ELETTROTECNICA
PARTE V: TRASFORMATA DI LAPLACE

Michele Bonnin e Fernando Corinto
michele.bonnin@polito.it fernando.corinto@polito.it

Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Politecnico di Torino

A.A. 2016/2017

Indice

Indice

Concetto di Trasformata

- Una **trasformata** (o funzionale) è un operatore che trasforma una funzione in un'altra
- Esempio: l'operatore differenziale $D = d/dt$ trasforma una funzione differenziabile $f(t)$ nella sua derivata $f'(t)$

$$D : f \mapsto f'$$

  - f è l'insieme delle funzioni differenziabili (per semplicità $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$) mentre f' è l'insieme delle funzioni derivate (di nuovo $f' : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$)
- Esempio: la trasformata integrale definita come

$$T\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s,t)\; f(t)\; dt$$

  - associa ad ogni funzione $f(t)$ per la quale l'integrale esiste una funzione $F(s)$ che è la trasformata integrale di $f(t)$

Uso della trasformata integrale

L'idea di base è che l'analisi del problema sia più semplice nel "dominio trasformato" piuttosto che nel dominio originale

Si applica pertanto la seguente procedura

- trasformazione $f(t) \rightarrow F(s)$
- risoluzione del problema trasformato $F(s) \rightarrow G(s)$
- trasformazione inversa (o anti–trasformazione) $G(s) \rightarrow g(t)$

Trasformate di Laplace e di Fourier

- La funzione $K(s,t)$ è detta "kernel" (nucleo) della trasformazione
- Kernel diversi producono trasformate integrali diverse della stessa funzione di base $f(t)$. Ciascuna trasformata ha le sue proprietà caratteristiche ed è utile in determinate circostanze

$$K(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ e^{-s\,t} & \text{per } t \geq 0 \end{cases} \quad \textit{Trasformata di Laplace unilatera}$$

$$K(s,t) = e^{-j2\pi s\,t} \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad \textit{Trasformata di Fourier}^{1}$$

[1] Dove j è l'unità immaginaria: $j = \sqrt{-1}$

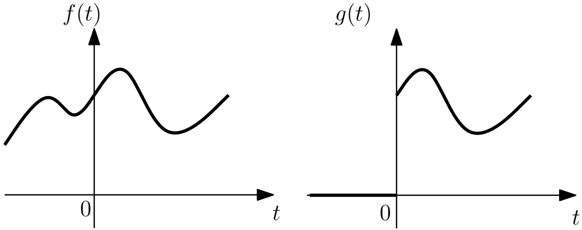
Indice

Trasformata di Laplace

Si definisce **trasformata di Laplace** della funzione $f(t)$ la seguente funzione complessa $F(s)$ di variabile complessa s

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-s\,t} dt \qquad s = \sigma + j\omega$$

- $[s] = \frac{1}{\mathrm{s}}$ frequenza complessa
- interessa solo $f(t)$ per $t > 0$



Calcolo della trasformata di Laplace

Esempio: gradino unitario

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-s\,t} u(t) dt = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T e^{-s\,t} dt = \lim_{T \to +\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-s\,t} \right) \Big|_0^T$$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{s} \left(1 - e^{-sT} \right) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{s} \left(1 - e^{-\sigma T} e^{-j\omega T} \right)$$

Ricordando la formula di Eulero $e^{-j\omega T} = \cos(-\omega T) + j \sin(-\omega T)$

- $\sigma < 0$ il limite (e quindi l'integrale improprio) diverge
- $\sigma = 0$ il limite non esiste
- $\sigma > 0$ allora $e^{-\sigma T}$ tende a zero per $T \to +\infty$ per cui

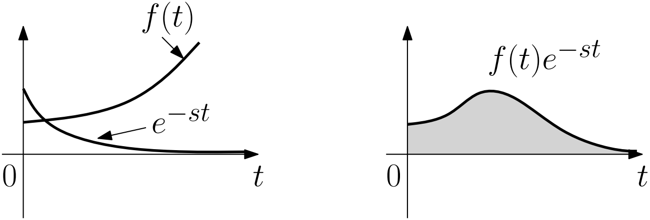
$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{s} \left(1 - e^{-\sigma T} e^{-j\omega T} \right) = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \qquad \forall \sigma = Re[s] > 0}$$

