathbb{C}^{n\times p}$ có hạng theo hàng đầy đủ:* $\operatorname{rank} G = n$ *và $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p$ được trang bị chuẩn Euclidean. Do đó, với toán tử tuyến tính $\mathcal{F}_G (z) = Gz$, ta có:*

$$d\left(0, \mathcal{F}_G^{-1} (y)\right) = \left\|G^\dagger y\right\|, \quad \left\|\mathcal{F}_G^{-1}\right\| = \left\|G^\dagger\right\|, \tag{3.3}$$

trong đó $G^\dagger$ đại diện nghịch đảo Moore-Penrose của G.

Từ kết quả trên ta mở rộng nghịch đảo Moore-Penrose cho ma trận G bất kì.

Definition 3.2. Cho toán tử tuyến tính $\mathcal{F}_G (z) = Gz$ trong đó $G \in \mathbb{C}^{m\times p}$, nghịch đảo Moore-Penrose tổng quát $\mathcal{F}_G^\dagger$ của $\mathcal{F}_G$ được định nghĩa bởi:

$$\mathcal{F}_G^{\dagger}(y) = \begin{cases} z \quad s.t. \quad Gz = y, \|z\| = d\left(0, \mathcal{F}_G^{-1}(y)\right) & y \in \operatorname{im} \mathcal{F}_G, \\ \emptyset & y \notin \operatorname{im} \mathcal{F}_G. \end{cases} \tag{3.4}$$

Trong phần còn lại, ta giả sử rằng mọi không gian véc tơ được xem xét sẽ trang bị chuẩn Euclidean.

Đầu tiên, áp dụng Lemma 3.1 toán tử điều khiển $W_\lambda z = [A - \lambda I, B]\, z$ và lưu ý rằng $\left\|W_\lambda^{\dagger}\right\|^{-1} = \sigma_{\min}[W_\lambda]$, theo Theorem 3.1 ta có công thức cho khoảng cách phi cấu trúc từ một cặp điều khiển được (A, B) tới không điều khiển được tương đương kết quả Eising (1.2).

Conjecture 3.1. *Khoảng cách từ cặp điều khiển được $(A, B) \in \mathbb{C}^{n\times(n+m)}$ tới không điều khiển được trong trường hợp tổ hợp nhiễu phi cấu trúc $[A, B] \rightsquigarrow [A, B] + [\Delta_1, \Delta_2]$ được tính theo công thức:*

$$r_{\mathbb{C}}(A, B) = \frac{1}{\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \left\|W_\lambda^{\dagger}\right\|},$$

trong đó $W_\lambda^{\dagger} = W_\lambda^{*}\left(W_\lambda W_\lambda^{*}\right)^{-1}$ đại diện nghịch đảo Moore-Penrose của $W_\lambda = [A - \lambda I, B]$.

Giả sử cặp điều khiển được (A, B) chịu nhiễu có cấu trúc theo công thức:

$$[A, B] \rightsquigarrow [A, B] + D\Delta E, \quad \Delta \in \mathbb{C}^{l\times q}, \tag{3.5}$$

trong đó $D \in \mathbb{C}^{n\times l}$,$E \in \mathbb{C}^{q\times(n+m)}$. Do $W_\lambda W_\lambda^{\dagger} Du = Du, \forall u \in \mathbb{C}^l$, ta có $W_\lambda^{\dagger} Du \in W_\lambda^{-1}(Du)$. Vì vậy $W_\lambda^{-1}(Du) = W_\lambda^{\dagger} Du + W_\lambda^{-1}(0) = W_\lambda^{\dagger} Du + \ker W_\lambda$ và dẫn đến:

$$\left(EW_\lambda^{-1}D\right)(u) = \left(EW_\lambda^{-1}\right)(Du) = EW_\lambda^{\dagger} Du + E \ker W_\lambda \tag{3.6}$$

Giớ ta đặt thêm một giả định bổ sung để thu được công thức đơn giản hơn từ kết quả trên.

Corollary 3.1. *Giả sử* $E^*E \ker W_\lambda \subset \ker W_\lambda, \forall \lambda \in \mathbb{C}$. *Khoảng cách cấu trúc từ cặp điều khiển đươc* (A, B) *tới trạng thái không điều khiển được cùng với tổ hợp nhiễu có cấu trúc của công thức* (3.5) *cho bởi công thức sau:*

$$r_{\mathbb{C}}^{D,E}(A, B) = \frac{1}{\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\| E W_\lambda^\dagger D \right\|} \tag{3.7}$$

trong đó $W_\lambda^\dagger = W_\lambda^* \left(W_\lambda W_\lambda^* \right)^{-1}$ *đại diện nghịch đảo Moore-Penrose của* $W_\lambda = [A - \lambda I, B]$.

