# 05BQX Metodi Matematici per l'ingegneria 2011-2012

Marina Santacroce

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

## 2. Assiomi della Probabilità

Riferimenti: S.Ross *Calcolo delle probabilità* Cap.2

# Outline

# Spazio campionario ed Eventi

Consideriamo un esperimento o un fenomeno il cui risultato non può essere previsto con certezza, ma i cui possibili esiti siano noti a priori.

**Def.** Lo **spazio campionario** $S$ è l'*insieme di tutti i possibili esiti* dell'esperimento.

Esempi:

1. 2 lanci di una moneta $\Rightarrow$ $S = \{(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)\}$
2. tempo di vita di un transistor $\Rightarrow S = \{x : 0 \leq x < \infty\}$
3. l'ordine di arrivo di una corsa di cavalli, individuati dall'insieme $N = \{1, ...7\} \Rightarrow S = \mathscr{P}(N)$

**Def.** Un **evento** $E$ è un *sottoinsieme* dello spazio campionario $S$.[1]

Esempi:

1. $E = \{(T,T),(T,C)\} = \{\textit{testa al primo lancio}\}$
2. $E = \{x > 10\} = \{\textit{il transistor ancora funzionante dopo } 10\ (\textit{ore})\}$
3. $E = \{\textit{vince il cavallo } 3\}$

[1] Gli eventi sono gli elementi di una *$\sigma$-algebra* di $S$: $\mathscr{E}$.
Una famiglia di sottoinsiemi di $S$ è una $\sigma$-*algebra* $\Leftrightarrow$ (i) $S \in \mathscr{E}$; (ii) $E \in \mathscr{E} \Rightarrow E^c \in \mathscr{E}$; (iii) Se $\{E_n, n \geq 1\} \in \mathscr{E} \Rightarrow \cup_n E_n \in \mathscr{E}$.

# Eventi

- $\emptyset$ è l'*evento impossibile* e $S$ l'*evento certo*;

Dati due eventi $E$ ed $F$ si possono definire:

- l'*evento unione* $E \cup F$, contenente i risultati che sono in $E$ o in $F$ (o in entrambi) $\Rightarrow$ si verifica se si verifica $E$ o $F$ (o entrambi).
- l'*evento intersezione* $E \cap F \Rightarrow$ si verifica se si verifica $E$ e $F$.
- l'*evento complementare di E* $E^c \Rightarrow$ si verifica se $E$ non si verifica. ($S^c = \emptyset$).
- $E - F = E \cap F^c$, che contiene i risultati che sono in $E$ ma non in $F \Rightarrow$ si verifica se si verifica $E$ e $F^c$.

Inoltre, data una successione di eventi di $S$, $\{E_n, n \geq 1\}$, si definiscono gli eventi

- $\bigcup_{n:1}^{\infty} E_n \Rightarrow$ l'evento che si verifica se si verifica almeno uno degli $E_n$.
- $\bigcap_{n:1}^{\infty} E_n \Rightarrow$ l'evento che si verifica se si verificano tutti gli eventi $E_n$.

**Def.** Due eventi $E$ e $F$, per i quali $E \cap F = \emptyset$, si dicono **incompatibili** (disgiunti).

**Proprietà algebriche dell'unione e dell'intersezione**:

*Proprietà commutativa*

$$E \cup F = F \cup E \qquad e \qquad E \cap F = F \cap E$$

*Proprietà associativa*

$$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$$

$$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$$

*Proprietà distributiva*

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$$

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G).$$

**Leggi di De Morgan**

$$\left(\bigcup_{i:1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i:1}^{n} E_i^c \quad e \quad \left(\bigcap_{i:1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup_{i:1}^{n} E_i^c$$

# Definizione Assiomatica di Probabilità

**Def.** Dati uno spazio campionario $S$ e una famiglia di eventi $\mathscr{E}$, una misura di probabilità $\mathbb{P}$ è una funzione degli eventi che soddisfa i seguenti assiomi:

