Cheatsheet Microeconomía 1

Nicolás Harari
ndharari@economicas.uba.ar
18 de diciembre de 2021

Preferencias y elección

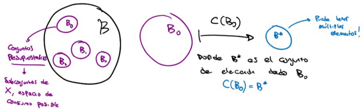
- **Choice**

→ **Conj. consumo:** $X = \mathbb{R}^L_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L : \mathbf{x} \gg 0\}$
→ **Conj. presupuestario:** $B(p,w) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L_+ : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq w\}$

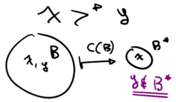
Definición 1.1: Estructura de elección

Una estructura de elección $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ consiste de:

→ $\mathcal{B}$: Conjunto de subsespacios no vacíos de X. Sus elementos $B \subset X$ son *conjuntos presupuestarios.*
→ **Regla de Elección** $C(\cdot)$: Correspondencia que asigna un conjunto no vacío de elementos **escogidos** $C(B) \subset B$ para cualquier conjunto presupuestario $B \in \mathcal{B}$.



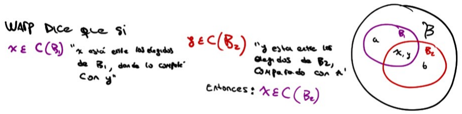
Dada una estructura de elección $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ la **relación de preferencias reveladas** $\succeq^*$ se define como $x \succeq^* y \Leftrightarrow$ existe algún $B \in \mathcal{B}$ tal que $x, y \in B \wedge x \in C(B)$



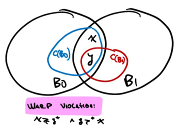
Definición 1.2: Axioma débil de preferencias reveladas

$(\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface *WARP*:

→ **Definición 1:** si $B \in \mathcal{B}$ con $x, y \in B$ se tiene que $x \in C(B)$, entonces para cualquier otro $B' \in \mathcal{B}$ tal que $x, y \in B'$ e $y \in C(B')$, se debe cumplir que $x \in C(B')$.



→ **Definición 2:** si x es revelado al menos tan bueno como y, entonces y no puede ser revelado preferido a x



- **Preferencias**

Sea $\succeq$ la relación de preferencias donde $x \succeq y$ significa x al menos tan bueno como y. Se define:

→ **Preferencia estricta** $\succ$ **:** $x \succ y \leftrightarrow x \succeq y \wedge y \not\succeq x$
→ **Preferencia debil** $\sim$ **:** $x \sim y \leftrightarrow x \succeq y \wedge y \succeq x$

Definición 1.3: Racionalidad

$\succeq$ es racional si es **completa** y **transitiva**

→ **Completa:** $\succeq$ es **completa** si para todo $x, y \in X$ si se tiene que $x \succeq y$ o $y \succeq y$ o ambas.
→ **Transitiva:** $\succeq$ es **transitiva** para todo $x, y, z \in X$ si $x \succeq y$ e $y \succeq z$, entonces $x \succeq z$.

Si $\succeq$ es racional entonces: (i) $\succ$ es **irreflexiva** (no se cumple $x \succ x$) y **transitiva**; (ii) $\sim$ es **reflexiva** ($x \sim x\ \forall x$) **transitiva** y **simétrica** ($x \sim y$ entonces $y \sim x$); (iii) Se cumple si $x \succ y \succeq z$, entonces $x \succ z$.

Definición 1.4: Axiomas de regularidad

→ **Monotonicidad Estricta** $y \geq x$ y $x \neq y$ implica $y \succ x$.
Greed is good
→ **Monotonicidad** $x \in X$ e $y \gg x$ implica que $y \succ x$
No Bads
→ **No Saciedad Local** Para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$, existe un $y \in X$ tal que $||y - x|| \leq \varepsilon$ y se de que $y \succ x$.

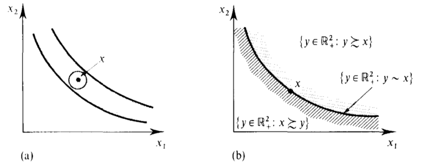


Figure 3.B.2 (a) A thick indifference set violates local nonsatiation. (b) Preferences compatible with local nonsatiation.

Something is good (Saciedad en el origen) **Implica Walras Law.**
→ **Convexidad** Para todo $x \in X$, el conjunto superior de nivel $\{y \in X : y \succeq x\}$ es convexo.
→ **Convexidad Estricta** Si $y, z \succeq x$ entonces $\alpha y + (1-\alpha)z \succ x$ para todo $\alpha \in (0,1)$

→ Si $\succeq$ es **convexa** sobre un conjunto convexo A, el conjunto de preferidos $C_{\succeq}(A)$ también es es convexo.
→ Si $\succeq$ es **estrictamente convexa**, entonces $C_{\succeq}(A)$ contiene un sólo elemento.
→ *Racionalidad* sólo garantiza que las curvas de indiferencia no se cortan
→ *Regularidad* garantiza que las curvas de indiferencia son decrecientes, convexas y la utilidad aumenta conforme se aleja del origen.

- **Representación por Utilidad**

Definición 1.5: Función de Utilidad

Una función $u : X \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa la relación de preferencia $\succeq$ si, para todo $x, y \in X$,

$$x \succeq y \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \geq u(y)$$

Nota: La función de utilidad es un concepto ordinal por lo que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una estrictamente creciente entonces dado una $u(x)$ que representa $\succeq$ entonces $v(x) = f(u(x))$ también representa a la relación de preferencia $\succeq$.

Teorema 1.1: Representación de utilidad

→ **Sólo se puede representar una** $\succeq$ **racional:** Como $u : X \to \mathbb{R}$ se demuestra mostrando que $\geq$ es racional en $\mathbb{R}$
→ X **finito o infinito contable** Si X finito o infinito contable y $\succeq$ sobre X es racional, entonces existe $u(\cdot)$ que la representa.

Definición 1.6: Continuidad

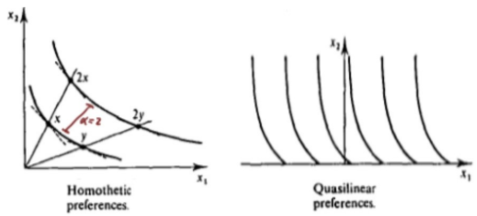
$\succeq$ sobre X es *continua* si se preserva bajo límites: para cualquier secuencia de pares $\{\{x^n, y^n\}\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x^n \succeq y^n$ para todo n, se debe verificar que $x = \lim_{n\to\infty} x^n$ e $y = \lim_{n\to\infty} y^n$, se tiene $x \succeq y$.

Teorema 1.2: Debreu

Si $\succeq$ es una relación de preferencias racional y continua sobre X, entonces existe una función de utilidad continua $u(x)$ que representa $\succeq$.

Tipos de Preferencias:

→ **Homotéticas:** $\succeq$ monótona donde si $x \sim y$, entonces $\alpha x \sim \alpha y$ para todo $\alpha \geq 0$. Son representadas por $u(x)$ homogéneas de grado uno, i.e., $u(\alpha x) = \alpha u(x)$, para todo $\alpha > 0$.
→ **Cuasilineal:** $\succeq$ sobre $(-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^{L-1}_+$ es cuasilineal respecto al bien 1 (deseable) si $x \sim y$, implica que $(x + \alpha e_1) \sim (y + \alpha e_1)$ para $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ y para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. Son representadas por $u(x)$ de la forma $u(x) = x_1 + \phi(x_2, \dots, x_L)$ donde $\phi'(\cdot) > 0$ y $\phi''(\cdot) < 0$.



- ### Elecciones Racionalizadas

$\rightarrow$ **Elementos preferidos de B:**
$C^*(B, \succsim) = \{x \in B : x \succsim y \text{ para cualquier } y \in B\}$
$\rightarrow$ **$\succsim$ racionaliza a $C(\cdot)$ en $\mathcal{B}$:** siempre que
$C(B) = C^*(B, \succsim)$ para todo $B \in \mathcal{B}$

Teorema 1.3: Relación entre WARP y preferencias

$\rightarrow$ **De $\succsim$ a WARP:** Si $\succsim$ es racional, la estructura de elección generada por ella, $(\mathcal{B}, C^*(\cdot, \succsim))$, satisface WARP. *(Proof: transitividad implica WARP 2)*
$\rightarrow$ **De WARP a $\succsim$:** Si $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface WARP y $\mathcal{B}$ incluye todos los subespacios de X de hasta tres elementos entonces existe una sola una $\succsim$ (la rel. pref. reveladas $\succsim^*$) racionaliza $C(\cdot)$ en $\mathcal{B}$
Proof: (1) $\succsim^*$ es racional (subespacios de dos y tres elementos), (2) $C(B) = C^*(B, \succsim^*)$ para todo $B \in \mathcal{B}$,i.e, la $\succsim^*$ derivada a partir de $C(\cdot)$ genera $C(\cdot)$ y (3) $\succsim^*$ es la única que lo hace (subespacios de dos elementos).

- ### WARP y Demandas

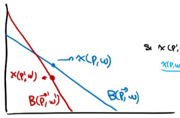
Definición 1.7: Correspondencia de demanda

Sea la **correspondencia de demanda** $x(\mathbf{p}, w)$ la regla de elección $C(\cdot)$ sobre los distintos conjuntos presupuestarios $B(\mathbf{p}, w)$ que se pueden construir del conjunto de consumo X

$\rightarrow$ **Homogeneidad Grado 0:** $x(\alpha\mathbf{p}, \alpha w) = x(\mathbf{p}, w)$ $\forall$ $\mathbf{p}, w$ y $\alpha > 0$. Surge de que $B(\alpha\mathbf{p}, \alpha w) = B(\mathbf{p}, w)$.
$\rightarrow$ **Ley de Walras** $x(\mathbf{p}, w)$ satisface la LW si, para todo $\mathbf{p} \gg 0$ y $w > 0$, se tiene que $\mathbf{p} \cdot x = w$ para todo $x \in x(p, w)$.

