ELETTROTECNICA
PARTE III: TEOREMI FONDAMENTALI

Michele Bonnin e Fernando Corinto
michele.bonnin@polito.it fernando.corinto@polito.it

Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Politecnico di Torino

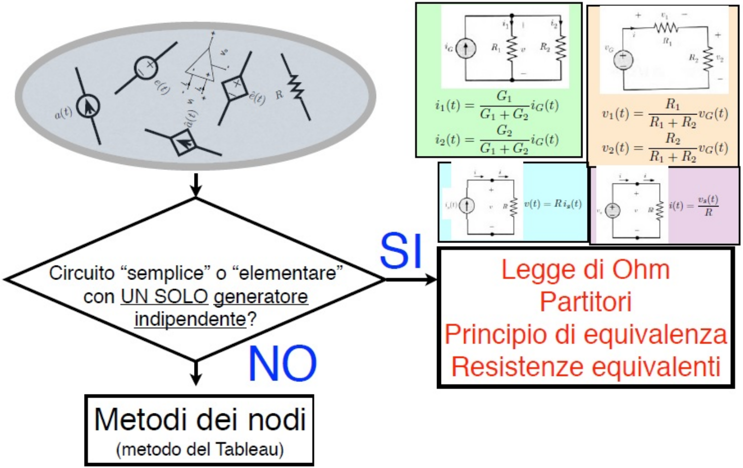
A.A. 2016/2017

Indice

Indice

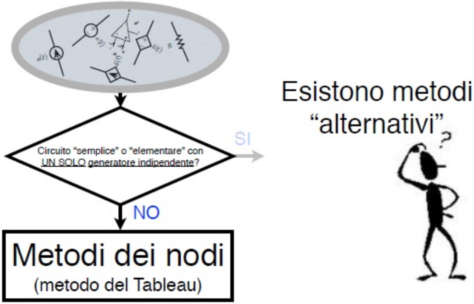
Richiami

Analisi di circuiti a–dinamici lineari



Richiami

Analisi di circuiti a–dinamici lineari con più di un generatore (indipendente e/o dipendente)



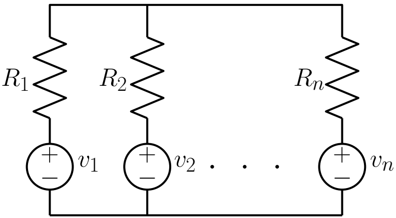
$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,\mathbf{i} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{A}^T\mathbf{e} \\ \mathbf{M}\,\mathbf{v}+\mathbf{N}\,\mathbf{i} &= \mathbf{u_s} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^T & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u_s} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{T}\,\mathbf{w} &= \mathbf{u} \\ \det(\mathbf{T}) &\neq 0 \end{aligned}$$

Teoremi e proprietà dei circuiti a–dinamici lineari

- Metodi “alternativi” si basano sull’uso di teoremi e proprietà dei circuiti **a–dinamici lineari** al fine di “semplificare” opportunamente il circuito
  1. Teorema di Millman
  2. Proprietà di linearità
  3. Principio di sovrapposizione degli effetti
  4. Teorema di sostituzione
  5. Teoremi di Thevenin e di Norton

Teorema di Millman

- La topologia del circuito è tale che:
  - ogni ramo del circuito è costituito dalla serie di un resistore e un generatore di tensione
  - tutti i rami del circuito sono in parallelo



$$(v-v_1)G_1+(v-v_2)G_2+\ldots+(v-v_n)G_n = 0$$

$$v = \frac{v_1 G_1 + v_2 G_2 + \ldots + v_n G_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n}$$

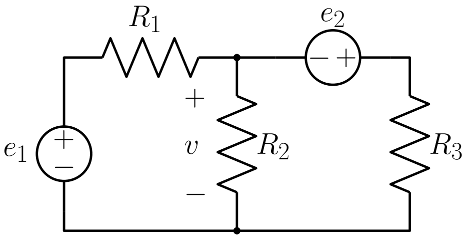
$$\boxed{v = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k v_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k}}$$

In una rete binodale, la tensione tra i nodi è proporzionale al rapporto tra la somma delle correnti di corto circuito e la somma delle conduttanze di tutti i rami

