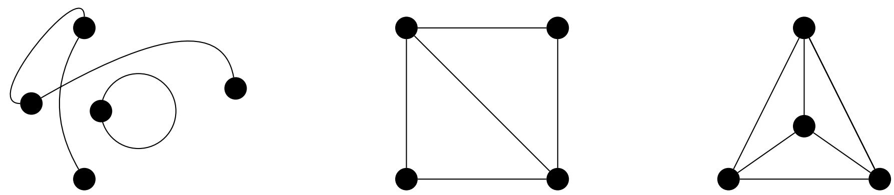
Mục lục

1 Đồ thị & một số khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1. *Đồ thị G là một cấu trúc rời rạc gồm các thành phần là tập $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$, được gọi một cách tương ứng là tập đỉnh và tập cạnh của đồ thị. Ký hiệu: $G = (V, E)$.*

Một số khái niệm liên quan:

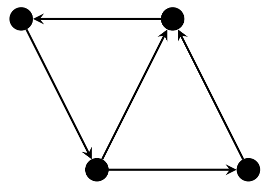
- Số cạnh của đồ thị gọi là *bậc của đồ thị*, kí hiệu: $n(G)$ (hoặc n).
- Mỗi phần tử thuộc $V(G)$ được gọi là một *đỉnh* của G. Một phần tử thuộc $E(G)$ được gọi là một *cạnh* của G.
- Một cạnh của G sẽ nối hai đỉnh của G. Nếu cạnh $v, u \in V(G)$ có cạnh nối giữa chúng thì nói *u kề v*. Cạnh được kí hiệu bằng một cặp đỉnh: $e = (u, v)$, khi đó u, v gọi là *đầu mút* của e.
- *Khuyên* là cạnh của đồ thị mà có hai đầu mút cùng là một đỉnh.
- *Hai cạnh song song* (hay còn gọi là *cạnh đôi*) là hai cạnh mà có chung cặp đầu mút.
- *Bậc của đỉnh v* là tổng số cạnh mà có u là đầu mút. Nếu v là đầu mút của một khuyên thì khuyên đó tính là 2 cạnh. Kí hiệu: $d(v)$
- *Bậc lớn nhất* trong G: $\Delta = \max\limits_{v \in V}\{d(v)\}$
- *Bậc nhỏ nhất* trong G: $\delta = \min\limits_{v \in V}\{d(v)\}$
- *Đường đi và chu trình:* (định nghĩa 3.1 và 3.2)



Hình 1: Minh họa một số đồ thị

Định nghĩa 1.2 (Đồ thị có hướng)**.** *Đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng $\iff \forall (u, v) \in E,\ (u, v)$ sắp thứ tự. Khi đó u gọi là đỉnh ra, v là đỉnh vào, cạnh (u, v) gọi là một cung.*

Định nghĩa 1.3 (Đồ thị có trọng số)**.** *Là đồ thị mà mỗi cạnh của nó được gắn với một trọng số.*



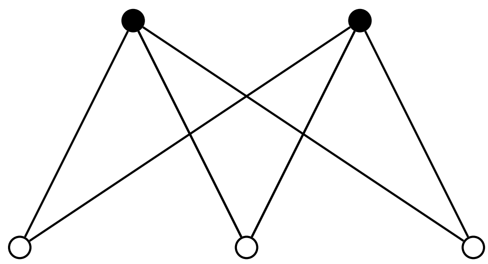
Hình 2: Đồ thị có hướng

Định nghĩa 1.4 (Đồ thị con)**.** *Đồ thị H gọi là đồ thị con của G $\iff$ $V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$. Kí hiệu:$H \subseteq G$. Nếu $H \subseteq G$ và $V(H) = V(G) = V$ thì ta gọi H là đồ thị con mở rộng của G.*

Định nghĩa 1.5 (Đồ thị đầy đủ/clique)**.** *Đồ thị G là đồ thị đầy đủ (clique) $\iff$ mọi đỉnh của G đều có cạnh nối giữa chúng. Đồ thị đầy đủ có n đỉnh được kí hiệu là K_n. Đồ thị $\overline{G}$ được gọi là phủ của G $\iff$ $V(G) = V(\overline{G})$ và $V(\overline{G}) = V(K_n) \setminus V(G)$*