Definición 1.8: WARP en demandas

$x(\mathbf{p}, w)$ satisface *WARP* si $p \cdot x(\mathbf{p}', w') \leq w$ y $x(p', w') \neq x(p, w)$, entonces $\mathbf{p}' \cdot x(\mathbf{p}, w) > w'$
Si la canasta elegida con p' y w' es asequible con p, w y el conj de canastas óptimas en cada caso no son iguales entonces la canastas elegida frente a $\mathbf{p}, w$ no son asequibles con p', w'



Si $x(p',w') \in B(\vec{p},w)$ y $\boxed{x(p,w) \neq x(p',w')}$ $\Rightarrow$ $x(p,w) \notin B(\vec{p}',w')$
$x(p,w) \succsim^* x(p',w')$
$x(p,w)$ no es óptimo en p' w'
Lo podemos cuando x' es el elegido, x no está disponible y x no es óptimo junto a x'
Ambos implican que $\neg(x(p',w') \succsim^* x(p,w))$

Teorema 1.4: Ley de demanda compensada

Los precios y las cantidades demandadas se mueven en direcciones opuestas
Una $x(p, w)$ HOD 0 y que satisface la ley de Walras satisface WARP si para cualquier cambio de precios compensado $\Delta p \Delta x \leq 0$ con desigualdad estricta siempre que $x(p, w) \neq x(p', w')$. Para $x(p, w)$ diferenciable, $dp \cdot [D_p x(p, w) + D_w x(p, w) x(p, w)^T] dp \leq 0$ que en forma matricial implica que:

$$S(p, w) = \begin{bmatrix} s_{11}(p, w) & \dots & s_{1L}(p, w) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{L1}(p, w) & \dots & s_{LL}(p, w) \end{bmatrix}$$

cuyo elemento (ℓ, k)-ésimo es

$$s_{\ell k}(p, w) = \frac{\partial x_\ell(p, w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell(p, w)}{\partial w} x_k(p, w)$$

Esta matriz $S(p, w)$ es *la matriz de sustitución o de Slutsky* y sus elementos son los *efectos sustitución.*

Nota: La diferencia principal entre el enfoque de preferencias y el de WARP es que en el segundo $S(p, w)$ no tiene por qué ser simétrica. De hecho, **es imposible** encontrar preferencias que racionalicen la demanda cuando la matriz de sustitución no es simétrica.

- ### SARP

Definición 1.9: Axioma Fuerte de Preferencias Reveladas

La demanda $x(p, w)$ satisface SARP si para cualquier lista

$$(p^1, w^1), \dots, (p^N, w^N)$$

con $x(p^{n+1}, w^{n+1}) \neq x(p^n, w^n)$ para todo $n \leq N - 1$, se tiene que $p^N \cdot x(p^1, w^1) \geq w^N$ siempre que $p^n \cdot x(p^{n+1}, w^{n+1}) \leq w^n$ para todo $n \leq N - 1$.
En palabras, si $x(p^1, w^1)$ es *directamente o indirectamente revelado preferido a* $x(p^N, w^N)$, entonces $x(p^N, w^N)$ no puede ser revelado preferido a $x(p^1, w^1)$, lo que implica que bajo (p^N, w^N) este conjunto de canastas óptimas no pueda ser asequible.

Teorema 1.5: SARP es racionalizable

Si la función de demanda walrasiana $x(p, w)$ satisface SARP, entonces existe una relación de preferencias racional $\succsim$ que racionaliza $x(p, w)$, es decir, tal que para todo (p, w), $x(p, w) \succ y$ para todo $y \neq x(p, w)$ con $y \in B(p, w)$.

Consumidor

• Maximización de Utilidad

Definición 2.1: Problema de Maximización de Utilidad (PMU)

El problema de maximización de utilidad $u(x)$ dentro del conjunto presupuestario Walrasiano, $B(p,w) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\}$ es:

$$\max_{x \geq 0} u(x) \quad s.a. \quad p \cdot x \leq w$$

Si $p \gg 0$ y $u(x)$ es continua, entonces $B(p,w)$ es cerrado y acotado por lo que el PMU tiene solución *Weierstrass* Las condiciones de Khun-Tucker del problema son:

$$\begin{aligned} \nabla u(\mathbf{x}^*) - \lambda^* \mathbf{p} \leq 0 \qquad & \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - w \leq 0 \\ \lambda^* \cdot [\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - w] = 0 \qquad & \mathbf{x}^* \cdot [\nabla u(\mathbf{x}^*) - \lambda^* \mathbf{p}] \quad = 0 \end{aligned}$$

Si la solución es interior y se cumple NSL alcanzan las dos primeras con igualdad.
La Demanda Marshaliana, solución del PMU $x(\mathbf{p}, w)$ cumple:

→ $x(\mathbf{p}, w)$ **HOD 0 en (p,w)**
→ **Por Euler:** $\sum_{i=1}^L \frac{\partial x(\mathbf{p},w)}{\partial p_i} p_i + \frac{\partial x(\mathbf{p},w)}{\partial w} w = 0$
→ **Ley de Walras:** $p \cdot x = w$ para todo $x \in x(\mathbf{p}, w)$
→ **Convexidad:** $\succeq$ convexa, $u(x)$ cuasicóncava, $x(\mathbf{p}, w)$ conj. convexo.
→ **Unicidad:** Si $\succeq$ es estric. conv. $u(x)$ es estric. cuasi-cóncava y $x(\mathbf{p}, w)$ es única.

Definición 2.2: Función de Utilidad Indirecta

Se denomina como función de utilidad indirecta $v : \mathbb{R}^{L+1}_{++} \to \mathbb{R}$, a la función que otorga el valor máximo de u para (p, w) dados, tal que

$$v(p,w) = u(x^*(p,w))$$

→ **Homogénea de grado cero:** $v(\mathbf{p}, w) \in H^0$
→ **Estrictamente creciente en** w: $\frac{\partial v(\mathbf{p},w)}{\partial w} > 0$
→ **No creciente en** p_ℓ: $\frac{\partial v(\mathbf{p},w)}{\partial p_\ell} > 0$ para cualquier ℓ.
→ **Cuasiconvexa:** $\{(p,w) : v(p,w) \leq \bar{v}\}$ es convexo $\forall \bar{v}$.
→ **Continua en** p **y** w

Nota: Si $u(\cdot)$ cumple NSL, C^2 y $x(\mathbf{p}, w)$ una función (PMU con sol. única) en un entorno de un (p^0, w^0) dado entonces $x(\mathbf{p}, w)$ será *continuamente diferenciable* si H es no singular en (p^0, w^0):

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p_1 & \cdots & -p_n \\ -p_1 & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_n & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} = J$$

Teorema 2.1: Identidad de Roy

Sea $u(x)$ continua que representa una $\succeq$ estrict. convexa y NSL con $v(\mathbf{p}, w)$ diferenciable en $(\bar{p}, \bar{w}) \gg 0$ entonces,

$$x(\bar{p}, \bar{w}) = -\frac{\nabla_p v(\bar{p}, \bar{w})}{\nabla_w v(\bar{p}, \bar{w})} \quad \text{es decir} \quad x_i(\bar{p}, \bar{w}) = -\frac{\partial v(\bar{v}, \bar{w})/\partial p_i}{\partial v(\bar{v}, \bar{w})/\partial w}$$

• Minimización del Gasto

Definición 2.3: Problema de Minimización del Gasto (PMG)

El problema de *problema de minimización del gasto* (PMG) para $p \gg 0$ y $u > u(0)$.

$$\min_{x \geq 0} p \cdot x \quad s.a. \quad u(x) \geq u$$

Para que el problema tenga solución se requiere que exista un x tal que $u(x) \geq u$.
La Demanda Hicksiana, solución del PMG $h(\mathbf{p}, u)$ cumple:

→ $h(\mathbf{p}, u)$ **HOD 0 en p**
→ **No hay exceso de utilidad:** $u(h(\mathbf{p}, u)) = \bar{u}$
→ **Convexidad** $\succeq$ convexa entonces $h(\mathbf{p}, u)$ es un conjunto convexo.
→ **Unicidad** $\succeq$ estric. convexa, $u(x)$ estric. cuasicóncava, $h(\mathbf{p}, u)$ es única.
→ **Ley de demanda Compensada:** $\frac{\partial h(\mathbf{p},u)}{\partial p_i} \leq 0$
→ **Efecto precio cruzados idénticos:** $\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i}$

Definición 2.4: Función de Gasto Mínimo

Dado un vector de precios $p \gg 0$ y un nivel de utilidad $\bar{u} > u(0)$, la función valor del PMG es $e(p, \bar{u}) = p \cdot h(\mathbf{p}, u)$.

