ELETTROTECNICA
PARTE IV: CIRCUITI DINAMICI

Michele Bonnin e Fernando Corinto
michele.bonnin@polito.it fernando.corinto@polito.it

Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Politecnico di Torino

A.A. 2016/2017

Indice

Indice

Circuiti dinamici

Definizione

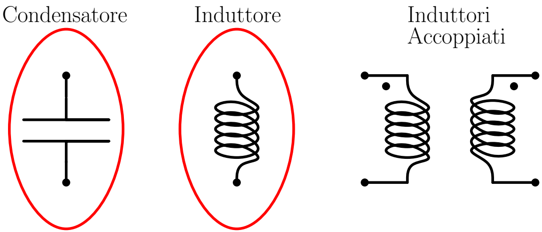
Circuiti contenenti elementi nelle cui equazioni costitutive intervengono **tensioni, correnti e le loro derivate, (rispetto al tempo)**, eventualemente di ordine anche superiore al primo.

Conseguenza

Il funzionamento del circuito è descritto da un **sistema di equazioni differenziali**, anziché da un sistema di equazioni algebriche come avviene per i circuiti resistivi

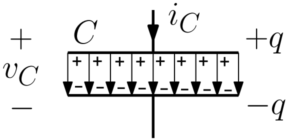
Elementi dinamici

Nuovi elementi circuitali



Indice

Condensatore lineare



$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\ ds = q \qquad \text{legge di Gauss}$$

$$|\mathbf{D}|\ A = q$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

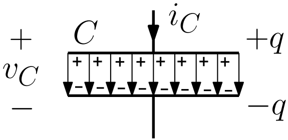
$$\varepsilon\ |\mathbf{E}|\ A = q \Rightarrow |\mathbf{E}| = \frac{q}{\varepsilon\ A}$$

- Due facce piane parallele, di area A, poste a distanza d
- Data la geometria della struttura, le linee di campo sono rette perpendicolari alle armature

$$v = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{\varepsilon\ A}\ q \Rightarrow q = \frac{\varepsilon\ A}{d}\ v = C\ v$$

Capacità: $C = \dfrac{\varepsilon\ A}{d}$ [F] (Farad)

Proprietà del condensatore lineare



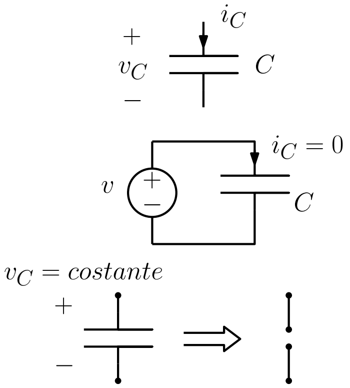
- $q(t) = C\, v_C(t)$
- $i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\,\frac{dv_C(t)}{dt}$
- $q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(s)\; ds$
- $$\begin{aligned} v_C(t) &= \frac{1}{C} q(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(s)\; ds \\ &= v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(s)\; ds \end{aligned}$$

  $v_C(t_0)$ condizione iniziale
  $v_C(t)$ dipende dalla "storia passata"

Proprietà del condensatore lineare

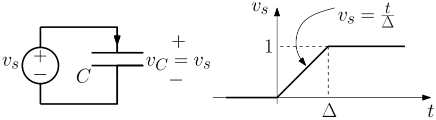
1. Se la tensione è costante, il condensatore si comporta come un circuito aperto

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

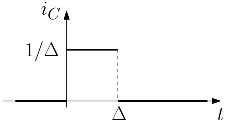


Proprietà del condensatore lineare

2. La tensione tra i morsetti di un condensatore è una funzione continua



$i_C(t) = C\,\frac{dv_C}{dt}$

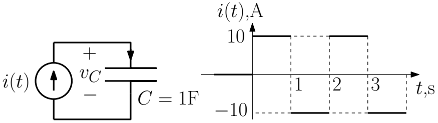


- Nel limite $\Delta \to 0$ si ha una discontinuità nella tensione v_C. La derivata (generalizzata) i_c tende all'impulso unitario $\delta(t)$ (delta di Dirac) e quindi in $t = 0$ è illimitata

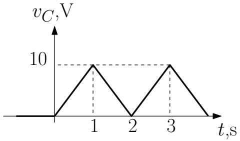
$$v_C(t_0^-) \neq v_C(t_0^+) \Rightarrow i(t_0) \to +\infty \Rightarrow p(t_0) \to +\infty$$

Proprietà del condensatore lineare

2. La tensione tra i morsetti di un condensatore è una funzione continua



$$v_C(t) = v_0 + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$



- Per ogni t_0 la tensione sul condensatore è continua, anche se la corrente non lo è: $v_C(t_0^-) = v_c(t_0^+) = v_C(t_0)$

Proprietà del condensatore lineare

3. Il condensatore non dissipa energia, ma può immagazzinarla

- L'energia assorbita in un generico intervallo di tempo (t_0, t_1) vale

$$w(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p(t)\, dt = C \int_{t_0}^{t_1} v_C(t)\, \frac{dv_C(t)}{dt}\, dt = C \int_{t_0}^{t_1} v_C(t)\, dv_C$$

$$w(t_0, t_1) = \frac{1}{2} C \left[v_C^2(t_1) - v_C^2(t_0) \right] = \frac{1}{2C} \left[q^2(t_1) - q^2(t_0) \right]$$

- Energia istantanea

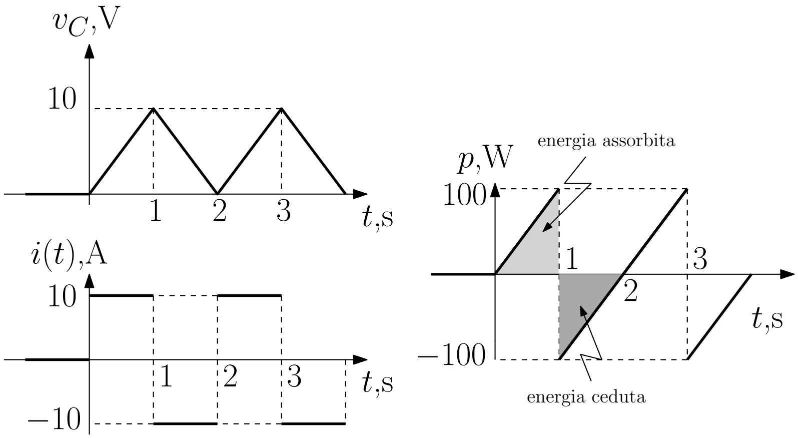
$$w(t) = \frac{1}{2} C\; v_C^2(t) = \frac{1}{2C} q^2(t)$$

Proprietà del condensatore lineare

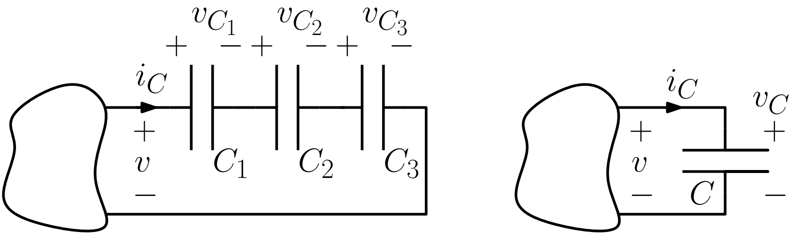
3. Il condensatore non dissipa energia, ma può immagazzinarla

- L'energia assorbita in un generico intervallo di tempo (t_0, t_1) vale

$$w(t_0, t_1) = \frac{1}{2} C \left[v_C^2(t_1) - v_C^2(t_0) \right] = \frac{1}{2C} \left[q^2(t_1) - q^2(t_0) \right]$$



