問題

2019/03/13 ndifix

$\tan 1 = \alpha$ とする。このとき、任意の正の整数 n について

$$\tan n = \frac{\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} {}_nC_{2k+1}\,\alpha^{2k+1}\,(-1)^k}{\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}_nC_{2k}\,\alpha^{2k}(-1)^k}$$ を示せ。

ただし、$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すとする。

解答

① 帰納法による解答

② ド・モアブルの定理を用いた解答

① 帰納法による解答

愚直に計算をします。このとき ${}_aC_b = {}_aC_{b-1} + {}_{a-1}C_{b-1}$ を使います。

この解法の注意点として、帰納法を用いるということは

「tan n が定義可能な場合、それをもとにして tan (n+1)を表せる」

という証明になっていることがあり、常に n $\neq$ $\pi/2+$(整数)$\times\pi$ を前提

とします。つまりπが無理数であることを別途証明すべきかどうかという議

論の余地が生まれます。（そこまでしなくてもよさそうですが）

② ド・モアブルの定理を用いた解答

前述の問題を気にしなくていいことからこちらの方が良さそう。

$$(\cos 1 + i \sin 1)^n = \cos n + i \sin n$$

二項定理で左辺を展開します

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cos^{n-k} 1 * \sin^k 1 * i^k = \cos n + i \sin n$$

複素数の相当を用いて

$$\cos n = \sum_{\substack{0 \le k \le n, \\ k=even}} {}_nC_k \cos^{n-k} 1 * \sin^k 1 * (-1)^{\frac{k}{2}}$$

$$\sin n = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k=odd}} {}_nC_k \cos^{n-k} 1 * \sin^k 1 * (-1)^{\frac{k-1}{2}}$$

$$\tan n = \frac{\sin n}{\cos n} = \frac{\sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k=odd}} {}_nC_k \cos^{n-k} 1 * \sin^k 1 * (-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\sum_{\substack{0 \le k \le n, \\ k=even}} {}_nC_k \cos^{n-k} 1 * \sin^k 1 * (-1)^{\frac{k}{2}}}$$

分母・分子を$\cos^{\mathrm{n}} 1$ で割ります

$$\tan n = \frac{\sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k=odd}} {}_nC_k \tan^k 1 \ (-1)^{\frac{k}{2}}}{\sum_{\substack{0 \le k \le n, \\ k=even}} {}_nC_k \tan^k 1 \ (-1)^{\frac{k-1}{2}}}$$

これで、問題で与えられた式になりました