→ **Homogénea de grado cero en** p: $e(\mathbf{p}, u) \in H^0$
→ **Estrictamente creciente en** u: $\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial u} > 0$
→ **No decreciente en** p_i: $\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_\ell} > 0 \ \forall \ell$.
→ **Cóncava en** p: $D_p^2 e(\mathbf{p}, u)$ es NSD
→ **Continua en** p **y** u

Teorema 2.2: Lema de Shephard

Sea $u(x)$ continua que representa una $\succeq$ estrict. convexa definida en $X = \mathbb{R}^L_+$ para todo p y u la demanda hicksiana $h(\mathbf{p}, u)$ es:

$$h(\mathbf{p}, u) = \nabla_p e(\mathbf{p}, u) \quad \text{es decir} \quad \frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i} = h_i(p,u)$$

• Sustitución e Ingreso

Definición 2.5: Ecuación de Slutsky

Se puede expresar el efecto de un cambio de precios sobre las cantidades demandadas mediante:

$$\begin{gathered} \frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial w} \cdot x_k(p,w) \\ D_p h(p,u) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w) \cdot x(p,w)^T \end{gathered}$$

Donde $D_p h(p,u) = S(p,w)$ es la matriz de Slutsky. Note que reordenando la expresión anterior se obtiene:

$$\underbrace{\frac{\partial x_i(p,w)}{\partial p_k}}_{\text{Efecto Total}} = \underbrace{\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_k}}_{\text{Efecto Sustitución}} - \underbrace{\frac{\partial x_i(p,w)}{\partial w} \cdot x_k(p,w)}_{\text{Efecto Ingreso}}$$

Teorema 2.3: Matriz de Slutsky

La matriz de slutsky $S(\mathbf{p}, w) = D_p h(,u)$ cumple las siguientes propiedades:

→ $D_p h(p,u) = D_p^2 e(p,u)$
→ $D_p h(p,u)$ es una matriz semi-definida negativa
→ $D_p h(p,u)$ es una matriz simétrica
→ **Por Euler:** $D_p h(p,u) \cdot p = 0$

Implicancias de $S(p,w)$

→ **Bienes normales son ordinarios**
→ **Bienes Giffen son inferiores**

Observación

Compenzación de Slutsky: monto tal que se consume la canasta original luego del cambio de precios $x(\bar{p}, \bar{w})$

$$\Delta w_{Slutsky} = p' \cdot x(\bar{p}, \bar{w}) - \bar{w}$$

Compenzación de Hicks: monto tal que se obtiene la misma utilidad que antes,

$$e(p', \bar{u}) = \min_{x \in X : u(x) \geq u} p' \cdot x \leq p' \cdot x(\bar{p}, \bar{w})$$

Para cambios discretos en p, $\Delta w_{Hicks} \leq \Delta w_{Slutsky}$. Cuando el cambio en p es infinitesimal, estas dos compensaciones son equivalentes.

• Dualidad (práctica)

Observación

Para las situaciones usuales del PMU y PMG

1. Si x^* es un óptimo del PMU para un $\bar{w}$, entonces también es óptimo en el PMG cuando el nivel de utilidad requerido es $u(x^*)$ y $e(\mathbf{p}, u) = \bar{w}$.
2. Si x^* es óptimo en el PMG para $\bar{u}$, entonces también es óptimo en el PMU cuando $w = p \cdot x^*$. Además, $v(\mathbf{p}, w) = \bar{u}$.

Resumimos las relaciones duales de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
v(p_1,p_2,m) \arrow[r, shift left, "despejo\ m"] \arrow[d, shift right, "\substack{\text{Identidad de Roy} \\ -(\frac{\partial v}{\partial p_1})/(\frac{\partial v}{\partial m}) = x_1^M}"'] & e(p_1,p_2,u) \arrow[l, shift left, "despejo\ u"] \arrow[d, shift left, "\substack{\text{Lema de Shephard} \\ \frac{\partial e}{\partial p_1} = x_1^H}"] \\
x^M(p_1,p_2,m) \arrow[u, shift right, "\substack{sustituyo\ x_1^M\ y \\ x_2^M\ en\ u(x_1,x_2)}"'] \arrow[r, shift right, "x_1^M(p_1,p_2,e) = x_1^H"'] & x_1^H(p_1,p_2,u) \arrow[l, shift right, "x_1^H(p_1,p_2,v) = x_1^M"'] \arrow[u, shift left, "\substack{sustituyo \\ x_1^H\ y\ x_2^H\ en \\ p_1.x_1 + p_2.x_2 = m}"]
\end{tikzcd}$$

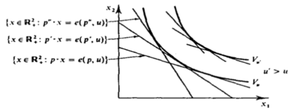
Integrabilidad

Definición 2.6: Recuperar $u(\cdot)$ a partir de $e(\mathbf{p},u)$

Dada una $e(\mathbf{p},u)$ se busca **para cada nivel de utilidad** u un conjunto *al menos tan bueno* $V_u \subset \mathbb{R}^L_{++}$. Se lo construye mediante funciones de soporte:

$$V_u = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L_+ : \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \geq e(\mathbf{p},u) \quad \forall \mathbf{p} \gg 0\right\}$$

Por lo que $u(\cdot)$ es $u(\mathbf{x}) = \text{máx}\,\{u \geq 0 : x \in V_u\}$ y el *Budget set* para un $e(\mathbf{p},u)$ determinado es:



$$B(\mathbf{x}) = \text{máx}\,\{u \geq 0 : \mathbf{p}\mathbf{x} \geq e(\mathbf{p},u), \quad \forall \mathbf{p} > 0\}$$

Como $e(\mathbf{p},u)$ es ***inversa*** a $v(\mathbf{p},w)$ y $e(\mathbf{p},u) = \text{mín}_x\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ $s.a.$ $u(\mathbf{x}) \geq u$. La función de utilidad es

$$u(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^l_{++}} v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p},u))$$

Nota: Si se tiene $x(\mathbf{p},w)$ y se puede despejar p como $p_l(\mathbf{x},w)$ se usa que $v(\mathbf{p},e(\mathbf{p},u)) = u$ reemplazando y obteniendo $u(\mathbf{x})$

Definición 2.7: Recuperar $e(\mathbf{p},u)$ a partir de $x(\mathbf{p},w)$

Primero se debe verificar que $x(\mathbf{p},w)$ cumple $S(p,w)$ NSD y simétrica. Como cada elemento de $S(\mathbf{p},w)$ es de la forma $s_{l,k}(p,w) = \frac{\partial x_l(\mathbf{p},w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(\mathbf{p},w)}{\partial w}x_k(\mathbf{p},w)$ Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_1} = x_1(\mathbf{p},w) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_L} = x_L(\mathbf{p},w) \end{cases}$$

Pasos:

1. Proponga algún precio $p_\ell = 1$. Parta de una situación inicial con precios $\mathbf{p}^0 = \langle \bar{p_1},\ldots,1,\ldots,\bar{p_L}\rangle$ donde la utilidad alcanzada es u_0.
2. Considere $w = \mathbf{p}^0$ tal que las demanda marshalianas sean $x(\mathbf{p}^0, e(\mathbf{p}^0,u_0))$
3. Asuma Δp_ℓ a un valor p_ℓ, u genérico. Sea $\mathbf{p}' = \langle \bar{p_1},\ldots,p_\ell,\ldots,\bar{p_L}\rangle$ por lo que el cambio es: $(\mathbf{p}^0,u_0) \to (\mathbf{p}',u)$ y resuelva:

$$\int_{\mathbf{p}^0}^{\mathbf{p}'} \frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_1}dp = \int_{\mathbf{p}^0}^{\mathbf{p}'} x_1(p_1, e(\mathbf{p},u))dp$$

Nota: *Puede ser conveniente partir de* $\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_1} = x_1(p_1,e(\mathbf{p},u))$, *despejar* $e(\mathbf{p},u)$ *de un lado y* ***luego*** *integrar.* Además, con $L = 2$ bienes, puede asumir $p_2 = 1$ desde un inicio para resolver una sóla ecuación diferencial.

Medidas de Bienestar

Considere $e(\bar{p},v(p,w))$. Como es es creciente en $v(p,w)$ mantiene el orden (asigna mayor gasto a mayor utilidad) y como función de (p,w) resulta en una función de utilidad indirecta para las preferencias $\succeq$. Entonces $e(\bar{p},v(p^1,w)) - e(\bar{p},v(p^0,w))$ es una medida de bienestar.

Definición 2.8: Variación Equivalente

La cantidad de dinero que se debe otorgar (quitar) que hace indiferente al consumidor frente a un cambio de precios.

$$VE(p^0,p^1,w) = e(p^0,u^1) - e(p^0,u^0) = e(p^0,u^1) - w$$
$$= \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1,\bar{p}_{-1},u^1)dp_1$$

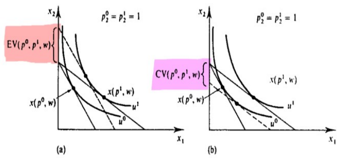
→ **Aumento de** p Frente a un aumento de precio ¿Cuánto estás dispuesto a pagar para evitarlo?
→ **Caída de** p En "salario", ¿a cuánto equivale la caida del precio?

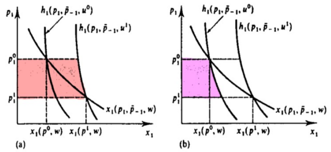
Definición 2.9: Variación Compensatoria

La cantidad de dinero que debería darle (quitarle) un planificador central al consumidor para que a los precios nuevos p^1, alcance el nivel de utilidad inicial u^0.

$$VC(p^0,p^1,w)0 = e(p^1,u^1) - e(p^1,u^0) = w - e(p^1,u^0)$$
$$= \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1,\bar{p}_{-1},u^0)dp_1$$

→ **Aumento de** p**:** Los precios ya subieron y te venís a quejar, ¿cuánto me va a costar que te quedes tranquilo?
→ **Caída de** p**:** Los precios ya bajaron, ¿cuánto te puedo cobrar de impuesto para que estes igual que antes?





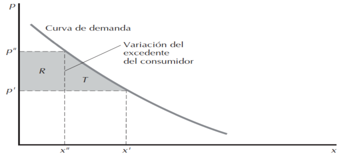
Definición 2.10: Excedente Consumidor

El área por debajo de la curva de demanda walrasiana.

$$\Delta EC(p^0,p^1,w) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(p_1,\bar{p}_{-1},w)dp_1$$

Suma de cambio en el costo por unidad demandada (rectángulo)y la diferencia en las cantidades demandadas (triángulo). Normalmente, este área puede aproximarse mediante un trapezoide.

