05BQX Metodi Matematici per l'ingegneria 2011-2012

Marina Santacroce

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

5. Variabili aleatorie continue

Riferimenti: S.Ross *Calcolo delle probabilità* Cap.5

Outline

Abbiamo studiato finora le variabili aleatorie discrete, cioè variabili aleatorie che possono assumere solo un insieme *finito* o *numerabile* di possibili valori.

In molte applicazioni, abbiamo a che fare con variabili aleatorie il cui insieme di possibili valori è *non numerabile*.

- *Tempo di attesa*. Il tempo d'attesa (in minuti) per l'arrivo di un autobus può essere rappresentato da una variabile aleatoria X che prende valori in $[0, \infty)$.
- *Prezzo di un'azione*. Il valore di un'azione ad una certa data futura si può rappresentare con una X a valori in $[0, \infty)$.
- *Peso*. Il peso di un cittadino (U.S.) si può pensare come una variabile aleatoria X a valori in $[0, 650)$ (in kg)[1].

[1] Jon Brower Minnoch (1941-1983), nato negli U.S., peso 635 Kg (il più grande mai documentato)

Variabili aleatorie continue

Supponiamo che X sia una variabile aleatoria reale che assume valori in un sottoinsieme continuo di $\mathbb{R}$ (tempo di vita di un transistor, arrivo di un treno).

Def. La variabile aleatoria X è *continua* se esiste una funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty) \qquad \text{tale che}$$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\, dx$$

per gli insiemi $B \subset \mathbb{R}$ per cui l'integrale è definito. Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1.$$

La funzione f si chiama *funzione di densità* di X.

La funzione di ripartizione o dstribuzione di X

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) du$$

Oss. Vista l'interpretazione geometrica dell'integrale, la probabilità nel caso continuo si legge sui grafici come area, mentre

$$f(x) = F'(x)$$

$$\text{For } B = [a, b], \qquad \mathbb{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

La probabilità $\mathbb{P}(a \le X \le b)$ corrisponde all'area sotto la funzione $f(x)$ tra a e b.

Per piccoli intervalli $(x, x + \Delta x]$, si ha

$$\mathbb{P}(x < X \le x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du \cong f(x)\Delta x$$

quindi $\mathbb{P}(x < X \le x + \Delta x)$ è proporzionale a $f(x)$ per Δx piccoli.

$\Rightarrow$ $f(x)$ ***NON*** *è una* ***probabilità***

$\Rightarrow$ Visto che $f(x)$ ***NON è una probabilità***, ***non ci deve stupire*** se $f(x) > 1$ per qualche valore di $x \in \mathbb{R}$.

- Se X è una variabile aleatoria continua, la probabilità che assuma un particolare valore è zero; i.e. per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Esempi:

1. Si consideri
$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
Stabilire per quali valori di C la funzione f è una densità di una variabile aleatoria continua e calcolare la $\mathbb{P}(X > 1)$.
2. Il tempo di guasto di un dispositivo ha funzione di densità
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
Si determini λ e la $\mathbb{P}(X > 50)$.

Valore atteso

Consideriamo una variabile aleatoria reale X continua.

Def. Se X ha funzione di densità f, allora il valore atteso di X, se l'integrale esiste[2], è

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx.$$

Oss. X si dice simmetrica se $f(x) = f(-x)$. In questo caso $\Rightarrow \ \mathbb{E}(X) = 0$.

Prop. Se X è una variabile aleatoria **continua** non negativa, allora

$$\mathbb{E}(X) = \int_{0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

Oss. Nel caso di variabili aleatorie **discrete**, vale un analogo risultato per X con supporto $\mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i:0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > i).$$

[2]Per semplicità nel seguito supporremo $\mathbb{E}(|X|) < \infty$

Funzione di una variabile aleatoria continua

Spesso si è interessati allo studio di *funzioni* di variabili aleatorie.

Esempio: X è una variabile aleatoria continua con funzione di densità f_X.
Determinare la densità delle variabili

- $Y = X^2$, $\quad Z = aX + b$, a e $b \in \mathbb{R}$ $\quad$ e $\quad V = |X|$.

In generale, vale

Teorema: Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di densità f_X e $g(x)$ una *funzione strettamente monotona* (crescente o decrescente), derivabile con continuità. Allora la variabile $Y = g(X)$ è continua e la sua funzione di densità è

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| & \text{se } \ y = g(x) \ \text{ per qualche } \ x \\ 0 & \text{se } \ y \neq g(x) \ \text{ per ogni } \ x \end{cases}$$

Valore atteso di una funzione di una variabile aleatoria continua

Come nel caso discreto, per il calcolo del *valore atteso di* $g(X)$ *non è necessario calcolare la densità della variabile* $g(X)$.

