F. Fagnani, A. Tabacco e P. Tilli

Introduzione all'Analisi Complessa e Teoria delle distribuzioni

6 aprile 2006

5

Trasformata di Fourier

5.1 Introduzione

5.2 Trasformata di Fourier di funzioni

Le serie di Fourier non sono utilizzabili per rappresentare segnali non periodici. Una delle conseguenze è l'impossibilità di utilizzarle per risolvere equazioni alle derivate parziali definite su domini non limitati come ad esempio il caso della corda vibrante infinita. Le trasformate di Fourier che introdurremo in questo capitolo sono una naturale estensione delle serie di Fourier al caso di segnali non periodici e hanno importanti applicazioni proprio sul tipo di equazioni alle derivate parziali alle quali accennavamo.

Facciamo prima alcune considerazioni informali che guideranno però le nostre derivazioni successive. Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Fissato $T > 0$ sia f_T la funzione ottenuta estendendo per T-periodicità la restrizione di f all'intervallo $[-T/2, T/2]$. Supponendo che $f_T \in \mathcal{C}_T$ possiamo allora scrivere la sua rappresentazione in serie di Fourier complessa come

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t}, \qquad t \in [-T/2, T/2]$$

dove

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}\,dt$$

(il limite della serie deve intendersi in senso quadratico ma non ci preoccupiamo di questo nelle considerazioni informali seguenti). Possiamo dunque scrivere, se $t \in [-T/2, T/2]$,

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}\,dt\right] e^{ik\frac{2\pi}{T}t}$$

Con un po' di fantasia il secondo membro della formula sopra può essere interpretato, per t fissato, come la somma di Riemann relativa ad una partizione uniforme di intervalli di ampiezza $1/T$ dall'intervallo di integrazione $(-\infty, +\infty)$ della funzione

$$g_T(\gamma) = \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi ik\gamma t}\,dt\right] e^{2\pi ik\gamma t}$$

che, con un po' di fortuna, per $T \to +\infty$ dovrebbe convergere all'integrale della funzione limite

$$g_\infty(\gamma) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ik\gamma t}\,dt\right] e^{2\pi ik\gamma t}$$

così da ottenere

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi ik\gamma t}\,dt\right] e^{2\pi ik\gamma t} \tag{5.1}$$

Naturalmente il procedimanto non è rigoroso in quanto le somme di Riemann convergono su intervalli chiusi e limitati ed in questo caso si sta anche contemporaneamente facendo il limite della funzione integranda; le cose in effetti possano andare male in quanto già l'integrale più interno potrebbe non esistere affatto come integrale improprio (ad esempio se f in partenza era periodica). Tuttavia questo suggerisce che se f sarà scelta 'buona' (in senso da specificare ma che riguarderà soprattutto le sue proprietà asintotiche), la formula (5.1) dovrebbe valere: in essa f è essenzialmente rappresentata come una somma di un insieme continuo (data dall'integrazione esterna) di componenti periodiche $e^{2\pi ik\gamma t}$ pesate dalla funzione

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi ik\gamma t}\,dt$$

che gioca qui il ruolo analogo ai coefficienti di Fourier e che prende appunto il nome di trasformata di Fourier. In questo senso, tutto questo è la naturale estensione delle serie di Fourier a segnali non periodici.

5.2.1 Definizione e prime proprietà

Come per le serie di Fourier dobbiamo prima definire lo spazio dei segnali che considereremo. Definiamo $\mathcal{R}^1$ come lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue a tratti (nel senso che su ogni intervallo limitato presentano al più un numero finito di discontinuità che possono essere solo salti) ed integrabili assolutamente su tutto $\mathbb{R}$ cioè tali che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt = \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} |f(t)|\,dt < +\infty\,.$$

(si noti che l'ipotesi di continuità tratti implica l'integrabilità su ogni intervallo limitato).

Esempio 5.1 Le funzioni seguenti:

$$\frac{1}{1+t^2}, \qquad e^{-t^2}, \qquad \sin t e^{-|t|}$$

stanno in $\mathcal{R}^1$ (sono continue e assolutamente integrabili). Invece le funzioni,

$$\sin t, \qquad e^t, \qquad , \left(\sin\frac{1}{t}\right) e^{-t^2}$$

non ci stanno (le prime due perchè non sono assolutamente integrabili pur essendo continue, la terza perchè presenta una discontinuità di terza specie in 0.

Introduciamo alcune utili notazioni. Se $a < b$ sono due numeri reali, indichiamo con $I_{[a,b]}$ la *funzione indicatrice* dell'intervallo $[a,b]$, (nota come *funzione porta* nel linguaggio dell'ingegneria elettronica):

$$I_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{se } t \notin [a,b] \end{cases}$$

La funzione indicatrice $I_{[0,+\infty[}$ viene anche indicata col simbolo $H(t)$ ed è nota con il nome di *funzione di Heavyside*.

Esempio 5.2 Le funzioni seguenti:

$$I_{[a,b]}\ (a < b \in \mathbb{R}), \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} I_{[k,k+1[}$$

stanno in $\mathcal{R}^1$ (verificare per esercizio). Invece le funzioni,

$$H(t), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k I_{[1/k,1/(k+1)[}$$

non ci stanno (la prima non è assolutamente integrabile, la seconda perchè presenta un'infinita di salti nell'intervallo limitato $[0,1]$.

Esercizio 5.1 Si dica quali delle seguenti funzioni stanno in $\mathcal{R}^1$:

$$t^4 \sin t e^{-|t|}, \qquad \frac{\sin t}{t^2+1}, \qquad \frac{(\sin t)^2}{t^2}$$

$$\cos(e^{-t^2}), \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} I_{[1/k,1/(k+1)[}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} I_{[1/k,1/(k+1)[}$$

Si noti che $\mathcal{R}^1$ è effettivamente uno spazio vettoriale (combinazione lineare di funzioni in $\mathcal{R}^1$ è ancora una funzione in $\mathcal{R}^1$) e in esso è definita una norma:

$$||f||_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt\,.$$

Si può far vedere che essa gode delle proprietà della norma N1), N2), N3) del Capitolo 1 e da essa si può definire un concetto di distanza come fatto prima. Si noti che a differenza della norma quadratica tuttavia, la norma $||\cdot||_1$ non 'proviene' da un prodotto scalare.