Hình 3: Đồ thị G và $\overline{G}$

Định nghĩa 1.6 (Đồ thị hai phía)**.** *Đồ thị G là đồ thị 2 phía $\iff$ $V(G) = V_1 \cup V_2$ với V_1, V_2 là tập độc lập, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Nếu $\forall u \in V_1, v \in V_2, v$ kề u thì G gọi là đồ thị hai phía đầy đủ và được kí hiệu là $K_{m,n}$ (với $m = |V_1|, n = |V_2|$).*



Hình 4: Đồ thị hai phía đầy đủ $K_{2,3}$

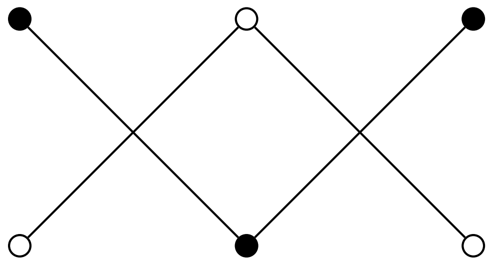
Định nghĩa 1.7 (Đồ thị thẳng)**.** *Đồ thị thẳng P_n là đồ thị với tập đỉnh $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ và tập cạnh $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-1}v_n\}$.*

Định nghĩa 1.8 (Đồ thị vòng)**.** *Đồ thị vòng C_n giống với đồ thị thẳng, tuy nhiên có thêm cạnh v_nv_1.*

Hình 5: Đồ thị P_5 và C_5

Định nghĩa 1.9 (Tập độc lập)**.** *Tập độc lập trong đồ thị G được định nghĩa bởi* $S = \{v \in V(G) \mid \text{không có cặp đỉnh nào kề nhau}\}$

Định nghĩa 1.10 (Đồ thị liên thông)**.** *Đồ thị G gọi là liên thông* $\iff$ $\forall\ u, v \in V,\ \exists$ *đường đi từ u tới v. Ngược lại, nếu* $\exists\ u, v \in V,\ \nexists$ *đường đi từ u tới v thì G là đồ thị **không** liên thông.*



Hình 6: Đồ thị không liên thông

Định nghĩa 1.11 (Đồ thị chính quy)**.** *Đồ thị G gọi là đồ thị chính quy nếu* $\delta(G) = \Delta(G) = k$*, khi đó ta gọi G là k – chính quy.*

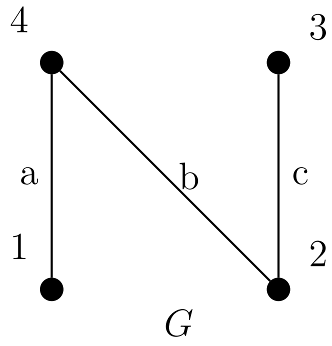
2 Ma trận biểu diễn & đẳng cấu đồ thị

Đồ thị G có thể được biểu diễn bằng một ma trận $A(G) = [a_{ij}]$ với a_{ij} là số cạnh nối nữa v_i và v_j. Nếu G là đồ thị có hướng, a_{ij} sẽ là số cung đi từ v_i tới v_j.

Nếu cạnh e có đầu mút là đỉnh v thì e gọi là cạnh kề của v. Đồ thị G cũng có thể biểu diễn bằng ma trận $M = [m_{ij}]$, trong đó $m_{ij} = 1$ nếu đỉnh v_i có cạnh kề e_j. Trong trường hợp G là đồ thị có hướng, $m_{ij} = 1$ nếu v_i là đỉnh ra và -1 nếu v_i là đỉnh vào của e_j. Nếu không rơi vào những trường hợp trên thì $m_{ij} = 0$.

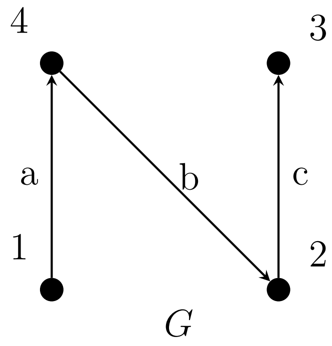
Một đồ thị có thể có nhiều ma trận $A(G)$ hoặc $M(G)$ khác nhau, tùy vào cách đánh số cạnh/đỉnh. Sau đây là một số tính chất:

- Nếu $A(G)$ là ma trận đối xứng thì đồ thị G vô hướng.



$$A(G) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array} \qquad M(G) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix}a & b & c\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

Hình 7: Biểu diễn đồ thị G



$$A(G) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array} \qquad M(G) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix}a & b & c\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{pmatrix}+1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & +1\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & +1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

Hình 8: Biểu diễn đồ thị G (có hướng)

- Nếu $A(G)$ đối xứng, $a_{ij} \in \{0, 1\}$ và $a_{ii} = 0$ thì G là đồ thị đơn giản.