Calcolo della trasformata di Laplace

- La trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$ è definita se, per qualche valore di $\sigma \in \mathbb{R}$, esiste ed è finito il seguente limite

$$\lim_{T \to +\infty} \int_0^T f(t) e^{-s\,t} dt$$



$\sigma = Re[s] > \sigma_0$ *Regione di convergenza*

Calcolo della trasformata di Laplace

Esempio: funzione esponenziale $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{at} e^{-s\,t} dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{(a-s)t} dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right) \Big|_0^T = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{s-a} \left(1 - e^{(a-s)T} \right)$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{s-a} \left(1 - e^{Re[a-s]T} e^{j\,Im[s-a]T} \right)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}}$$

$$Re[a-s] = Re[a] - \sigma < 0 \Rightarrow Re[s] = \sigma > Re[a]$$

Trasformata di Laplace

Esiste una corrispondenza biunivoca tra le funzioni $f(t)$ trasformabili e le corrispondenti trasformate $F(s)$

$$f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

Se due funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ hanno la stessa trasformata, allora deve essere $f_1(t) = f_2(t)$ per ogni $t > 0$.

Tabella delle trasformate di Laplace e delle trasformate inverse

$f(t)$	Tipo	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	impulso unitario	1
$u(t)$	gradino unitario	$\frac{1}{s}$
t	rampa	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	esponenziale	$\frac{1}{s+a}$
$\operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi)$	sinusoide	$\frac{s \operatorname{sen}\phi + \omega_0 \cos\phi}{s^2 + {\omega_0}^2}$
$\cos(\omega_0 t + \phi)$	cosinusoide	$\frac{s \cos\phi - \omega_0 \operatorname{sen}\phi}{s^2 + {\omega_0}^2}$
$e^{-at} \operatorname{sen}\omega_0 t$	sinusoide smorzata	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + {\omega_0}^2}$
$e^{-at} \cos\omega_0 t$	cosinusoide smorzata	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + {\omega_0}^2}$

Indice

Proprietà della trasformata di Laplace

- Moltiplicazione per una costante

$$\mathcal{L}[\alpha f(t)] = \int_0^{+\infty} \alpha f(t) e^{-s\,t} dt = \alpha \int_0^{+\infty} f(t) e^{-s\,t} dt = \alpha F(s)$$

- Addizione (linearità)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] &= \int_0^{+\infty} \left[f_1(t) + f_2(t)\right] e^{-s\,t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f_1(t) e^{-s\,t} dt + \int_0^{+\infty} f_2(t) e^{-s\,t} dt = F_1(s) + F_2(s)\end{aligned}$$

Proprietà della trasformata di Laplace

Esempio: trasformata di $\cos(\omega t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(\omega t)] =& \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{j\omega t}] + \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]\right) \\
=& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

Proprietà della trasformata di Laplace

- Derivazione rispetto al tempo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-s\,t} dt \\
&= \lim_{T\to+\infty}\left[\left(f(t)e^{-s\,t}\right)\Big|_0^T - \int_0^T (-s) f(t) e^{-s\,t} dt\right] \\
&= \lim_{T\to+\infty}\left[f(T)e^{-s\,T} - f(0) + s\int_0^T f(t)e^{-s\,t} dt\right] \\
&= sF(s) - f(0)
\end{aligned}
$$

Proprietà della trasformata di Laplace

- Derivazione rispetto a s

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s\,t}dt = \int_0^{+\infty} f(t)(-t)e^{-s\,t}dt$$
$$= -\int_0^{+\infty} t\ f(t)e^{-s\,t}dt = -\mathcal{L}[t\ f(t)]$$

- Esempio: $\mathcal{L}[t]$

$$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}[t \times 1] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[1] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

Proprietà della trasformata di Laplace

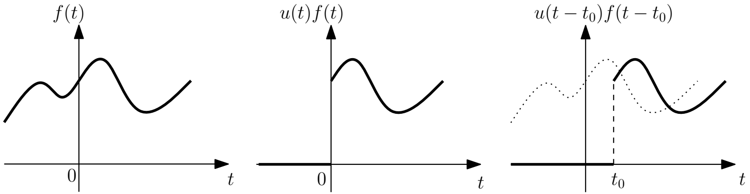
- Traslazione

$$\mathcal{L}[u(t-t_0)f(t-t_0)] = \int_0^{+\infty} u(t-t_0)\ f(t-t_0)e^{-s\,t}dt$$

$$= e^{-s\,t_0}\int_0^{+\infty} u(t-t_0)\ f(t-t_0)e^{-s(t-t_0)}dt$$

$$= e^{-s\,t_0}\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-s\,t_0}F(s)$$

(per $t < t_0$, $u(t-t_0) = 0$)