Teorema di Millman

- La topologia del circuito è tale che:
  - ogni ramo del circuito è costituito dalla serie di un resistore e un generatore di tensione
  - tutti i rami del circuito sono in parallelo

Esempio

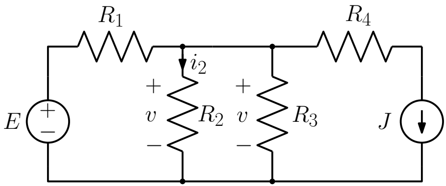


$$v = \frac{\dfrac{e_1}{R_1} - \dfrac{e_2}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}$$

Teorema di Millman

- La topologia del circuito è tale che:
  - ogni ramo del circuito è costituito dalla serie di un resistore e un generatore di tensione o di un generatore di corrente
  - tutti i rami del circuito sono in parallelo

Esempio

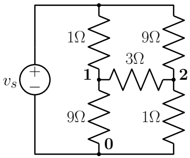


$$v = \frac{\frac{E}{R_1} - J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$i_2 = \frac{v}{R_2}$$

Linearità

- In un circuito **lineare** esiste un legame di proporzionalità tra causa (generatori indipendenti) ed effetto (corrente o tensione in qualche elemento del circuito)
- **Caso particolare**: in un circuito a–dinamico lineare con un solo generatore indipendente qualunque tensione o corrente è proporzionale alla grandezza del generatore
- Dimostrazione si basa su metodo del tableau
- Applicando il metodo dei nodi si può illustrare tale proprietà



$$\begin{aligned} \frac{e_1 - v_s}{1} + \frac{e_1 - e_2}{3} + \frac{e_1}{9} &= 0 \\ \frac{e_2 - v_s}{9} + \frac{e_2 - e_1}{3} + \frac{e_2}{1} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 v_s \\ \alpha_2 v_s \end{bmatrix}$$

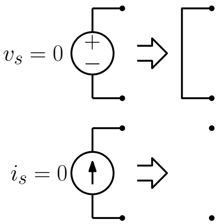
$$e_1 = \frac{\alpha_1 g_{22} - \alpha_2 g_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}} v_s \qquad e_2 = \frac{g_{11} \alpha_2 - g_{21} \alpha_1}{g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}} v_s$$

Principio di sovrapposizione degli effetti

- In un circuito LINEARE esiste un legame di proporzionalità tra causa (generatori indipendenti) ed effetto (corrente o tensione in qualche elemento del circuito)
- In un circuito a-dinamico lineare qualunque tensione o corrente è la somma degli EFFETTI dovuti ai singoli GENERATORI INDIPENDENTI quando agiscono UNO ALLA VOLTA. I generatori controllati rimangono invariati.

$$x(t) = \sum_n H_n v_{sn}(t) + \sum_n K_n i_{sn}(t)$$

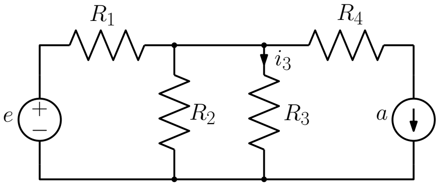
- x è una generica tensione o corrente
- v_{sn} è la tensione del n–esimo generatore indipendente di tensione
- i_{sn} è la corrente del n–esimo generatore indipendente di corrente
- H_n e K_n sono costanti che non dipendono dai valori dei generatori indipendenti



☐ La dimostrazione si basa sul **metodo del tableau** $\mathbf{w} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}$

Principio di sovrapposizione degli effetti

Esempio



- $i = i'|_e + i''|_a$
- $i'|_e$ è il contributo del generatore di tensione, ottenuto "spegnendo" il generatore di corrente
- $i''|_a$ è il contributo del generatore di corrente, ottenuto "spegnendo" il generatore di tensione

$$i'|_e = \frac{e}{R_1 + R_2||R_3} \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

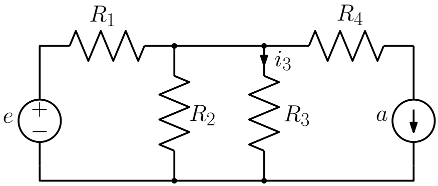
$$i''|_a = -a \frac{R_1||R_2}{R_3 + R_1||R_2}$$

