結び目の不変量と演算

ndifix

2020 年 6 月 24 日

目 次

1 基本的な定義

定義 1.1 (結び目)**.** 結び目 (knot) とは、向き付けられた S^1 の R^3 への埋め込みの像である。

S^1 というのは $x^2 + y^2 = 1$ で馴染みのある円周のことで、R^3 というのは 3 つの軸がある空間のこと。
S^1 のように一つの閉曲線になっていて S^1 のように局所的に見れば直線のようになっているものを考える。舞台は R^3

定義 1.2 (射影図)**.** 射影図 (diagram) とは結び目を R^2 に射影したもので射影図から結び目を復元できるもののことをいう。

例えば次のような制約がある。

1. 結び目上の 3 点以上が射影図の 1 点に重ならない
2. 射影図の交点に対応する結び目上の 2 点の近傍は同一平面にない

交点を作る 2 本の線の上下関係は図の中に含めることがある。制約は射影図から結び目を復元できるようにするためのもの。

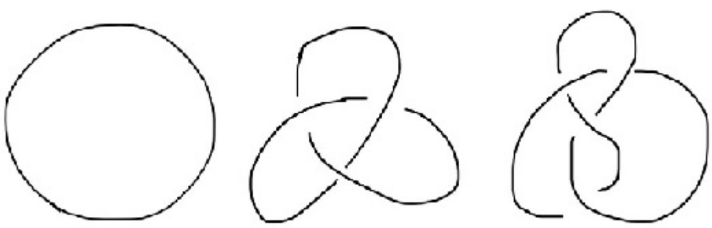


図 1: 左から自明な結び目、3 つ葉結び目、8 の字結び目。

注意. 結び目は自身を全同位変形 (ambient isotopy) した図形と区別しない

　言い換えると結び目に対する操作として、現実の輪ゴムに対して行える操作：
伸ばしたり縮めたりちょっと動かしたり を許す。
上下が重なって貫通する操作は許さない。

注意. 1 つの結び目に対して射影図は無数に存在する

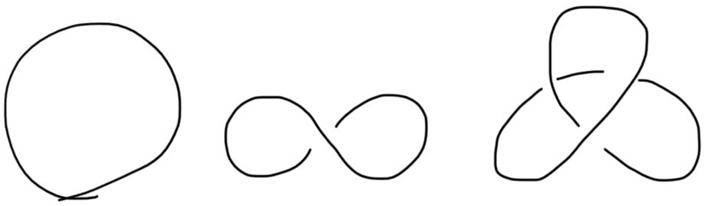


図 2: これらはすべて自明な結び目の射影図になっている

注意. 以下扱う結び目は射影図を描いたときに交点数が有限個のもののみとする。Wikipedia や書籍ではよく「馴れた結び目」と表現されているもののみを扱う。

2　結び目の種類と区別

定義 2.1 (ライデマイスター移動). ライデマイスター移動 (Reidemeister move) とは射影図の部分に対して定義される以下の 3 操作のことである。

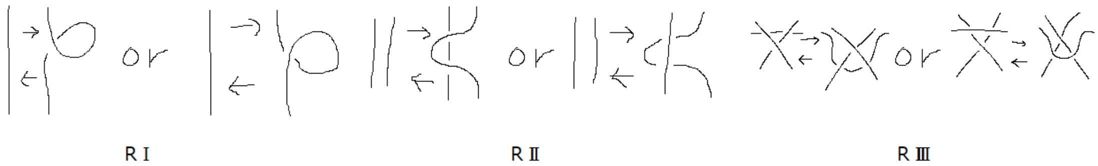


図 3: ライデマイスター移動

定理 2.1.1 (Reidemeister's Theorem). 結び目 K の異なる射影図 D_1 と D_2 が存在したとき、D_1 に有限回のライデマイスター移動を施すと D_2 へ変化させられる。

直感で受け入れられると思うので証明は [1] を参照のこと。

定義 2.2 (絡み目). 絡み目 (link) とは、向き付けられた 1 つ以上の S^1 の R^3 への埋め込みの像である。

定義 2.3 (絡み目の合成). 絡み目の連結和を図 5 のようにして定める。
絡み目 L_1, L_2 の射影図それぞれの外側の弧を取り除いて新しい弧で繋ぎ変えたものとして定めている。

図 4: どちらも 2 成分の絡み目。
左を自明な絡み目と呼ぶ。

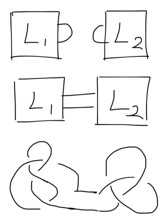


図 5: 上段の連結和が中段。
下段は 8 の字結び目と 3 つ葉結び目について
の演算

注意. この連結和の定義は多様体の連結和と似ている。結び目は一次元閉多様体とみなすことができる。

注意. 連結和を施したものが一意に定まるとは限らない。
実際、複数の成分を持つ絡み目の連結和を考えたとき「どちらの成分の弧を取り除くのか」で異なる結果が得られることがすぐにわかる。