Condensatori in serie

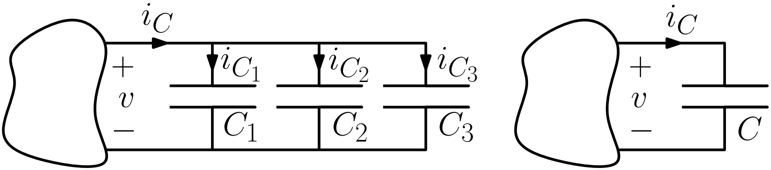


- $v = v_{C_1} + v_{C_2} + v_{C_3} = \frac{1}{C_1}\int i_C(t)dt + \frac{1}{C_2}\int i_C(t)dt + \frac{1}{C_3}\int i_C(t)dt = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\int i_C(t)dt$
- $v = v_c = \frac{1}{C}\int i_C(t)dt$

Condensatore equivalente ad *n* condensatori in serie

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$

Condensatori in parallelo



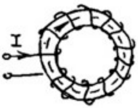
- $i_C = i_{C_1} + i_{C_2} + i_{C_3} = C_1 \frac{dv_C}{dt} + C_2 \frac{dv_C}{dt} + C_3 \frac{dv_C}{dt} = (C_1 + C_2 + C_3) \frac{dv_C}{dt}$
- $i_c = C \frac{dv_C}{dt}$

Condensatore equivalente ad *n* condensatori in parallelo

$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$

Indice

Induttore lineare



$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = N\ I \qquad \text{legge di Ampere}$$

$$|\mathbf{H}| 2\pi\ r = N\ I \Rightarrow |\mathbf{H}| = \frac{N\ I}{2\pi\ r}$$

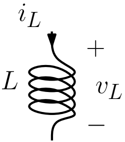
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \Rightarrow |\mathbf{B}| = \mu\ \frac{N\ I}{2\pi\ r} \Rightarrow \Phi_1 = \frac{\mu\ S}{2\pi\ r}\ N\ I$$

Il flusso totale concatenato con le N spire è

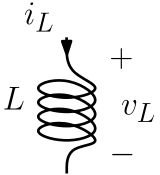
$$\Phi = N\ \Phi_1 = \frac{\mu\ S}{2\pi\ r}\ N^2\ I = L\ I \qquad [\mathrm{Wb}]$$

Induttanza: $L = \dfrac{\mu\ S}{2\pi\ r}\ N^2$ [H] (Henry)

L'induttanza è proporzionale al quadrato del numero di spire



Proprietà dell'induttore lineare



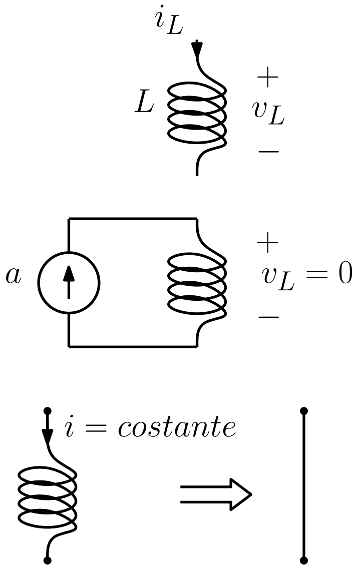
- $\phi(t) = L\, i_L(t)$
- $v_L(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L\,\frac{di_L(t)}{dt}$
- $\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} v(s)\, ds$
-
$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L}\phi(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(s)\, ds \\ &= i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds \end{aligned}$$

$i_L(t_0)$ condizione iniziale
$i_L(t)$ dipende dalla "storia passata"

Proprietà dell'induttore lineare

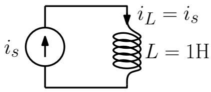
1. Se la corrente è costante, l'induttore si comporta come un corto circuito

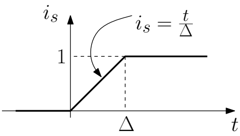
$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$



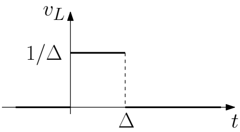
Proprietà dell'induttore lineare

2. La corrente attraverso un induttore è una funzione continua





$$v_L(t) = L\,\frac{di_L}{dt}$$



- Nel limite $\Delta \to 0$ si ha una discontinuità nella corrente i_L. La derivata (generalizzata) v_L tende all'impulso unitario $\delta(t)$ (delta di Dirac) e quindi in $t = 0$ è illimitata

$$i_L(t_0^-) \neq i_L(t_0^+) \Rightarrow v(t_0) \to +\infty \Rightarrow p(t_0) \to +\infty$$

Proprietà dell'induttore lineare

3. L'induttore non dissipa energia, ma può immagazzinarla

- L'energia assorbita in un generico intervallo di tempo (t_0, t_1) vale

$$w(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p(t)\ dt = L \int_{t_0}^{t_1} i_L(t)\ \frac{di_L(t)}{dt}\ dt = L \int_{t_0}^{t_1} i_L(t)\ di_L$$

$$w(t_0, t_1) = \frac{1}{2} L \left[i_L^2(t_1) - i_L^2(t_0) \right] = \frac{1}{2L} \left[\phi^2(t_1) - \phi^2(t_0) \right]$$

- Energia istantanea

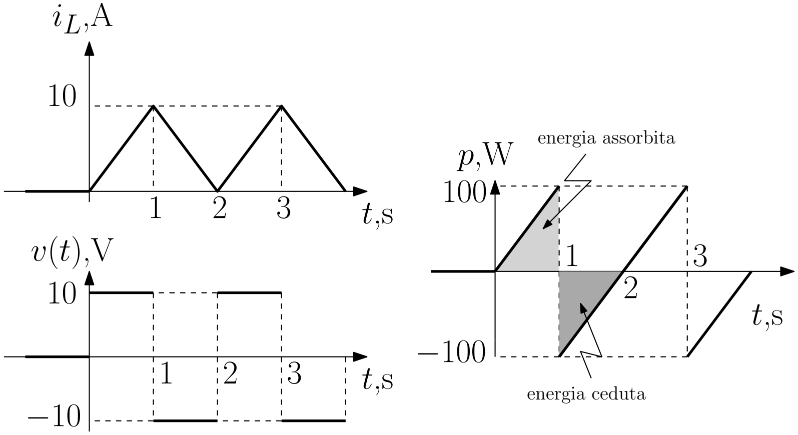
$$w(t) = \frac{1}{2} L\ i_L^2(t) = \frac{1}{2L} \phi^2(t)$$

Proprietà dell'induttore lineare

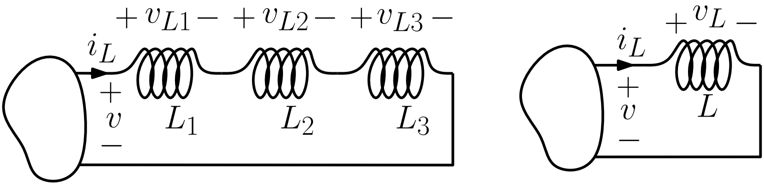
3. L'induttore non dissipa energia, ma può immagazzinarla

- L'energia assorbita in un generico intervallo di tempo (t_0, t_1) vale

$$w(t_0, t_1) = \frac{1}{2} L \left[i_L^2(t_1) - i_L^2(t_0) \right] = \frac{1}{2L} \left[\phi^2(t_1) - \phi^2(t_0) \right]$$