Sia ora $f \in \mathcal{R}^1$ e sia $\gamma \in \mathbb{R}$; consideriamo la funzione

$$t \mapsto f(t)e^{-2\pi i\gamma t}$$

essa è sicuramente una funzione assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$. In effetti essa, essendo ancora continua a tratti, è integrabile su ogni intervallo limitato e si ha

$$|f(t)e^{-2\pi i\gamma t}| = |f(t)|$$

il che implica, poichè $f \in \mathcal{R}^1$, che essa è assolutamente integrabile. In particolare questo implica che ha senso definire la funzione $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ come

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\gamma t}\, dt$$

che è detta la *trasformata di Fourier* della f. Talvolta si usa anche la notazione $\mathcal{F}(f)$ per indicare la trasformata di Fourier della f.

Prima di cominciare ad introdurre le proprietà principali della trasformata di Fourier presentiamo alcuni semplici esempi.

Esempio 5.3 sia $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $\Re e\, \alpha > 0$ e consideriamo la funzione $f(t) = H(t)e^{-\alpha t}$. Essa è continua a tratti e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)e^{-\Re e\, \alpha t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\Re e\, \alpha t}\, dt = \frac{1}{\Re e\, \alpha} < +\infty$$

Dunque sta in $\mathcal{R}^1$. Calcoliamo la sua trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)e^{-\alpha t}e^{-2\pi i\gamma t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+2\pi i\gamma)t}\, dt = \frac{1}{\alpha + 2\pi i\gamma}$$

Esempio 5.4 Sia $T > 0$ e consideriamo la funzione $f(t) = I_{[-T,T]}(t)$. Chiaramente, $f \in \mathcal{R}^1$ e si ha

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{[-T,T]}(t)e^{-2\pi i\gamma t}\, dt = \int_{-T}^{T} e^{-2\pi i\gamma t}\, dt = \frac{e^{2\pi i\gamma T} - e^{-2\pi i\gamma T}}{2\pi i\gamma} = \frac{\sin(2\pi\gamma T)}{\pi\gamma}$$

La trasformata di Fourier gode di alcune basilari proprietà: per prima cosa è un'operazione di tipo lineare; inoltre scambia tutta una serie di operazioni che vengono fatte sul dominio del tempo con altre operazioni nel dominio della frequenza. Il prossimo risultato inizia a presentare questo tipo di risultati molto utili nelle applicazioni.

Teorema 5.5 *Siano $f(t), g(t) \in \mathcal{R}^1$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\gamma_0, t_0 \in \mathbb{R}$. Allora si ha*

1. **linearità**
$$\mathcal{F}(\alpha f(t)+\beta g(t))(\gamma)=\alpha\mathcal{F}(f(t))(\gamma)+\beta\mathcal{F}(g(t))(\gamma).$$
2. **modulazione**
$$\mathcal{F}\left(e^{2\pi i\gamma_0 t}f(t)\right)(\gamma)=\mathcal{F}(f(t))(\gamma-\gamma_0).$$
3. **traslazione**
$$\mathcal{F}(f(t-t_0))(\gamma)=e^{-2\pi i\gamma t_0}\mathcal{F}(f(t))$$

Dimostrazione. Le dimostrazioni sono molto semplici. Vediamo la 3. lasciando le altre per esercizio. Una semplice sostituzione nell'integrale mostra che
$$\mathcal{F}(f(t-t_0))(\gamma)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)e^{-2\pi i\gamma t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-2\pi i\gamma(t+t_0)}\,dt=e^{-2\pi i\gamma t_0}\mathcal{F}(f(t))$$
□

Osservazione: I punti 2. e 3. del teorema precedente mostrano come $\mathcal{F}$ scambi tra di loro le operazioni di moltiplicazione per esponenziali immaginari e di traslazione.

Un altro risultato dello stesso tipo di quelli illustrati nel teorema precedente è il seguente:

Proposizione 5.6 *Sia $f(t)\in\mathcal{R}^1$, allora*
$$\mathcal{F}(f(-t))(\gamma)=\mathcal{F}(f(t))(-\gamma)$$

Dimostrazione.
$$\mathcal{F}(f(-t))(\gamma)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-t)e^{-2\pi i\gamma t}\,dt=-\int_{+\infty}^{-\infty}f(t)e^{2\pi i\gamma t}\,dt$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{2\pi i\gamma t}\,dt=\mathcal{F}(f(t))(-\gamma)$$
□

Da questo segue subito il seguente:

Corollario 5.7 *Sia $f(t)\in\mathcal{R}^1$, allora*

1. *Se $f(t)$ è pari, anche $\hat{f}(\gamma)$ è pari.*
2. *Se $f(t)$ è dispari, anche $\hat{f}(\gamma)$ è dispari.*

Facciamo ora alcune considerazioni sulla struttura in parte reale ed immaginaria della trasformata di Fourier. Sia $f(t)\in\mathcal{R}^1$. La sua trasformata di Fourier può essere scritta come

$$\begin{aligned}\hat{f}(\gamma) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\gamma t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\gamma t)\,dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\gamma t)\,dt\end{aligned} \tag{5.2}$$

Da questa rappresentazione si ottiene il seguente risultato, che tra l'altro implica il corollario precedente.

Corollario 5.8 *Sia $f(t) \in \mathcal{R}^1$, allora*

1. *Se $f(t)$ è pari, allora*
$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\gamma t)\,dt\,.$$
2. *Se $f(t)$ è dispari, allora*
$$\hat{f}(\gamma) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\gamma t)\,dt\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo 1. lasciando 2. per esercizio. Se $f(t)$ è pari, segue che $f(t)\sin(2\pi\gamma t)$ è dispari in t. Dunque,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\gamma t)\,dt = 0$$

Segue allora dalla rappresentazione (5.2) che

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\gamma t)\,dt$$

□

5.2.2 Proprietà di regolarità e di comportamento asintotico

Notiamo alcuni proprietà comuni alle trasformate di Fourier degli Esempi 5.3 e 5.4: si sono ottenute, in entrambi i casi funzioni continue, limitate, infinitesime per $t \to \pm\infty$. Questo non è un caso e lo faremo vedere in generale. Prima tuttavia dobbiamo premettere alcuni richiami tecnici sugli integrali che ci saranno utili nel seguito; sono presentati senza dimostrazione.

