Đại học Bách khoa Hà Nội

Viện Toán ứng dụng và Tin học

Bài tập Giải tích phức:

Một số ứng dụng của lý thuyết thặng dư

Sinh viên thực hiện:

20173520 – Nguyễn Đức Hùng

Hà Nội, tháng 5 năm 2019

Mục lục

1 Chuỗi Laurent và thặng dư

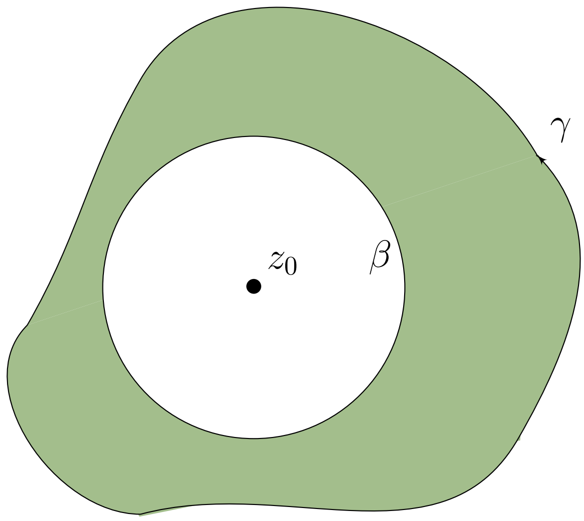
Khai triển Laurent của hàm $f(z)$ quanh điểm z_0 là chuỗi lũy thừa:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

Trong đó a_n được xác định bởi:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{2}$$

Với γ là đường cong kín bao quanh z_0 sao cho: tồn tại đường tròn β tâm z_0, bán kính $r > 0$, $f(z)$ giải tích trên miền được giới hạn bởi $\beta \cap \gamma$.



Hình 1: Đường cong γ

Đặc biệt, khi $n = -1$, ta có:

$$a_{(-1)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \tag{3}$$

a_{-1} được gọi là thặng dư (residue) của $f(z)$ tại điểm z_0. Ký hiệu:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz \tag{4}$$

Với một hàm $f(z)$ bất kì giải tích trên miền $D \setminus \{z_0\}$, z_0 là cực điểm cấp n của $f(z)$, ta có thể tìm thặng dư của $f(z)$ tại z_0 bằng cách:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-z_0)^n f(z)\right]\Big|_{z=z_0} \tag{5}$$

Trong trường hợp z_0 là cực điểm đơn giản:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z)}{q'(z)}\Big|_{z=z_0} \quad \text{với } f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \tag{6}$$

2 Một số ứng dụng của thặng dư

2.1 Phân tích lớp hàm hữu tỉ

Cho đa thức $p, q \in \mathbb{C}[z]$ với $\deg(p) + 1 \leq \deg(q)$. Giả sử p có các không điểm $z_1, \cdots, z_n$ có các cấp tương ứng là $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Khi đó hàm $f(z) = p(z)/q(z)$ có thể được viết

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(z-z_i)^j} \tag{7}$$

với các hằng số $a_{i,j} \in \mathbb{K}$. Trong bài viết này, kết quả trên sẽ được thừa nhận không chứng minh.

Xét hàm phụ $f(z) \cdot (z - z_\alpha)^{\beta-1}$ với $0 \leq \alpha \leq n$ và $1 \leq \beta \leq m_\alpha$, ta có:

$$f(z) \cdot (z-z_\alpha)^{\beta-1} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(z-z_i)^j} \cdot (z-z_\alpha)^{\beta-1} \tag{8}$$

$$= \cdots + \frac{a_{\alpha,\beta}}{z-z_\alpha} + \cdots \tag{9}$$

Dựa vào công thức (9) ta thấy hệ số $a_{i,j}$ ở trên có thể được tính theo công thức:

$$a_{i,j} = \operatorname*{Res}_{z=z_i} \left[f(z) \cdot (z-z_i)^{j-1}\right] \tag{10}$$

Thay công thức (10) vào (7) ta được:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{(z-z_i)^j} \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_i} \left[f(z) \cdot (z-z_i)^{j-1}\right] \tag{11}$$

Trong trường hợp $f(z)$ chỉ có cực điểm đơn giản, (10) trở thành:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{z - z_i} \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z) \tag{12}$$

Ví dụ 2.1. Phân tích hàm $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}$. Các cực điểm của $f(z)$ bao gồm:

$$\begin{aligned} z &= i \quad \text{(Cực điểm đơn giản)} \\ z &= 0 \quad \text{(Cực điểm cấp 2)} \end{aligned}$$

Tính các thặng dư cần thiết:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) &= \left. \frac{1}{[z^2(z-i)]'} \right|_{z=i} \\ &= -1 \\ \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[f(z) \cdot z^2 \right] \Big|_{z=0} \\ &= 1 \\ \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)(z-0) &= \left. \frac{1}{[z(z-i)]'} \right|_{z=0} \\ &= i \end{aligned}$$

Sử dụng công thức (11) ta được:

$$f(z) = \frac{-1}{z-i} + \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2}$$

2.2 Nội suy đa thức

Định nghĩa 2.1 (Đa thức nội suy)**.** *Cho tập dữ liệu* $\{(z_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{C}^2$, *trong đó không có* z_i *nào trùng nhau. Một đa thức* $p \in C[z]$ *với* $\deg(p) \leq n$ *thỏa mãn*

$$p(z_i) = y_i$$

được gọi là đa thức nội suy từ tập dữ liệu đã cho.