Induttori in serie

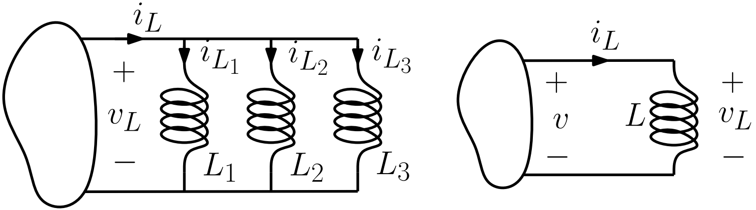


- $v = v_{L_1} + v_{L_2} + v_{L_3} = L_1 \frac{di_L}{dt} + L_2 \frac{di_L}{dt} + L_3 \frac{di_L}{dt} = (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di_L}{dt}$
- $v = v_L = L \frac{di_L}{dt}$

Induttanza equivalente ad n induttanze in serie

$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$

Induttori in parallelo



- $i_L = i_{L_1} + i_{L_2} + i_{L_3} = \frac{1}{L_1} \int v_L dt + \frac{1}{L_2} \int v_L dt + \frac{1}{L_3} \int v_L dt = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right) \int v_L dt$
- $i_L = \frac{1}{L} \int v_L dt$

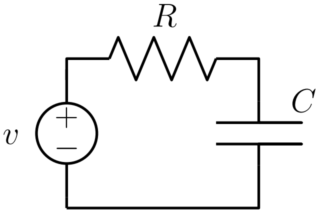
Induttanza equivalente ad n induttanze in parallelo

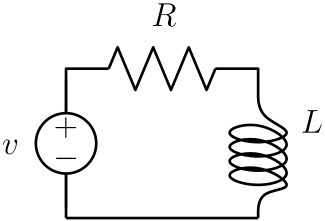
$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}$

Indice

Circuiti dinamici del primo ordine

Si definisce circuito del primo ordine un circuito in cui è presente <u>un solo elemento dinamico</u> (un condensatore o un induttore)

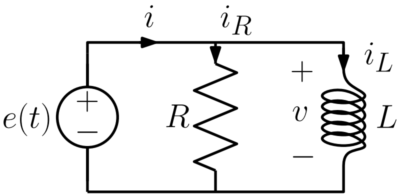


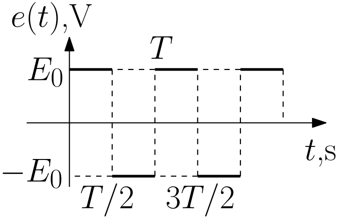


Il funzionamento del circuito è descritto da una <u>equazione differenziale del primo ordine</u>

Circuiti dinamici del primo ordine

Esempio:

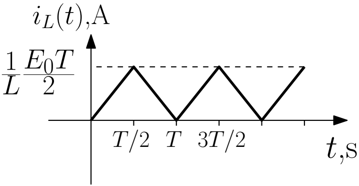




$E_0 = 1\text{V},\ T = 1\text{s},\ R = 1\Omega,\ L = 1\text{H}$

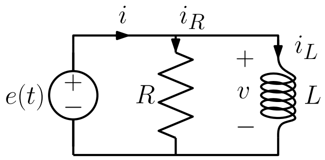
$$i_R(t) = \frac{e(t)}{R}$$

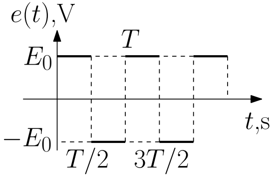
$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t e(s)\ ds$$



Circuiti dinamici del primo ordine

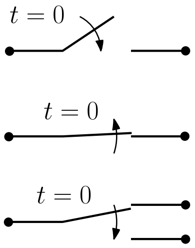
Esempio:

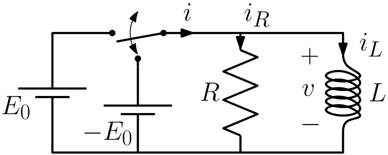




$E_0 = 1\text{V},\ T = 1\text{s},\ R = 1\Omega,\ L = 1\text{H}$

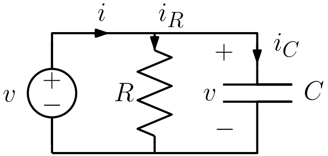
- Interrutori





Circuiti dinamici del primo ordine

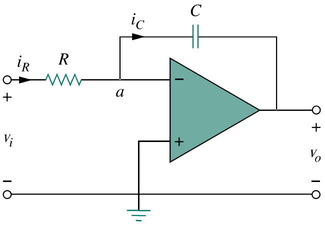
Esempio

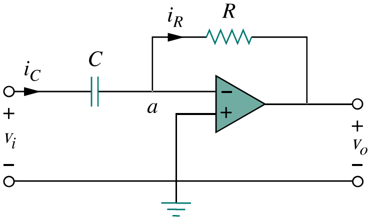


- $v(t) = \cos(10t)\text{V}; \quad R = 2\text{k}\Omega; \quad C = 0,1\text{mF}$
- $i_R(t) = \dfrac{v(t)}{R} = 0,5\cos(10t)\text{mA}$
- $i_C(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt} = 10^{-4}(-10)\sin(10t) = -\sin(10t)\text{mA}$

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) = [0,5\cos(10t) - \sin(10t)]\mathrm{mA}$$

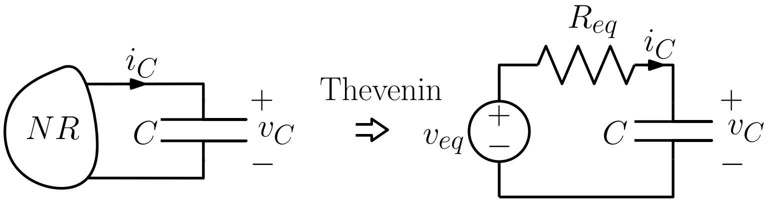
Circuiti dinamici del primo ordine





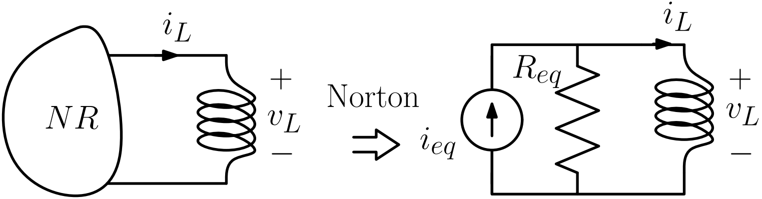
Indice

Circuiti RC del 1° ordine



- $v_{eq} - R_{eq}\, i_C - v_C = 0$
- $v_{eq} - R_{eq}\, C\, \dfrac{dv_C}{dt} - v_C = 0$
- $\dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{1}{R_{eq}\, C} \left(-v_C + v_{eq}\right)$

Circuiti RL del 1° ordine



- $i_{eq} - i_L - \dfrac{v_L}{R_{eq}} = 0$
- $i_{eq} - i_L - \dfrac{L}{R_{eq}} \dfrac{di_L}{dt} = 0$
- $\dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{R_{eq}}{L} \left(-i_L + i_{eq}\right)$

Circuiti RC e RL

- L'equazione differenziale per i circuiti RL e RC ha una forma definita

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau}x + \frac{1}{\tau}x_{eq}$$

		RC	RL
Variabile di stato	$\mathbf{x}$	v_C	i_L
Costante di tempo	$\boldsymbol{\tau}$	$R_{eq}\,C$	$\frac{L}{R_{eq}}$
Sorgente (forzante)	$\mathbf{x_{eq}}$	v_{eq}	i_{eq}

- Caso particolare: sorgenti costanti $v_{eq} = V_{eq}$, $i_{eq} = I_{eq}$
- $x_{eq} = x_\infty$
- $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau}x + \frac{1}{\tau}x_\infty$

Circuiti RC e RL con generatori costanti

l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau}x + \frac{1}{\tau}x_\infty$$