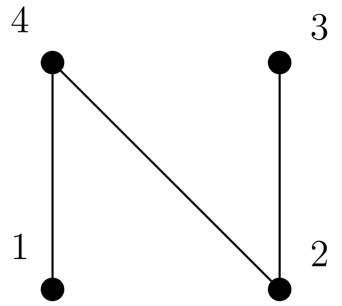
Định nghĩa 2.1 (Đẳng cấu)**.** *Một đẳng cấu giữa G và H là ánh xạ $f : V(G) \to V(H)$ sao cho $\forall\ u, v \in V(G)$ thì $f(u)f(v) \in V(H)$. Nếu tìm được một đẳng cấu từ G tới H và ngược lại, ta nói G và H đẳng cấu nhau.*

Đồ thị G và H được gọi là đẳng cấu $\iff$ có thể áp dụng biến đổi trên hàng của $A(G)$ **và** áp dụng biến đổi tương tự trên cột của $A(G)$ để thu được $A(H)$.

Trong hình 9, đẳng cấu f được xác định: $f(1) = 8$; $f(2) = 6$; $f(3) = 7$; $f(4) = 5$. Từ ma trận $A(G)$ có thể thu được $A(H)$ bằng cách đổi chỗ hai hàng $1, 4$ và rồi đổi chỗ hai cột tương ứng.

Đẳng cấu đồ thị là quan hệ tương đương, do đó ta có các lớp tương đương. Một lớp tương đương đẳng cấu đồ thị được biểu diễn bằng một đồ thị *không được gán nhãn*. Dễ thấy đồ thị G và H trong hình 9 cùng thuộc một lớp tương đương. Ta kí hiệu $G = H$ thay vì $G \cong H$. Tương tự, khi nói H là đồ thị con của G, điều này có nghĩa H đẳng cấu với một đồ thị con của G, hay G chứa một bản sao của H.

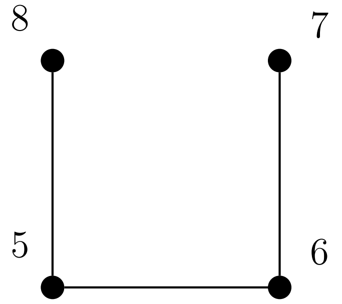
Đẳng cấu bảo toàn quan hệ "kề nhau"giữa các cạnh, do đó nếu muốn chứng



G

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$A(G)$



H

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$A(H)$

Hình 9: Đẳng cấu H và G

minh hai đồ thị không đẳng cấu, ta chỉ cần chỉ ra một đặc tính nào đó liên quan tới đỉnh mà chúng khác nhau (*bậc của các đỉnh, kích cỡ của clique lớn nhất hoặc chu kì nhỏ nhất...*).

Hai đồ thị G và H đẳng cấu $\iff$ $\overline{G}$ đẳng cấu $\overline{H}$.

Định nghĩa 2.2 (tự đẳng cấu)**.** *Một tự đẳng cấu là một đẳng cấu của đồ thị G với chính nó. G gọi là chuyển tiếp đỉnh $\iff$ $(\forall\ u, v \in V)$ $(\exists f : f(u) = v)$. Tương tự, G gọi là chuyển tiếp cạnh $\iff$ $(\forall\ e_1, e_2 \in E)$ $(\exists f : f(e_1) = e_2)$.*

3 Đường đi & chu trình

Định nghĩa 3.1 (đường đi)**.** *Một* ***đường đi*** *(kí hiệu W) có độ dài k là một dãy các* ***đỉnh và cạnh*** *$v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, e_k, v_k$ với $e_i = (v_{i-1}, v_i)$. Độ dài của một đường đi kí hiệu là $l(W)$. Đỉnh v_0 gọi là đỉnh đầu và v_k gọi là đỉnh cuối. Nếu không có cạnh nào lặp lại, đường đi gọi là đơn. Nếu không có đỉnh nào lặp lại, đường đi gọi là sơ cấp.*

Định nghĩa 3.2 (chu trình)**.** *Một chu trình là một đường đi đơn mà có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau. Nếu chỉ có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau thì chu trình gọi là sơ cấp.*

Có thể thấy chu trình với độ dài 1 là một khuyên.