Teorema 5.9 (della convergenza dominata di Lebesgue) *Sia $f_n : I \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni in $\mathcal{R}^1$ che convergono puntualmente ad una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ anch'essa in $\mathcal{R}^1$. Supponiamo inoltre che esista $g \in \mathcal{R}^1$ a valori positivi tale che $|f_n(t)| \le g(t)$ per ogni $t \in I$. Allora vale*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt = \int_I f(t)\,dt$$

Questo risultato ha due importanti conseguenze espresse nei seguenti:

Teorema 5.10 (della continuità sotto segno di integrale) *Sia $f(t,x)$ una funzione di due variabili con $t \in I$ e $x \in J$ intervalli. Supponiamo che*

1. *$f(t,x)$ sia continua in x per ogni $t \in I$ e $x \in J$.*
2. *per ogni $x \in J$, $f(t,x)$ sia in $\mathcal{R}^1$ rispetto a t.*
3. *esista $g \in \mathcal{R}^1$ a valori non negativi tale che $|f(t,x)| \le g(t)$ per ogni $t \in I$ e $x \in J$.*

Allora, la funzione di x:

$$\int_I f(t,x)\,dt$$

è continua in x su J.

Dimostrazione. Sia $\overline{x} \in J$ e sia $x_n \to \overline{x}$. Si tratta di far vedere che

$$\int_I f(t,x_n)\,dt \to \int_I f(t,\overline{x})\,dt$$

Sia $f_n(t) = f(t,x_n)$ e $f(t) = f(t,\overline{x})$. Per la continuità della $f(t,x)$ rispetto a x segue che $f_n(t) \to f(t)$ puntualmente in t. Inoltre,

$$|f_n(t)| = |f(t,x_n)| \le g(t)$$

Tutto allora segue dal teorema di convergenza dominata di Lebesgue. □

Il seguente è ancora un'altra applicazione del teorema di convergenza dominata di Lebesgue e la dimostrazione (un po' più complicata di quella del Teorema 8.24) è lasciata per esercizio.

Teorema 5.11 (della derivazione sotto segno di integrale) *Sia $f(t,x)$ una funzione di due variabili con $t \in I$ e $x \in J$ intervalli. Supponiamo che*

1. *$f(t,x)$ sia derivabile in x per ogni $t \in I$ e $x \in J$.*
2. *per ogni $x \in J$, $f(t,x)$ e $f_x(t,x)$ siano in $\mathcal{R}^1$ rispetto a t.*
3. *esista $g \in \mathcal{R}^1$ a valori non negativi tale che $|f_x(t,x)| \le g(t)$ per ogni $t \in I$ e $x \in J$.*

Allora, la funzione di x:

$$\int_I f(t,x)\,dt$$

è derivabile in x su J e si ha

$$\frac{d}{dx}\int_I f(t,x)\,dt = \int_I f_x(t,x)\,dt$$

.

Infine presentiamo il seguente utile risultato.

Proposizione 5.12 *Sia $f(t) \in \mathcal{R}^1$ una funzione derivabile con $f'(t) \in \mathcal{R}^1$. Allora,*

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere, in virtù del teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\, ds$$

dalla quale segue che esiste finito

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = l$$

Supponiamo per assurdo che $l \neq 0$. Allora si ha che $|f(t)| \to |l| > 0$ per $t \to +\infty$; ne consegue che esiste sicuramente t_0 tale che

$$|f(t)| \geq \frac{|l|}{2}, \qquad \forall t \geq t_0$$

Ne segue che

$$\int_{t_0}^t |f(s)|\, ds \geq (t - t_0)\frac{|l|}{2} \to +\infty \text{ per } t \to +\infty$$

il che è assurdo per il fatto che $f(t) \in \mathcal{R}^1$. Quindi $f(t)$ è infinitesima per $t \to +\infty$. Analogamente si dimostra per $t \to -\infty$. □

Osservazione: Se sappiamo soltanto che $f(t) \in \mathcal{R}^1$ non è affatto detto che valga la tesi della Proposizione 8.15. Si consideri infatti:

$$f(t) = \begin{cases} N & \text{se } t = N \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora è facile rendersi conto che $f(t) \in \mathcal{R}^1$ e che infatti si ha $||f||_1 = 0$. D'altra parte $f(t)$ non è infinitesima per $t \to +\infty$ in quanto $f(N) \to +\infty$ per $N \in \mathbb{N} \to +\infty$.

Possiamo ora presentare il seguente risultato:

Teorema 5.13 *Sia $f \in \mathcal{R}^1$. Allora,*

1. *$\hat{f}$ è continua.*
2. *$\hat{f}$ è limitata e $|\hat{f}(\gamma)| \leq ||f||_1$ per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$.*
3. *$\displaystyle\lim_{|\gamma|\to+\infty} \hat{f}(\gamma) = 0$.*

Dimostrazione.

1. Immediata conseguenza del Teorema 8.24.
2.

$$|f(\gamma)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\gamma t}\, dt| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-2\pi i\gamma t}|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = ||f||_1$$

3.Consideriamo il caso particolare in cui f è di classe C^1 su di un intervallo limitato $[a,b]$ e 0 altrove. Si ha allora, integrando per parti

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \int_a^b f(t)e^{-2\pi i\gamma t}\,dt \\ &= f(t)\tfrac{e^{-2\pi i\gamma t}}{-2\pi\gamma}\Big|_a^b + \tfrac{1}{2\pi\gamma}\int_a^b f'(t)e^{-2\pi i\gamma t}\,dt \\ &= \frac{f(a)e^{-2\pi i\gamma a} - f(b)e^{-2\pi i\gamma b}}{2\pi\gamma} + \frac{1}{2\pi\gamma}\hat{f}'(\gamma) \end{aligned}$$

Per $\gamma \to \pm\infty$ l'espressione sopra è infinitesima in quanto per il punto 2. $\hat{f}'(\gamma)$ risulta essere limitata in γ. Il caso generale può essere affrontato approssimando opportunamente la funzione f con funzioni di questo tipo; gli aspetti tecnici sono tuttavia alquanto complicati e non vengono qui riportati. □

La trasformata di Fourier scambia le operazioni di derivazione e di moltiplicazione per la variabile indipendente tra i domini del tempo e della frequenza come mostra il seguente importante risultato.