Esempi di calcolo di trasformate di Laplace

$$\mathcal{L}\left[e^{-t/2}\cosh t\right] = \frac{4s+2}{4s^2+4s-3}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\left(e^t+\sin t\right)^2\right] =&\mathcal{L}[e^{2t}] + \mathcal{L}[2e^t\sin t] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[1-\cos 2t] \\ =&\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s^2-2s+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[t\ \ \sin t] = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Esempio: impulso unitario

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} & per\ t \in [0, \Delta] \\ 0 & per\ t \notin [0, \Delta] \end{cases}$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} f(t)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Uso della trasformata di Laplace

Soluzione di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = \sin t \\ x(0) = 1 \\ \dfrac{dx(0)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace

$$s^2 X(s) - s\,x(0) - \frac{dx(0)}{dt} + 2\,[sX(s) - x(0)] + 5X(s) = \mathcal{L}[\sin t]$$

$$X(s)\left(s^2 + 2s + 5\right) - s - 2 = \frac{1}{s^2+1}$$

$$X(s) = \frac{s^3 + 2\,s^2 + s + 3}{(s^2 + 2\,s + 5)\,(s^2+1)}$$

Ma $x(t)$? $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$

Indice

Antitrasformata di Laplace

Si definisce **antitrasformata di Laplace** della funzione complessa $F(s)$ di variabile complessa s la funzione $f(t)$ tale che

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$f(t) \doteq \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

$f(t)$ è unica se si impone $f(t) = 0$ per ogni $t < 0$

Antitrasformata di Laplace

Linearità	$\mathcal{L}^{-1}\left[aX_1(s)+bX_2(s)\right](t)=ax_1(t)+bx_2(t)$
Riscalamento	$\mathcal{L}^{-1}\left[X(as)\right](t)=\frac{1}{a}x(t/a)$
Traslazione	$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}X(s)\right](t)=x(t-a)U(t-a)$
Modulazione	$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s-a)\right](t)=e^{at}x(t)$
Antitrasformata della derivata	$\mathcal{L}^{-1}\left[X'(s)\right](t)=-tx(t)$
Antitrasformata dell'integrale	$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^{\infty}X(S)\,dS\right](t)=\frac{x(t)}{t}$
Moltiplicazione per s	$\mathcal{L}^{-1}\left[sX(s)-x(0^+)\right](t)=x'(t)$
Divisione per s	$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{X(s)}{s}\right](t)=\int_0^t x(r)\,dr$

Antitrasformata di Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s-4}\right] = 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right] = 3\,e^{4t}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right] =&\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s+1)}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right]\\ =&\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} = \sinh t\end{aligned}$$

Antitrasformata di Laplace

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s-2}-\frac{3s}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+4}\right] &= \\
&= 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+16}\right]+5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] \\
&= 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4^2}\right]+5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2^2}\right] \\
&= 4e^{2t}-3\cos 4t+\frac{5}{2}\sin 2t
\end{aligned}
$$

Antitrasformata di Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{9s^2+16}\right]=\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\frac{16}{9}}\right]=\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}\right]=\frac{1}{9}\cos\left(\frac{4}{3}t\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi\, s/3}}{1+s^2}\right]=u\,(t-\pi/3)\sin(t-\pi/3)=\begin{cases}\sin(t-\pi/3) & se\ \ t\geq\pi/3\\ 0 & se\ \ t<\pi/3\end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-2s+5}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+4}\right]=\frac{1}{2}e^t\ \sin 2t$$

Antitrasformata di Laplace

Si vuole calcolare l'antitrasformata della funzione

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

Dato che

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t$$

e che

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}$$

si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right] = -t\sin t$$

Quindi per linearità

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{1}{2}\,t\sin t$$

Indice

Antitrasformazione di funzioni razionali proprie

Una funzione razionale è una funzione del tipo

$$F(s) = \frac{b_m\, s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

1. $F(s)$ è reale per s reale
2. $F(s^*) = [F(s)]^*$

- Gli **zeri** di $F(s)$ sono le radici $z_1, \ldots, z_m$ del numeratore
- I **poli** di $F(s)$ sono le radici $p_1, \ldots, p_n$ del denominatore

Se $n > m$ la funzione razionale $F(s)$ si dice propria, altrimenti è detta impropria

Antitrasformazione di funzioni razionali proprie

Occorre scomporre $F(s)$ nella somma di termini elementari $F_k(s)$

1. Tutti i poli di $F(s)$ sono semplici (molteplicità algebrica uno)

   - $F(s) = \dfrac{A_1}{s - p_1} + \dfrac{A_2}{s - p_2} + \ldots + \dfrac{A_n}{s - p_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{s - p_k}$

     $$A_k = (s - p_k)F(s)\Big|_{s=p_k} \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\boxed{f(t) = A_1 e^{p_1\, t} + A_2 e^{p_2\, t} + \ldots + A_n e^{p_n\, t} \qquad per \;\; t > 0}$$

