Laboratoire d'Algèbre, de Cryptographie, de Géométrie Algébrique et Applications

L3 TDSI 2017-2018
M. Cissé

Université Cheikh Anta Diop de Dakar
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques et Informatique

TD 1 : Espaces Métriques

Exercice 1

Vérifier que les exemples suivants définissent bien des distances.

1 $E = \mathbb{R}, d(x,y) = |x-y|$.

2 $E = \mathbb{R}^n, d_1(x,y) = \sum |x_i - y_i|$ avec $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

3 En étudiant le signe de $\sum_{i=1}^n (\lambda|x_i| + |y_i|)^2$, montrer que $\sum |x_i||y_i| \leq \sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}$. En déduire que sur $E = \mathbb{R}^n$, $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$.

4 $E = \mathbb{R}^n, d_\infty(x,y) = \max |x_i - y_i|$.

5 $E =]0, +\infty[, d(x,y) = |\ln(x) - \ln(y)|$

Exercice 2

Montrer que dans un espace métrique, la relation $d(x,y) \geq |d(x,z) - d(y,z)|$ est toujours satisfaite (deuxième inégalité triangulaire). Montrer aussi que $d(x,y) \geq 0$.

Exercice 3

Soit $\mathbb{R}$ muni de la distance valeur absolue, montrer que les boules ouvertes sont exactement les intervalles ouverts bornés.

Exercice 4

Tracer dans $\mathbb{R}^2$ les boules ouvertes de centre 0 et de rayon 1 pour les distances d_1, d_2, d_∞ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

Trouver les frontières des boules ouvertes de centre 0 et de rayon 1 pour les distances d_1, d_2, d_∞ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

1. Vérifier qu'une boule ouverte est un ouvert et qu'une boule fermée est un fermé.
2. Vérifier d'un point est un fermé dans tout espace métrique.
3. Vérifier qu'une réunion finie de points est un fermé dans tout espace métrique.

Exercice 7

Soit $V \subset E$. Montrer que V est ouvert si et seulement si $Fr(V) \cap V = \emptyset$.

Exercice 8

1. Monter que P d'équation $y > x^2$ est ouvert tandis que Q d'équation $Y \geq x^2$ est fermé.

Exercice 9

Soit $p \in [1, +\infty]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $\| x \|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$. On veut montrer que $\|\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si a et b sont des réels positifs ou nuls et si p et q sont des réels strictement supérieurs à tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Indication, utiliser la convexité de l'exponentiel : Si $a + b = 1$ alors $\exp(ax + by) \leq a\exp(x) + b\exp(y)$.

2. En déduire que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des réels positifs ou nuls et si p et q sont des réels strictement supérieurs à tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ alors $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i{}^p)^{1/p}.(\sum_{i=1}^n b_i{}^q)^{1/q}$ (Inégalité de Hölder).
3. En déduire que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des réels positifs ou nuls et si $p > 1$ alors $(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^n a_i{}^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^n b_i{}^p)^{1/p}$ (Inégalité de Minkowski).
4. En déduire que $\|\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 10

On munit $C([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\|_\infty$.

1. Montrer que l'ensemble L_k des fonctions k-lipschitziennes est un fermé de $C([0,1], \mathbb{R})$.
2. La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est-elle k-lipschitzienne ?

Exercice 11

Soit E et F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que si f est continue, alors son graphe $\Gamma = \{(x, f(x), x \in E)\}$ est fermé dans $E \times F$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si f est continue, alors son graphe Γ est homéomorphe à E.