Teorema 5.14 *Sia $f(t)$ una funzione. Allora si ha,*

1. **derivazione** *Supponendo che $f(t)$ sia in $\mathcal{R}^1$, derivabile con $f'(t) \in \mathcal{R}^1$, si ha che*
$$\mathcal{F}(f'(t))(\gamma) = 2\pi i\gamma\mathcal{F}(f(t))(\gamma)$$
2. **moltiplicazione** *Supponendo che $f(t), tf(t) \in \mathcal{R}^1$, si ha che $\mathcal{F}(f(t))(\gamma)$ è derivabile e si ha*
$$\mathcal{F}(tf(t))(\gamma) = -\frac{1}{2\pi i}\mathcal{F}(f(t))'(\gamma)$$

Dimostrazione.

1. Si ha, utilizzando l'integrazione per parti e la Proposizione 8.15

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f'(t))(\gamma) &= \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M} f'(t)e^{-2\pi i\gamma t}\,dt \\ &= \lim_{M\to+\infty}\left[f(t)e^{-2\pi i\gamma t}\Big|_{-M}^{M} + 2\pi i\gamma\int_{-M}^{M} f(t)e^{-2\pi i\gamma t}\,dt\right] \\ &= \lim_{M\to+\infty}\left[f(M)e^{-2\pi i\gamma M} - f(-M)e^{2\pi i\gamma M}\right] + 2\pi i\gamma\mathcal{F}(f(t))(\gamma) \\ &= 2\pi i\gamma\mathcal{F}(f(t))(\gamma). \end{aligned}$$

2. Si ha, utilizzando il Teorema 8.25

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(tf(t))(\gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-2\pi i\gamma t}\,dt \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\partial}{\partial\gamma}e^{-2\pi i\gamma t}\,dt \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\gamma t}\,dt\,.\end{aligned}$$

□

Corollario 5.15 *Sia $f(t)$ una funzione. Allora si ha,*

1. *Supponendo che $f(t)$ sia in $\mathcal{R}^1$, derivabile k volte con $f'(t),\ldots,f^{(k)}(t)\in\mathcal{R}^1$, si ha che*
$$\mathcal{F}(f^{(k)}(t))(\gamma) = [2\pi i\gamma]^k\mathcal{F}(f(t))(\gamma)$$
2. *Supponendo che $f(t), t^kf(t)\in\mathcal{R}^1$, si ha che $\mathcal{F}(f(t))(\gamma)$ è derivabile k volte rispetto a γ e si ha*
$$\mathcal{F}(t^kf(t))(\gamma) = \left[-\frac{1}{2\pi i}\right]^k \mathcal{F}(f(t))^{(k)}(\gamma)$$

Dimostrazione. Segue da un'applicazione ripetuta del Teorema 5.14. □

Osservazione: Il risultato espresso nel Corollario 5.15 ha importanti implicazioni sul legame tra regolarità di una funzione e comportamento asintotico della trasformata. In effetti segue da 1. che se $f(t)$ è derivabile k volte, $[2\pi i\gamma]^k\mathcal{F}(f(t))(\gamma)$ risulta essere la trasformata di Fourier di $f^{(k)}(t)$ e dunque, per il punto 3. del Teorema 5.13 si ha che essa è infinitesima per $t\to\pm\infty$. Si ha dunque

$$\mathcal{F}(f(t))(\gamma) = o\left(\frac{1}{\gamma^k}\right) \quad \text{per } t\to\pm\infty\,.$$

Il punto 2. del Corollario 5.15 si può invece leggere come una sorta di risultato inverso. Sapendo che $t^kf(t)\in\mathcal{R}^1$ si ottiene che $\mathcal{F}(f(t))(\gamma)$ è derivabile k volte.

Esercizio 5.2 *Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni (dopo aver verificato che stanno in $\mathcal{R}^1$):*

$$\begin{array}{lll} e^{-a|x|}, & H(x)e^{-x}\cos ax, & H(x)e^{-x}\sin ax \\ I_{[0,1]}\cos x, & x^2e^{-x}H(x), & x\sin xI_{[-1,1]} \end{array}$$

5.2.3 L'inversione della trasformata di Fourier

La formula (5.1), se vera, permetterebbe di ricostruire f dalla sua trasformata di Fourier $\hat{f}$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i \gamma t} \, d\gamma \tag{5.3}$$

Questa formula di inversione in generale non potrà valere in quanto $\hat{f}(\gamma)$ potrebbe non essere integrabile. Inoltre se $f(t), g(t)$ sono due funzioni in $\mathcal{R}^1$ che coincidono ovunque tranne che in un insieme finito di punti, si ha che $\hat{f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma)$ per ogni γ. Questo implica che (5.3) non può valere simultaneamente per f e g nei punti t dove esse differiscono. Problema simile lo avevamo notato nello studiare la convergenza puntuale delle serie di Fourier. Come allora però si possono ottenere dei risultati positivi di inversione.

Il più importante risultato che presentiamo è il seguente:

Teorema 5.16 *Sia $f(t) \in \mathcal{R}^1$ una funzione per la quale esistono ovunque derivate destra e sinistra da intendersi come i limiti (supposti finiti)*

$$\lim_{t \to t_0+} \frac{f(t) - f(t_0+)}{t - t_0}, \qquad \lim_{t \to t_0-} \frac{f(t) - f(t_0-)}{t - t_0}.$$

Allora esiste

$$\lim_{M \to +\infty} \int_{M}^{M} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i \gamma t} \, d\gamma = \frac{f(t+) + f(t-)}{2} \tag{5.4}$$

Dimostrazione. Presenteremo in più passi la dimostrazione di questo risultato che contiene una serie di idee e tecniche molto interessanti.

Utilizzando il teorema di scambio per integrali doppi assolutamente convergenti si ha

$$\begin{aligned}
\int_{M}^{M} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i \gamma t} \, d\gamma &= \int_{M}^{M} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-2\pi i \gamma s} \, ds \right] e^{2\pi i \gamma t} \, d\gamma \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \left[\int_{M}^{M} e^{2\pi i \gamma (t-s)} \, d\gamma \right] ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{e^{2\pi i M(t-s)} - e^{-2\pi i M(t-s)}}{\pi(t-s)} \, ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{\sin 2\pi M(t-s)}{\pi(t-s)} \, ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{\sin 2\pi M(s-t)}{\pi(s-t)} \, ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+u) \frac{\sin 2\pi M u}{\pi u} \, ds
\end{aligned} \tag{5.5}$$

(la penultima eguaglianza segue dalla parità della funzione $(\sin 2\pi Mt)/t$, mentre l'ultima si ottiene con il cambiamento di variabile $u = t - s$.)

