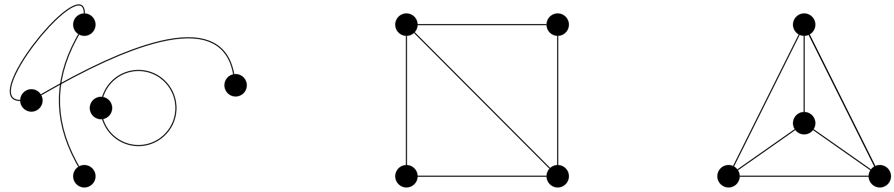
1 Đồ thị

Định nghĩa 1.1. *Đồ thị G là một cấu trúc rời rạc gồm các thành phần là tập $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$, được gọi một cách tương ứng là tập đỉnh và tập cạnh của đồ thị. Ký hiệu: $G = (V, E)$.*

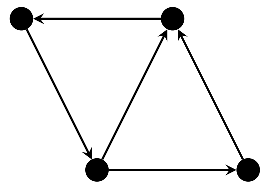
Một số khái niệm liên quan:

- Số cạnh của đồ thị gọi là *bậc của đồ thị*, kí hiệu: $n(G)$ (hoặc n).
- Mỗi phần tử thuộc $V(G)$ được gọi là một *đỉnh* của G. Một phần tử thuộc $E(G)$ được gọi là một *cạnh* của G.
- Một cạnh của G sẽ nối hai đỉnh của G. Nếu cạnh $v, u \in V(G)$ có cạnh nối giữa chúng thì nói *u kề v*. Cạnh được kí hiệu bằng một cặp đỉnh: $e = (u, v)$, khi đó u, v gọi là *đầu mút* của e.
- *Khuyên* là cạnh của đồ thị mà có hai đầu mút cùng là một đỉnh.
- *Hai cạnh song song* (hay còn gọi là *cạnh đôi*) là hai cạnh mà có chung cặp đầu mút.
- *Bậc của đỉnh v* là tổng số cạnh mà có u là đầu mút. Nếu v là đầu mút của một khuyên thì khuyên đó tính là 2 cạnh. Kí hiệu: $d(v)$
- *Bậc lớn nhất* trong G: $\Delta = \max\limits_{v \in V}\{d(v)\}$
- *Bậc nhỏ nhất* trong G: $\delta = \min\limits_{v \in V}\{d(v)\}$
- *Một đường đi* từ v_1 tới v_n là một dãy sắp thứ tự các cạnh $(v_1 v_2)$, $(v_2 v_3), \cdots, (v_{n-1} v_n)$. v_1 gọi là *đỉnh đầu* và v_n gọi là *đỉnh cuối*
- *Một chu trình* là đường đi mà có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.



Hình 1: Minh họa một số đồ thị

Định nghĩa 1.2 (Đồ thị có hướng)**.** *Đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng $\Longleftrightarrow \forall (u, v) \in E,\ (u, v)$ sắp thứ tự. Khi đó u gọi là đỉnh ra, v là đỉnh vào, cạnh (u, v) gọi là một cung.*



Hình 2: Đồ thị có hướng

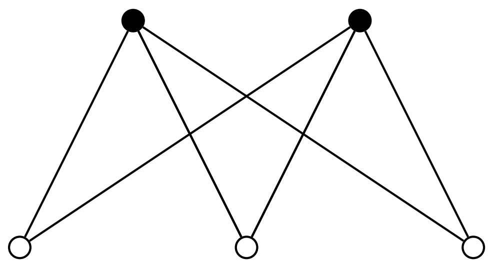
Định nghĩa 1.3 (Đồ thị có trọng số)**.** *Là đồ thị mà mỗi cạnh của nó được gắn với một trọng số.*

Định nghĩa 1.4 (Đồ thị con)**.** *Đồ thị H gọi là đồ thị con của $G \iff V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$. Kí hiệu:$H \subseteq G$. Nếu $H \subseteq G$ và $V(H) = V(G) = V$ thì ta gọi H là đồ thị con mở rộng của G.*