Prop. Se X è continua e ha funzione di densità f e g è una funzione reale, allora

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx.$$

- ▷ Dimostriamo il risultato nel caso $g(X) \geq 0$.[3]

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(g(X) > y)\,dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\{x:g(x)>y\}} f(x)\,dx \right) dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{g(x)} dy \right) f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,dx$$

Prop. (*linearità del valore atteso*)

- $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}(X) + b$, con a e $b \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}(f(X) + g(X)) = \mathbb{E}(f(X)) + \mathbb{E}(g(X))$ con f e g due funzioni reali.

[3] Y non negativa $\Rightarrow \mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y > y)dy$.

Esempio: tempi d'attesa

Supponiamo che il numero di eventi che si verificano in un intervallo di tempo $[0, t]$ segue la distribuzione di Poisson di media λt. Mostrare che il tempo di arrivo del primo evento è una variabile aleatoria continua di densità

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Inoltre, si trovi la distribuzione del tempo di arrivo dell' $n-$esimo evento.

Supponiamo di ricevere in media 2 telefonate per ora (unità di misura tempo) e che si abbia appena finito una telefonata,

a) qual è la probabilità di aspettare per più di un'ora la prossima telefonata?
b) qual è la probabilità di ricevere almeno una telefonata nei prossimi 10 minuti?
c) qual è la probabilità di aspettare più di 10 minuti ma meno di un'ora la prossima telefonata?

Variabile aleatoria esponenziale

Def. Una variabile aleatoria continua X ha distribuzione **esponenziale** di parametro λ, $\lambda > 0$, in simboli $X \sim \exp(\lambda)$, se ha funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Si verifichi che f è una densità;
- si verifichi che $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$;
- si verifichi che $\mathrm{Var}\,(X) = \frac{1}{\lambda^2}$;
- si verifichi che $\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$
  proprietà di *non memoria* della variabile aleatoria esponenziale;
- si verifichi che la *funzione di rischio,* definita da

$$\boxed{r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}}$$

per $x > 0$, è costante e uguale a λ.

Variabile aleatoria gamma

Def. Una variabile aleatoria continua X ha distribuzione gamma di parametri λ e α, con $\lambda, \alpha > 0$, in simboli $X \sim \text{gamma}(\alpha, \lambda)$, se ha funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione $\Gamma(\alpha)$ è la *funzione speciale*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

- $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$;
- $\Gamma(1) = 1$;
- se $\alpha \in \mathbb{N}$ allora $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$

◇ Si verifichi che f è una densità;

- $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$; $\quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

Variabile aleatoria **U(0,1)**

Def. Una variabile aleatoria continua X è ***uniforme*** *su* $(0,1)$, in simboli $X \sim$ **U(0,1)**, se la densità

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

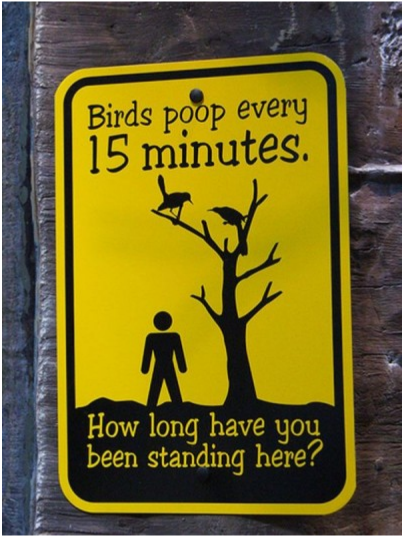
- $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x dx = 1/2$
- $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$
- $\mathrm{Var}(X) = 1/3 - (1/2)^2 = 1/12$

La *funzione di distribuzione* è $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \le x < 1 \text{ smallskip} \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$

$\Longrightarrow$ $X \sim U(a,b)$ se la densità vale $1/|b-a|$ per $a < x < b$, 0 altrimenti.

Esercizio: Un bastoncino di lunghezza 1 viene spezzato in un punto U scelto a caso (distribuito uniformemente su (0;1)). Determinare il valore atteso della lunghezza del pezzo che contiene un punto P fissato.

Guardate la vignetta:



Si supponga che 15 minuti sia il tempo *medio* di attesa per il prossimo evento

- essendosene appena verificato uno, se il tempo ha distribuzione uniforme
  qual è la probabilità che fermandoci sotto l'albero 5 minuti si venga "colpiti"?
- e se invece avesse distribuzione esponenziale?

Variabile aleatoria normale o Gaussiana

Def. Una variabile aleatoria continua X ha distribuzione **normale** o **Gaussiana** di parametri μ e σ^2, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$, in simboli $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, se ha densità

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

◇ Si verifichi che $\mathbb{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

⇒ Se $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, la variabile aleatoria si chiama normale standard e la funzione di densità è:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

◇ Si verifichi che se $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, allora $aX + b \sim \mathrm{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$;

- se $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$.