Mệnh đề 3.1. *Đồ thị G là liên thông* $\iff$ $(\exists uv \in E)(u \in V_1)(v \in V_2)$ *với mọi* V_1, $V_2 \neq \varnothing$ *mà* $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ *(*V_1, V_2 *là phân hoạch không rỗng của* V*)*

Chứng minh. Giả sử G liên thông. Khi đó tồn tại một đường đi sơ cấp từ u tới v, trên đường đi đó, sau đỉnh cuối cùng của V_1 mà nó đi qua là cạnh nối giữa V_1 và V_2. Giả sử G không liên không. Chứng minh được chiều xuôi.
Gọi H là một thành phần liên thông của G, chọn $V_1 = V(H)$. Khi đó không có cạnh nào của G có một đầu mút thuộc V_1 và đầu mút còn lại thuộc V_2. Bằng cách đảo vế chứng minh được chiều ngược. □

Định lý 3.1. *Một cạnh của G là cạnh cắt* $\iff$ *cạnh đó không thuộc chu trình nào.*

Chứng minh. Gọi $e = (uv)$ là một cạnh trong thành phần liên thông H của G. Nếu đồ thị thu được từ H bỏ đi e (kí hiệu $H - e$) vẫn liên thông, thì tồn tại một đường đi sơ cấp từ u tới v. Có thể thấy đường đi này nếu gắn thêm cạnh e sẽ tạo thành một chu trình . Vậy nếu e không phải cạnh cắt thì sẽ thuộc một chu trình .
Gọi thành phần liên thông của G chứa e là H, $e = (x, y)$ nằm trong chu trình C. Lấy bất kì $u, v \in H$. Gọi P là một đường đi bất kì từ u tới v. Nếu P không chứa e thì ta có đpcm. Nếu P chứa e thì P đi qua x và y. Vì e nằm trong chu trình C nên dù bỏ cạnh e thì vẫn tồn tại một đường đi P' từ x tới y, chỉ cần thay x, e, y trong P bằng P' ta lại có một đường đi từ $u \to x \to y \to v$. Do đó nếu bỏ cạnh e thì vẫn tồn tại đường đi từ u tới v, suy ra $H - e$ liên thông. Vậy nếu cạnh e thuộc một chu trình thì e không phải cạnh cắt. □

Mệnh đề 3.2. *Cho đồ thị* $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *với* $n \geq 3$. *Nếu có ít nhất 2 trong các đồ thị con* $G - v_1, G - v_2, \ldots, G - v_n$ *(G xóa đi đỉnh* v_i*) liên thông thì G liên thông.*

Chứng minh. Giả sử G không liên thông, H_i, $i = \overline{1, k}$ là các thành phần liên thông của G. Nếu xóa một đỉnh khỏi H_i thì không làm thay đổi số thành phần liên thông, trừ khi $H_i = K_1$ (giảm đi còn $k - 1$ thành phần liên thông). Nếu 2 trong số $G - v_1, G - v_2, \ldots, G - v_n$ liên thông thì $k = 2$ và $H_1 = H_2 = K_1$, mâu thuẫn với $n \geq 3$. □

Hệ quả 3.1. *Mọi đồ thị G mà chứa ít nhất một cạnh thì có ít nhất hai đỉnh không phải là đỉnh cắt*

Định lý 3.2. *Một đồ thị là một đồ thị hai phía $\iff$ nó không chứa chu trình độ dài lẻ.*