Định nghĩa 1.5 (Đồ thị đầy đủ/clique)**.** *Đồ thị G là đồ thị đầy đủ (clique) $\iff$ mọi đỉnh của G đều có cạnh nối giữa chúng. Đồ thị đầy đủ có n đỉnh được kí hiệu là K_n. Đồ thị $\overline{G}$ được gọi là phủ của $G \iff V(G) = V(\overline{G})$ và $V(\overline{G}) = V(K_n) \setminus V(G)$*

Hình 3: Đồ thị G và $\overline{G}$

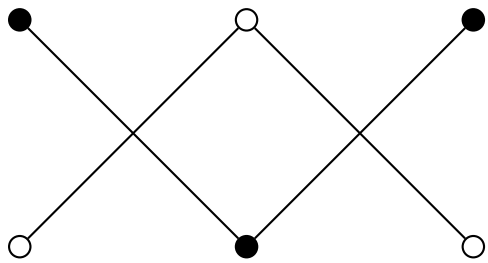
Định nghĩa 1.6 (Đồ thị hai phía)**.** *Đồ thị G là đồ thị 2 phía $\iff V(G) = V_1 \cup V_2$ với V_1, V_2 là tập độc lập, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Nếu $\forall u \in V_1, v \in V_2, v$ kề u thì G gọi là đồ thị hai phía đầy đủ và được kí hiệu là $K_{m,n}$ (với $m = |V_1|, n = |V_2|$).*



Hình 4: Đồ thị hai phía đầy đủ $K_{2,3}$

Định nghĩa 1.7 (Tập độc lập)**.** *Tập độc lập trong đồ thị G được định nghĩa bởi $S = \{v \in V(G) \mid \text{không có cặp đỉnh nào kề nhau}\}$*

Định nghĩa 1.8 (Đồ thị liên thông)**.** *Đồ thị G gọi là liên thông* $\iff$ $\forall\ u, v \in V,\ \exists$ *đường đi từ u tới v. Ngược lại, nếu $\exists\ u, v \in V,\ \nexists$ đường đi từ u tới v thì G là đồ thị **không** liên thông.*

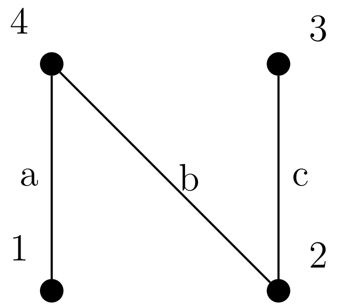


Hình 5: Đồ thị không liên thông

2 Ma trận biểu diễn và đẳng cấu

Đồ thị G có thể được biểu diễn bằng một ma trận $A(G) = [a_{ij}]$ với a_{ij} là số cạnh nối nữa v_i và v_j. Nếu G là đồ thị có hướng, a_{ij} sẽ là số cung đi từ v_i tới v_j.

Nếu cạnh e có đầu mút là đỉnh v thì e gọi là cạnh kề của v. Đồ thị G cũng có thể biểu diễn bằng ma trận $M = [m_{ij}]$, trong đó $m_{ij} = 1$ nếu đỉnh v_i có cạnh kề e_j. Trong trường hợp G là đồ thị có hướng, $m_{ij} = 1$ nếu v_i là đỉnh ra và -1 nếu v_i là đỉnh vào của e_j. Nếu không rơi vào những trường hợp trên thì $m_{ij} = 0$.



G

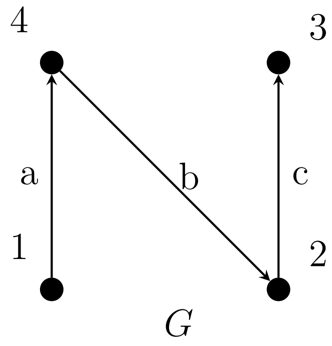
$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

$A(G)$ $\qquad$ $M(G)$

Hình 6: Biểu diễn đồ thị G

Một đồ thị có thể có nhiều ma trận $A(G)$ hoặc $M(G)$ khác nhau, tùy vào cách đánh số cạnh/đỉnh. Sau đây là một số tính chất:

- Nếu $A(G)$ là ma trận đối xứng thì đồ thị G vô hướng.
- Nếu $A(G)$ đối xứng, $a_{ij} \in \{0, 1\}$ và $a_{ii} = 0$ thì G là đồ thị đơn giản.