è un'equazione del primo ordine, lineare, non omogenea

- integrale dell'equazione omogenea associata: $x(t) = Ke^{-t/\tau}$
- integrale particolare: $x(t) = x_\infty$
- integrale generale: $x(t) = Ke^{-t/\tau} + x_\infty$
- condizione iniziale: $x(t_0) = Ke^{-t_0/\tau} + x_\infty \Rightarrow K = [x(t_0) - x_\infty]e^{t_0/\tau}$

Circuiti RC e RL

- L'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau}x + \frac{1}{\tau}x_\infty$$

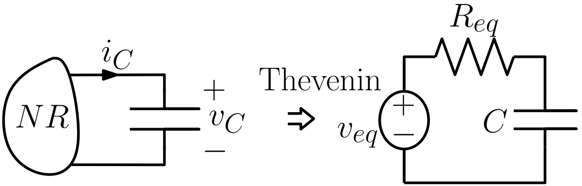
- ha soluzione

$$x(t) = [x(t_0) - x_\infty]\, e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + x_\infty$$

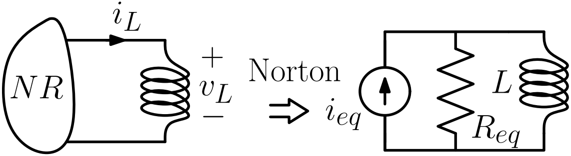
  - $x(t_0)$: valore iniziale
  - x_∞: valore finale
  - τ: costante di tempo

Circuiti RC e RL

Calcolo della costante di tempo τ



$$\tau = R_{eq}C$$



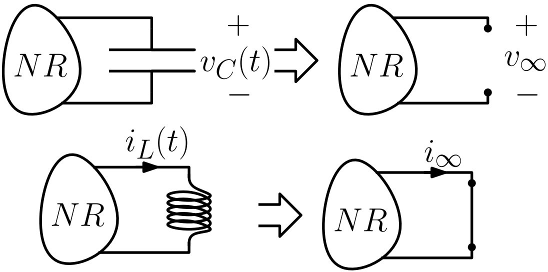
$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

R_{eq} è la resistenza del bipolo *NR* “vista” dall’elemento dinamico (condensatore o induttore)

Circuiti RC e RL

Calcolo del valore finale x_∞

- la tensione $v_C(t)$ ai capi del condensatore tende ad un valore costante, dunque **il condensatore si comporta come un circuito aperto**
- la corrente $i_L(t)$ attraverso l'induttore tende ad un valore costante, dunque **l'induttore si comporta come un corto circuito**



Circuiti RC e RL

Calcolo del valore iniziale

- Spesso questo è un dato noto. Una situazione molto frequente è quella per cui in un circuito avviene una certa variazione a $t = 0$, per esempio si apre o si chiude un interruttore. Indicando con 0^- l'istante immediatamente precedente la variazione e con 0^+ quello immeditamente successivo si ha

$$x(0^-) = x(0^+) = x(0) \Rightarrow \begin{array}{lll} v_C(0^-) & = v_C(0^+) & = v_C(0) \\ i_L(0^-) & = i_L(0^+) & = i_L(0) \end{array}$$

Dove non sia diversamente specificato, per la determinazione delle condizioni iniziali si assume che il circuito sia in uno stato stazionario (condensatore$\rightarrow$circuito aperto, induttore$\rightarrow$corto circuito).

Circuiti RC e RL con generatori costanti

RC

1. Variabile di stato: $v_C(t)$
2. Valore iniziale: $v_C(0^-) = v_C(0^+)$. Si ottiene sostituendo il condensatore con un circuito aperto*.
3. Valore finale: $v_C(+\infty)$. Si ottiene sostituendo il condensatore con un circuito aperto.
4. Costante di tempo τ. $\tau = RC$ dove R è la resistenza "vista" dal condensatore per $t > 0$.
5. Soluzione $v_C(t) = [v_C(0) - v_C(+\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}} + v_C(+\infty)$

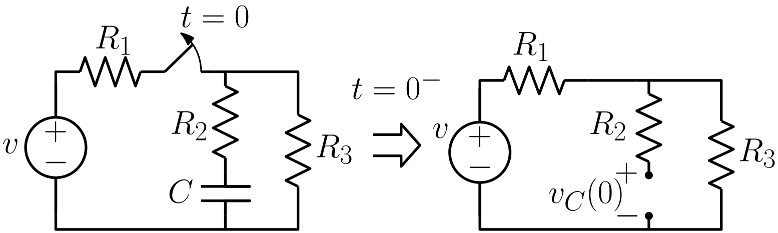
RL

1. Variabile di stato: $i_L(t)$
2. Valore iniziale: $i_L(0^-) = i_L(0^+)$. Si ottiene sostituendo l'induttore con un corto circuito*.
3. Valore finale: $i_L(+\infty)$. Si ottiene sostituendo l'induttore con un corto circuito.
4. Costante di tempo τ. $\tau = \frac{L}{R}$ dove R è la resistenza "vista" dall'induttore per $t > 0$.
5. Soluzione $i_L(t) = [i_L(0) - i_L(+\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(+\infty)$

* A meno che non sia specificato diversamente

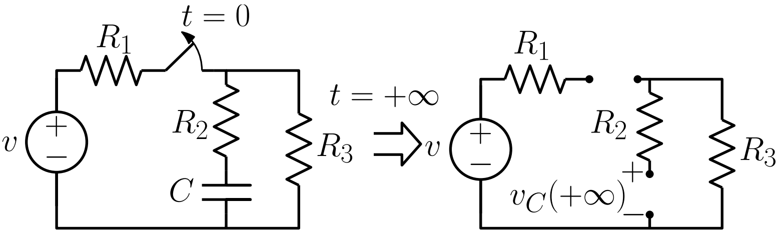
Esempio: Calcolo del valore iniziale

- A $t = 0$ l'interrutore si apre dopo essere rimasto chiuso per "lungo tempo"



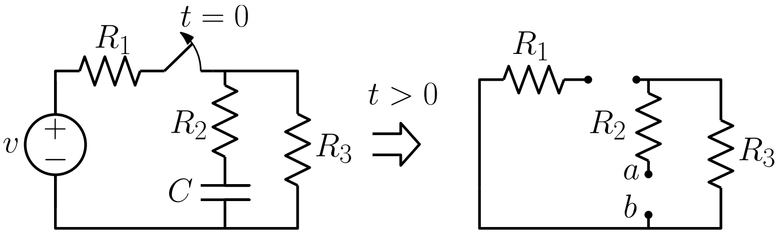
$$v_C(0) = v_C(0^-) = v\,\frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

Esempio: Calcolo del valore finale



$$v_C(+\infty) = 0$$

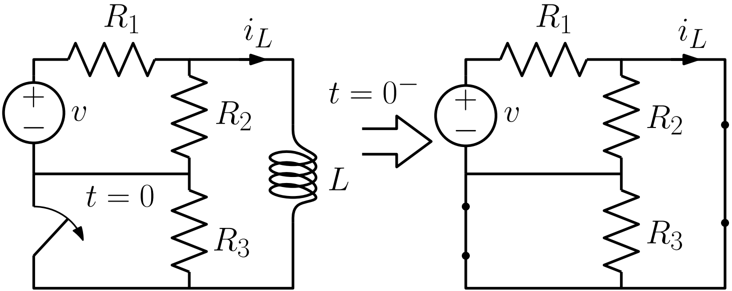
Esempio: Calcolo della costante di tempo