Antitrasformazione di funzioni razionali proprie

Esempio: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3s+7}{s^2-2\,s-3}\right]$

$$\frac{3s+7}{s^2-2\,s-3}=\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}=\frac{A_1}{s-3}+\frac{A_2}{s+1}$$

$$A_1=(s-3)\left.\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}\right|_{s=3}=4$$

$$A_2=(s+1)\left.\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}\right|_{s=-1}=-1$$

Allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+7}{s^2-2\,s-3}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s-3}-\frac{1}{s+1}\right]=4e^{3t}-e^{-t}$$

Antitrasformazione di funzioni razionali proprie

2. Uno o più dei poli di $F(s)$ è multiplo
   - $\dfrac{A_{i1}}{s-p_i} + \dfrac{A_{i2}}{(s-p_i)^2} + \ldots + \dfrac{A_{ik}}{(s-p_i)^k}$

$$A_{ik} = (s-p_i)^k F(s)\Big|_{s=p_i}$$

$$A_{i(k-1)} = \frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^k F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{(k-j)!}\frac{d^{k-j}}{ds^{k-j}}\left[(s-p_i)^k F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$\boxed{\frac{A_{ij}}{(s-p_i)^j} \Leftrightarrow \frac{A_{ij}}{(j-1)!}\, t^{j-1}\, e^{p_i t}}$$

Antitrasformazione di funzioni razionali proprie

2.a Polo doppio $(k = 2)$

- $\dfrac{A_{i1}}{s - p_i} + \dfrac{A_{i2}}{(s - p_i)^2}$

$$A_{i2} = (s - p_i)^2 F(s)\Big|_{s=p_i}$$

$$A_{i1} = \frac{d}{ds}\left[(s - p_i)^2 F(s)\right]\Bigg|_{s=p_i}$$

$$\boxed{A_{i1}\ e^{p_i\,t} + A_{i2}\ t\ e^{p_i\,t} \qquad per\ \ t > 0}$$

Antitrasformazione di funzioni razionali proprie

Esempio: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s+3}{(s+1)^2}\right] \Rightarrow$ polo doppio in $s=-1$

$$A_2 = (s+1)^2 \frac{s+3}{(s+1)^2}\bigg|_{s=-1} = 2$$

$$A_1 = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 \frac{s+3}{(s+1)^2}\right]\bigg|_{s=-1} = 1$$

Allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}\right] = e^{-t} + 2t\, e^{-t} \qquad per\ t > 0$$

Antitrasformazione di funzioni razionali proprie

Esempio: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}\right] \Rightarrow$

$$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$

$$A = \frac{d}{ds}\frac{1}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=0} = -\frac{3}{4} \qquad B = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{1}{s^2(s+2)}\bigg|_{s=-1} = 1 \qquad D = \frac{1}{s^2(s+1)}\bigg|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{3}{4s} + \frac{1}{2\,s^2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4(s+2)}\right] \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\end{aligned}$$

Antitrasformazione di funzioni razionali proprie

2.b Poli complessi coniugati

- $p_k = \sigma_k + j\omega_k \qquad p_k^* = \sigma_k - j\omega_k$

$$A_{k1} = (s - p_k)F(s)\Big|_{s=p_k} \qquad\qquad A_{k2} = (s - p_k^*)F(s)\Big|_{s=p_k^*}$$

$$\frac{A_k}{s - \sigma_k - j\omega_k} + \frac{A_k^*}{s - \sigma_k + j\omega_k} = \frac{|A_k|e^{j\,\theta_k}}{s - \sigma_k - j\omega_k} + \frac{|A_k|e^{-j\,\theta_k}}{s - \sigma_k + j\omega_k}$$

$$\frac{|A_k|e^{j\,\theta_k}}{s - \sigma_k - j\omega_k} + \frac{|A_k|e^{-j\,\theta_k}}{s - \sigma_k + j\omega_k} \Leftrightarrow |A_k|e^{j\,\theta_k}e^{\sigma_k\,t}e^{j\,\omega_k\,t} + |A_k|e^{-j\,\theta_k}e^{\sigma_k\,t}e^{-j\,\omega_k\,t}$$

$$= |A_k|e^{\sigma_k\,t}\left(e^{j(\omega_k\,t+\theta_k)} + e^{-j(\omega_k\,t+\theta_k)}\right)$$

$$\frac{|A_k|e^{j\,\theta_k}}{s - \sigma_k - j\omega_k} + \frac{|A_k|e^{-j\,\theta_k}}{s - \sigma_k + j\omega_k} \Leftrightarrow 2|A_k|e^{\sigma_k\,t}\cos(\omega_k t + \theta_k)$$