Fissiamo ora $\delta > 0$ e decomponiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+u)\frac{\sin 2\pi Mu}{\pi u}\,ds = \int_{|u|<\delta} f(t+u)\frac{\sin 2\pi Mu}{\pi u}\,ds + \int_{-\delta}^{+\delta} f(t+u)\frac{\sin 2\pi Mu}{\pi u}\,ds \tag{5.6}$$

Si noti ora che

$$\int_{|u|<\delta} f(t{+}u)\frac{\sin 2\pi Mu}{\pi u}\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t+u)}{\pi u} I_{|u|<\delta} \sin 2\pi Mu\,du = -\Im m\,\mathcal{F}\left(\frac{f(t+u)}{\pi u} I_{\{|u|<\delta\}}\right)$$

D'altra parte, la funzione

$$u \mapsto \frac{f(t+u)}{\pi u} I_{|u|<\delta}$$

sta in $\mathcal{R}^1$ e quindi la sua trasformata di Fourier è infinitesima all'infinito (vedi Teorema 5.13). Dunque,

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{|u|<\delta} f(t+u)\frac{\sin 2\pi Mu}{\pi u}\,ds = 0 \tag{5.7}$$

Lavoriamo ora sull'altro integrale. Lo riscriviamo nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\delta}^{+\delta} f(t+u)\frac{\sin 2\pi Mu}{\pi u}\,ds = \int_{0}^{+\delta} f(t+u)\frac{\sin 2\pi Mu}{\pi u}\,ds + \int_{-\delta}^{0} f(t+u)\frac{\sin 2\pi Mu}{\pi u}\,ds \\
&= \int_0^\delta \frac{f(t+u)-f(t+)}{\pi u}\sin 2\pi Mu\,ds + \int_{-\delta}^0 \frac{f(t+u)-f(t-)}{\pi u}\sin 2\pi Mu\,ds \\
&+ \int_0^\delta f(t+)\frac{\sin 2\pi Mu}{\pi u}\,ds + \int_{-\delta}^0 f(t-)\frac{\sin 2\pi Mu}{\pi u}\,ds
\end{aligned} \tag{5.8}$$

I primi due integrali convergono a 0 per $M \to +\infty$ e si vede con la stessa tecnica utilizzata prima: si noti infatti che la funzione

$$u \mapsto \frac{f(t+u)-f(t+)}{\pi u} I_{[0,\delta]}(u)$$

è continua, se δ è stato scelto sufficientemente piccolo, per l'ipotesi fatta sull'esistenza della derivata destra ed è assolutamente integrabile in quanto funzione continua su un intervallo chiuso e limitato. Tutto allora segue ancora dal punto 3. del Teorema 5.13. Analogamente si ragiona per l'altro. Si ha dunque

$$
\begin{aligned}
\lim_{M\to+\infty}\int_{-\delta}^{+\delta} f(t+u)\frac{\sin 2\pi M u}{\pi u}\,ds &= \lim_{M\to+\infty}\int_{0}^{+\delta} f(t+)\frac{\sin 2\pi M u}{\pi u}\,ds + \int_{-\delta}^{0} f(t-)\frac{\sin 2\pi M u}{\pi u}\,ds \\
&= f(t+)\lim_{M\to+\infty}\int_{0}^{+\delta}\frac{\sin 2\pi M u}{\pi u}\,ds + f(t-)\lim_{M\to+\infty}\int_{-\delta}^{0}\frac{\sin 2\pi M u}{\pi u}\,ds \\
&= [f(t+)+f(t-)]\lim_{M\to+\infty}\textstyle\int_0^{+\delta}\frac{\sin 2\pi M u}{\pi u}\,ds \\
&= [f(t+)+f(t-)]\lim_{M\to+\infty}\tfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi M\delta}\frac{\sin x}{x}\,dx \\
&= [f(t+)+f(t-)]\lim_{M\to+\infty}\tfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{M}\frac{\sin x}{x}\,dx
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Da (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9) segue che

$$\lim_{M\to+\infty}\int_{M}^{M}\hat f(\gamma)e^{2\pi i\gamma t}\,d\gamma = [f(t+)+f(t-)]\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^M\frac{\sin x}{x}\,dx$$

La dimostrazione è dunque completa se facciamo vedere che

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

Questo è vero e sarà dimostrato nelle considerazioni successive. □

Definiamo la seguente famiglia di funzioni:

$$D_N(t)=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Lemma 5.17

$$\int_0^\pi D_N(t)\,dt=\frac{\pi}{2}=\int_{-\pi}^0 D_N(t)\,dt$$

Dimostrazione. Vale la seguente eguaglianza

$$D_N(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^N\cos kt$$

che si può ottenere semplicemente scrivendo la serie di Fourier di $D_N(t)$ (farlo per esercizio). Ne segue che,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi D_N(t)\,dt &= \int_0^\pi\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^N\cos kt\right]dt \\
&= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^N\int_0^\pi\cos kt\,dt=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

L'altra eguaglianza segue per parità. □

Lemma 5.18
$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione
$$t \mapsto \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right] I_{[0,\pi]}$$

Essa è in $\mathcal{R}^1$ (si dica il perchè). Dunque sempre in virtù del punto 3. del Teorema 5.13 si ha che
$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^\pi \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right] \sin\left(N+\frac{1}{2}\right) t\,dt = 0$$
Segue dunque dal Lemma 5.17 che
$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$
Si noti ora che
$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt = \int_0^{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$
Quindi alla fine abbiamo ottenuto che
$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Questo non è ancora il risultato che volevamo perchè ci stiamo limitando a valutare la convergenza dell'integrale improprio lungo la particolare successione $(N+\frac{1}{2})\pi$. Tuttavia, si noti che se $M \in [(N-\frac{1}{2})\pi, (N+\frac{1}{2})\pi]$ si ha che
$$\left|\int_0^{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^M \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \int_{\left(N-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx \leq \frac{\pi/2}{\left(N-\frac{1}{2}\right)\pi} \to 0$$

per $N \to +\infty$. Con questa ultima stima si può ora dimostrare (per esercizio lo si faccia) che effettivamente esiste il limite
$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$
□

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua a tratti per la quale esiste finito
$$\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^M f(t)e^{-2\pi i\gamma t}\,dt$$

per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$. In tal caso, questo limite si definisce la trasformata di Fourier di $f(t)$ estendendo la definizione iniziale che era stata data solo per funzioni assolutamente integrabili. Si noti che questo è in generale più debole che richiedere l'esistenza dei due limiti separatamente

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M f(t)e^{-2\pi i\gamma t}\,dt, \qquad \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^0 f(t)e^{-2\pi i\gamma t}\,dt\,.$$

Si può dimostrare che questa estensione della trasformata di Fourier gode ancora delle proprietà espresse nel Teorema 5.5, nella Proposizione 5.6, nei Corollari 5.7 e 5.8, e, con opportune modifiche nelle ipotesi, anche quelle nel Teorema 5.14.