Pro e contro

Pro Notevoli implicazioni teoriche

Contro occorre analizzare tanti circuiti (spesso "semplici" o "elementari") diversi quanti sono i generatori indipendenti

Potenza in presenza di più generatori



$$i = i'|_e + i''|_a$$

$$i'|_e = \frac{e}{R_1 + R_2||R_3} \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

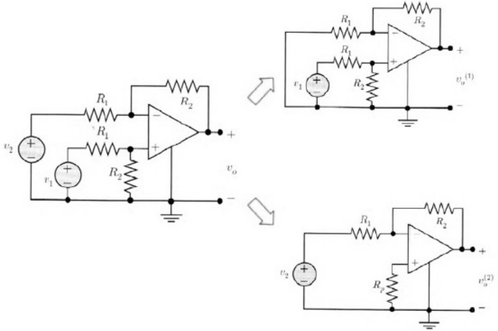
$$i''|_a = -a \frac{R_1||R_2}{R_3 + R_1||R_2}$$

$$p_{R_3} = v_3\, i_3 = R_3\, i_3^2 = R_3 \left(i_3' + i_3''\right)^2 \neq R_3 i_3'^2 + R_3 i_3''^2$$

Il principio di sovrapposizione non si applica alla potenza

La potenza è una funzione non lineare di tensione e corrente

Uso del principio di sovrapposizione



$$v_0' = v_1 \frac{R_2}{R_1}$$

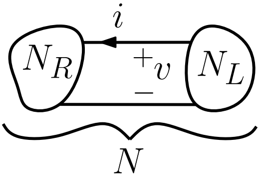
$$v_0'' = -v_2 \frac{R_2}{R_1}$$

$$v_0 = v_0' + v_0'' = \frac{R_2}{R_1}\left(v_1 - v_2\right)$$

Indice

Principio di sostituzione

Ipotesi

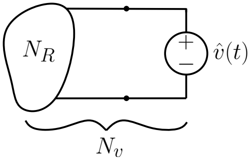


Si consideri il circuito N, composto di

- N_R resistivo e "ben definito", lineare o non lineare
- N_L qualsiasi, non necessariamente resistivo ne lineare.

Tesi (1)

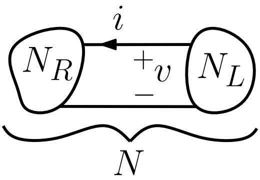
Se N ha un'unica soluzione $v = \hat{v}(t)$, allora le tensioni e correnti in N_R possono essere ottenute sostituendo N_L con un generatore di tensione $\hat{v}(t)$, purchè la risultante rete N_v abbia un'unica soluzione (qualunque sia t)



Sostituendo N_L con un generatore indipendente di tensione di valore esattamente pari a $\hat{v}(t)$, tutte le tensioni e tutte le correnti in N_R (compresa la corrente $i(t)$) rimangono invariate.

Principio di sostituzione

Ipotesi

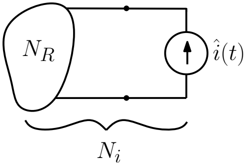


Si consideri il circuito N, composto di

- N_R resistivo e "ben definito", lineare o non lineare
- N_L qualsiasi, non necessariamente resistivo ne lineare.

Tesi (2)

Se N ha un'unica soluzione $i = \hat{i}(t)$, allora le tensioni e correnti in N_R possono essere ottenute sostituendo N_L con un generatore di corrente $\hat{i}(t)$, purchè la risultante rete N_i abbia un'unica soluzione qualsiasi sia t

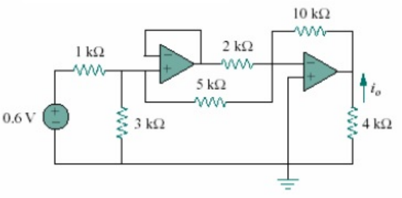


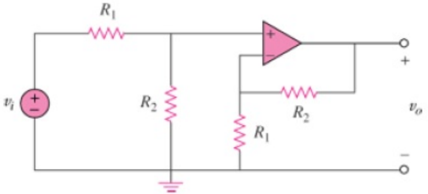
Sostituendo N_L con un generatore indipendente di corrente di valore esattamente pari a $\hat{i}(t)$, tutte le tensioni e tutte le correnti in N_R (compresa $v(t)$) rimangono invariate.