$$R_{ab} = R_2 + R_3$$

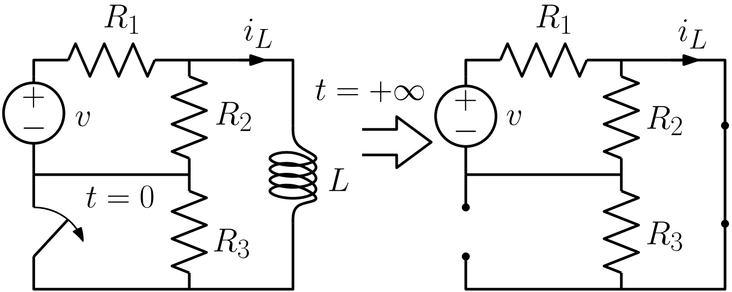
$$\tau = R\,C = (R_2 + R_3)\,C$$

Esempio: Calcolo del valore iniziale



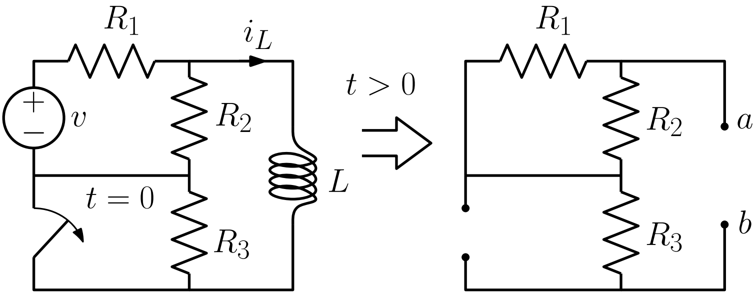
$$i_L(0) = i_L(0^-) = \frac{v}{R_1}$$

Esempio: Calcolo del valore finale



$$i_L(+\infty) = v \, \frac{R_2||R_3}{R_1 + R_2||R_3} \, \frac{1}{R_3}$$

Esempio: Calcolo della costante di tempo



$$R = R_1 || R_2 + R_3$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{L}{R_1 || R_2 + R_3}$$

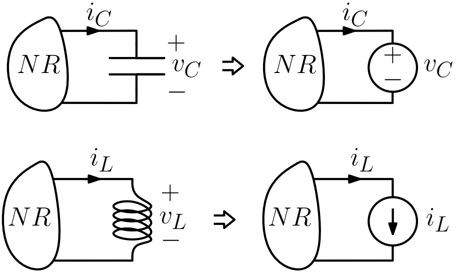
Indice

Metodo sistematico

In un circuito autonomo del primo ordine autonomo (ovvero con generatori indipendenti costanti), con $R_{eq} > 0$ e per $t > 0$, qualunque tensione o corrente ha espressione:

$$x(t) = \left[x(t_0^+) - x(+\infty)\right] e^{-(t-t_0)/\tau} + x(+\infty)$$

- Si noti che $x(t)$ non è necessariamente continua (a meno che non sia una variabile di stato), pertanto può capitare che $x(t_0^+) \neq x(t_0^-)$
- Il risultato si dimostra usando il principio di sostituzione, sostituendo all'elemento dinamico un generatore equivalente



Metodo sistematico

Per ricavare una grandezza $x(t)$, $t > 0$ in circuiti RC e RL con generatori costanti

RC

1. Valore iniziale: Se $v_C(0)$ non è nota, si ricava $v_C(0) = v_C(0^-) = v_C(0^+)$ sostituendo per $t = 0^-$ il condensatore con un circuito aperto
2. All'istante t_0^+ sostituire il condensatore con un generatore indipendente di tensione $v_C(0)$ e ricavare $x(0^+)$
3. Valore finale: $x(+\infty)$. Si ottiene sostituendo il condensatore con un circuito aperto.
4. Costante di tempo: $\tau = RC$, dove R è la resistenza "vista" dal condensatore per $t > 0$.
5. Soluzione $x(t) = \left[x(0^+) - x(+\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + x(+\infty)$

RL

1. Valore iniziale: Se $i_L(0)$ non è nota, si ricava $i_L(0) = i_L(0^-) = i_L(0^+)$ sostituendo per $t = 0^-$ l'induttore con un corto circuito
2. All'istante t_0^+ sostituire l'induttore con un generatore indipendente di corrente $i_L(0)$ e ricavare $x(0^+)$
3. Valore finale: $x(+\infty)$. Si ottiene sostituendo l'induttore con un corto circuito.
4. Costante di tempo: $\tau = \dfrac{L}{R}$, dove R è la resistenza "vista" dall'induttore per $t > 0$.
5. Soluzione $x(t) = \left[x(0^+) - x(+\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + x(+\infty)$

Indice

Risposta transitoria e permanente

- $x(t_0)$ valore iniziale
- x_∞ valore finale
- τ costante di tempo

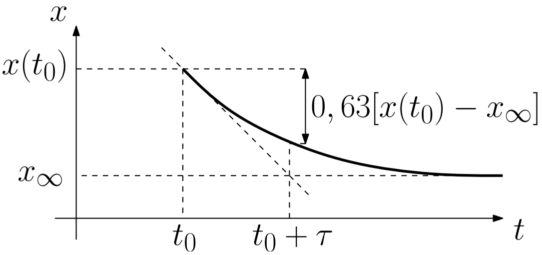
$$x(t) = \underbrace{[x(t_0) - x_\infty]e^{-(t-t_0)/\tau}}_{\text{risposta transitoria}} + \underbrace{x_\infty}_{\text{risposta permanente}}$$

Sviluppando il prodotto (sovrapposizione)

$$x(t) = \underbrace{x(t_0)e^{-(t-t_0)/\tau}}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{x_\infty\left(1 - e^{-(t-t_0)/\tau}\right)}_{\text{risposta forzata}}$$

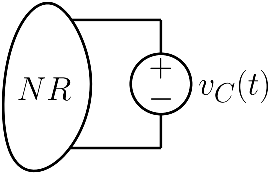
Indice

Significato fisico della costante di tempo



In un intervallo di tempo pari ad una costante di tempo, $|x(t) - x_\infty|$ si riduce di un fattore $1/e \approx 0,37$

Circuiti RC e RL con generatori costanti



Usando il teorema di sostituzione e di sovrapposizione si ha (per una rete RC)

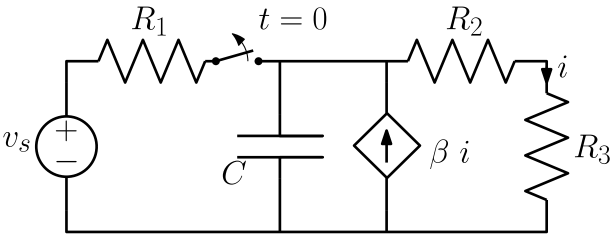
$$v_{jk} = \underbrace{H_0}_{\text{costante}} \; v_C(t) + \sum_j \underbrace{H_j \; v_{sj}}_{\text{costante}} + \sum_j \underbrace{K_j \; i_{sj}}_{\text{costante}}$$

$$\Downarrow$$

$$v_{jk}(t) = [v_{jk}(t_0) - v_{jk\infty}]\, e^{(t-t_0)/\tau} + v_{jk\infty}$$

Indice

Circuiti RC e RL con generatori costanti



$R_1 = 40\Omega$
$R_2 = 30\Omega$
$R_3 = 50\Omega$
$C = 3\mathrm{F}$
$v_s = 80\mathrm{V}$
$\beta = 0,5$