3　不変量の定義

絡み目 L_1, L_2 の射影図を見比べてライデマイスター移動が見つかればこれらは同じ絡み目だと主張できる。しかし”異なる結び目”であることを示す道具がまだない。もしも

$$\text{写像 } f\text{: \{ 絡み目の集合 \}} \to \text{\{ 集合 A\}}$$

というものがあれば、$f(L_1) \neq f(L_2) \Rightarrow L_1 \neq L_2$ を主張できる。(逆が成立するとは限らない) このような写像 f を絡み目の不変量と呼ぶ。

1. 絡み目の成分数
2. 射影図の最小交点数

は簡単な不変量の例になっている。

4　不変量の構成

この章では Jones 多項式を構成した後この不変量に関連した他の多項式不変量について述べる。この構成方法は計算するだけだが [2] や [3] の方法と同じなのでより詳細な説明は参照のこと。

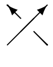
射影図に多項式を定義してそれがライデマイスター移動に対して不変であることを要求するように構成する。射影図の一部に交点があった場合に A, B, C を係数として

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1 \\ \langle \diagup\!\!\!\!\diagdown \rangle &= A\langle)\,(\rangle + B\langle \asymp \rangle \\ \langle D \cup \bigcirc \rangle &= C\langle D \rangle \end{aligned}$$

とする。ライデマイスター移動 II, III に対して上 3 つを要求すると
$AB = 1, C = \left(-A^2 - A^{-2}\right)$ が必要だとわかる。また、ライデマイスター移動 I を施すとこの多項式全体が $-A^{\pm 3}$ 倍される

注意. 上の多項式に関して
$\langle \diagup\!\!\!\!\diagdown \rangle = A\langle)\,(\rangle + B\langle \asymp \rangle$
の定め方から、射影図全体を 90 度回転させたものについて考えることで
$\langle \diagdown\!\!\!\!\diagup \rangle = B\langle)\,(\rangle + A\langle \asymp \rangle$
と同値であるとわかる。

ここで**絡み数**を定義する。

定義 4.1 (絡み数)**.** 交点のない射影図は絡み数が 0。
向き付き射影図の全ての交点に対して  を $+1$,  を -1 とし、それらを全て合計したものを、その射影図の絡み数とする。
射影図 D の絡み数を $\omega(D)$ と表す。

簡単な検討によって絡み数は R Ⅰは ± 1 変化し、R Ⅱと R Ⅲについて不変であることがわかる。
以上から
$\langle D\rangle(-A)^{-3\omega(D)}$ がライデマイスター移動に対して不変であるとわかる。

定義 4.2 (Jones 多項式)**.** Jones 多項式とは絡み目に対して定義されて t を変数とする多項式であって
$V(L)=\langle D\rangle(-A)^{-3\omega(D)}$ のことである。
ここで $t^{-1/4}=A$ である。

定理 4.2.1 (スケイン関係式)**.** Jones 多項式は以下の関係式を満たす

$$t^{-1}V\left(\quad\right)-tV\left(\quad\right)-\left(t^{1/2}-t^{-1/2}\right)V\left(\quad\right)=0$$

これはある交点の近傍のみが異なる 3 つの (互いに異なるかもしれない) 絡み目についての関係式である。

これは定義通り計算すると示される。

定義 4.3 (他の多項式不変量)**.** Jones 多項式とは異なる多項式不変量として以下の 2 つも知られている。
Alexander 多項式 Δ は t を変数として
$\Delta\left(\quad\right)-\Delta\left(\quad\right)-\left(t^{1/2}-t^{-1/2}\right)\Delta\left(\quad\right)=0$
を満たすもの。
HOMFLY 多項式 P は l,m の 2 変数多項式で
$lP\left(\quad\right)+l^{-1}P\left(\quad\right)-mP\left(\quad\right)=0$
を満たすもの。

注意. HOMFLY 多項式の l,m に適切な複素数または t の式を代入することで Jones 多項式と Alexander 多項式が得られる。

5　Jones 多項式と連結和

この章では Jones 多項式を使うことで結び目の連結和に関する性質について考察する。
前章で確認したように Jones 多項式は

$$t^{-1}V\left(\quad\right) - tV\left(\quad\right) - \left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right)V\left(\quad\right) = 0 \tag{1}$$

を満足する。以下、 を L_+, を L_-, を L_0 と表記する。

定理 5.0.1 (分離和に関する定理)**.** 2 つの絡み目 L_1, L_2 を横に並べてできた (L_1 と L_2 は絡まっていない) 新しい絡み目を $L_1 \cup L_2$ と表すことにする。このとき
$V\left(L_1 \cup L_2\right) = \left(-t^{1/2} - t^{-1/2}\right) V\left(L_1\right) V\left(L_2\right)$
が成り立つ。