Antitrasformazione di funzioni razionali proprie

Esempio: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s-1}{s^2+2s+2}\right] \Rightarrow$

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+2} = \frac{s-1}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

$$A_1 = (s+1-j)\frac{s-1}{(s+1-j)(s+1+j)}\bigg|_{s=-1+j} = \frac{1+j2}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{j63,4^\circ}$$

$$|A_1| = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \sigma_1 = -1 \qquad \omega_1 = 1 \qquad \theta_1 = 63,4^\circ$$

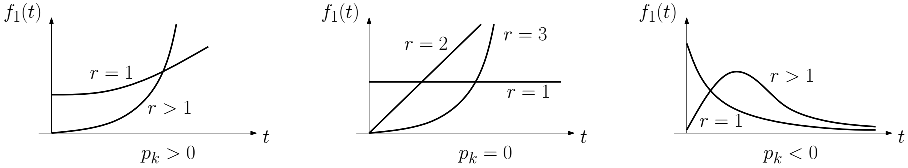
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2+2s+2}\right] = \sqrt{5}e^{-t}\cos\left(t+63,4^\circ\right)$$

Indice

Relazione tra posizione dei poli e funzione del tempo

1. p_k è un polo reale

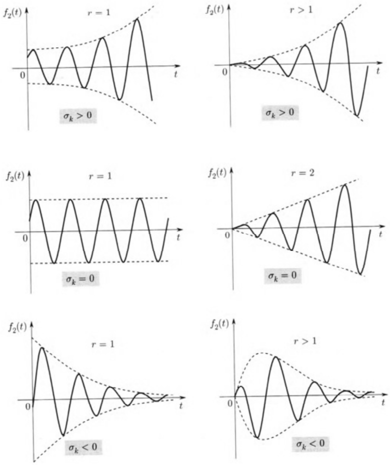
$$\frac{A}{(s-p_k)^r} \Rightarrow f_1(t) = \frac{A}{(r-1)!}\, t^{r-1}\, e^{p_k\, t} \qquad r = 1, \ldots, l$$



Relazione tra posizione dei poli e funzione del tempo

2. p_k e p_k^* coppia di poli complessi coniugati

$$\frac{A}{(s-p_k)^r} \Rightarrow f_2(t) = \frac{2|A|}{(r-1)!} t^{r-1} e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t + \theta_k) \qquad r = 1, \ldots, l$$



Relazione tra posizione dei poli e funzione del tempo

Esempio:

$$F(s) = \frac{2s-1}{s^2+4s+5} = \frac{2s-1}{(s+2-j)(s+2+j)}$$

$$A_1 = (s+2-j)\frac{2s-1}{(s+2-j)(s+2+j)}\bigg|_{s=-2+j} = 1 + j\frac{5}{2}$$

$$A_2 = (s-2+j)\frac{2s-1}{(s+2-j)(s+2+j)}\bigg|_{s=-2-j} = 1 - j\frac{5}{2}$$

$$F(s) = \frac{1+j\frac{5}{2}}{s+2-j} + \frac{1-j\frac{5}{2}}{s+2+j}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \left(1 + j\frac{5}{2}\right) e^{(-2+j)t} + \left(1 - j\frac{5}{2}\right) e^{(-2-j)t}$$

$$= 2e^{-2t}\left(\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\right) - 5e^{-2t}\left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right)$$

$$= e^{-2t}(2\cos t - 5\sin t) \qquad per\ \ t \geq 0$$

Indice

Leggi di Kirchhoff e Resistori

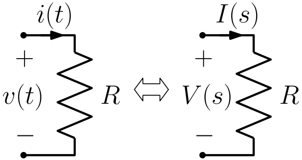
Leggi di Kirchhoff

$$\sum_k i_k(t) = 0 \Leftrightarrow \sum_k I_k(s) = 0$$

$$\sum_k v_k(t) = 0 \Leftrightarrow \sum_k V_k(s) = 0$$

Legge di Ohm

$$v(t) = R\, i(t) \Leftrightarrow V(s) = R\, I(s)$$

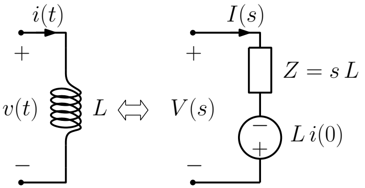


Induttore

$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow V(s) = s\,L\,I(s) - L\,i(0)$$