Định lý 2.1 (Nghiệm duy nhất)**.** *Với mỗi tập dữ liệu như trên, tồn tại duy nhất một đa thức nội suy p. (Chỉ thừa nhận không chứng minh)*

Định nghĩa 2.2 (Đa thức nội suy Lagrange)**.** *Cho tập dữ liệu* $\{(z_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{C}^2$*. Đa thức nội suy Lagrange từ tập dữ liệu trên được định nghĩa:*

$$L(z) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(z) \tag{13}$$

với $l_i(z)$ *là:*

$$l_i(z) = \prod_{\substack{0 \le k \le n \\ k \ne i}} \frac{z - z_k}{z_i - z_k} \tag{14}$$

Đặt hàm phụ $w(z)$:

$$w(z) = (z - z_0) \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_{n-1}) \cdot (z - z_n) \tag{15}$$

Nhận xét:

$$w'(z_i) = \left.\frac{w(z)}{z - i}\right|_{z=z_i} \tag{16}$$

Dựa vào (15), (16) viết lại (14):

$$l_i(z) = \frac{w(z)}{w'(z)(z - z_i)} \tag{17}$$

Xét hàm $F(t)$ và $G(t)$ định nghĩa bởi:

$$F(t) = \frac{w(z) - w(t)}{(z - t)} \tag{18}$$

$$G(t) = w(t) \tag{19}$$

Vì $\frac{F}{G}(t)$ có các cực điểm đơn giản tại z_i, ta có:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{t=z_i} \frac{F(t)}{G(t)} &= \frac{F(z_i)}{G'(z_i)} \\ &= \frac{w(z)}{(z - z_i)w'(z_i)} \end{aligned} \tag{20}$$

Dựa vào (15), (16), (17) và (20), ta có công thức mới cho đa thức nội suy Lagrange:

$$L(z) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_i} \frac{F}{G}(z) \tag{21}$$

Gọi γ là đường tròn đủ lớn sao cho $z_i \in \text{int}(\gamma),\ i = \overline{0, n}$; f là hàm đơn trị giải tích trên $\text{int}(\gamma)$ thỏa mãn $f(z_i) = y_i$. Dựa vào (21) có dạng khác của đa thức nội suy Lagrange:

$$L(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{w(z) - w(t)}{(z - t) \cdot w(t)} f(t) dt \tag{22}$$

2.3 Biến đổi Laplace ngược

Định nghĩa 2.3. [Biển đổi Laplace] *Cho $f(t)$ là hàm xác định với $t \in [0; +\infty)$. Biến đổi Laplace của hàm $f(t)$ được định nghĩa:*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{I} \tag{23}$$

Khi đó hàm $f(t)$ được gọi là biến đổi Laplace ngược của hàm $F(s)$, ký hiệu

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = f(t) \tag{24}$$

Định lý 2.2 (Sự tồn tại của biến đổi Laplace)**.** Một hàm $f(t)$ tồn tại biến đổi Laplace $F(s)$khi:

$$(\forall t \geq 0),\ (\exists M, k),\ |f(t)| < M e^{kt} \tag{25}$$

Hệ quả:

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \left| \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \right| \\ &\leq \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-st} dt \\ &\leq \int_0^\infty M e^{kt - st} dt \\ &= \frac{M}{s - k} \end{aligned} \tag{26}$$

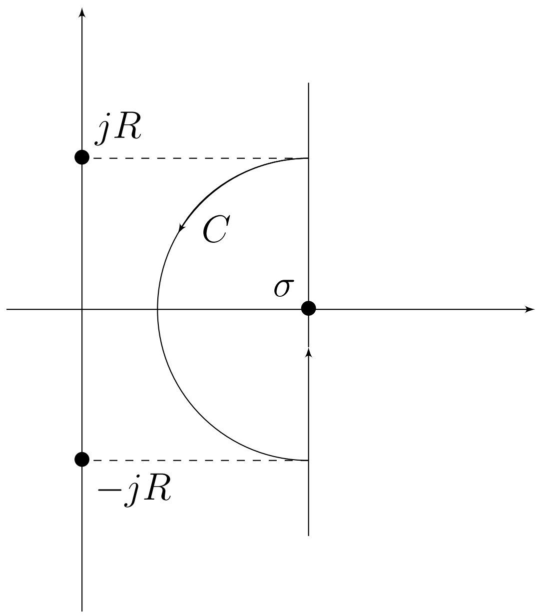
Định nghĩa 2.4. [Công thức Fourier – Mellin] *Cho hàm $f(t)$ xác định với $t > 0$, $f(t)$ có biến đổi Laplace*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

với $s = \sigma + i\omega$. Khi đó $F(s)$ có biến đổi Laplace ngược:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)e^{st}dt \tag{27}$$