Si no hay efecto ingreso (cuasilineales o sustitutos perfectors)
$VC = VE = \Delta EC$.



Demanda Agregada

Teorema 2.4: Demanda y Riqueza Agregada

a demanda agregada puede ser escrita como una función de la riqueza agregada si y sólo si todos los consumidores tienen preferencias que admiten funciones de $v(\mathbf{p},w)$ de forma Gorman:

$$v_i(p,w_i) = a_i(p) + b(p)w_i$$

Con $b(p)$ es constante a través los consumidores. Esto es equivalente a pedir que los senderos de expansión del ingreso paralelos en cualquier vector de precios p

Definición 2.11: Consumidor Representativo Positivo

Un *consumidor representativo positivo* existe si existe una relación de preferencias racional $\succeq$ en $\mathbb{R}^L$ tal que la función de demanda agregada $x(p,w)$ es precisamente la función de demanda Walrasiana generada por estas preferencias. Es decir, $x(p,w) \succ x$ siempre que $x \neq x(p,w)$ y $p\cdot x \leq w$.

Definición 2.12: Función de Bienestar Social

Una función $W : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ que asigna un valor de utilidad a cada posible vector $(u_1,\ldots,u_I) \in \mathbb{R}^I$ de niveles de utilidad para cada uno de los I consumidores de la economía.

Definición 2.13: Consumidor representativo normativo

Un *consumidor representativo normativo* relativo a la función de bienestar social $W(\cdot)$ cumple que para cada (p,w) la distribución de riqueza $(w_1(p,w),\ldots,w_I(p,w))$ resuelve el problema (2.12) y $W : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad indirecta para $\succeq$.

Teorema 2.5: Gorman y Representatividad

Si todos los consumidores tienen $v_i(p,w_i) = a_i(p) + b(p)w_i$ Gorman con $b(p)$ iguales la función de bienestar social *utilitaria* $\sum_i u_i$ admite cualquier regla de distribución. Entonces la demanda agregada *siempre* puede ser considerada como originaria de un consumidor representativo normativo.

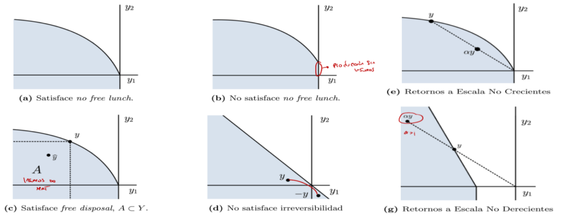
Firma

• Conjuntos de Producción

Definición 3.1: Conjuntos de Producción

El conjunto $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^m$ representa el conjunto de alternativas de producción posibles. Cada vector $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbf{Y}$ es un plan de producción cuyos componentes indican las cantidades de insumos netos. **Nota**: $y_i < 0$ implica insumo.

→ **$\mathbf{Y}$ es no vacío.**
→ **$\mathbf{Y}$ es cerrado:** Si $y^n \to y$ e $y^n \in Y$, entonces $y \in Y$.
→ **No free lunch:** Si $y \in Y$ no usa insumos entonces no produce.
→ **Posibilidad de Inacción:** $\mathbf{0} \in Y$.
→ **Free Disposal:** Se puede usar insumos de más. Si $y \in Y$, e $y' \leq y$ (más insumnos, mismo producto), entonces $y' \in Y$.
→ **Irreversibilidad:** Si $y \neq 0$ dentro de Y, entonces $-y \notin Y$.
→ **Retornos a Escala No Crecientes (RNC):** Para todo $y \in Y$, $\alpha y \in Y$ para todo $\alpha \in [0,1]$. *Escalar hacia abajo.* Implica inacción, con $\alpha = 0$.
→ **Retornos a Escala No Decrecientes (RND):** Para todo $y \in Y$, $\alpha y \in Y$ para todo $\alpha \geq 1$. *Escalar hacia arriba.*
→ **Retornos a Escala Constantes (RCE):** RNC y RND. Para todo $y \in Y$, $\alpha y \in Y$ para cualquier $\alpha \geq 0$. Geométricamente, Y es un cono.
→ **Aditividad o Libre Entrada:** Sean $y, y' \in Y$. Entonces, esta propiedad requiere que $y + y' \in Y$. También, $ky \in Y \;\; \forall k$. *Es posible dividir la producción en dos firmas*
→ **Convexidad:** El conjunto Y es convexo, $y, y' \in Y$, entonces $\alpha y + (1-\alpha)y' \in Y$ con $\alpha \in [0,1]$. Equivalente a RND e insumos balanceados.
→ **$\mathbf{Y}$ es un cono convexo:** Convexidad y RCE. Formalmente, Y es un cono convexo si para cada par de vectores de producción $y, y' \in Y$ y constantes $\alpha, \beta \geq 0$, se verifica que $\alpha y + \beta y' \in Y$. Además:
→ **Prop:** Y es aditivo y exhibe RNC sí y sólo sí es un cono convexo.



(a) Satisface *no free lunch*. (b) No satisface *no free lunch*. (e) Retornos a Escala No Crecientes
(c) Satisface *free disposal*, $A \subset Y$. (d) No satisface irreversibilidad (g) Retornos a Escala No Derecientes

Definición 3.2: Función de producción

Sean $q = (q_1, q_2, \dots, q_M) \geq 0$ los M productos finales y $z = (z_1, z_2, \dots, z_{L-M}) \geq$ los insumos usados. Se define $f : \mathbb{R}^{L-M}_+ \mapsto \mathbb{R}^M_+$ como la función de producción de la firma. Si $M = 1$ y la firma es *monoproducto*, Y se puede expresar como:

$$Y = \{(-z_1, \cdots, -z_{L-1}, q) : q - f(z_1, \dots, z_{L-1}) \leq 0\}$$

$f(z)$ es contínua, estrictamente creciente y estrictamente cuasicóncava. Si además cumple RNC **es cóncava**.

Definición 3.3: Retornos a escala globales

Se clasifica a las $f(z)$ como:

Rendimientos crecientes a escala:	$f(t\mathbf{x}) > tf(\mathbf{x}) \;\; \forall t > 1$
Rendimientos constantes a escala:	$f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x}) \;\; \forall t > 1$
Rendimientos decrecientes a escala:	$f(t\mathbf{x}) < tf(\mathbf{x}) \;\; \forall t > 1$

• Los problemas de la firma

Definición 3.4: Problema de Max. del Beneficio (PMB)

Asumiendo Y no vacío, cerrado y con *free disposal* el problema de maximización de beneficio $\pi(\mathbf{p}, y)$ es:

$$\max_{y} \pi : p \cdot y \quad \text{s.a.} \quad y \in Y \qquad\qquad \max_{y} \pi : p \cdot y \quad \text{s.a.} \quad F(y) \leq 0$$

En el caso de firmas monoproductoras el problema se puede expresar

$$\max_{z \geq 0} \pi : pf(z) - w \cdot z$$

y cuyas condiciones necesarias son

$$p \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_l} \leq w_l, \quad \text{con igualdad si } z_l^* > 0$$

El PMB y sus soluciones $y(p, \mathbf{w}) = \langle -z(p, \mathbf{w}),\ q(p, \mathbf{w}) \rangle$, demandas incondicionadas y oferta óptima respectivamente cumplen:

→ Si Y es convexo, entonces $Y = \{y \in \mathbb{R}^L : p \cdot y \leq \pi(p) \forall p \gg 0\}$.
→ **HOD 0 en** (p, w) para $z(p, \mathbf{w})$ y $q(p, \mathbf{w})$
→ Si Y es convexo, entonces $y(p)$ es un conjunto convexo para todo p. Además, si Y es estrictamente convexo, entonces $y(p)$ consiste de un sólo elemento.

<u>**Nota:**</u> Si sistema de precios es tal que no genera una cota superior a los beneficios el PMB no tiene solución $\pi(p) = +\infty$. Esto se da frente a rendimientos constantes o crecientes a escala.

Definición 3.5: Función de Beneficio Máximo

Se denomina como función de beneficio $\pi : \mathbb{R}^{L+1}_{++} \mapsto \mathbb{R}$, a la función valor máximo del PMB tal que:

$$\pi(\mathbf{z}, p) = pq^*(p, \mathbf{w}) - \mathbf{w} \cdot z^*(p, \mathbf{w})$$

→ **Creciente en** p : $\frac{\partial \pi(\mathbf{z}, p)}{\partial p} > 0$
→ **Decreciente en w** $\frac{\partial \pi(\mathbf{z}, p)}{\partial w_i} < 0$
→ **HOD 1 en** (p, w) $\pi(tp, t\mathbf{w}) = t\pi(\mathbf{z}, p)$
→ **Convexa en** $(p, \mathbf{w})$ $D^2\pi(p, \mathbf{w})$ es PSD

Teorema 3.1: Lema de Hotelling

Sean $y(p, \mathbf{w}) = \langle -z(p, \mathbf{w}),\ q(p, \mathbf{w}) \rangle$ soluciones del PMB que consisten en un solo punto, entonces $\pi(\mathbf{z}, p)$ es diferenciable en $\mathbf{p} = (\mathbf{w}, p)$ y $\nabla \pi(\bar{p}) = y(\bar{p})$. Lo que significa:

→ **Para la oferta:** $\frac{\partial \pi(\mathbf{z}, p)}{\partial p} = q(p, \mathbf{w})$
→ **Para las Demandas:** $\frac{\partial \pi(\mathbf{z}, p)}{\partial w_i} = -z_i(p, \mathbf{w})$

Teorema 3.2: Matriz de Sustitución

Si $y(\cdot)$ es una función diferenciable en $\bar{p}$, entonces $Dy(\bar{p})$ es la matriz de sustitución que cumple:

→ $Dy(\bar{p}) = D^2\pi(\bar{p})$
→ $Dy(\bar{p})$ es semi-definida negativa
→ $Dy(\bar{p})$ es una matriz simétrica
→ **Por Euler:** $D_y(\bar{p})\bar{p} = 0$.