Chứng minh. Giả sử G là một đồ thị hai phía, khi đó mọi đường đi trên G đều chuyển qua chuyển lại giữa các đỉnh thuộc V_1 và V_2. Vì vậy, nếu muốn quay lại điểm bắt đầu thì đường đi buộc phải có độ dài chẵn.
Giả sử G không có chu trình độ dài chẵn. G liên thông. Chọn cố định điểm u thuộc $V(G)$. Với mọi điểm $v \in V(G)$, mọi đường đi từ u tới v đều phải có độ dài cùng chẵn hoặc cùng lẻ, nếu không sẽ tạo ra một chu trình độ dài lẻ (mâu thuẫn). Ta phân hoạch $V(G)$ thành 2 tập $V_1 = \{v \mid$ đường đi từ u tới v độ dài lẻ $\}$ và $V_2 = \{v \mid$ đường đi từ u tới v độ dài chẵn $\}$. Thấy được V_1 là một tập độc lập vì một cạnh nối giữa hai đỉnh của V_1 sẽ tạo ra một chu trình độ dài lẻ. Ta có điều tương tự với V_2. Do đó G là một đồ thị hai phía. $\square$

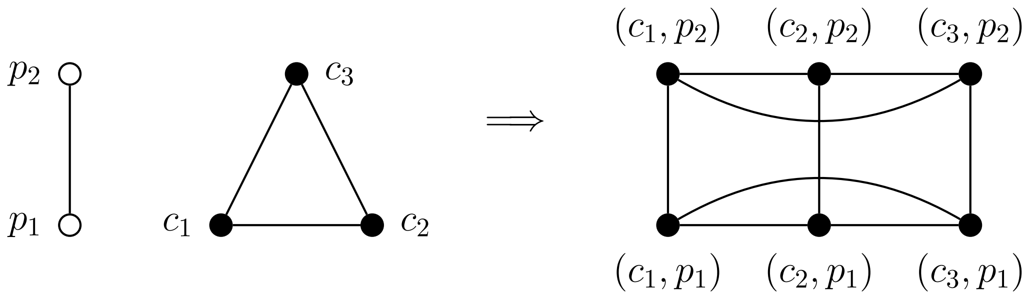
4 Một số phép toán trên đồ thị

Định nghĩa 4.1 (Phép hợp). *Đồ thị $G = (V, E)$ gọi là hợp của đồ thị G_1 và G_2 $\iff$ $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ và $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Ký hiệu $G = G_1 \cup G_2$. Nếu $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ ta viết $G = G_1 + G_2$. Ta cũng định nghĩa mG là hợp m lần các bản sao của G.*

Định nghĩa 4.2 (Phép hội). *Đồ thị $G = G_1 \vee G_2 \iff V(G) = V(G_1 + G_2) \wedge E(G) = E(G_1 + G_2) \cup \{e = uv \mid u \in V_1, v \in V_2\}$ (Đồ thị $G_1 + G_2$ thêm vào những cạnh nối giữa các đỉnh của chúng).*

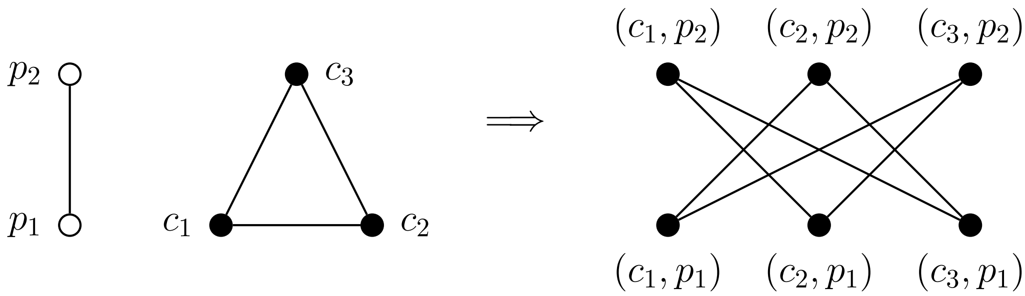
Hình 10: hợp/hội đồ thị p_2 và c_3

Định nghĩa 4.3 (tích descartes). *Đồ thị $G = G_1 \times G_2$ là đồ thị mà $V(G) = \{(v_i, u_i)\}$ $v_i \in V_1$, $u_i \in V_2$. Có k cạnh nối (v_i, u_i) với (v_j, u_j) $\iff$ $(v_i = v_j) \wedge (u_i$ nối với u_j k lần trong $G_2)$ hoặc $(u_i = u_j) \wedge (v_i$ nối với v_j k lần trong $G_1)$.*