Từ công thức (27) ta sẽ đi tìm cách biến đổi Laplace ngược sử dụng lý thuyết thặng dư. Xét hàm $F(s)e^{st}$ với các cực điểm $\{s_k\}$. Gọi C_1 là nửa bên trái đường tròn tâm σ bán kính R, d là đường thẳng $\mathrm{Re}(s) = \sigma$. Đặt $C = d \cup /C_1$. Chọn σ và R sao cho C chứa toàn bộ cực điểm của $F(s)e^{st}$.



Hình 2: Hai nửa đường cong C

Xét tích phân của $F(s)e^{st}$ trên đường cong C:

$$\begin{aligned}\oint_C F(s)e^{st}ds &= \int_{C_1} F(s)e^{st}ds + \int_d F(s)e^{st}ds \\ &= \int_{C_1} F(s)e^{st}ds + \int_{\sigma - iR}^{\sigma + iR} F(s)e^{st}ds \\ &= 2\pi i \sum_{\forall s_k} \operatorname*{Res}_{s=s_k} F(s)e^{st}\end{aligned} \tag{28}$$

Trên nửa đường tròn C_1, s được cho bởi công thức $s = \sigma + Re^{i\phi},\ \pi/2 \le \phi \le 3\pi/2$.

Theo hệ quả (26):

$$
\begin{aligned}
|F(s)| &< \frac{M}{s-k} \\
\implies \left|F(\sigma + Re^{i\phi})\right| &< \frac{M}{\sigma - k + Re^{i\phi}} \to 0 \text{ khi } R \to \infty \\
\implies \lim_{R\to\infty} \left|F(\sigma + Re^{i\phi})\right| &= 0
\end{aligned}
$$

hay:

$$
\implies \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ R,\ \left|F(\sigma + Re^{i/phi}\right| < \varepsilon \tag{29}
$$

Áp dụng (29) cho tích phân ở trên, ta có:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_1} F(s)e^{st}ds\right| &\le \left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} F(\sigma + Re^{i\phi})e^{(\sigma+Re^{i\phi})t} d(\sigma + Re^{i\phi})\right| \\
&\le \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left|F(\sigma + Re^{i\phi})e^{(\sigma+Re^{i\phi})t} iRe^{i\phi}\right| d\phi \\
&\le R\varepsilon \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left|e^{(\sigma + R\cos\phi + Ri\sin\phi)t}\right| d(\phi) \\
&= R\varepsilon e^{\sigma t} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt\cos\phi} d(\phi) \\
&= R\varepsilon e^{\sigma t} \int_{0}^{\pi/2} e^{-Rt\sin\phi} d(\phi)
\end{aligned}
$$

Vì trên đoạn $(0, \pi/2)$, $\sin(\phi) \le 2\phi/\pi$ nên:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_1} F(s)e^{st}ds\right| &\le R\varepsilon e^{\sigma t} \int_{0}^{\pi/2} e^{-Rt2\phi/\pi} d(\phi) \\
&\le \frac{\varepsilon R e^{\sigma t}}{t}\left(1 - e^{-Rt}\right)
\end{aligned} \tag{30}
$$

Do đó với mọi $t > 0$ ta có:

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} \int_{C_1} F(s)e^{st}ds &= 0 \\
\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma - iR}^{\sigma + iR} F(s)e^{st}ds &= \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)e^{st}ds \\
\implies \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)e^{st}ds &= 2\pi i \sum_{\forall s_k} \operatorname*{Res}_{s=s_k} F(s)e^{st}
\end{aligned} \tag{31}
$$

Từ (31) và định nghĩa (2.4) thu được công thức biến đổi Laplace ngược dựa trên thặng dư của $F(s)e^{st}$:

$$f(z) = \sum_{\forall s_k} \operatorname*{Res}_{s=s_k} F(s)e^{st} \tag{32}$$

Ví dụ 2.2. Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm $F(s) = \frac{1}{s(s+4)}$.

$F(s)$ có các cực điểm đơn giản $s = 0$ và $s = -4$. Dễ thấy cực điểm của $F(s)e^{st}$ cũng chính là cực điểm của $F(s)$. Ta tìm các thặng dư tương ứng:

$$\operatorname*{Res}_{s=0} F(s)e^st = \left.\frac{e^{st}}{s+4}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$
$$\operatorname*{Res}_{s=-4} F(s)e^st = \left.\frac{e^{st}}{s}\right|_{s=-4} = \frac{e^{-4t}}{-4}$$

Dùng công thức (32) ta thu được biến đổi Laplace ngược:

$$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{e^{-4t}}{4} \tag{33}$$