Definición 3.6: Problema de Minimización de Costos (PMC)

Se continua para el caso monoproducto. Sean z los insumos no negativos, $f(z)$ la función de producción y $\bar{q}$ una cantidad mínima objetivo. El *problema de minimización de costos* (PMC) es:

$$\min_{z \geq 0} C : w \cdot z \quad \text{s.a.} \quad f(z) \geq q$$

Cuyas condiciones necesarias son:

$$w_l \geq \lambda \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_l}, \quad \forall l \quad \text{con igualdad si } z_l^* > 0$$

Para que el problema tenga solución se requiere que Y sea cerrado y satisfaga *free disposal.*

<u>**Las demandas condicionadas**</u>, soluciónes del PMC $z(\mathbf{w}, q)$ cumplen:

→ $z(\mathbf{w}, q)$ **HOD 0 en** w
→ $z(\mathbf{w}, q)$ **HOD 1 en** q**:** si $f(\cdot)$ es HOD 1.
→ **No hay exceso de producción:** $f(z(\mathbf{w}, q)) = \bar{q}$
→ **Convexidad** Si $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ es convexo, entonces $z(w, q)$ es un conjunto convexo.
→ **Unicidad** si $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ es un conjunto estrictamente convexo, entonces $z(w, q)$ es única.

Definición 3.7: Función de Costos

Dado un nivel de producción $\bar{q}$, la función valor del PMC es $c(\mathbf{w}, q) = \mathbf{w} \cdot z(\mathbf{w}, q)$ y cumple:

→ $c(\mathbf{w}, q)$ **HOD 1 en** w
→ $c(\mathbf{w}, q)$ **HOD 1 en** q**:** si $f(\cdot)$ es HOD 1.
→ **No decreciente en** q**:**
→ **Convexa en** q**:** si $f(\cdot)$ es cóncava. $C_m g$ no decrecientes.
→ **Cóncava en** w**:** $D_c^2 c(\mathbf{w}, q)$ es NSD
→ **Dualidad** Si $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ es convexo para todo q, entonces $Y = \{(-z, q) : w \cdot z \geq c(w, q) \forall w \gg 0\}$, puede ser descripto dualmente mediante la función de costos.

Teorema 3.3: Lema de Shephard

Si $c(\mathbf{w}, q)$ es diferenciable con respecto a w se tiene que

$$z(\mathbf{w}, q) = \nabla_p c(\mathbf{w}, q) \quad \text{es decir} \quad \frac{\partial c(\mathbf{w}, q)}{\partial w_i} = z_i(p, q)$$

<u>**Nota:**</u> $D_w z(\bar{w}, q) = D^2_w c(\bar{w}, q)$ simétrica, NSD y $D_w z(\bar{w}, q) \cdot \bar{w} = 0$.

Definición 3.8: Max Beneficio en el largo Plazo

Como Y puede ser descripto mediante la función de costos el problema de maximización de beneficio en el largo plazo se puede formular $\max pq - c(\mathbf{w}, q)\ \ s.a\ \ q \geq 0$ y su óptimo se encuentra en

$$p = \frac{\partial c(\mathbf{w}, q)}{\partial q}$$

Además si $\frac{c(\mathbf{w},q)}{q} = Cme$ entonces las siguientes equivalencias valen:

Rendimientos crecientes a escala: $\frac{\partial Cme}{\partial q} < 0 \Leftrightarrow Cme(q) < CMg(q)$
Rendimientos constantes a escala: $\frac{\partial Cme}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow Cme(q) < CMg(q)$
Rendimientos decrecientes a escala: $\frac{\partial Cme}{\partial q} > 0 \Leftrightarrow Cme(q) < CMg(q)$

Observación

→ **Rend. Crecientes** $\frac{\partial Cme}{\partial q} < 0$, el problema no tiene solución: la firma querrá llevar tantas unidades como pueda al mercado.
→ **Rend. Constantes** $\frac{\partial Cme}{\partial q} = 0$, dependerá del precio: si $p < Cme$ la unica solución es no producir; si $p = Cme$ producirá tantas unidades como pueda y si $p > Cme$ la solución no está definida (produce infinito).
→ **Rend. Decrecientes** $\frac{\partial Cme}{\partial q} > 0$, el problema es bien comportado y hay solución.

Teorema 3.4: Obtener $f(\cdot)$ mediante $c(\mathbf{w}, q)$

Como por dualidad se puede expresar Y mediante la función de costos también es posible recuperar la función de producción $f(\cdot)$ mediante los siguientes pasos:

1. Verificar que $c(\mathbf{w}, q)$ sea una función de costos
2. Por el Lema de Shephard encontrar las demandas de factores $z(\mathbf{w}, q)$
3. Despejar de cada una de ellas la relación $\frac{w_i}{w_j}$ e igualarlas
4. Despejar q

Definición 3.9: Oferta de Corto Plazo

Si se considera algún factor constante en el corto plazo tal que existe un costo fijo F entonces los costos medios pueden expresarse como:

$$Cme = CmeV + CmeF$$

y la curva de oferta serán el costo marginal para aquellos valores donde el costo medio variable sea mayor al precio

$$q^* = \begin{cases} q(p, \mathbf{w}) & p \geq CmeV(y) \\ 0 & p < CmeV(y) \end{cases}$$

con demandas de factores y beneficio:

$$z^* = \begin{cases} z(p, \mathbf{w}) & p \geq CmeV(y) \\ 0 & p < CmeV(y) \end{cases} \quad \pi^* = \begin{cases} \pi(\mathbf{z}, p) & p \geq CmeV(y) \\ -F & p < CmeV(y) \end{cases}$$

Teorema 3.5: Agregación en Firmas

The aggregate profit obtained by each production unit maximizing profit separately taking prices as given is the same as that which would be obtained if they were to coordinate their actions in a joint profit maximizing decision.

1. $\pi^*(p) = \sum_j \pi_j(p)$
2. $y^*(p) = \sum_j y_i(p)$.

For the single output case this means that $q = \sum_j q_j$ is the aggregate output and aggregated cost is $c(w, q)$ Thus, **the allocation is cost minimizing.**
If firms maximize profits taking prices as given, then the production side of **the economy aggregates beautifully.**

Equilibrio Parcial

• Optimalidad Paretiana y Equilibrio Competitivos

Sea una economía de I consumidores, J firmas y L bienes. Las preferencias del consumidor i sobre la canasta de consumo $x_i = (x_{1i}, ..., x_{Li})$ están representadas por la función de utilidad $u_i(\cdot)$. Sea la cantidad inicial de cada l bien disponible en la economía su *dotación*, denotada por $\omega_l \geq 0\ \forall l$. Además es transformar el conjunto de dotación inicial de un bien en cantidades adicionales de otros bienes. Cada firma j tiene sus posibilidades de producción resumidas en el conjunto de producción Y_j donde un elemento de Y_j es un vector de producción $y_j = y_{1j}, ..., y_{Lj} \in \mathbb{R}^L$. Por lo tanto si $(y_1, ..., y_j) \in \mathbb{R}^{LJ}$ son los vectores de producción de las J firmas, la cantidad total *neta* del bien l disponible en la economía será $\omega + \sum_j y_{lj}$.

Definición 4.1: Locación Económica

Una ***locación económica*** $(x_1, ..., x_l; y_1, ...y_j)$ es una especificación de un vector de consumo $x_i \in X_i$ para cada consumidor $i = 1, ..., I$ y un vector de producción $y_j \in Y_j$ para cada consumidor $j = 1, ..., J$. Además, la locación $(x_1, ..., x_l; y_1, ...y_j)$ será *factible* si:

$$\sum_{i=1}^{I} x_{li} \leq \omega l + \sum_{j=1}^{J} y_{lj} \qquad \text{para todo } l = 1, ..., L.$$

Definición 4.2: Óptimo de Pareto

Una locación factible $(x_1, ..., x_l; y_1, ...y_j)$ es *Pareto óptima* o *eficiente en el sentido de Pareto* cuando no existe otra locación factible $(x_1', ..., x_l'; y_1', ...y_j')$ tal que $u_i(x_i') \geq u_i(x_i)$ para todo $i = 1, ...I$ y $u_i(x_i') > u_i(x_i)$ para algún i.

Definición 4.3: Equilibrio Competitivo (Walrasiano)

La alocación $(x_1^*, ..., x_L^*, y_1^*, ..., y_J^*)$ y el vector de precios $p^* \in \mathbb{R}^L$ constituye un *equilibrio competitivo* (o *equilibrio walrasiano*) si las siguientes condiciones son satisfechas:

→ **Maximización de Beneficios:** Cada firma j, y_j^*, resuelve

$$\underset{y_j \in Y_j}{Max} \quad p^* \cdot y_j$$

→ **Maximización de Utilidad:** Cada consumidor i, x_i^*, resuelve

$$\underset{x_i \in X_i}{Max} \quad u_i(x_i) \quad \text{s.a} \quad p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}(p^* \cdot y_j^*)$$

→ **Vaciamiento de Mercados:** Para cada bien $l = 1, ..., L$,

$$\sum_{i=1}^{I} x_{li}^* = \omega_l + \sum_{j=1}^{J} y_{lj}^*$$

Teorema 4.1: Ley de Walras

Si la locación $(x_1, ..., x_L, y_1, ..., y_J)$ y el vector de precios $p >> 0$ satisfacen la condición de vaciamiento de mercado (4.3) para todos los bienes $l \neq k$ y si la restricción presupuestaria de cada consumidor es satisfecha con igualdad de modo que $p^* \cdot x_i = p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}(p^* \cdot y_j^*)$ para cada i entonces el mercado para el bien k también se vacía.