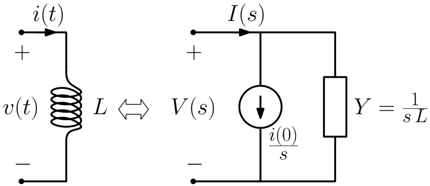
$$V(s) = \underbrace{s\,L}_{Z(s)}\,I(s) - L\,i(0)$$

$Z(s) = s\,L$ Impedenza



$$I(s) = \underbrace{\frac{1}{s\,L}}_{Y(s)}\,V(s) + \frac{i(0)}{s}$$

$Y(s) = \dfrac{1}{s\,L}$ Ammettenza

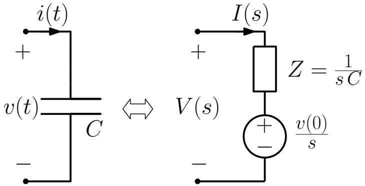


Condensatore

$$i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow I(s) = s\,C\,V(s) - C\,v(0)$$

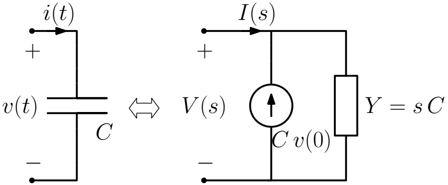
$$V(s) = \underbrace{\frac{1}{s\,C}}_{Z(s)}\,I(s) + \frac{v(0)}{s}$$

$$Z(s) = \frac{1}{s\,C}$$ Impedenza



$$I(s) = \underbrace{s\,C}_{Y(s)}\,V(s) - C\,v(0)$$

$$Y(s) = s\,C$$ Ammettenza



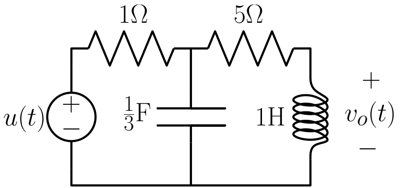
Metodo della trasformata di Laplace

1. Sostituire i generatori indipendenti con generatori indipendenti le cui grandezze sono le trasformate di Laplace delle corrispodenti tensioni e correnti
2. Sostituire ogni variabile (tensione o corrente) con la propria trasformata di Laplace
3. Sostituire gli elementi dinamici con i corrispodenti modelli circuitali
4. Analizzare il circuito così ottenuto alla stregua di un circuito resistivo, ricavando le trasformate delle grandezze desiderate
5. Ricavare le grandezze di interesse nel dominio del tempo mediante antitrasformazione

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

Metodo della trasformata di Laplace

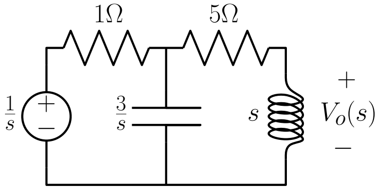
Esempio: determinare $v_o(t)$ (condizioni iniziali nulle)



$$u(t) \Rightarrow \frac{1}{s}$$

$$1\text{H} \Rightarrow Z_L = s\,L = s$$

$$\frac{1}{3}\text{F} \Rightarrow Z_C = \frac{1}{sC} = \frac{3}{s}$$



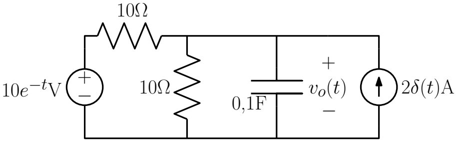
$$V_o(s) = \frac{3}{s^2 + 8s + 18} = \frac{3}{(s+4)^2 + 2}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s+4)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

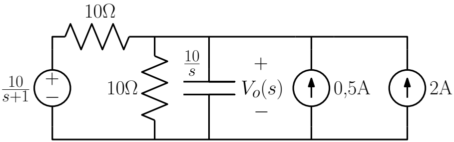
$$v_o(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-4t} \sin \sqrt{2} t \ \mathrm{V} \qquad t \geq 0$$

Metodo della trasformata di Laplace

Esempio: determinare $v_o(t)$ (condizioni iniziali $v_o(0) = 5\text{V}$)



$$\frac{V_o - 10/(s+1)}{10} + \frac{V_o}{10} + \frac{V_o}{10/s} = 2 + 0,5$$



$$V_o = \frac{25s + 35}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

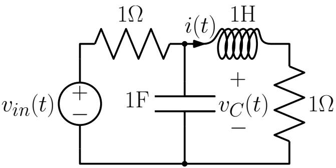
$$A = \frac{25s+35}{s+2}\Big|_{s=-1} = 10$$