A.1 $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$

A.2 $\mathbb{P}(S) = 1$

A.3 Se $\{E_n, n \geq 1\}$ è una successione di eventi a due a due incompatibili ($E_n \cap E_m = \emptyset$ per ogni $n \neq m$), allora

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n:1}^{\infty} E_n) = \sum_{n:1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) \ \ (\textit{additività numerabile})$$

In particolare, dagli assiomi segue che:

P.1 $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

- ▷ Sia $E_1 = S$, $E_n = \emptyset$ per $n \geq 2$. Da A.3 abbiamo $\mathbb{P}(\bigcup_{n:1}^{\infty} E_n) = \mathbb{P}(S) + \sum_{n:2}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$. Utilizzando A.1 e A.2 $\Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

P.2 Se $E_1, E_2, \ldots E_n$ sono eventi a due a due incompatibili, allora

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i:1}^{n} E_i) = \sum_{i:1}^{n} \mathbb{P}(E_i) \ \ (\textit{additività finita})$$

- ▷ Si applica la A.2 alla suc.ne $E_1, \ldots E_n$, $E_i = \emptyset$ per $i \geq n+1$. Utilizzando $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\Rightarrow$ P.2

## Alcune semplici proprietà

P.3 $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$

- Osserviamo che $S = E \cup E^c$ e che $E \cap E^c = \emptyset$.

$$\Rightarrow \ 1 \underset{\uparrow A.2}{=} \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(E \cup E^c) \underset{\uparrow P.2(additiv.finita)}{=} \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(E^c)$$

P.4 Se $E \subset F$, allora $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$

- Osserviamo che $F = E \cup (F - E)$ e che $E \cap (F - E) = \emptyset$.

$$\Rightarrow \ \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E \cup (F - E)) \underset{\uparrow P.2(additiv.finita)}{=} \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F - E) \underset{\uparrow \ A.1 \ (\mathbb{P}(F-E) \geq 0)}{\geq} \mathbb{P}(E)$$

# (segue) Proprietà

P.5 $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

- Osserviamo che $F = (F \cap E) \cup (F \cap E^c)$ e $E \cup F = E \cup (F \cap E^c)$

  *(abbiamo scritto gli eventi $F$ ed $E \cup F$ come unione di eventi incompatibili).*

  $\Rightarrow \mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E \cup (F \cap E^c)) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \cap E^c)$ *(P.2 additiv.finita)*

  $\Rightarrow \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F \cap E) + \mathbb{P}(F \cap E^c)$ *(P.2 additiv.finita)*

  Sostituendo, si ricava la P.5

**Generalizziamo** la proprietà **P.5**

$$\mathbb{P}(E \cup F \cup G) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(E \cap F) - \mathbb{P}(E \cap G) - \mathbb{P}(F \cap G) + \mathbb{P}(E \cap F \cap G)$$

- Dato che $E \cup F \cup G = E \cup (F \cup G)$ *(proprietà associativa)*,

utilizzando la P.5 si ottiene

$$\mathbb{P}(E \cup F \cup G) = \mathbb{P}(E \cup (F \cup G)) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \cup G) - \mathbb{P}(E \cap (F \cup G))$$

poiché $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$ *(proprietà distributiva)*

$$= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(F \cap G) - \mathbb{P}((E \cap F) \cup (E \cap G))$$

Utilizzando la P.5 nell'ultimo termine $(*)$ e sostituendo, si ottiene la generalizzazione.

$$(*) \quad \mathbb{P}((E \cap F) \cup (E \cap G)) = \mathbb{P}((E \cap F) + \mathbb{P}(E \cap G) - \mathbb{P}(E \cap F \cap G)$$

# Principio di inclusione-esclusione

La generalizzazione della proprietà P.5 ad un numero *n* di eventi si chiama ***Principio di inclusione-esclusione***

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i:1}^{n} E_i) = \sum_{i:1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(E_i \cap E_{\cap} E_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(\bigcap_{i:1}^{n} E_i)$$

Lasciamo la dimostrazione per esercizio (*suggerimento: procedere per induzione, i.e. è vera per* $n = 2$*, supporre la relazione vera per n eventi e dimostrarla per* $n + 1$).