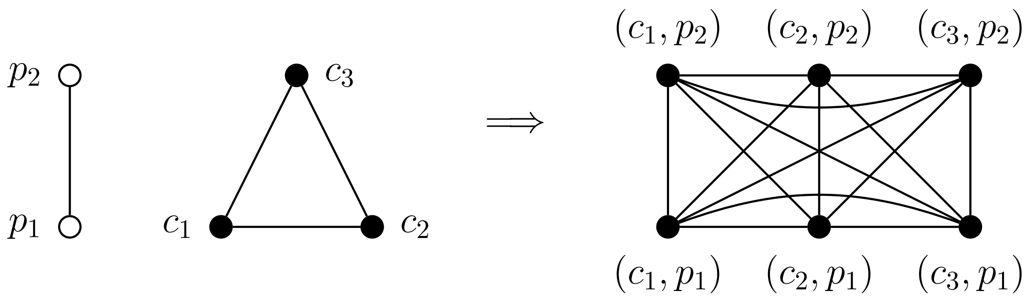
Hình 11: Tích descartes $P_2 \times C_3$

Định nghĩa 4.4 (tích tensor). *Tích tensor của G, kí hiệu $G_1 \cdot G_2$, là một đồ thị với $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$. Với $u_i \in V_1$, $v_i \in V_2$, có k cạnh nối giữa (u_i, v_i) và (u_j, v_j) $\iff$ (có m cạnh nối u_i với u_j, n cạnh nối v_i với v_j) $\wedge (k = m \cdot n)$.*



Hình 12: Tích tensor $P_2 \cdot C_3$

Định nghĩa 4.5 (tích strong). *Tích strong của G, kí hiệu $G = G_1 \circledast G_2$, được định nghĩa $G_1 \circledast G_2 = (G_1 \times G_2) \cup (G_1 \cdot G_2)$.*



Hình 13: Tích strong $P_2 \circledast C_3$

5 Một số định lý & mệnh đề

Định lý 5.1. *Cho một đồ thị G, tổng bậc của các đỉnh trong G bằng 2 lần số cạnh của G.*

$$\sum_{\forall v \in V(G)} d(v) = 2\,|E(G)|$$

Chứng minh. Với mỗi $e \in E(G)$, e có hai đầu mút, làm tăng bậc của 2 đỉnh đầu mút của nó lên 1 và do đó tăng tổng số bậc của đồ thị lên 2. □

Hệ quả 5.1. *Số đỉnh bậc lẻ trong một đồ thị luôn là số chẵn. Không có đồ thị chính quy nào có bậc lẻ.*

Hệ quả 5.2. *Đồ thị k – chính quy với n đỉnh có $nk/2$ cạnh.*

Mệnh đề 5.1. *Số đồ thị đơn giản với tập đỉnh có n phần tử là $2^{C_n^2}$*

Chứng minh. Gọi V là tập đỉnh có n phần tử. Ta xây dựng các đồ thị giản đơn G từ tập đỉnh V. Có C_n^2 cách chọn một cặp cạnh ở trong V. Với mỗi cặp cạnh, ta có 2 lựa chọn: kề nhau hoặc không kề nhau. Do đó có tổng cộng $2^{C_n^2}$ đồ thị đơn giản với n đỉnh. □

Mệnh đề 5.2. *Với $n > 2$, có $2^{C_{n-1}^2}$ đồ thị đơn giản có các đỉnh v_1, v_2, $v_3, \ldots, v_n$ mà bậc của mỗi đỉnh đều chẵn.*

Chứng minh. Gọi tập A là tập các đồ thị đơn giản mà có các đỉnh là v_1, v_2, $v_3, \ldots, v_{n-1}$, B là tập các đồ thị đơn giản với các đỉnh v_1, $_2$, $_3, \ldots, v_n$. Theo mệnh đề 5.1 ta có $|A| = 2^{C_{n-1}^2}$. Ta định nghĩa ánh xạ $f : A \to B$: f biến đồ thị $G \in A$ thành $H \in B$ bằng cách thêm một đỉnh v_n, sau đó nối v_n với các đỉnh bậc lẻ của G. Khi đó các đỉnh bậc lẻ của G cũng sẽ trở thành các đỉnh bậc chẵn trong H, và theo hệ quả 5.1, bản thân v_n cũng là bậc chẵn. Ngược lại, nếu lấy đồ thị H bất kì thuộc B và ngắt bỏ đỉnh v_n, ta thu được một đồ thị G tương ứng thuộc A. Dễ thấy ngay quá trình này là nghịch đảo của quá trình trên, do đó f là một song ánh. Vì f là song ánh nên $|B| = |A| = 2^{C_{n-1}^2}$ □