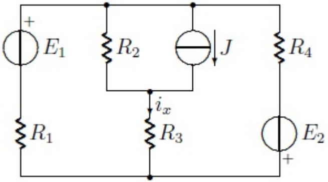
Non si può sostituire N_L se contiene la grandezza di controllo di un generatore dipendente in N_R.

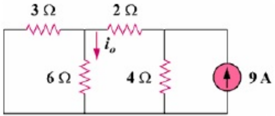
Uso del principio di sostituzione

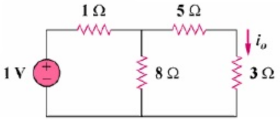
Esempi





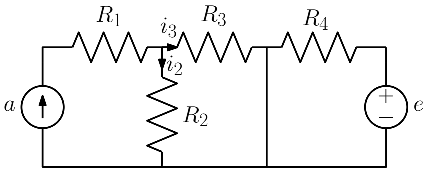




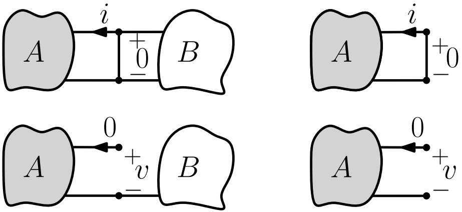


Principio di sostituzione

Esempio



Casi particolari

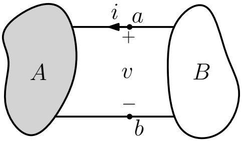


- $i_2 = a \dfrac{R_3}{R_2 + R_3}$
- $i_3 = a \dfrac{R_2}{R_2 + R_3}$
- Il generatore di tensione non ha alcun effetto sulle tensioni e correnti del bipolo di sinistra.

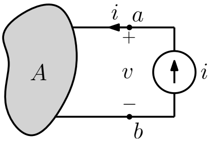
Indice

Teorema di Thevenin

- A è un circuito con due terminali (**bipolo**) lineare a–dinamico



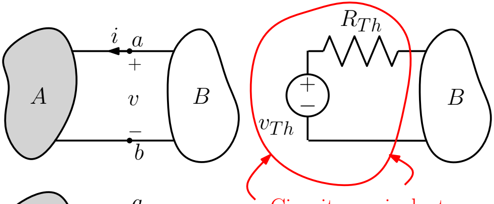
Uso il principio
di sostituzione
$\Longrightarrow$



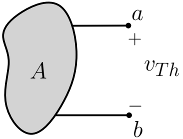
- Principio di sovrapposizione degli effetti
  $v = v\big|_{(generatori\ \ interni\ \ ad\ \ A)} + v\big|_i$
- $v\big|_{(generatori\ \ interni\ \ ad\ \ A)} = v_{ab}\big|_{i=0} = v_{Th}$
- $v\big|_i = v_{ab}\big|_{(generatori\ \ interni\ \ ad\ \ A)=0} = R_{Th}\, i$

$$v = v_{Th} + R_{Th}\, i$$

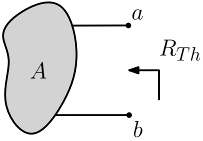
Teorema di Thevenin



Circuito equivalente
di Thevenin



La tensione di Thevenin
è la tensione a vuoto
ai capi del bipolo A

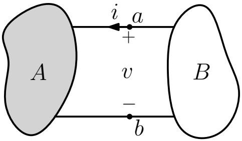


La resistenza di Thevenin
è la resistenza del bipolo A
con i generatori indipendenti
spenti

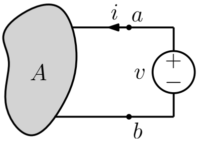
Indice

Teorema di Norton

- A è un circuito con due terminali (**bipolo**) lineare a–dinamico



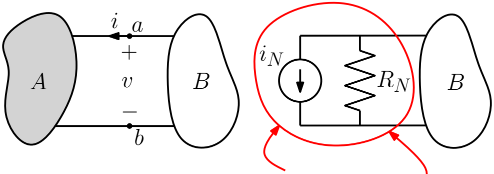
Uso il principio
di sostituzione
$\Longrightarrow$