Con questa definizione, il teorema di inversione può riformularsi nel modo seguente: se $f \in \mathcal{R}^1$ ammette derivate sinistra e destra in ogni punto si ha che

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)(-t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2} \tag{5.10}$$

In particolare se f è anche continua, si ha

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)(-t) = f(t) \tag{5.11}$$

cioè trasformando due volte con Fourier e operando un inversione di segno nella variabile indipendente si riottiene, sotto quelle ipotesi, la funzione iniziale.

Esempio 5.19 Sappiamo che

$$\mathcal{F}\left(I_{[-T,T]}\right)(\gamma) = \frac{\sin(2\pi\gamma T)}{\pi\gamma}$$

Segue dunque dal teorema di inversione che

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(2\pi\gamma T)}{\pi\gamma}\right)(t) = I_{[-T,T]}(t), \quad \forall t \neq \pm T$$

dalla quale segue anche, prendendo $T = 1/2\pi$ e scambiando t e γ che

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{t}\right)(t) = \pi I_{[-\frac{1}{2\pi},T\frac{1}{2\pi}]}(t), \quad \forall t \neq \pm\frac{1}{2\pi}\,.$$

5.2.4 La teoria quadratica

Il principale risultato di convergenza per le serie di Fourier era in termini della norma quadratica. Anche per le trasformate di Fourier i risultati più eleganti e generali si possono stabilire proprio in norma quadratica; vi sono tuttavia una serie di difficoltà tecniche in più che motivano il fatto di aver presentato questi risultati in un secondo tempo e praticamente senza alcuna dimostrazione.

Definiamo innanzitutto $\mathcal{R}^2$ come lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue a tratti e assolutamente quadrato integrabili, cioè tali che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt < +\infty$$

$\mathcal{R}^2$ è uno spazio vettoriale di funzioni dotato della cosidetta *norma quadratica*:

$$||f||_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

Si verifichi che essa soddisfa alle proprietà solite delle norme espresse nel capitolo sulle serie di Fourier.

Osservazione 1: $\mathcal{R}^2$, se limitato alle funzioni a valori reali ammette un prodotto scalare dato da

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) \, dt$$

Tale integrale è in effetti assolutamente convergente; vale infatti la diseguaglianza di Schwartz (che si dimostra con la stessa tecnica di quella dimostrata nel capitolo sulle serie di Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||g(t)| \, dt \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

Se invece consideriamo anche funzioni a valori complessi, l'oggetto giusto da considerare è il cosiddetto *prodotto hermitiano*

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)} \, dt$$

Si noti che in ogni caso si ha

$$||f||_2 = (f, f)^{1/2}$$

Osservazione 2: Vi sono funzioni che stanno in $\mathcal{R}^1$ e non in $\mathcal{R}^2$ e viceversa come mostrano le considerazioni seguenti. Consideriamo infatti le funzioni:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} I_{\left[n, n+\frac{1}{n^2}\right[}, \qquad g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} I_{[n, n+1[}$$

Allora,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \end{aligned}$$

Se $f(t) \in \mathcal{R}^2$, potrebbe non aver senso l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \gamma t} \, dt$$

in quanto, in virtù dell'Osservazione 2, la funzione integranda potrebbe non essere integrabile. Tuttavia vale il seguente fatto:

Teorema 5.20 *Sia $f(t) \in \mathcal{R}^2$. Allora esiste sempre una funzione $\hat{f}(\gamma)$ tale che*

$$\lim_{M \to +\infty} \left\| \int_{-M}^{M} f(t) e^{-2\pi i \gamma t} \, dt - \hat{f}(\gamma) \right\|_2 = 0$$

La funzione $\hat{f}(\gamma)$ introdotta nel teorema precedente è detta, anche in questo caso la *trasformata di Fourier* della $f(t)$ e spesso impropriamente si scrive

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \gamma t} \, dt$$

anche se l'integrale sopra potrebbe non esistere e va dunque in generale inteso come il limite in senso della norma quadratica di

$$\int_{-M}^{M} f(t) e^{-2\pi i \gamma t} \, dt$$

per $M \to +\infty$. Useremo anche in questo caso la scrittura alternativa $\mathcal{F}(f)$ per indicare talvolta la trasformata di Fourier di f.

Osservazione 3: Se $f(t) \in \mathcal{R}^1 \cap \mathcal{R}^2$, allora si può far vedere che la $\hat{f}(\gamma)$ definita nel Teorema 5.20 coincide con la vecchia definizione data per funzioni in $\mathcal{R}^1$.

Se $f(t) \in \mathcal{R}^2$, non è in generale garantito alcun tipo di regolarità per la $\hat{f}(\gamma)$. Con un'opportuna estensione della teoria dell'integrazione di Riemann si può tuttavia mostrare come $\hat{f}(\gamma)$ sia ancora una funzione quadrato integrabile e valga il seguente fondamentale risultato:

Teorema 5.21 *Sia $f(t) \in \mathcal{R}^2$. Allora,*

1. **Parseval**
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\gamma)|^2 \, d\gamma$$
2. **Inversione**
$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) = f(-t)$$
dove l'eguaglianza è da intendersi nel seguente senso:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) - f(-t)|^2 \, dt = 0$$

Osservazione 4: Vale la pena di dare una definizione formale al senso di eguaglianza espresso nel punto 2. del Teorema 5.21. Date due funzioni $f(t)$ e $g(t)$ diremo che esse sono *quasi ovunque eguali* se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g(t)| \, dt = 0$$

(naturalmente dobbiamo ipotizzare che l'integrale abbia senso). Dunque il punto 2. precedente dice che

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) = f(-t)$$

quasi ovunque. Si noti che questo non è affatto in contrasto con la formula (5.4) in quanto, se f è continua a tratti, si ha che

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = f(t)$$

quasi ovunque.