Từ Theorem 3.1, ta thu được kết quả dưới đây.

Corollary 3.2. *Giả sử cặp điều khiển đươc* $(A, B) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ *chịu nhiễu theo công thức* (3.5) *trong đó* $E \in \mathbb{C}^{q\times(m+n)}$ *có hạng cột đầy đủ. Khi đó khoảng cách có cấu trúc từ* (A, B) *tới trạng thái không điểu khiển được:*

$$r_{\mathbb{C}}^{D,E}(A, B) = \frac{1}{\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\| \left(W_\lambda \left(E^* E \right)^{-1/2} \right)^\dagger D \right\|}. \tag{3.8}$$

Giờ ta giả sử hệ ma trận chịu nhiễu phân biệt như sau:

$$A \rightsquigarrow A + D_A \Delta_A E_A, \quad B \rightsquigarrow B + D_B \Delta_B E_B \tag{3.9}$$

với $\Delta_A \in \mathbb{C}^{l\times q_1}, \Delta_B \in \mathbb{C}^{l\times q_2}, E_A \in \mathbb{C}^{q_1\times n}, E_B \in \mathbb{C}^{q_2\times n}, D_A = D_B \in \mathbb{C}^{n\times l}$. Do đó, mô hình không chắc chắn này có thể được viết lại theo công thức (3.5) với $D = D_A = D_B, \Delta = [\Delta_A, \Delta_B], E = \begin{bmatrix} E_A & 0 \\ 0 & E_B \end{bmatrix}$. Theo Van Loan, gía trị kì dị tổng quát nhỏ nhất của cặp của các ma trận $(P, Q) \in \mathbb{C}^{n\times k} \times \mathbb{C}^{m\times k}$ được định nghĩa bởi:

$$\sigma_{\min}(P, Q) = \inf_{x \in \mathbb{C}^k} \frac{\|Px\|}{\|Qx\|}.$$

Khi đó, Theorem 3.1 có thể được áp dụng để thu được kết quả sau đây.

Corollary 3.3. *Giả sử cặp điều khiển được* $(A, B) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ *chịu nhiễu theo công thức* (3.9) *trong đó* $E_A \in \mathbb{C}^{q_1\times n}$ *có hạng cột đầy đủ và* $\operatorname{im} B^* \subset \operatorname{im} E_B^*$. *Khi đó:*

$$r_{\mathbb{C}}^{D,E}(A, B) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{\min}\left(\begin{bmatrix} E_A^{*\dagger}(A^* - \lambda I) \\ E_B^{*\dagger} B^* \end{bmatrix}, D^*\right), \tag{3.10}$$

trong đó $E_B^{*\dagger}$ *nghịch đảo tổng quát Moore-Penrose của* E_B^*.

4 Đa nhiễu

Ta để ý rằng, những phần tử của ma trận $[A, B]+D\Delta E$ phụ thuộc affine vào những phần tử không biết δ_y của Δ. Tuy nhiên, không phải mọi nhiễu affine của các phần tử của A, B có thể được biểu diên theo cách này. Mô hình trúc nhiễu $[A, B]+D\Delta E$ không thể mô phỏng lại tất cả, ví dụ, nhiễu affine mà ảnh hưởng chỉ tới phần tử đường chéo của A và B. Trong phần này, chúng ta xét tới mô hình nhiễu tổng quát mà có thể biểu diễn mọi loại nhiễu affine của $[A, B]$. Ta giả sử $(A, B) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ chịu ảnh hưởng của đa nhiễu affine dạng

$$[A, B] \rightsquigarrow \left[\tilde{A}, \tilde{B}\right] = [A, B] + \sum_{i=1}^{N} D_i\Delta_i E_i,$$

trong đó $D_i \in \mathbb{C}^{n\times l_i}$, $E_i \in \mathbb{C}^{q_i\times(n+m)}$, $i \in \underline{N}$ là những ma trận cấu trúc và $\Delta_i \in \mathbb{C}^{l_i\times q_i}$ là ma trận nhiễu không biết. Độ lớn của nhiễu

$$\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_N) \in \Pi_{i=1}^{N}\mathbb{C}^{l_i\times q_i}$$

được đo bởi

$$\|\Delta\| = \sum_{i=1}^{N} \|\Delta_i\|$$

trong đó chuẩn của nhiễu $\|\Delta_i\|$ là chuẩn của $\mathbb{C}^{l_i\times q_i}$, tạo bởi những chuẩn véc tơ trên các không gian $\mathbb{C}^{l_i}$, $\mathbb{C}^{q_i}$ tương ứng, với $i \in \underline{N}$.