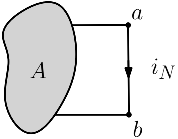
- Principio di sovrapposizione degli effetti
  $i = i|_{(generatori\ \ interni\ \ ad\ \ A)} + i|_{v}$
- $i|_{(generatori\ \ interni\ \ ad\ \ A)} = i_{ab}|_{v=0} = i_N$
- $i|_{v} = i_{ab}|_{(generatori\ \ interni\ \ ad\ \ A)=0} = G_N\, v$

$$i = i_N + G_N\, v$$

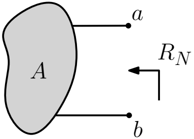
Teorema di Norton



Circuito equivalente
di Norton



La corrente di Norton è
la corrente di corto circuito
nei terminali A–B

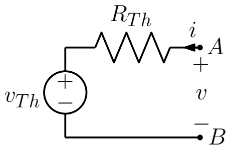


La resistenza di Norton
è la resistenza del bipolo A
con i generatori indipendenti
spenti

Teoremi di Thevenin e di Norton

Teorema di Thevenin

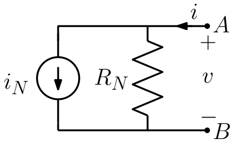
Un circuito resistivo lineare, accessibile da due terminali, è equivalente ad un generatore indipendente di tensione in serie ad un resistore. La tensione v_{Th} del generatore è la tensione che si ha tra i terminali quando sono aperti (tensione a vuoto). La resistenza R_{Th} del resistore è la resistenza equivalente del circuito con i generatori indipendenti spenti



$$v = v_{Th} + R_{Th}\, i$$

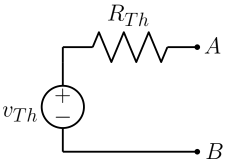
Teorema di Norton

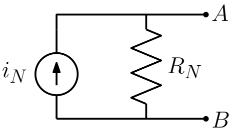
Un circuito resistivo lineare, accessibile da due terminali, è equivalente ad un generatore indipendente di corrente in parallelo ad un resistore. La corrente i_N del generatore è la corrente che scorre nei terminali quando questi sono in corto circuito (corrente di corto circuito). La resistenza R_N del resistore è la resistenza equivalente del circuito con i generatori indipendenti spenti



$$i = i_N + G_N\, v$$

Teoremi di Thevenin e di Norton





Thevenin $\Rightarrow$ Norton

$$i_N = \frac{v_{Th}}{R_{Th}}$$

$$R_N = R_{Th}$$

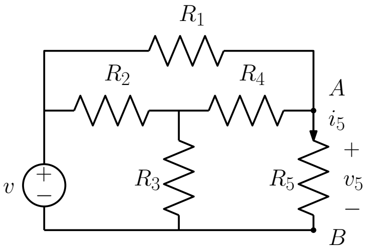
Norton $\Rightarrow$ Thevenin

$$v_{Th} = R_N \, i_N$$

$$R_{Th} = R_N$$

Esempio

- Trovare v_5 e i_5



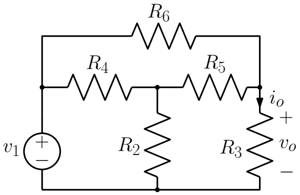
$R_1 = 1\Omega$
$R_2 = 1\Omega$
$R_3 = 1\Omega$
$R_4 = 1\Omega$
$R_5 = 1\Omega$
$v = 6V$

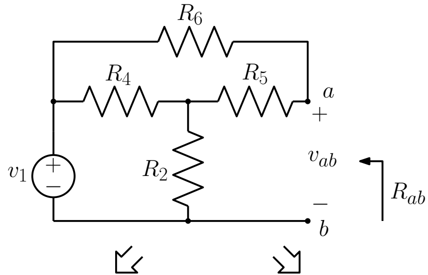
Soluzione: costruisco il circuito equivalente secondo Norton ai terminali A–B.