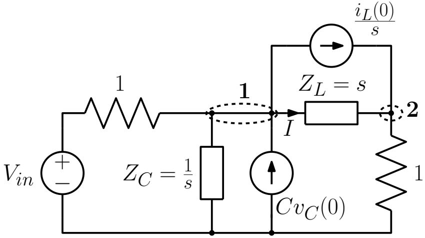
$$B = \frac{25s+35}{s+1}\Big|_{s=-2} = 15$$

$$v_o(t) = \left(10e^{-t} + 15e^{-2t}\right)\text{V} \qquad t \geq 0$$

Indice

Somma degli effetti: condizione iniziali + ingressi





$$\frac{V_1 - V_{in}}{1} + s\, V_1 - v_C(0) + \frac{V_1 - V_2}{s} + \frac{i_L(0)}{s} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{s} - \frac{i_L(0)}{s} + \frac{V_2}{1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 + s + \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & 1 + \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} + v_C(0) - \frac{i_L(0)}{s} \\ \frac{i_L(0)}{s} \end{bmatrix}$$

Somma degli effetti: condizione iniziali + ingressi

$$\begin{bmatrix} 1+s+\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & 1+\frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} + v_C(0) - \frac{i_L(0)}{s} \\ \frac{i_L(0)}{s} \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_{in} + v_C(0) - \frac{i_L(0)}{s} & -\frac{1}{s} \\ \frac{i_L(0)}{s} & 1+\frac{1}{s} \end{vmatrix}}{\left(1+s+\frac{1}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{s^2}}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+s+\frac{1}{s} & V_{in} + v_C(0) - \frac{i_L(0)}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{i_L(0)}{s} \end{vmatrix}}{\left(1+s+\frac{1}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{s^2}}$$

$$V_1(s) = \frac{v_C(0)(s+1) - i_L(0)}{s^2+2s+2} + V_{in}(s)\frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

$$V_2(s) = \frac{i_L(0)(s+1) + v_C(0)}{s^2+2s+2} + V_{in}(s)\frac{1}{s^2+2s+2}$$

Somma degli effetti: condizione iniziali + ingressi

$$v_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{v_C(0)(s+1) - i_L(0)}{s^2+2s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[V_{in}(s)\frac{s+1}{s^2+2s+2}\right]$$

$$v_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{i_L(0)(s+1) + v_C(0)}{s^2+2s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[V_{in}(s)\frac{1}{s^2+2s+2}\right]$$

risposta completa = risposta libera + risposta forzata

- La risposta in un circuito dinamico lineare è la somma degli effetti delle singole condizioni iniziali e dei singoli ingressi

Indice

Frequenze naturali e modi naturali

La trasformata della risposta libera (tensione o corrente) è una funzione razionale reale. I poli non dipendono dalle condizioni iniziali; essi prendono il nome di **frequenze naturali**

$$X(s) = \sum_k \frac{A_k}{s - s_k} \Rightarrow \underbrace{A_k e^{s_k t},\ A_k e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t + \theta_k)}_{\textbf{modi naturali}}$$

- È possibile scegliere le condizioni iniziali in modo che la risposta libera contenga un solo modo naturale.
- Esempio

$$V_1(s) = \frac{v_{C_1}(0)(s+2) + v_{C_2}(0)}{s^2 + 4s + 3} \Rightarrow (s+2)v_{C_1}(0) + v_{C_2}(0) = K(s+3)$$

Frequenze naturali e modi naturali

- Le **frequenze naturali** di un circuito coincidono con gli zeri del determinante del sistema di equazioni ottenuto con l'analisi nodale

$$\begin{bmatrix} 1+s+\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & 1+\frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} + v_C(0) - \frac{i_L(0)}{s} \\ \frac{i_L(0)}{s} \end{bmatrix}$$

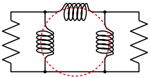
$$\begin{vmatrix} 1+s+\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & 1+\frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{s^2+2s+2}{s}$$

Calcolo delle frequenze naturali

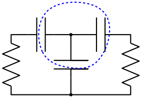
1. Spegnere i generatori indipendenti
2. Trasformare il circuito nel dominio della frequenza complessa s, assumendo condizioni iniziali nulle
3. Applicare l'analisi nodale scrivendo un sistema di equazioni avente come incognite le tensioni di nodo
4. Ricavare gli zeri del determinante della matrice dei coefficienti ottenuta al punto precedente

Frequenze naturali

- La posizione e il tipo dei generatori indipendenti possono influire sui valori delle frequenze naturali
- In presenza di un anello di induttori o di un taglio di condensatori esiste una frequenza naturale nulla ($s = 0$)