• Analisis Competitivo del Equilibrio Parcial

El equilibrio parcial Marshalliano propone analizar el mercado de uno o varios bienes que constituyen una fracción pequeña de la totalidad del sistema económico. Simplificaciones:

1. Cuando el gasto en un bien es una porción pequeña del gasto total del agente, se puede pensar que **los efectos ingreso que de este deriven serán pequeños**. (Marshall, 1920).
2. Dado que los efectos sustitución están similarmente dispersos y que como el mercado bajo análisis es pequeño, **el resto de los bienes se mantendrán inafectados** ante sus cambios. (Vives, 1987)

Como el resto de los precios están fijos, se puede tratar al gasto en estos otros bienes como una sola *commodity* compuesta, a la que llamaremos *numerario*. Así, tendremos una economía de dos bienes $L = 2$, donde el bien bajo análisis tendrá un precio p y el numerario un precio unitario.

Definición 4.4: Teoremas Fundamentales

→ ***Primer Teorema Fundamental del Bienestar***: Si el precio p^* y la locación $(x_1^*, ..., x_I^*, q_1^*, ..., q_J^*)$ constituyen un equilibrio competitivo, entonces esta locación es óptima en el sentido de Pareto.
→ ***Segundo Teorema Fundamental del Bienestar:*** Para cualquier nivel de utilidad Pareto-óptima, $(u_1^*, ..., u_I^*)$, hay transferencias del bien numerario $(t_1, ..., T_I)$ que satisfacen $\sum_i T_i = 0$, tales que un equilibrio competitivo alcanzado a partir de las dotaciones $(\omega_{m1} + T_1, ..., \omega_{mI} + T_I$ genera precisamente las utilidades $(u_1^*, ..., u_I^*)$.

Incertidumbre

• Teoría de la Utilidad Esperada

DEFINICIÓN 5.1: LOTERIAS

Una estructura de elección $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ consiste de:

→ **Lotería Smple L** : una lista $L = \{p_1, ..., p_N\}$ con $P_N \geq 0 \ \forall n$ y $\sum_n p_n = 1$ donde p_n es interpretado como la probabilidad de ocurrencia del evento n.

→ **Lotería Compuesta** $(L_1, ..., L_K; \alpha_1, ..., \alpha_K)$**:** Dadas K loterías simples $L_k = (p_1^k, ..., p_N^k)$, $k = 1, ..., K$ y probabilidades $\alpha_k \geq 0$ con $\sum_k \alpha_k = 1$ será la alternativa riesgosa que otorga la lotería simple L_k con probabilidad α_k para $k = 1, ..., K$.

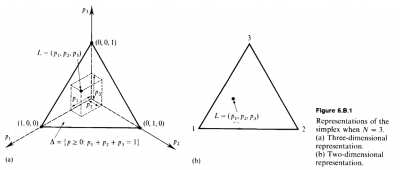
→ **Lotería Reducida:** Para toda *lotería compuesta*, se calcula la *lotería simple* $L = (p_1, ..., p_N)$ que genera la misma distribución de resultados. Se obtiene $p_n = \alpha_k \cdot p_n^k$ de forma que:

$$p_n = \alpha_1 p_n^1 + ... + \alpha_K p_n^K \quad \text{para } n = 1, ..., N.$$

La lotería reducida L de cualquier lotería compuesta $(L_1, ..., L_K; \alpha_1, ..., \alpha_K)$ se obtiene mediante adición vectorial:

$$L = \alpha_1 L_1 + ... + \alpha_K L_K \in \Delta$$

Dada una lotería simple, geométricamente, esta puede ser representada en el $(N-1)$ ***simplex dimensional***: $\Delta = \{p \in \mathbb{R}_+^N : p_1 + ... + p_N = 1\}$. Donde cada vértice se corresponde con la *lotería degenerada* que asigna probabilidad de ocurrencia de 1 a cada evento.



• Preferencias Sobre Loterías

De acuerdo a la premisa consecuencialista sea $\mathcal{L}$ el set de alternativas,el conjunto de las **loterías simples** sobre el set de resultados C. Así, el tomador de decisiones tendrá una $\succsim$ racionales sobre él.

DEFINICIÓN 5.2: CONTINUIDAD

La relación de preferencias $\succsim$ sobre el espacio de loterías simples $\mathcal{L}$ es *continua* si para cada $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ los sets

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succsim L''\} \subset [0,1]$$

y

$$\{\alpha \in [0,1] : L'' \succsim \alpha L + (1-\alpha)L'\} \subset [0,1]$$

son cerrados.

DEFINICIÓN 5.3: INDEPENDENCIA DE ALTERNATIVAS IRRELEVANTES

La relación de preferencias $\succsim$ sobre el espacio de loterías simples $\mathcal{L}$ satisface el *axioma de independencia* si para todo $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ y $\alpha \in (0,1)$ tenemos:

$$L \succsim L' \quad \text{si y solo si} \quad \alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

DEFINICIÓN 5.4: FUNCIÓN DE UTILIDAD ESPERADA: (V.N-M)

La función de utilidad $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ tiene una *forma de utilidad esperada* si existe una asignación de números $(u_1; ...; u_N)$ para los N resultados tal que para cada lotería simple $L = (p_1; ...; p_N) \in \mathcal{L}$ tenemos:

$$U(L) = u_1 p_1 + ... + u_N p_N.$$

Una función de utilidad $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ con la forma de utilidad esperada se denomina *función de utilidad esperada: von-Neumann- Morgenstern (v.N-M).*

TEOREMA 5.1: LA FORMA DE U.E IMPLICA LINEALIDAD

Una función de utilidad $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ tiene una forma de utilidad esperada *sí y solo sí* **es lineal**; i.e, satisface la propiedad de:

$$U\left(\sum_{K=1}^{K} \alpha_K L_K\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)$$

para cualquiera de las K loterías $L_k \in \mathcal{L}$, $k = 1; ...; K$ y probabilidades $(\alpha_1; ...; \alpha_K) \geq 0$, $\sum_k \alpha_k = 1$.

DEFINICIÓN 5.5: EL TEOREMA DE LA UTILIDAD ESPERADA

El *teorema de la utilidad esperada* dice que si las preferencias del tomador de decisiones sobre loterías satisfacen los axiomas de independencia y continuidad, entonces sus preferencias son representables mediante una función de utilidad con la forma de la función de utilidad esperada.

→ **Continuidad** garantiza que las preferencias pueden ser representadas por una función de utilidad.

→ **Linealidad y Axioma de Independencia** implican que las curvas serán rectas que además deben ser paralelas entre sí.

En particular, las cuervas de indiferencia son lineas rectas si, para too par de loterías L, L' tenemos que $L \sim L'$ implica $\alpha L + (1-\alpha)L' \sim L$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

• Loterías y Aversión al Riesgo

DEFINICIÓN 5.6: LOTERÍAS DINERO Y UTILIDAD ESPERADA

Sea x una cantidad monetaria. Se describe una lotería sobre x mediante la *función de distribución acumulada* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ donde $F(x)$ indica la probabilidad de que el pago realizado sea menor o igual a x. Sea además la función de densidad $f(\cdot)$ que cumple:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{para todo} \quad x$$

A partir de ahora se describen loterías sobre resultados monetarios, por lo que $\mathcal{L}$ será el *conjunto de todas las funciones de distribución sobre cantidades no negativas de dinero*, o con mayor generalidad, sobre un intervalo $[a, +\infty]$. Se asumen $\succsim$ racionales definidas sobre $\mathcal{L}$ que cumplen el teorema de la utilidad esperada por lo que existe una asignación de valores de utilidad $u(x)$ a cantidades de dinero no negativas con la propiedad de que cualquier $F(\cdot)$ puede ser evaluada por una función de utilidad $U(\cdot)$ con la forma

$$U(F) = \int u(x)dF(x).$$

Donde la función de utilidad v.N-M $U(\cdot)$ es la **esperanza matemática** sobre las realizaciones de x de los valores $u(x)$. Al igual que antes, $U(\cdot)$ es lineal en $F(\cdot)$.

Nota: es importante la distinción entre $U(\cdot)$ la función de utilidad esperada de von-Neumann-Morgenstern y la función de utilidad de Bernoulli $u(\cdot)$. Esta última es *continua* y *creciente.*

• Aversión al Riesgo y su medición

DEFINICIÓN 5.7: ACTITUDES ANTE EL RIESGO

→ **Averso al riesgo:** Si para toda lotería $F(\cdot)$ su esperanza (lotería degenerada que entrega con certeza $\int xdF(x)$) le es al menos tan buena como la propia Lotería. Dado que $u(c(F,u) = \int u(x)dF(x)$ y $u(\cdot)$ es estrictamente creciente, el equivalente cierto no será mayor que $\int u(x)dF(x)$, el valor esperado de la lotería.

$$c(F,u) \leq \int xdF(x) \quad \forall F$$

$$\int u(x)dF(x) \leq U\left(xdF(x)\right) \quad \forall F \in \mathcal{L}$$

→ **Neutral al riesgo:** si para toda lotería $F(\cdot)$ su esperanza $\int xdF(x)$ le es indiferente a la propia $F(\cdot)$

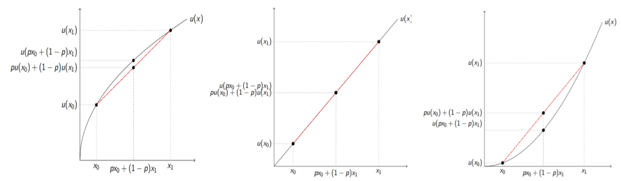
$$c(F,u) = \int xdF(x) \quad \forall F$$

$$\int u(x)dF(x) = U\left(xdF(x)\right) \quad \forall F \in \mathcal{L}$$

→ **Amante al riesgo:** si para toda lotería $F(\cdot)$ su esperanza $\int xdF(x)$ le es peor que la propia $F(\cdot)$

$$c(F,u) \geq \int xdF(x) \quad \forall F$$

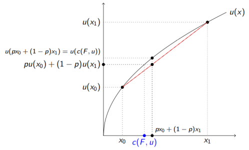
$$\int u(x)dF(x) \geq U\left(xdF(x)\right) \quad \forall F \in \mathcal{L}$$



(a) Averso al Riesgo. (b) Neutral al Riesgo. (c) Amante al Riesgo.