証明のために補題をいくつか示しておく。

補題. 絡み目 L と自明な結び目 $\bigcirc$ を n 個並べた $L \cup \bigcirc^n$ との間に以下の式が成立する。
$V\left(L \cup \bigcirc^n\right) = \left(-t^{1/2} - t^{-1/2}\right)^n V\left(L\right)$
これは Jones 多項式の構成を見返すとただちに得られる。

$$\begin{aligned}
V\left(L \cup \bigcirc\right) &= \left\langle L \cup \bigcirc \right\rangle \left(-A^3\right)^{\omega\left(L \cup \bigcirc\right)} \\
&= \left(-t^{1/2} - t^{-1/2}\right) \left\langle L \right\rangle \left(-A^3\right)^{\omega(L)} \\
&= \left(-t^{1/2} - t^{-1/2}\right) V\left(L\right)
\end{aligned}$$

さらに $V\left(\bigcirc^n\right) = \left(-t^{1/2} - t^{-1/2}\right)^{n-1}$ である。

補題. 任意の絡み目 L はある t の多項式からなる係数 $\{f_n\}$ があって
$V\left(L\right) = \sum_k f_k V\left(\bigcirc^k\right)$ と表せる。

ある射影図 D が最小交点になるようにライデマイスター移動をしておく。D に交点がなければそれは自明な絡み目になっている。もしも交点があればその近傍を L_+ だと思い式 1 を適用すると L_0, L_- に分けられる。このときどちらの場合も交点数が必ず減る。(証明略)(図 1 と図 2 を見比べるとヒントになるかもしれない) なのでこの主張が得られる。

Proof. (定理 5.0.1) これら 2 つの補題を使えば定理の証明は単純になる。
L_1 と L_2 は横に並べただけで絡まっていないので別々に分解できることに注意すると

$$
\begin{aligned}
V\left(L_2\right) &= \sum_k f_k V\left(\bigcirc^k\right) \text{としておき、} \\
V\left(L_1 \cup L_2\right) &= \sum_k f_k V\left(L_1 \cup \bigcirc^k\right) \\
&= \left(-t^{1/2} - t^{-1/2}\right) \sum_k f_k \left(-t^{1/2} - t^{-1/2}\right)^{k-1} V\left(L_1\right) \\
&= \left(-t^{1/2} - t^{-1/2}\right) \sum_k f_k V\left(\bigcirc^k\right) V\left(L_1\right) \\
V\left(L_1 \cup L_2\right) &= \left(-t^{1/2} - t^{-1/2}\right) V\left(L_1\right) V\left(L_2\right)
\end{aligned}
$$

□

定理 5.0.2 (連結和に関する定理)**.** 任意の絡み目に対して
$V\left(L_1 \sharp L_2\right) = V\left(L_1\right) V\left(L_2\right)$
が成立する。

Proof. 下図 6 の上段右 2 つを L_+, L_- だとし下段を L_0 だとしてスケイン関係式を適用すると

$$
\begin{aligned}
t^{-1} V\left(L_1 \sharp L_2\right) - tV\left(L_1 \sharp L_2\right) &= \left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right) V\left(L_1 \cup L_2\right) \\
\left(t^{-1} - t\right) V\left(L_1 \sharp L_2\right) &= \left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right)\left(-t^{1/2} - t^{-1/2}\right) V\left(L_1\right) V\left(L_2\right) \\
V\left(L_1 \sharp L_2\right) &= V\left(L_1\right) V\left(L_2\right)
\end{aligned}
$$

□

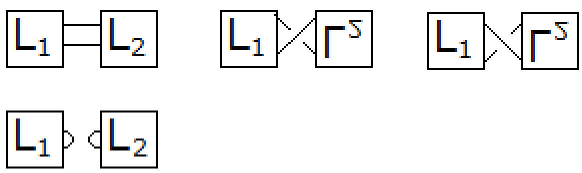


図 6: 上段は全て $L_1 \sharp L_2$ で下段は $L_1 \cup L_2$ になっている

この事実により結び目の連結和を整数の積と同じようにとらえることができる。(分解できる合成数のような結び目と分解できない素数のような結び目と *etc.*) またこれによって次の事実も確認できる。

定理 5.0.3. 結び目全体の集合は連結和に関して群をなさない

Proof. 逆元を持たない結び目の存在を確認する。連結和に関する単位元は自明な結び目であるから、もし結び目 K_2 が K_1 の逆元になっている場合 $V\left(K_1 \sharp K_2\right) = 1$ が成り立つ。従って連結和に関する定理から $V\left(K_1\right) V\left(K_2\right) = 1$ となる。ここで V はそれぞれ t の多項式である。
8 の字結び目の Jones 多項式は $V\left(8\text{ の字結び目}\right) = t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$ である。$V\left(8\text{ の字}\right) V\left(K\right) = 1$

が恒等的に成り立つ $V(K)$ が存在すると仮定されている。最大次数と最小次数を考慮することで、そのような多項式は存在しないと確かめられる。よって少なくとも 8 の字結び目は逆元をもたないため、結び目全体は連結和に関して群をなさない。 $\square$

参考文献

[1] Louis H. Kauffman. Knot diagrammatics, 2004.

[2] Louis H. Kauffman. State models and the jones polynomial. *Topology*, Vol. 26, No. 3, pp. 395 – 407, 1987.

[3] C.C.Adams. 結び目の数学. 培風館, 1998. 金信泰造 訳.