Anello di induttori



Taglio di condensatori

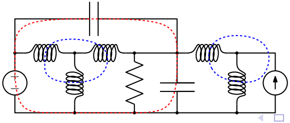
- il numero di frequenze naturali di un circuito dinamico passivo è:

$$n = n_D - n_C - n_L$$

n_D numero di elementi dinamici

n_C numero di percorsi chiusi che attraversano solo condensatori e, eventualemente, generatori indipendenti di tensione

n_L numero di linee chiuse che tagliano solo induttori e, eventualmente, generatori indipendenti di corrente

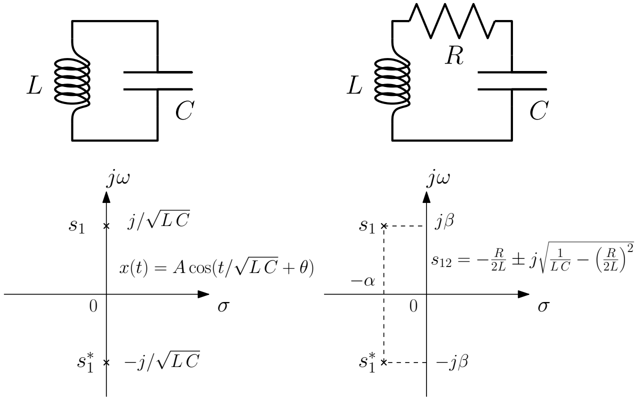


Indice

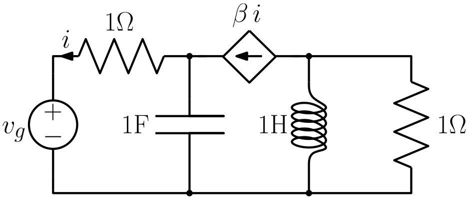
Condizioni di stabilità

Un circuito si dice stabile se tutte le sue frequenze naturali hanno parte reale negativa

Di conseguenza, in un circuito stabile qualunque risposta libera tende a zero per $t \to +\infty$, per qualunque insieme di condizioni iniziali



Analisi della stabilità



$$\begin{bmatrix} 1-\beta+s & 0 \\ \beta & 1+\dfrac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\beta+s & 0 \\ \beta & 1+\dfrac{1}{s} \end{vmatrix} = (1-\beta+s)\left(\frac{s+1}{s}\right)$$

- Zeri del determinante $s=-1$ e $s=\beta-1$
- Il circuito è stabile se $\beta-1<0 \Rightarrow \beta<1$

Indice

Esistenza del regime sinusoidale

- In un circuito lineare stabile, con un ingresso sinusoidale di pulsazione ω, qualunque grandezza (tensione o corrente) diventa sinusoidale con pulsazione ω per $t \to +\infty$
- In un circuito lineare stabile, qualunque risposta libera tende a zero per $t \to +\infty$, per qualunque insieme di condizioni iniziali. Quindi è sufficiente considerare unicamente la **risposta forzata**.

$$X(s) = F(s)\, V_{in}(s) = F(s)\frac{1}{2}V\left(\frac{e^{j\theta}}{s-j\omega} + \frac{e^{-j\theta}}{s+j\omega}\right) = \sum_k \frac{A_k}{s-p_k} + \frac{B}{s-j\omega} + \frac{B^*}{s+j\omega}$$

$$x(t) = \sum_k A_k e^{p_k\, t} + \underbrace{2|B|\cos\left(\omega\, t + \arg B\right)}_{x_p(t)}$$

Esistenza del regime sinusoidale

$$x_p(t) = 2|B|\cos(\omega\, t + \arg B)$$

- B è il residuo nel polo $s = j\omega$

$$B = (s - j\omega)X(s)\big|_{s=j\omega} = (s - j\omega)F(s)\frac{1}{2}V\left(\frac{e^{j\theta}}{s - j\omega} + \frac{e^{-j\theta}}{s + j\omega}\right)\Bigg|_{s=j\omega}$$

$$= \cancel{(s - j\omega)}F(s)\frac{1}{2}V\frac{e^{j\theta}}{\cancel{s - j\omega}}\Bigg|_{s=j\omega} + \cancel{(s - j\omega)F(s)\frac{1}{2}V\frac{e^{-j\theta}}{s + j\omega}}\Bigg|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{1}{2}F(j\omega)\,V\,e^{j\theta}$$

$$|B| = \frac{1}{2}V\,|F(j\omega)| \qquad \arg B = \arg F(j\omega) + \theta$$

$$x_p(t) = |F(j\omega)|\,V\,\cos(\omega\, t + \arg F(j\omega) + \theta)$$

- La risposta in frequenza è significativa solo per i circuiti stabili