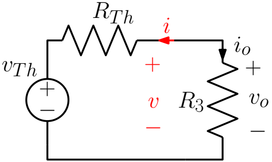
Indice

Uso dei teoremi di Thevenin e di Norton

Esempio

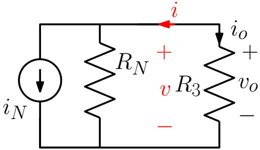






$v = v_{Th} + R_{Th} i$

$i_o = \frac{v_{Th}}{R_{Th}+R_3}$

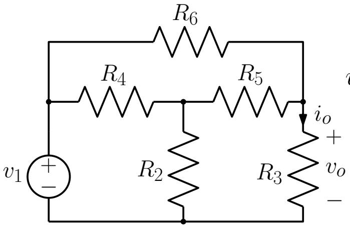


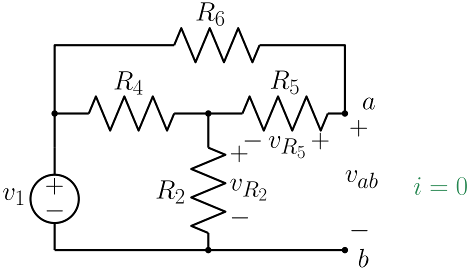
$i = i_N + G_N\, v$

$i_o = -\frac{R_N}{R_N+R_3}\, i_N$

Uso dei teoremi di Thevenin e di Norton

Esempio: calcolo della tensione di Thevenin





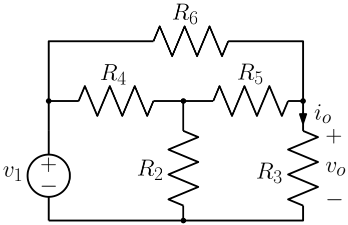
$$v_{Th} = v_{ab} = v_{R_2} + v_{R_5}$$

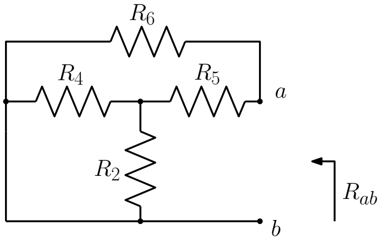
$$v_{R_2} = v_1 \frac{R_2}{R_2 + (R_5 + R_6)||R_4}$$

$$v_{R_5} = v_1 \frac{(R_5 + R_6)||R_4}{R_2 + (R_5 + R_6)||R_4} \frac{R_5}{R_5 + R_6}$$

Uso dei teoremi di Thevenin e di Norton

Esempio: calcolo della resistenza di Thevenin

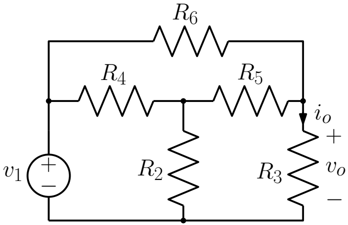


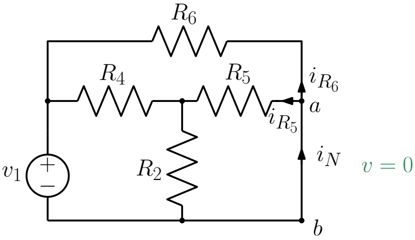


$$R_{Th} = R_{ab} = (R_5 + R_4||R_2)||R_6$$

Uso dei teoremi di Thevenin e di Norton

Esempio: calcolo della corrente di Norton





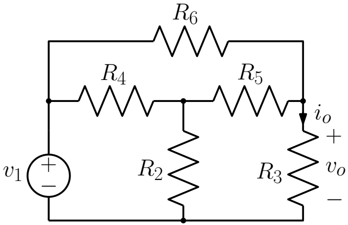
$$i_N = i_{R_5} + i_{R_6}$$

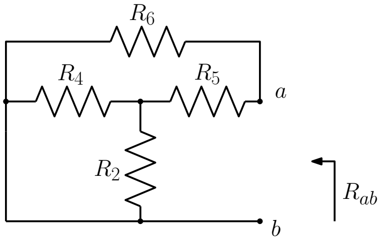
$$i_{R_5} = -\frac{v_1}{R_4 + R_2 || R_5} \frac{R_2}{R_2 + R_5}$$