$$i(t) = \frac{v_C(t)}{R_2 + R_3}$$

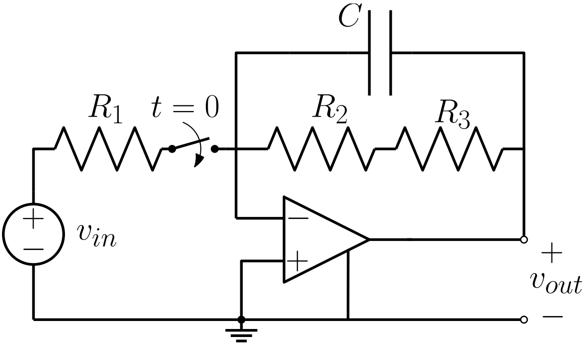
$$\frac{v_C(0) - v_s}{R_1} + \frac{v_C}{R_2 + R_3} - \beta\ i = 0 \qquad i = \frac{v_c(0)}{R_2 + R_3} \Rightarrow v_C(0) = 64\mathrm{V}$$

$$v_C(+\infty) = 0\mathrm{V}$$

$$R_{eq} = \frac{v_p}{i_p} = \frac{R_2 + R_3}{1 - \beta} \Rightarrow R_{eq} = 160\Omega \Rightarrow \tau = R_{eq} C = 480\mathrm{s}$$

$$i(t) = 0,8\ e^{-t/480}\mathrm{A}$$

Circuiti RC e RL con generatori costanti



$R_1 = 10\text{k}\Omega$
$R_2 = 20\text{k}\Omega$
$R_3 = 100\text{k}\Omega$
$C = 25\text{mF}$
$v_s = 4\text{V}$

$$v_C(t) = -v_{out}(t)$$

$$v_{out}(0^+) = 0$$

$$v_{out}(+\infty) = -\frac{v_{in}}{R_1}(R_2 + R_3) = -\frac{4}{10}(20 + 100) = -48\text{V}$$

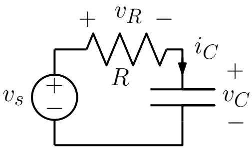
$$R_{eq} = R_2 + R_3 = 20 + 100 = 120\text{k}\Omega \qquad \tau = R_{eq}C = 3000\text{s}$$

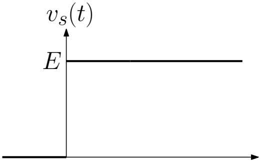
$$v_{out}(t) = 48\left(e^{-t/3000} - 1\right)\text{V}$$

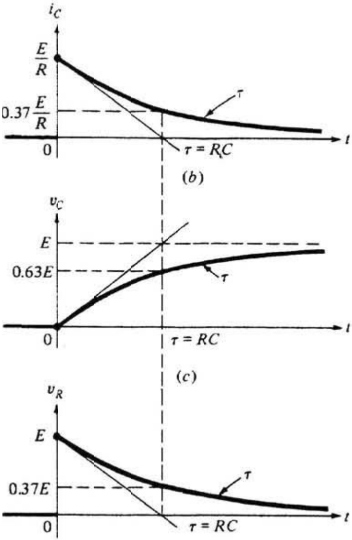
Indice

Circuiti dinamici RC

Esempio: carica di un condensatore







Funzione gradino unitario

$$v_s(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

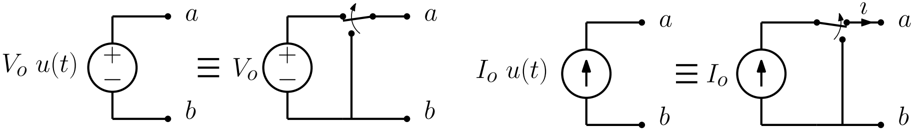
$$v_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Indice

Circuiti dinamici RC

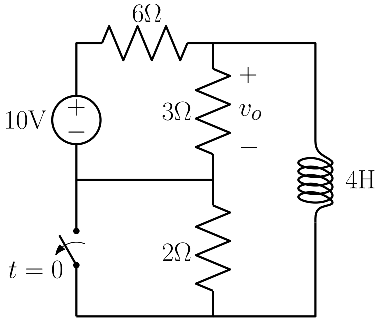
- Generatori definiti attraverso il gradino unitario

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



Circuiti dinamici RC

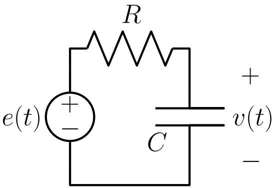
Esempio: determinare $v_o(t)$

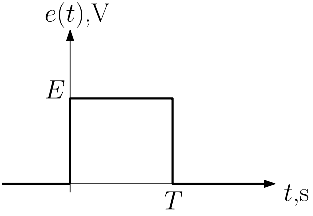


- Metodo basato sul calcolo preliminare della variabile di stato
- Metodo diretto (la grandezza elettrica richiesta potrebbe essere discontinua)

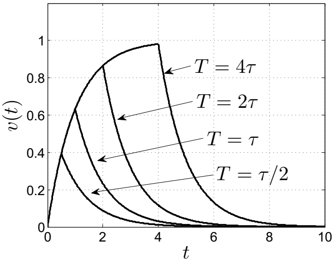
Indice

Circuiti del primo ordine con ingressi costanti a tratti





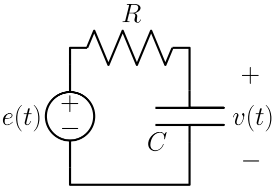
- $v(0^-) = v(0^+) = 0$
- $v(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ per $0 < t < T$
- $v(T^-) = v(T^+) = E\left(1 - e^{-T/\tau}\right)$
- $v(t) = E\left(1 - e^{-T/\tau}\right) e^{-(t-T)/\tau}$ per $t > T$

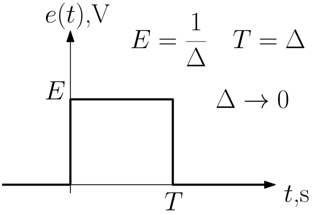


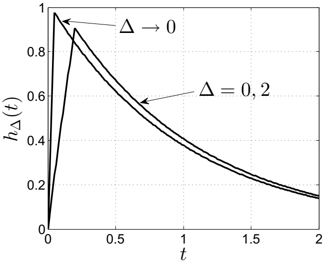
$E = 1\text{V}$, $\tau = 1\text{s}$

Indice

Risposta all'impulso



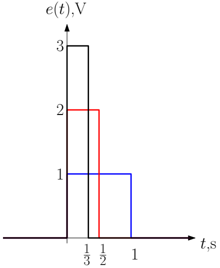


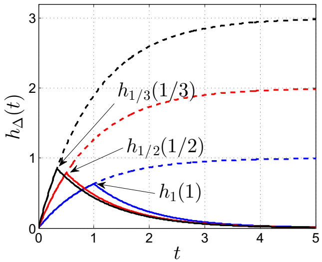


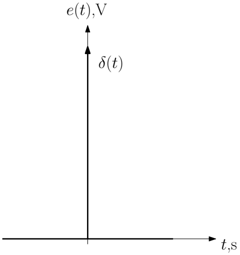
- $v(0^-) = v(0^+) = 0$
- $v(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ per $0 < t < T$
- $v(T^-) = v(T^+) = E\left(1 - e^{-T/\tau}\right)$
- $v(t) = E\left(1 - e^{-T/\tau}\right) e^{-(t-T)/\tau}$ per $t > T$