Definition 4.1. Cho cặp ma trận (A, B) chịu đa nhiễu, bán kính điều khiển có cấu trúc của (A, B) được định nghĩa bởi

$$r_{\mathbb{C}}^{\mathrm{mp}}(A, B) = \inf \left\{ \|\Delta\| : \Delta = (\Delta_i)_{i \in \underline{N}}, [A, B] + \sum_{i=1}^{N} D_i \Delta_i E_i \text{ không điều khiển được} \right.$$

Xét $Q \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $P \in \mathbb{K}^{l \times m}$, ta ký hiệu

$$P \preceq Q \iff \|Px\| \leq \|Qx\|, \quad \forall x \in \mathbb{C}^m.$$

Dễ thấy nếu $P \preceq Q$ thì $Q \subset \ker P$ và

$$\operatorname{im} P^* = (\ker P)^{\perp} \subset (\ker Q)^{\perp} = \operatorname{im} Q^*.$$

Theo phần trước, với mỗi $\lambda \in \mathbb{C}$ và mỗi $i \in \underline{N}$, ta định nghĩa toán tử đa trị $E_i W_\lambda^{-1} D_i \colon \mathbb{C}^{l_i} \rightrightarrows \mathbb{C}^{q_i}$ bằng

$$\left(E_i W_\lambda^{-1} D_i\right)(u_i) = E_i W_\lambda^{-1}(D_i u_i), \quad u_i \in \mathbb{C}^{l_i},$$

trong đó $W_\lambda^{-1} \colon \mathbb{K}^n \rightrightarrows \mathbb{K}^{n+m}$ là toán tử đa trị nghịch đảo của toán tử đơn trị $W_\lambda \colon \mathbb{K}^{n+m} \to \mathbb{K}^n$, $W_\lambda(z) = [A - \lambda I, B]\, z$, $z \in \mathbb{C}^{n+m}$.

Lemma 4.1. *Giả sử U là không gian con của $\mathbb{C}^k$ và $0 \neq \hat{v}_0^* \notin U^{\perp}$. Khi đó, tồn tại một $0 \neq v_0^* \in \hat{v}_0^* + U^{\perp}$, $0 \neq x_0 \in U$ sao cho*

$$|v_0^* x_0| = \|v_0^*\| \|x_0\|.$$

Kết quả chính của phần này là

Theorem 4.1. *Cho ma trận $H \in \mathbb{C}^{k \times (n+m)}$, cặp (A, B) chịu đa nhiễu với $E_i \preceq H$ với mọi $i \in \underline{N}$. Khi đó*

$$\left[\max_{i \in \underline{N}} \sup_{\lambda \in C} \left\|H W_\lambda^{-1} D_i\right\|\right]^{-1} \leq r_{\mathbb{C}}^{mp}(A, B) \leq \left[\max_{i \in \underline{N}} \sup_{\lambda \in C} \left\|E_i W_\lambda^{-1} D_i\right\|\right]^{-1},$$

trong đó $W_\lambda = [A - \lambda I, B]$.

Hiển nhiên, với mỗi $P \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $P \preceq \|P\| \, I_m$, với I_m là ma trận đơn vị cỡ m. Dùng kết quả của Theorem 4.1, ta có thể đưa ra cận dưới cho $r_{\mathbb{C}}^{\mathrm{mp}}(A, B)$:

$$r_{\mathbb{C}}^{\mathrm{mp}}(A, B) \geq \left[\alpha \max_{i\in\underline{N}} \sup_{\lambda\in C} \left\|W_\lambda^{-1} D_i\right\|\right]^{-1},$$

trong đó $\alpha = \max_{i\in\underline{B}} \|E_i\|$.

Corollary 4.1. *Nếu $E_i = \alpha_i E_1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, với mọi $i \in \underline{N}$, thì bán kính điều khiển của (A, B) trong trường hợp đa nhiễu phức được cho bởi công thức*

$$r_{\mathbb{C}}^{mp}(A, B) = \leq \left[\max_{i\in\underline{N}} \sup_{\lambda\in C} \left\|E_i W_\lambda^{-1} D_i\right\|\right]^{-1}.$$

5 Ví dụ

5.1 Ma trận E không có đủ rank cột

Example 5.1. Xét hệ điều khiển (A, B) xác định bởi

$$\dot{u} = Ax\left(t\right) + Bu\left(t\right),$$

trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Theo điều kiện Kalman, hệ điều khiển được. Hệ chịu nhiễu có cấu trúc theo dạng