Mệnh đề 5.3. *Đồ thị đơn giản mà có nhiều hơn một đỉnh thì có hai đỉnh với bậc bằng nhau.*

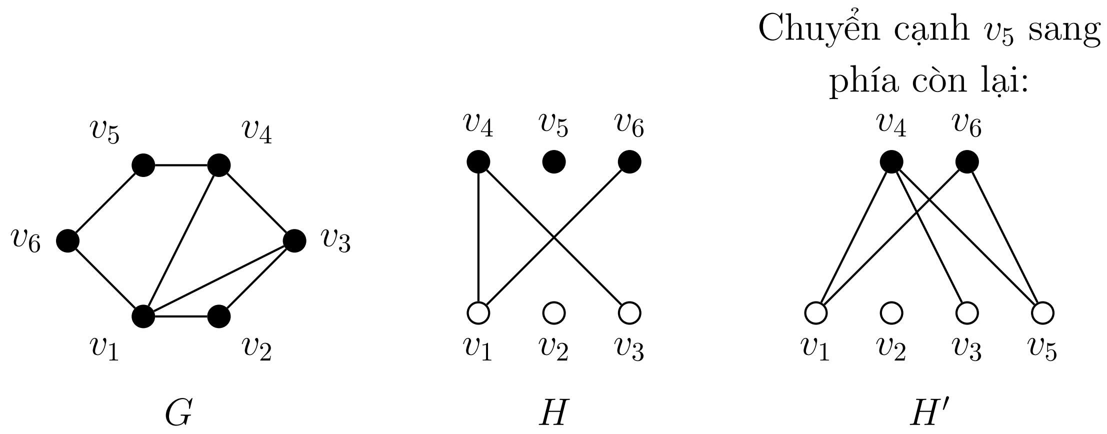
Chứng minh. Trong đồ thị với n đỉnh, bậc của các đỉnh nhận giá trị trong tập $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. Tuy nhiên, giá trị 0 và $n-1$ sẽ không xuất hiện cùng một lúc vì đỉnh có bậc $n-1$ sẽ kề với mọi đỉnh, đỉnh có bậc 0 là cô lập, 2 đỉnh như trên không thể cùng xuất hiện trong một đồ thị. Do đó, số giá trị bậc các đỉnh của G luôn bé hơn n, theo nguyên líDirichlet, mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 5.4. *Nếu G là đồ thị đơn giản với n đỉnh và $\delta(G) \geq (n-1)/2$ thì G liên thông.*

Chứng minh. Lấy 2 đỉnh $u, v \in V(G)$. Giả sử u, v không kề nhau. Vì $\delta(G) \geq (n-1)/2$, sẽ có ít nhất $n-1$ cạnh để nối u hoặc v tới các đỉnh khác. Tuy nhiên chỉ có $n-2$ cạnh, do đó theo nguyên lí Dirichlet, sẽ có một đỉnh nào đó kề với cả u và v. Vậy mỗi cặp đỉnh trong G đều tồn tại một đường đi giữa chúng. □

Định lý 5.2. *Cho đồ thị G không có khuyên. Khi đó G có một đồ thị con là đồ thị hai phía với ít nhất $|E(G)|/2$ cạnh*

Chứng minh. Phân hoạch tập đỉnh của G thành hai tập V_1 và V_2. Lấy các cạnh $e = uv$ sao cho $u \in V_1$ và $v \in V_2$ đưa vào tập $E(H)$. Khi đó ta thu được đồ thị $H = (V_1, V_2, E(H))$ là đồ thị con 2 phía của G. Với mọi đỉnh v có bậc a trong H và bậc b trong G mà $a < b/2$, nếu $v \in V_1$ thì ta chuyển v sang V_2 và ngược lại. Khi đó ta thu được đồ thị mới H' thỏa mãn mệnh đề trên. Lưu ý rằng không nhất thiết phải chuyển mọi đỉnh v như trên mà chỉ cần chuyển tới khi thu được đồ thị cần tìm. □



Hình 14: Minh họa cho định lý 5.2