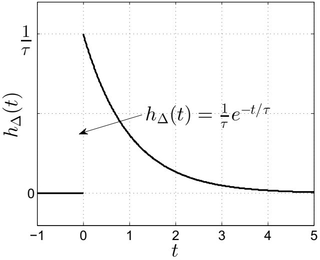
$\tau = 1$s

Risposta all'impulso

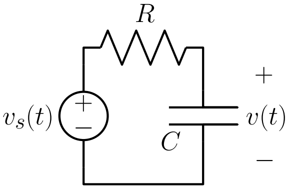


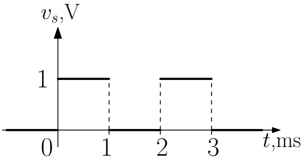




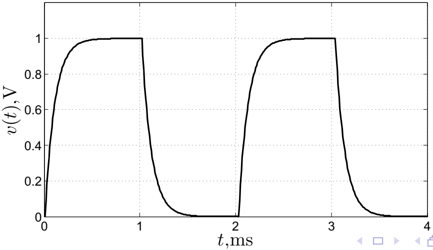


Circuito del primo ordine con ingressi costanti a tratti: onda quadra

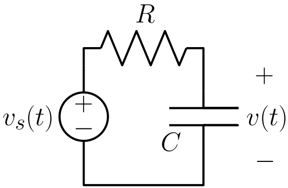


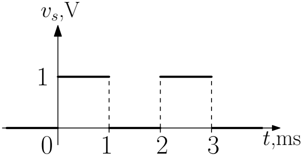


$T = 1\mathrm{ms}$ $\quad R = 100\Omega$ $\quad C = 1\mu\ \mathrm{F}$ $\quad \tau = RC = 0,1\mathrm{ms} \ll T$



Circuito del primo ordine con ingressi costanti a tratti: onda quadra



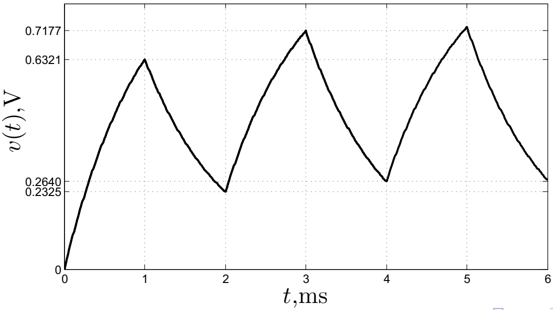


$T = 1\mathrm{ms}$ $\quad R = 1\mathrm{k}\Omega$ $\quad C = 1\mu\ \mathrm{F}$ $\quad \tau = RC = 1\mathrm{ms} = T$

$$v(t) = \begin{cases} v_1(t) = 1 - e^{-t/\tau} & 0 < t < T \\ v_2(t) = \left(1 - e^{-T/\tau}\right) e^{-(t-T)/\tau} & T < t < 2T \\ v_3(t) = \left[e^{-T/\tau}\left(1 - e^{-T/\tau}\right) - 1\right] e^{-(t-2T)/\tau} + 1 & 2T < t < 3T \\ \dots & 3T < t < 4T \end{cases}$$

Circuito del primo ordine con ingressi costanti a tratti: onda quadra

$$v(t) = \begin{cases} v_1(t) = 1 - e^{-t/\tau} & 0 < t < T \\ v_2(t) = \left(1 - e^{-T/\tau}\right) e^{-(t-T)/\tau} & T < t < 2T \\ v_3(t) = \left[e^{-T/\tau}\left(1 - e^{-T/\tau}\right) - 1\right] e^{-(t-2T)/\tau} + 1 & 2T < t < 3T \\ \dots & 3T < t < 4T \end{cases}$$



Circuito del primo ordine con ingressi costanti a tratti: onda quadra

$$v(t) = \begin{cases} v_{2n+1}(t) = [v_{2n}(2nT) - 1]\, e^{-(t-2nT)/\tau} + 1 & \textit{Fase di carica} \\ v_{2n+2}(t) = v_{2n+1}((2n+1)T) e^{-(t-(2n+1)T)/\tau} & \textit{Fase di scarica} \end{cases}$$

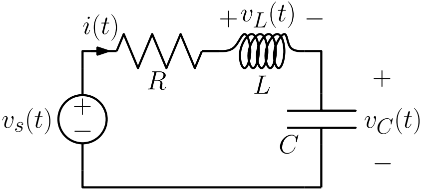
- Il valore finale di ciascun intervallo coincide con il valore iniziale dell'intervallo successivo (per esempio $v_1(T) = v_2(T)$)
- Fasi di carica e di scarica del condensatore si alternano ($0 < t < T$ fase di carica, $T < t < 2T$ fase di scarica,...)
- Poiché $T = \tau$, $e^{-T/\tau} = e^{-1} \simeq 0,368$. Quindi

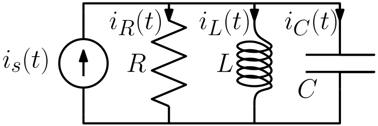
$$\begin{aligned} v_3(3T) &= 1 + 0,368\,(v_3(2T) - 1) && \textit{Carica} \\ v_2(2T) &= 0,368 v_2(T) && \textit{Scarica} \end{aligned}$$

- Attenzione a non generalizzare i risultati

Indice

Circuiti di ordine superiore al primo: secondo ordine





$$R\ i + v_L + v_C - v_s = 0$$

$$i = C\ \frac{dv}{dt} \qquad v_L = L\ \frac{di}{dt}$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{R}{L}\ \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L\ C} v = \frac{v_s}{L\ C}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} & = & \dfrac{1}{C} i \\ \dfrac{di}{dt} & = & -\dfrac{R}{L}\ i - \dfrac{v}{L} + \dfrac{v_s}{L} \end{cases}$$

$$i_s = \frac{v}{R} + i_L + i_C$$

$$v = L\ \frac{di_L}{dt} \qquad i_C = C\ \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\ \frac{di}{dt} + \frac{1}{L\ C} i = \frac{i_s}{L\ C}$$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} & = & \dfrac{1}{L} v \\ \dfrac{dv}{dt} & = & -\dfrac{1}{RC}\ v - \dfrac{i}{C} + \dfrac{i_s}{C} \end{cases}$$

Circuiti di ordine superiore al primo: secondo ordine

Le equazioni di stato di circuiti lineari e tempo invarianti possono essere risolte sia riducendo il sistema di equazioni ad una sola equazione differenziale del secondo ordine, sia risolvendo il sistema di due equazioni differenziali del primo ordine

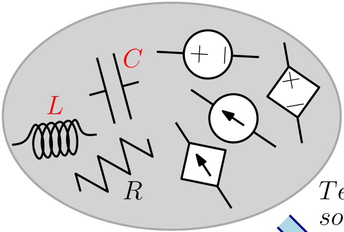
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2 x = b(t)$$

- Evoluzione libera ($\mathbf{b}(t) = 0$) e forzata ($\mathbf{b}(t) \neq 0$)
- Equazione caratteristica $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$
- Frequenze naturali
- modi di evoluzione

Indice

Equazioni di stato

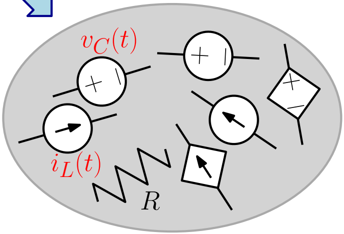


$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ \vdots \\ v_{Cn}(t) \\ i_{L1}(t) \\ \vdots \\ i_{Lm}(t) \end{bmatrix}$$

vettore di stato

Teorema di sostituzione

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} i_{C1}(t) \\ \vdots \\ i_{Cn}(t) \\ v_{L1}(t) \\ \vdots \\ v_{Lm}(t) \end{bmatrix}$$



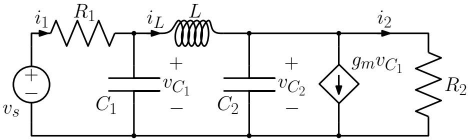
Equazioni di stato

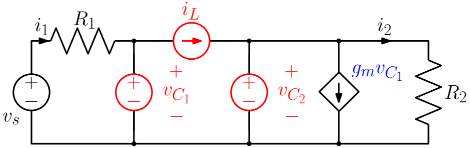
Algoritmo per scrivere le equazioni di stato in un circuito di ordine superiore al primo