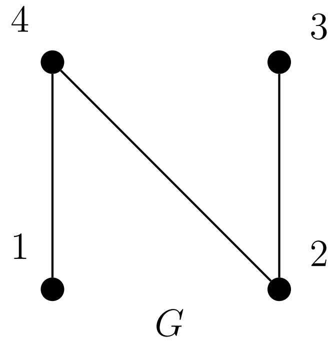
$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}a & b & c\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{pmatrix}+1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & +1\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & +1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

$A(G)$ $\qquad$ $M(G)$

Hình 7: Biểu diễn đồ thị G (có hướng)

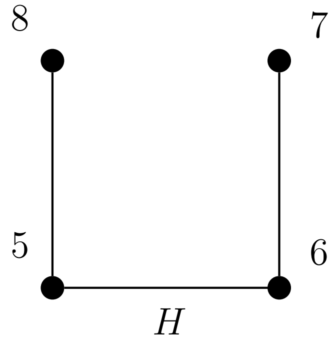
Định nghĩa 2.1 (Đẳng cấu)**.** *Một đẳng cấu giữa G và H là ánh xạ $f : V(G) \to V(H)$ sao cho $\forall\ u, v \in V(G)$ thì $f(u)f(v) \in V(H)$. Nếu tìm được một đẳng cấu từ G tới H và ngược lại, ta nói G và H đẳng cấu nhau.*

Đồ thị G và H được gọi là đẳng cấu $\iff$ có thể áp dụng biến đổi trên hàng của $A(G)$ **và** áp dụng biến đổi tương tự trên cột của $A(G)$ để thu được $A(H)$.



$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

$A(G)$



$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}5 & 6 & 7 & 8\end{matrix} \\ \begin{matrix}5\\6\\7\\8\end{matrix} & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

$A(H)$

Hình 8: Đẳng cấu H và G

Trong hình 8, đẳng cấu f được xác định: $f(1) = 8$; $f(2) = 6$; $f(3) = 7$; $f(4) = 5$. Từ ma trận $A(G)$ có thể thu được $A(H)$ bằng cách đổi chỗ hai hàng $1, 4$ và rồi đổi chỗ hai cột tương ứng.

Đẳng cấu đồ thị là quan hệ tương đương, do đó ta có các lớp tương đương. Một lớp tương đương đẳng cấu đồ thị được biểu diễn bằng một đồ thị *không được gán nhãn*. Dễ thấy đồ thị G và H trong hình 8 cùng thuộc một lớp tương đương. Ta kí hiệu $G = H$ thay vì $G \cong H$. Tương tự, khi nói H là đồ thị con của G, điều này có nghĩa H đẳng cấu với một đồ thị con của G, hay G chứa một bản sao của H.

Đẳng cấu bảo toàn quan hệ "kề nhau"giữa các cạnh, do đó nếu muốn chứng minh hai đồ thị không đẳng cấu, ta chỉ cần chỉ ra một đặc tính nào đó liên quan tới đỉnh mà chúng khác nhau (*bậc của các đỉnh, kích cỡ của clique lớn nhất hoặc chu kì nhỏ nhất...*).

Hai đồ thị G và H đẳng cấu $\iff$ $\overline{G}$ đẳng cấu $\overline{H}$.

Định nghĩa 2.2 (tự đẳng cấu)**.** *Một tự đẳng cấu là một đẳng cấu của đồ thị G với chính nó. G gọi là chuyển tiếp đỉnh $\iff$ $(\forall\ u, v \in V)$ $(\exists f : f(u) = v)$. Tương tự, G gọi là chuyển tiếp cạnh $\iff$ $(\forall\ e_1, e_2 \in E)$ $(\exists f : f(e_1) = e_2)$.*