$$i_{R_6} = -\frac{v_1}{R_6}$$

Uso dei teoremi di Thevenin e di Norton

Esempio: calcolo della resistenza di Norton

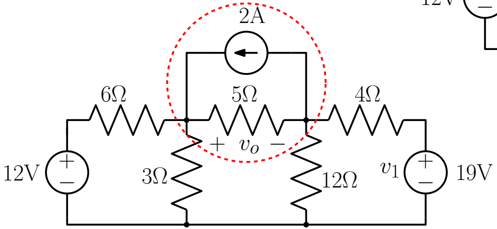


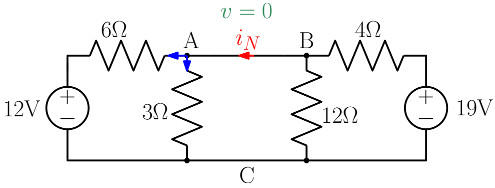


$$R_N = R_{ab} = (R_5 + R_4||R_2)||R_6 = R_{Th}$$

Uso dei teoremi di Thevenin e di Norton

Esempio



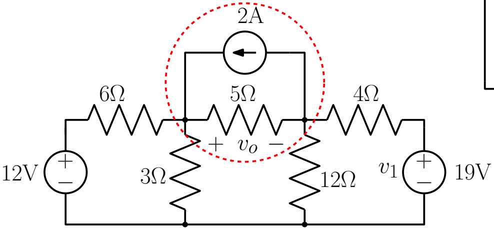


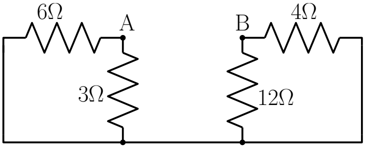
$$v_{AC} = \frac{\frac{12}{6} + \frac{19}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}}$$

$$i_N = \frac{v_{AC} - 12}{6} + \frac{v_{AC}}{3}$$

Uso dei teoremi di Thevenin e di Norton

Esempio

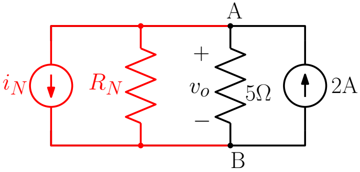




$$R_N = 6||3 + 12||4$$

$$i_N = \frac{v_{AC} - 12}{6} + \frac{v_{AC}}{3}$$

Circuito equivalente



$$v_o = (5||R_N)(2 - i_N)$$

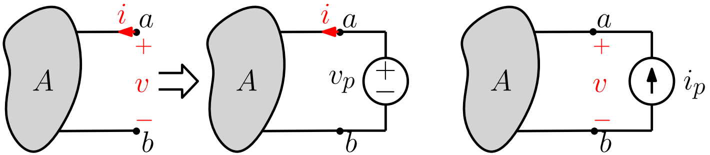
- N.B. Usando il principio di sovrapposizione si devono analizzare tre circuiti

Indice

Calcolo delle resistenze equivalenti in presenza di generatori controllati

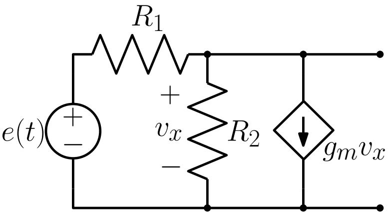
Esistono tre metodi

1. Metodo del generatore arbitrario (generatori indipendenti spenti)
2. Calcolo simultaneo di v_{Th} e R_{th} (i_N e R_N)
3. Rapporto $R_{Th} = \dfrac{v_{Th}}{i_N}$



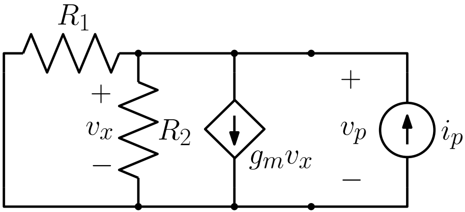
Metodo del generatore arbitrario

Esempio: $e(t) = 30\text{V}$, $R_1 = 12\Omega$, $R_2 = 60\Omega$, $g_m = 2$



$$\frac{v_x - e(t)}{R_1} + \frac{v_x}{R_2} + g_m v_x = 0$$

$$v_x = v_{Th} = \frac{150}{126} = 1,19\text{V}$$



$$\frac{v_x}{R_1} + \frac{v_x}{R_2} + g_m v_x - i_p = 0$$

$$v_x = \frac{10}{21} i_p$$

$$R_{Th} = \frac{v_p}{i_p} = \frac{v_x}{i_p} = \frac{10}{21} = 0,4762\Omega$$

Riepilogo metodologie per l'analisi di circuiti a–dinamici lineari