1. Sostituire ogni **condensatore con un generatore indipendente di tensione di valore** v_{C_m} e ogni **induttore con un generatore indipendente di corrente di valore** i_{L_n}
2. Studiare il circuito **resistivo** ottenuto al punto 1, ricavando le correnti i_{C_m} relative a ciascun condensatore e le tensioni v_{L_n} relative a ciascun induttore
3. Sostituire nelle espressioni ottenute al punto 2 le **relazioni costitutive di condensatori e induttori**

$$i_{C_m} = C_m \frac{dv_{C_m}}{dt} \qquad v_{L_n} = L_n \frac{di_{L_n}}{dt}$$

Equazioni di stato





$$i_{C_1} = \frac{v_s - v_{C_1}}{R} - i_L = C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt}$$

$$i_{C_2} = i_L - g_m v_{C_1} - \frac{v_{C_2}}{R_2} = C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt}$$

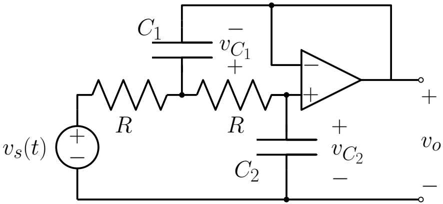
$$v_L = v_{C_1} - v_{C_2} = L \frac{di_L}{dt}$$

$$\mathbf{x}^T = [v_{C_1}, v_{C_2}, i_L] \quad \hat{\mathbf{x}}^T = [i_{C_1}, i_{C_2}, v_L]$$

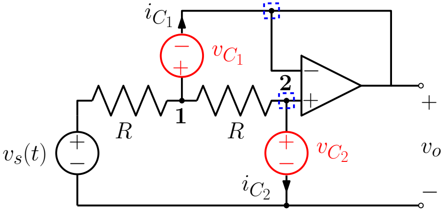
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_{C_1}}{dt} \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ -\frac{g_m}{C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_s$$

Equazioni di stato



$$\begin{cases} i_{C_1} = \frac{1}{R}\left(v_s - 2v_{C_1} - v_{C_2}\right) \\ i_{C_2} = \frac{v_{C_1}}{R} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{i_{C_1}}{C_1} = \frac{1}{RC_1}\left(v_s - 2v_{C_1} - v_{C_2}\right) \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{i_{C_2}}{C_2} = \frac{v_{C_1}}{RC_2} \end{cases}$$

Equazioni di stato

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Sistema di equazioni differenziali lineari, a coefficienti costanti e non autonomo

Soluzione

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0^+)}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\int_{0^+}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds}_{\text{risposta forzata}}}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0^+) - \underbrace{\int_{-\infty}^{0^+} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds}_{e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_p(0^+)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{0^+} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds + \int_{0^+}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds}_{\mathbf{x}_p(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds}$$

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}[\mathbf{x}(0^+) - \mathbf{x}_p(0^+)]}_{\text{risposta transitoria}} + \underbrace{\mathbf{x}_p(t)}_{\text{risposta permamenente}}$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\mathbf{A}t} = 0$$

Per circuiti (strettamente) passivi

Equazioni di stato

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Sistema di equazioni differenziali lineari, a coefficienti costanti e non autonomo

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}[\mathbf{x}(0^+) - \mathbf{x}_p(0^+)] + \mathbf{x}_p(t)$$

- Generatori costanti:
  $\mathbf{u}(t) = \textit{costante} \Rightarrow \mathbf{x}_p(t) = \textit{costante} = \mathbf{x}_\infty \Rightarrow \mathbf{x}_p(0^+) = \mathbf{x}_\infty$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}[\mathbf{x}(0^+) - \mathbf{x}_\infty] + \mathbf{x}_\infty}$$

Formula analoga a quella valida per i circuiti del primo ordine

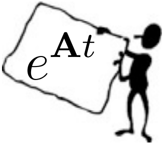
Equazioni di stato

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Sistema di equazioni differenziali lineari, a coefficienti costanti e non autonomo

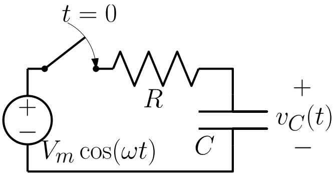
$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}[\mathbf{x}(0^+) - \mathbf{x}_p(0^+)] + \mathbf{x}_p(t)$$

- Generatori arbitrari (impulso, esponenziale, ...)



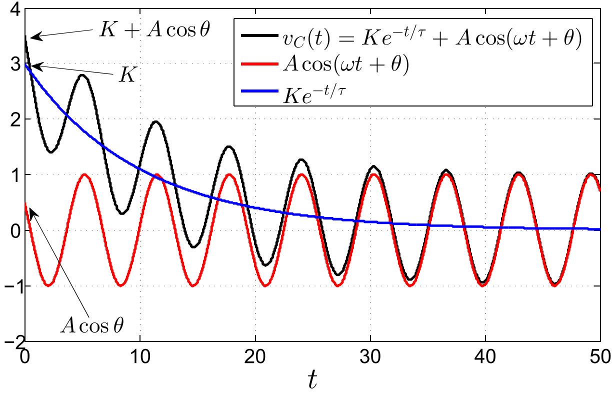
- Generatori SINUSOIDALI
  - Risposta transitoria
  - Risposta permanente $\Rightarrow$ SINUSOIDALE

Circuito RC con ingresso sinusoidale



$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_C(t) + \frac{1}{\tau} V_m \cos(\omega t)$$

$$v_C(t) = Ke^{-t/\tau} + A\cos(\omega t + \theta)$$



Circuito RC con ingresso sinusoidale: Risposta permanente

$$\mathbf{x}_p(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\ \mathbf{u}(s)\ ds$$

$$v_{pC}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-s}{\tau}} \frac{1}{\tau} V_m \cos(\omega s) ds = e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{V_m}{\tau} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{s}{\tau}} \cos(\omega s) ds$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{s}{\tau}} \cos(\omega s) ds =& \tau e^{\frac{s}{\tau}} \cos(\omega s)\Big|_{-\infty}^{t} + \omega\tau \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{s}{\tau}} \sin(\omega s) ds \\ =& \tau e^{\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t) + \omega\tau \left[\tau e^{\frac{s}{\tau}} \sin(\omega s)\Big|_{-\infty}^{t} - \omega\tau \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{s}{\tau}} \cos(\omega s) ds \right]\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{s}{\tau}} \cos(\omega s) ds = \frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2} e^{\frac{t}{\tau}} \left[\cos(\omega t) + \tau\omega \sin(\omega t)\right]$$

$$v_{pC}(t) = \frac{V_m}{1+\omega^2\tau^2} \left[\cos(\omega t) + \tau\omega \sin(\omega t)\right]$$

Circuito RC con ingresso sinusoidale: Risposta permanente

$$v_{pC}(t) = \frac{V_m}{1+\omega^2\tau^2}\left[\cos(\omega t) + \tau\omega \sin(\omega t)\right]$$

$$\equiv$$

$$v_{pC}(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

- Ricordando che: $\cos(\omega t + \theta) = \cos(\omega t)\cos\theta - \sin(\omega t)\sin\theta$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sin\theta & = & -\tau\omega \\ \cos\theta & = & 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \theta = -\arctan(\tau\omega)$$

- Usando le formule parametriche

$$A = \frac{V_m}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

$$v_{pC}(t) = \frac{V_m}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\cos[\omega t - \arctan(\tau\omega)]$$

Circuito RC con ingresso sinusoidale: Risposta permanente

$$\mathbf{x}_p(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\ \mathbf{B}\ \mathbf{u}(s)\ ds$$

- $\mathbf{u}(t)$ generatori sinusoidali

Esiste un modo alternativo ?