Definición 5.8: Equivalente Cierto

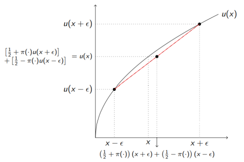
El equivalente cierto (*certainty equivalent*) de $F(\cdot)$, denotado $c(F,u)$, es la cantidad de dinero ante la cual el individuo estaría indiferente entre la apuesta $F(\cdot)$ y la cantidad concreta $c(F,u)$; es decir:



$$uc(F,u) = \int u(x)dF(x)$$

Definición 5.9: Prima de probabilidad

Para cualquier cantidad de dinero x y escalar positivo ϵ, la prima de probabilidad denotada $\pi(x,\epsilon,u)$, es el exceso de probabilidad de ganar sobre una apuesta con chances justas que hace al individuo indiferente entre el resultado cierto x y una apuesta entre dos resultados $x-\epsilon$ y $x+\epsilon$; ie,



$$u(x) = (1/2 + \pi(x,\epsilon,u))u(x+\epsilon) + (1/2 - \pi(x,\epsilon,u))u(x-\epsilon)$$

Teorema 5.2:

Las siguientes propiedades son equivalentes para un maximizador UE con $u(\cdot)$ de Bernoulli cantidades monetarias:

1. El tomador de decisiones es averso al riesgo.
2. $u(\cdot)$ es cóncava.
3. $c(F,u) \leq xdF(x)$ para todo $F(\cdot)$
4. $\pi(x,\epsilon,u) \geq 0$ para todo x, ϵ.

Definición 5.10: Coeficiente de Arrow-Pratt

Dada una función de utilidad de Bernoulli $u(\cdot)$ doblemente diferenciable para cantidades monetarias, el *coeficiente de aversión al riesgo absoluto de Arrow-Pratt* sobre x se define como

$$r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

$$\text{Donde si } r_A(x) \begin{cases} > 0 \text{ para agentes aversos al riesgo} \\ = 0 \text{ para agentes neutrales al riesgo} \\ < 0 \text{ para agentes amantes al riesgo} \end{cases}$$

Nota: $r_A(x)$ es una función de x, que puede pensarse como la riqueza del agente, por lo que el comportamiento al riesgo puede cambiar con la riqueza, en cantidades **absolutas**.

Definición 5.11: Coef. de Aversión al Riesgo Relativo.

Dada una función de utilidad de Bernoulli $u(\cdot)$, el *coeficiente de aversión al riesgo relativo* en x es

$$r_R(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}.$$

Como $r_R(x) = xr_A(x)$ un averso al riesgo con decreciente aversión relativa tendrá decreciente aversión absoluta. La inversa no es cierta.

Equivalencias:

1. $r_R(x,u)$ es decreciente en x.
2. Siempre que $x_2 \leq x_1$, $u(tx_2)$ es una transformación cóncava de $u(tx_1)$
3. Dado cualquier riesgo $F(t)$ con $t > 0$, el equivalente cierto $\bar{c}_x$ definido por $u(\bar{c}_x) = \int u(tx)dF(t)$ es tal que $x/\bar{c}_x$ es decreciente en x.

Teorema 5.3: Equivalencias

Los siguientes criterios para decir que $u_2(\cdot)$ es más averso al riesgo que $u_1(\cdot)$ son equivalentes:

1. $r_A(x,u_2) \geq r_A(x,u_1)$ para todo x.
2. $u_2(\cdot)$ es una transformación cóncava de $u_1(\cdot)$
   $u_2(\cdot)$ es más cóncavo que $u_1(\cdot)$.
3. $c(F,u_2) \leq c(F,u_1)$ para todo $F(\cdot)$.
4. $\pi(x,\epsilon,u_2) \geq \pi(x,\epsilon,u_1)$ para cualquier x y ϵ.
5. Siempre que $u_2(\cdot)$ encuentre que una lotería $F(\cdot)$ al menos tan buena como el $\bar{x}$ sin riesgo, entonces $u_1(\cdot)$ también lo hace. Es decir, $\int u_2(x)dF(x) \geq u_2(\bar{x})$ implica $\int u_1(x)dF(x) \geq u_1(\bar{x})$ para cualquier $F(\cdot)$ y $\bar{x}$.
   Cualquier riesgo aceptable bajo $u_2(\cdot)$ desde certeza también será aceptado por $u_1(\cdot)$

Definición 5.12: Aver. al Riesgo Decr. Absoluta (DARA)

La función de utilidad de Bernoulli $u(\cdot)$ exhibe *aversión absoluta decreciente al riesgo* si $r_A(x,u)$ es una función decreciente en x. Los individuos con preferencias DARA toman más riesgo a medida que se hacen más ricos.

Definiciones equivalentes para DARA:

- La función $u(\cdot)$ exhibe aversión absoluta decreciente al riesgo.
- Siempre que $x_2 < x_1$, $u(x_2+z)$ es una transformación cóncava de $u(x_1+z)$
- Para cualquier riesgo $F(z)$, el equivalente cierto de la lotería conformada agregando el riesgo z al nivel de riqueza x dado por la cantidad c_x para el cual $u(c_x) = \int u(x+z)dF(z)$, es tal que $(x - c_x)$ es decreciente en x. Es decir, a mayor x, menor será la disposición del individuo a pagar para disminuir el riesgo.
- La prima de riesgo $\pi(x,\epsilon,u)$ es decreciente en x.
- Para cualquier $F(z)$, si $\int u(x_2+z)dF(z) \geq u(x_2)$ y $x_2 < x_1$, entonces $\int u(x_1+z)dF(z) \geq u(x_1)$.

• Comparación de la Distribución de Pagos en términos de Retornos y Riesgo

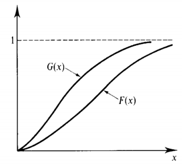
Definición 5.13: Dominancia Estocástica de Primer Orden

La distribución $F(\cdot)$ presenta *dominancia estocástica de primer orden* respecto a $G(\cdot)$ si, para cualquier función no decreciente $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenemos

$$U(F) = \int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x) = U(G) \quad \forall\ u(\cdot) : u' \geq 0$$

$\rightarrow$ $F(\cdot) \leq G(\cdot)$ para todo x.

$\rightarrow$ **Variables Aleatorias:** $Y \overset{d}{=} X + \eta$ con $\eta < 0$



Definición 5.14: Dominania Estocástica de Segundo Orden

Para cualquier par de distribuciones $F(\cdot)$ y $G(\cdot)$ con **la misma media**, $\mathbb{E}(F) = \mathbb{E}(G)$, $F(\cdot)$ presenta *dominancia estocástica de segundo orden (o es menos riesgosa que)* $G(\cdot)$ para cualquier función cóncava no decreciente $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, ***agente averso al riesgo*** tenemos:

$$U(F) = \int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x) = U(G)$$

para toda $u(\cdot)$ creciente y cóncava.
Note que **DESO implica DEPO.**

Teorema 5.4: Equivalencias DESO

Considere las dos distribuciones $F(\cdot)$ y $G(\cdot)$ con **la misma media**, $\mathbb{E}(F) = \mathbb{E}(G)$. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

$\rightarrow$ $F(\cdot)$ domina estocásticamente en **segundo orden** a $G(\cdot)$.
$\rightarrow$ $G(\cdot)$ es una *mean-preserving spread* de $F(\cdot)$.
$\rightarrow$ Se sostiene la desigualdad:

$$\int_0^x G(t)dt \geq \int_0^x F(t)dt \quad \forall\ x.$$

$\rightarrow$ **Variables Aleatorias** $Y \overset{d}{=} X + \eta$ donde $\mathbb{E}(\eta|X) = 0$

Anexo A - Matemática

Definición 6.1: Conjunto Convexo

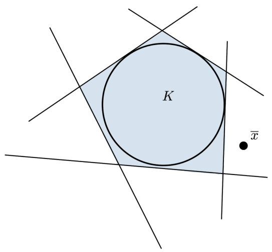
El conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *convexo* si $\alpha x + (1-\alpha)x' \in A$ siempre que $x, x' \in A$ y $\alpha \in [0,1]$.

Definición 6.2: Hiperplano

Dado un vector $p \in \mathbb{R}^n$ con $p \neq 0$, y un escalar $c \in \mathbb{R}$, el *hiperplano generado por* p *y* c es el conjunto definido como $H_{p,c} = \{x \in \mathbb{R}^n : p \cdot x = c\}$. Los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^n : p \cdot x \geq c\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : p \cdot x \leq c\}$ son, respectivamente, el *semi-espacio superior* y el *semi-espacio inferior* del hiperplano $H_{p,c}$.
Por definición, los hiperplanos y sus semi-espacios son conjuntos convexos.

Teorema 6.1: Hiperplano Separador

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y convexo. Sea $\bar{x} \notin K$. Entonces, existen $p \neq 0$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $p \cdot \bar{x} < c < p \cdot y$ para todo $y \in K$.
De manera más general, sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos convexos disjuntos, i.e. $A \cap B = \varnothing$, entonces existe un hiperplano categorizado por $p \neq 0$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $p \cdot x \geq c$ para todo $x \in A$ y $p \cdot y \leq c$ para todo $y \in B$. Por ende, existe un hiperplano que separa A de B dejándolos en dos semi-espacios diferentes.