Vediamo un'applicazione: ***Problema delle corrispondenze***.

Esempio: N coppie (uomo/donna) vanno ad una lezione di tango argentino. Supponendo che le coppie di ballo si formino casualmente, si calcoli la probabilità che

1. nessun uomo stia ballando con la *propria* partner;
2. esattamente *K* uomini stiano ballando con la *propria* partner.

# Probabilità Uniforme

Se $S$ è uno spazio campionario *finito*, i.e. $\#(S) = N$ e $S = \{s_1, ...s_N\}$, e gli $N$ eventi elementari sono *equiprobabili*, allora

- $\mathbb{P}(s_i) = \frac{1}{N} \quad i : 1, \ldots, N.$
- Per ogni evento $E \Rightarrow \quad \mathbb{P}(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)}$.

**Esempi:**

1. Qual è la probabilità che lanciando due dadi si ottenga 7 sommandone i due risultati? e la probabilità che lanciandone tre la somma sia 12?
2. Un'urna contiene 6 palline bianche e 5 palline nere. Se ne estraggono 3 a caso. Qual è la probabiltà che una sia bianca e le altre due nere?
3. Un'urna contiene $n$ palline di cui una è speciale. Si fanno $k$ estrazioni senza reimmissione. Qual è la probabilità di aver estratto la pallina speciale?

# Probabilità Uniforme: Esempi

4. Due dadi equi vengono lanciati ripetutamente. Qual è la probabilità che il risultato “somma 5” arrivi prima di “somma 7”?
5. Ci sono *n* persone in una stanza. Qual è la probabilità che almeno 2 di loro festeggino il compleanno nello stesso giorno? (Supponiamo che siano nati in anni non bisestili e che la probabilità di essere nato in un dato giorno sia 1/365).
6. Poker: Una mano di poker è formata da 5 carte scelte dalle 52 del mazzo di carte francesi. Calcolare la probabilità di avere i seguenti punti “serviti”:
   - scala (reale|semplice);
   - poker;
   - full;
   - colore;
   - tris;
   - doppia coppia.

# Continuità

**Def.** Una successione di eventi si dice crescente se $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \ldots$.
In tal caso, definiamo $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n:1}^{\infty} E_n$.
Una successione di eventi si dice decrescente se $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \ldots$.
In tal caso, definiamo $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n:1}^{\infty} E_n$.

**Prop.** Se $\{E_n, n \geq 1\}$ è una successione di eventi crescente (o decrescente), allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} E_n).$$

▷ Dimostriamo il caso in cui la successione $\{E_n, n \geq 1\}$ è crescente.

- Definiamo una *successione ausiliaria* $\{F_n, n \geq 1\}$:
  $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 \cap E_1^c$, e così via, $F_n = E_n \cap E_{n-1}^c$ per $n > 1$.
- $F_n$ sono a due a due incompatibili e $\bigcup_{n:1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n:1}^{\infty} E_n$ e $\bigcup_{n:1}^{m} F_n = \bigcup_{n:1}^{m} E_n = E_m$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} E_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n:1}^{\infty} E_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n:1}^{\infty} F_n) = \sum_{n:1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n:1}^{m} \mathbb{P}(F_n)$$

Notiamo $\sum_{n:1}^{m} \mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n:1}^{m} F_n) = \mathbb{P}(E_m)$ da cui il risultato.

- Se $\{E_n, n \geq 1\}$ è *decrescente* si utilizza il precedente risultato per la successione (*crescente*) degli $E_n^c$ e la formula di De Morgan.