5.2.5 Trasformate di funzioni rapidamente decrescenti

Introduciamo ora una classe di funzioni che ci sarà utile nel seguito del corso: le funzioni rapidamente decrescenti. Una funzione $f(t)$ si dice *rapidamente decrescente* se essa è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e se le con tutte le sue derivate tendono a 0 a $\pm\infty$ con ordine superiore ad ogni polinomio cioè formalmente se

$$\lim_{|t|\to+infty} t^p f^{(q)}(t) = 0, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

L'insieme delle funzioni rapidamente decrescenti viene indicato con il simbolo $\mathcal{S}$. Non è difficile mostrare che $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale di funzioni. Esso risulta inoltre chiuso rispetto ad altre operazioni. Vale infatti il seguente riultato:

Proposizione 5.22 *Sia $f(t) \in \mathcal{S}$. Allora, per ogni $r, s \in \mathbb{N}$ si ha che*

$$t^r f(t) \in \mathcal{S}, \qquad f^{(s)}(t) \in \mathcal{S}$$

Dimostrazione. Il fatto che $f^{(s)}(t)$ stia in $\mathcal{S}$ segue immediatamente dalla definizione. Per l'altra, si noti che, detta $g(t) = t^r f(t$, si ha, per la formula di derivazione di Leibnitz,

$$t^p g^{(q)}(t) = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k t^{r-k+p} f^{(q-k)}(t)$$

dove

$$\alpha_k = \binom{q}{k} r(r-1)\cdots(r-k+1)$$

Sapendo che $f(t) \in \mathcal{S}$, segue subito che $t^p g^{(q)}(t) \to 0$ se $|t| \to +\infty$. □

Vale inoltre la seguente

Proposizione 5.23 *Ogni $f(t) \in \mathcal{S}$ sta in $\mathcal{R}^1$.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $(t^2+1)f(t)$. Essa è continua e infinitesima all'infinito. Segue dunque che essa è una funzione limitata. Esiste cioè $M>0$ tale che $|(t^2+1)f(t)| \le M$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dunque,

$$|f(t)| \le M \frac{1}{t^2+1}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per onfronto, questo implica che $f(t)$ è assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$. □

Esempio 5.24 Si considerino le seguenti funzioni:

$$f_1(t) = e^{-at^2}, \quad f_2(t) = \frac{1}{t^2+1}, \quad f_3(t) = e^{-|t|}$$

Allora $f_1(t) \in \mathcal{S}$ se $a>0$ (lo si dimostri). $f_2(t)$ è $\mathcal{C}^\infty$ ma non sta in $\mathcal{S}$ in quanto

$$\lim_{|t|\to+\infty} t^2 \frac{1}{t^2+1} = 1$$

$f_3(t)$ invece non sta in $\mathcal{S}$ poichè non è una funzione in $\mathcal{C}^\infty$ (ha un punto angoloso per $t=0$).

Sulle funzioni rapidamente decrescenti, la trasformata di Fourier ha un ottimo comportamenteo. Si ha infatti il seguente risultato:

Teorema 5.25 *Sia $f(t) \in \mathcal{S}$. Allora $\hat{f}(\gamma) \in \mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Segue dal Corollario 5.15 che $\hat{f}(\gamma)$ ammette derivate di qualunque ordine, è cioè di classe $\mathcal{C}^\infty$ e si ha

$$\mathcal{F}(f(t))^{(q)}(\gamma) = (-2\pi i)^q \mathcal{F}((t^q f(t))(\gamma) \tag{5.12}$$

D'altra parte, sempre dal Corollario 5.15 applicato ora alla funzione $t^k f(t)$ (che sta ancora in $\mathcal{S}$ in virtù della Proposizione 5.22) segue che

$$\mathcal{F}((t^k f(t))^{(p)})(\gamma) = (2\pi i)^p \gamma^p \mathcal{F}(t^k f(t))(\gamma) \tag{5.13}$$

Mettendo insieme le eguaglianze (5.12) e (5.13) si ottiene dunque che

$$\gamma^p \mathcal{F}(f(t))^{(q)}(\gamma) = (-1)^q (2\pi i)^{q-p} \mathcal{F}((t^k f(t))^{(p)})(\gamma) \tag{5.14}$$

Poichè la funzione $(t^k f(t))^{(p)}$ sta in $\mathcal{S}$ in virtù della Proposizione 5.22), essa sta anche in $\mathcal{R}^1$ in virtù della Proposizione 5.23). Dunque per il punto 3. del Teorema 5.13 si ha che $\mathcal{F}((t^k f(t))^{(p)})(\gamma)$ è infinitesima per $|\gamma| \to +\infty$. Segue dunque dall'eguaglianza (5.14) che anche $\gamma^p \mathcal{F}(f(t))^{(q)}(\gamma)$è infinitesima per $|\gamma| \to +\infty$. Poichè questo vale qualunque siano $p, q \in \mathbb{N}$, questo implica la tesi. □

Segue dal Teorema 5.16 di inversione che se $f(t) \in \mathcal{S}$ si ha che

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f(t)) = f(-t)$$

Ne segue che, $\mathcal{F}$ è una trasformazione invertibile da $\mathcal{S}$ in se stesso.

Presentiamo ora un esempio notevole di trasformata di una funzione in $\mathcal{S}$.