Teorema 6.2: Hiperplano Soporte

Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y que x no es un elemento del interior de B, i.e., $x \notin \text{Int}\, B$. Entonces, existe $p \in \mathbb{R}^n$ con $p \neq 0$ tal que $p \cdot x \geq p \cdot y$ para cada $y \in B$.

Teorema 6.3: Fórmula de Euler

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función homogénea de grado r y diferenciable. Entonces, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \bar{x}_i = r f(\bar{x}) \text{ o lo que es lo mismo } \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{x} = r f(\bar{x})$$

Definición 6.3: Matriz semi-definida negativa

La matriz $M \in \mathbb{R}^{nxn}$ es *semi-definida negativa* si

$$z \cdot Mz \leq 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

Si la desigualdad es estricta para todo $z \neq 0$, entonces la matriz M es *definida negativa*. Invirtiendo las desigualdades, se obtienen los conceptos de matrices *semi-definidas positivas* y *definidas positivas*. Las siguientes definiciones son válidas para matrices M simétricas:
Criterio de Sylvester:

→ M **es PD:** Todos los menores principales son positivos
→ M **es SPD:** Todos los menores principales son no negativos.

→ M **es ND:** Los menores principales alteran signos, empezando por negativo.
→ M **es SND:** Los menores principales alteran signos, empezando por negativo y $det(M) = 0$

Definición 6.4: Función Cuasi-cóncava

La función $f : A \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto convexo $A \subset \mathbb{R}^n$, es *cuasi-cóncava* si sus conjuntos de nivel superiores $\{x \in A : f(x) \geq t\}$ son conjuntos convexos; i.e. si

$$f(x) \geq t \quad \text{y} \quad f(x') \geq t \quad \text{implica que} \quad f(\alpha x + (1-\alpha)x') \geq t$$

para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $x, x' \in A$, y $\alpha \in [0,1]$. Si la desigualdad es estricta siempre que $x \neq x'$ y que $\alpha \in (0,1)$, se dice que $f(\cdot)$ es *estrictamente cuasi-cóncava.*
Revirtiendo los signos de la desigualdad se define a una *función cuasi-convexa* y *estrictamente cuasi-convexa.*

De manera análoga, es posible definir a una función como cuasi-cóncava siempre que

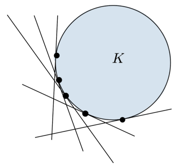
$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \geq min\{f(x), f(x')\}, \quad \forall x, x' \in A, \quad \alpha \in [0,1]$$

Definición 6.5: Función Soporte

Para cualquier conjunto no vacío y cerrado $K \subset \mathbb{R}^L$, la *función soporte* de K está definida para cualquier $p \in \mathbb{R}^L$ como

$$\mu_K(p) = \text{ínf}\, p \cdot x : x \in K$$

El *ínfimo* de un conjunto de números es una versión generalizada del valor mínimo de un conjunto. En particular, esto permite situaciones en donde no existe ningún mínimo debido a que, si bien existe una cota inferior, ningún elemento del conjunto termina por alcanzarlo.
Recuperando K a partir de su función soporte:



La función de soporte no es más que un hiperplano que se encuentra tangencial a un punto sobre el borde de K, dado un vector p. Cuando K es convexo, la función de soporte permite dar una descripción *dual* del conjunto debido a que es posible reconstruirlo solamente conociendo $\mu_K(\cdot)$. En particular, para todo p, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \geq \mu_K(p)\}$ es un semi-espacio que contiene a K. Adicionalmente, por el teorema del hiperplano separador si $x \notin K$, $p \cdot x < \mu_K(p)$ para algún p. De forma que la intersección de todos los semi-espacios generados por la función de soporte para todos los valores posibles de p es precisamente K,

$$K = \{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \geq \mu_K(p) \quad \text{para todos los} \quad p\}$$

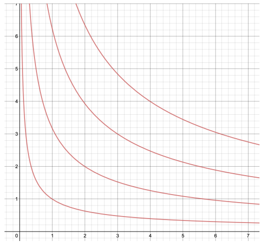
Y si K no es convexo, el conjunto descripto arriba es el conjunto convexo y cerrado más pequeño que contiene a K.

Anexo B - Funciones usuales de utilidad

Breve resumen de funciones de utilidad típicas. Los gráficos de las demandas poseen a las demandas marshallianas en verde y las demandas hicksianas en azul.

Definición 7.1: Cobb-Douglas

$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta, \quad \alpha, \beta > 0$$



Demandas Marshallianas

$$x_1(p,m) = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)} \frac{m}{p_1} \qquad x_2(p,m) = \frac{\beta}{(\alpha+\beta)} \frac{m}{p_2}$$

$$v(p,m) = \left(\frac{m}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^\beta$$

Demandas Hicksianas

Por dualidad, $v(p, e(p,u)) = u$,

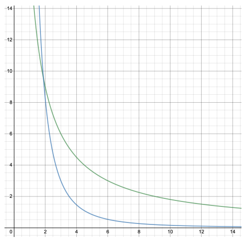
$$u = \left(\frac{e(p,u)}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^\beta$$

$$e(p,u) = \left(u \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{p_2}{\beta}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} (\alpha+\beta)$$

Por lema de Shephard y simetría:

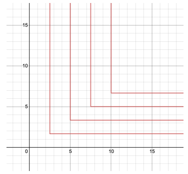
$$h_1(p,u) = \left(u \frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$h_2(p,u) = \left(u \frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$



Definición 7.2: Complementos Perfectos

$$u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$



Demandas Marshallianas

$$x_1(p,m) = \frac{bm}{bp_1 + ap_2} \qquad x_2(p,m) = \frac{am}{bp_1 + ap_2}$$

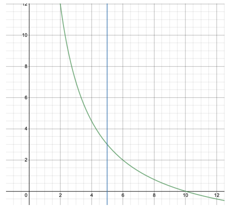
$$v(p,m) = \frac{abm}{bp_1 + ap_2}$$

Demandas Hicksianas

$$e(p,u) = u\left(\frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{b}\right)$$

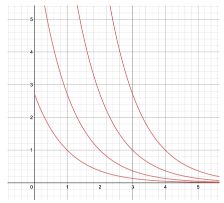
$$h_1(p,u) = \frac{u}{a}$$

$$h_2(p,u) = \frac{u}{b}$$



Definición 7.3: Preferencias Cuasilineales

$$u(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$$



Demandas Marshallianas

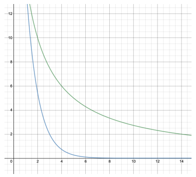
$$x_1(p,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \leq p_1 \\ \frac{m-p_1}{p_1} & \text{si } m > p_1 \end{cases} \qquad x_2(p,m) = \begin{cases} \frac{m}{p_2} & \text{si } m \leq p_1 \\ \frac{p_1}{p_2} & \text{si } m > p_1 \end{cases}$$

$$v(p,m) = \begin{cases} \ln \frac{m}{p_2} & \text{si } m \leq p_1 \\ \frac{m-p_1}{p_1} + \ln \frac{p_1}{p_2} & \text{si } m > p_1 \end{cases}$$

Demandas Hicksianas

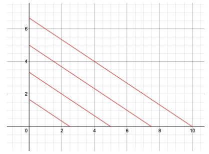
$$h_1(p,u) = \begin{cases} u - \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) & \text{si } u > \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \\ 0 & \text{si } u \leq \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \end{cases}$$

$$h_2(p,u) = \frac{p_1}{p_2}$$



Definición 7.4: Sustitutos Perfectos

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$



Demandas Marshallianas Como ocurre que $TMS = \frac{a}{b} = \frac{p_1}{p_2}$:

$$x_1(p,m) = \begin{cases} \frac{m}{p_1} & \text{si } bp_1 < ap_2 \\ \alpha \frac{m}{p_1} & \text{si } bp_1 = ap_2 \\ 0 & \text{si } bp_1 > ap_2 \end{cases} \qquad x_2(p,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } bp_1 < ap_2 \\ (1-\alpha)\frac{m}{p_2} & \text{si } bp_1 = ap_2 \\ \frac{m}{p_2} & \text{si } bp_1 > ap_2 \end{cases}$$

$$v(p,m) = \begin{cases} a\frac{m}{p_1} & \text{si } bp_1 < ap_2 \\ \frac{am}{p_1} = \frac{bm}{p_2} & \text{si } bp_1 = ap_2 \\ \frac{bm}{p_2} & \text{si } bp_1 > ap_2 \end{cases}$$

Demandas Hicksianas

Adquiere el más barato, relativo a su aporte en utilidad, para alcanzar el nivel de utilidad u.

$$h_1(p,u) = \begin{cases} \frac{u}{a} & \text{si } bp_1 < ap_2 \\ \alpha \frac{u}{a} & \text{si } bp_1 = ap_2 \\ 0 & \text{si } bp_1 > ap_2 \end{cases} \qquad h_2(p,u) = \begin{cases} 0 & \text{si } bp_1 < ap_2 \\ (1-\alpha)\frac{u}{b} & \text{si } bp_1 = ap_2 \\ \frac{u}{b} & \text{si } bp_1 > ap_2 \end{cases}$$

$$e(p,u) = \begin{cases} p_1 \frac{u}{a} & \text{si } bp_1 < ap_2 \\ p_1 \frac{u}{a} = p_2 \frac{u}{b} & \text{si } bp_1 = ap_2 \\ p_2 \frac{u}{b} & \text{si } bp_1 > ap_2 \end{cases}$$

Nota: Las mismas demandas pueden obtenerse de la función **Máximo**

$$u(x_1, x_2) = \max\{ax_1, bx_2\}$$