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 + 1 & \delta_2 + 1 \\ \delta_1 + 1 & \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix},$$

trong đó $\delta_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,2}$ là những tham số nhiễu. Nhiễu trên có thể biểu diễn dưới dạng

$$[A, B] \rightsquigarrow [A, B] + D\Delta E$$

với

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy ma trận E không có rank cột đầy đủ. Do đó không thể dùng công thức (3.8) để tính bán kính điều khiển. Với $v \in \mathbb{C}$, ta có:

$$\left(E\left[A-\lambda I, B\right]^{-1} D\right)(v)=E\left[A-\lambda I, B\right]^{-1}\begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$$

Theo 3.2, ta có:

$$\begin{aligned}
\left[A-\lambda I, B\right]^{-1}\begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} &= \left\{\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} : \left[A-\lambda I, B\right]\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}, \forall p, q, r \in \mathbb{C}\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}, \forall p, q, r \in \mathbb{C}\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} q+r-\lambda p \\ q-p\lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}, \forall p, q, r \in \mathbb{C}\right\}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\left(E\left[A-\lambda I, B\right]^{-1} D\right)(v) &= \left\{E\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} q+r-\lambda p \\ q-p\lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}, \forall p, q, r \in \mathbb{C}\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} p+q \\ r \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} q+r-\lambda p \\ q-p\lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}, \forall p, q, r \in \mathbb{C}\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} q+v+q\lambda \\ v-q+\lambda(v+q\lambda) \end{bmatrix} : q \in \mathbb{C}\right\}.
\end{aligned}$$

tương đương với phương trình đường thẳng

$$\begin{aligned}
a(q+v+q\lambda)+(v-q+\lambda(v+q\lambda)) &= b, \\
ax_1+x_2 &= b,
\end{aligned}$$

với $q \in \mathbb{C}$. Thay $q = 0, 1$, tìm hệ số a, b, ta có

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\,x_1 + x_2 &= 2v,\\ x_1 &= q + v + q\lambda,\\ x_2 &= v - q + \lambda\,(v + q\lambda)\,.\end{aligned}$$

Bài toán trở thành bài toán tìm khoảng cách từ gốc toạ độ tới đường thẳng trên. Nếu $\lambda = -1$, đường thẳng này bị suy biến thành điểm $(v, 0)$ và

$$d\left(0, \left(E\,[A - \lambda I, B]^{-1}\,D\right)(v)\right) = |v|\,.$$

Nếu $\lambda \neq -1$, giả sử $\mathbb{C}$ được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_\infty$. Xét

$$\begin{aligned}2\,|v| &= |(1-\lambda)\,x_1 + x_2|\\ &\leq |(1-\lambda)\,x_1| + |x_2|\\ &\leq (|1-\lambda| + 1)\max\{|x_1|\,, |x_2|\}\\ &= (|1-\lambda| + 1)\left\|\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right\|_\infty\end{aligned}$$
$$\implies \frac{2\,|v|}{|\lambda - 1| + 1} \leq \left\|\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right\|_\infty.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x_2 = \frac{2v}{1+|\lambda-1|}$ và $x_1 = e^{i\varphi}x_2$, với φ thoả mãn $-(\lambda-1)e^{i\varphi} = |\lambda-1|$. Theo (2.3), ta có:

$$\begin{aligned}
\left\|E\left[A-\lambda I, B\right]^{-1} D\right\| &= \sup_{|v|=1} d\left(0, E\left[A-\lambda I, B\right]^{-1} D\left(v\right)\right) \\
&= \begin{cases} \sup_{|v|=1}\left\{\inf\left\|\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right\|_\infty\right\} & \lambda \neq -1, \\ \sup_{|v|=1}\left\{\inf |v|\right\} & \lambda = -1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sup_{|v|=1}\left\{\frac{2|v|}{|\lambda-1|+1}\right\} & \lambda \neq -1, \\ \sup_{|v|=1}\left\{|v|\right\} & \lambda = -1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{|\lambda-1|+1}, & \lambda \neq -1, \\ 1 & \lambda = -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\left\|E\left[A-\lambda I, B\right]^{-1} D\right\| = 2.$$

Theo Theorem 3.1, ta có $r_{\mathbb{C}}^{D,E}\left(A, B\right) = 1/2$.

5.2 Trường hợp đa nhiễu

Example 5.2. Xét hệ điều khiển (A, B) xác định bởi

$$\dot{u} = Ax\left(t\right) + Bu\left(t\right),$$

trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Theo điều kiện Kalman, hệ điều khiển được. Hệ chịu nhiễu có cấu trúc theo dạng

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \delta_1 & 1+\delta_2 & 0 \\ -2+\delta_3 & 0 & 1+\delta_4 \end{bmatrix},$$

trong đó $\delta_i \in \mathbb{C}$, $i \in \overline{1,4}$ là những tham số nhiễu. Hệ chịu nhiễu có thể được mô hình hoá dưới dạng

$$[A, B] \rightsquigarrow [A, B] + D_1\Delta_1 E_1 + D_2\Delta_2 E_2,$$

trong đó

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giả sử rằng $\mathbb{C}^2$ và $\mathbb{C}^3$ trang bị chuẩn $\|\cdot\|_\infty$. Xét

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ta có $E_1 \preceq H$ và $E_2 \preceq H$. Tính toán, ta có với mỗi $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{C}^2$, ta có

$$\begin{aligned}
E_1 [A - \lambda I, B]^{-1} D_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= E_1 [A - \lambda I, B]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} p \\ x + \lambda p \\ 0 \end{bmatrix} : p \in \mathbb{C} \right\}, \\
E_2 [A - \lambda I, B]^{-1} D_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= E_2 [A - \lambda I, B]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ y + (\lambda^2 + 2) p \end{bmatrix} : p \in \mathbb{C} \right\}, \\
H [A - \lambda I, B]^{-1} D_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= [A - \lambda I, B]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} p \\ x + \lambda p \\ \lambda x + (\lambda^2 + 2) p \end{bmatrix} : p \in \mathbb{C} \right\}, \\
H [A - \lambda I, B]^{-1} D_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= [A - \lambda I, B]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} p \\ \lambda p \\ y + (\lambda^2 + 2) p \end{bmatrix} : p \in \mathbb{C} \right\}.
\end{aligned}$$

Theo cách tính toán ở ví dụ trên, ta có:

$$\begin{aligned}
\left\| E_1 [A - \lambda I]^{-1} D_1 \right\| &= \frac{1}{1 + |\lambda|}, \\
\left\| E_2 [A - \lambda I]^{-1} D_2 \right\| &= \frac{1}{1 + |\lambda^2 + 2|}.
\end{aligned}$$

Chọn $p = 0$ và $p = -{}^{x}/_{\lambda}$, với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$, ta có:

$$d\left(0, H\left[A - \lambda I, B\right]^{-1} D_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \leq \min\left\{\max\left\{|x|, |\lambda x|\right\}, \left|\frac{2x}{\lambda}\right|\right\} \leq \sqrt{2}\,|x|.$$

Do đó

$$\left\|H\left[A - \lambda I, B\right]^{-1} D_1\right\| \leq \sqrt{2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Vì dấu bằng xảy ra với $\lambda = \sqrt{2}i$, ta có

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\|H\left[A - \lambda I, B\right]^{-1} D_1\right\| = \sqrt{2}.$$

Tương tự, với $p = 0$, ta có

$$d\left(0, H\left[A - \lambda I, B\right]^{-1} D_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \leq |y|,$$

$$\left\|H\left[A - \lambda I, B\right]^{-1} D_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\| \leq 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Vì dấu bằng xảy ra khi $\lambda = \sqrt{2}i$, ta có

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\|H\left[A - \lambda I, B\right]^{-1} D_2\right\| = 1.$$

Theo Theorem 4.1, ta có ước lượng của bán kính điều khiển

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\max\left\{1, \sqrt{2}\right\}} \leq r_{\mathbb{C}}^{\mathrm{mp}}(A, B) \leq \frac{1}{\max\left\{\sup \frac{1}{1+|\lambda|}, \sup \frac{1}{1+|\lambda^2+2|}\right\}} = 1.$$

6 Kết luận

Bài nghiên cứu đưa ra một phương pháp tiếp cận mới để tính khoảng cách điều khiển cho hệ tuyến tính điều khiển được dựa trên toán tử tuyến tính đa trị. Phương pháp này cho phép mở rộng những kết quả trước cho một số dạng tổng quát của hệ thống điều khiển. Phương pháp này có thể được áp dụng cùng với các loại chuẩn véc tơ tuỳ ý. Ngoài ra, phương pháp cũng có thể được áp dụng để nghiên cứu bán kính điều khiển của nhiều lớp hệ thống điều khiển. Cụ thể hơn, trong tương lai, phương pháp này có thể được mở rộng để nghiên cứu bán kính điều khiển của những hệ điều khiển tuyến tính ẩn hoặc hệ điều khiển torng không gian vô hạn chiều, cũng như những hệ thống điều khiển được biểu diễn bởi quá trình lồi.