Esempio 5.26 Sia $f(t) = e^{-\alpha t^2}$ dove $\alpha > 0$. Sappiamo già che questa è una funzione in $\mathcal{S}$. Calcoliamone la sua trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-2\pi i \gamma t}\, dt$$

Derivando rispetto a γ ed utilizzando il Teorema 5.14, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\hat{f}'(\gamma) &= (-2\pi i)\widehat{tf(t)}(\gamma) \\
&= (-2\pi i)\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\alpha t^2} e^{-2\pi i \gamma t}\, dt \\
&= (-2\pi i)\frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\alpha t^2}\right)' e^{-2\pi i \gamma t}\, dt \\
&= \frac{\pi i}{\alpha}\widehat{f'}(\gamma) = \frac{\pi i}{\alpha}(2\pi i \gamma)\hat{f}(\gamma) = -\frac{2\pi^2}{\alpha}\gamma \hat{f}(\gamma)
\end{aligned}$$

Dunque $\hat{f}(\gamma)$ soddisfa l'equazione differenziale:

$$\hat{f}'(\gamma) = -\frac{2\pi^2}{\alpha}\gamma \hat{f}(\gamma)\,.$$

Integrando si ottiene

$$\hat{f}(\gamma) = e^{\frac{2\pi^2}{\alpha}\gamma^2}\hat{f}(0)$$

Rimane perciò soltanto da calcolare $\hat{f}(0)$:

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

(abbiamo operato la sostituzione $x = \sqrt{\alpha} t$). Si tratta quindi alla fine di calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Sappiamo che la funzione integranda non ammette primitive esprimibili per mezzo di funzioni elemenatri. Tuttavia l'integrale improprio si riesce a calcolare esattamente con un trucco che consiste nel considerare un integrale doppio e passare in coordinate polari. Ecco il trucco:

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi
\end{aligned}$$

Quindi si ha che $I = \sqrt{\pi}$ e dunque

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Si ottiene dunque alla fine

$$\hat{f}(\gamma) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\gamma^2}$$

Si noti in particolare che

$$f(t) = e^{-\pi t^2} \quad \Rightarrow \quad f(\gamma) = e^{-\pi\gamma^2}$$

5.2.6 Convoluzioni e loro trasformate

L'operazione di convoluzione ha già fatto la sua comparsa in vari punti del corso ed è arrivato il momento di presentarla in modo un po' più formale.

Date due funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, si definisce la *convoluzione* di f e g come la funzione indicata $f * g$ data da

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)\, ds$$

nell'ipotesi che, fissato un qualunque $t \in \mathbb{R}$, la funzione

$$s \mapsto f(t-s)g(g)$$

sia integrabile. Le ipotesi da fare sulle f e g che assicurino tale integrabilità possono essere di vario tipo. Ecco alcune possibilità.

Proposizione 5.27 *$f * g$ esiste se siamo in uno dei seguenti casi:*

(a) f continua a tratti e limitata, $g \in \mathcal{R}^1$.
(b) $f, g \in \mathcal{R}^2$.
(c) f e g continue a tratti e tali che esista $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(t) = g(t) = 0$ per ogni $t < t_0$.
(d) f e g continue a tratti e tali che esista $M > 0$ tale che $f(t) = 0$ per ogni t tale che $|t| \geq M$.

Dimostrazione. (a): Si osservi che, qualunque sia $t \in \mathbb{R}$:

$$|f(t-s)g(s)| \leq M|g(s)|$$

dove M è una costante opportuna che limita $|f(t)|$. Questo implica, per confronto, che $f(t-s)g(s)$ è assolutamente integrabile rispetto ad s.

(b):

$$s \mapsto f(t-s), \quad s \mapsto g(s)$$

sono due funzioni di classe $\mathcal{R}^2$ (si dica perchè lo è la prima). Dunque utilizzando la diseguaglianza di Schwartz si ha che il loro prodotto è integrabile.

(c): Per le ipotesi fatte $s \mapsto f(t-s)g(s)$ è eguale a 0 se $s < t_0$ e se $t - s < t_0$, quindi se $s > t - t_0$. Essendo poi essa una funzione continua a tratti, risulta dunque integrabile su $\mathbb{R}$.

(d): Stesse considerazioni che nel caso (c) (svolgerle per esercizio).

□

Osservazione 1: Nel caso (c) della Proposizione precedente supponendo $t_0 = 0$, si ha che la convoluzione può essere scritta nella forma particolare:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds$$

Il ruolo della f e della g può essere interscambiato, come mostra il seguente risultato:

Proposizione 5.28 *Siano f e g due funzioni. Se esiste $f * g$ esiste anche $g * f$ e si ha*

$$f * g = g * f\,.$$

Dimostrazione. Basta operare la sostituzione $t - s = r$ nell'integrale di convoluzione. Verificare per esercizio. □

Oltre all'esistenza del prodotto di convoluzione è spesso importante avere informazioni su che tipo di funzione sia il prodotto di convoluzione. I risultati successivi vanno in questo senso:

Proposizione 5.29 *Siano f e g due funzioni. Allora*

1. *Se $f \in \mathcal{R}^1$ e $g \in \mathcal{R}^1$ ed è limitata, allora $f * g \in \mathcal{R}^1$ ed è limitata.*
2. *Se $f \in \mathcal{R}^1$ e $g \in \mathcal{R}^2$ ed è limitata, allora $f * g \in \mathcal{R}^2$ ed è limitata.*

Osservazione 2: Con riferimento alla dimostrazione del risultato precedente si noti che, nel caso 1. abbiamo in effetti dimostrato che

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1\,.$$

Nel punto 2. si potrebbe invece dimostrare che vale

$$||f * g||_2 \leq ||f||_1 ||g||_2\,.$$

Arriviamo ora al rapporto tra convoluzione e trasformate di Fourier. Vale il seguente importante risultato:

Teorema 5.30 *Sia $f \in \mathcal{R}^1$ e $g \in \mathcal{R}^1$ (oppure in $\mathcal{R}^2$) e limitata. Allora si ha:*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso in cui entrambe le funzioni sono in $\mathcal{R}^1$. Si ha che,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g)(\gamma) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)\,dse^{-2\pi\gamma t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)e^{-2\pi\gamma(t-s)}g(s)e^{-2\pi\gamma s}\,ds\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)e^{-2\pi\gamma(t-s)}g(s)e^{-2\pi\gamma s}\,dt\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)e^{-2\pi\gamma(t-s)}\,dtg(s)e^{-2\pi\gamma s}\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)e^{-2\pi\gamma r}\,drg(s)e^{-2\pi\gamma s}\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)e^{-2\pi\gamma r}\,dr\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{-2\pi\gamma s}\,ds \\
&= \mathcal{F}(f)(\gamma)\mathcal{F}(g)(\gamma)
\end{aligned}$$

□

Osservazione 3: Alla luce di queste nuove considerazioni forniamo ora un'altra derivazione ed un'altra interpretazione dell'eguaglianza (5.5): Consideriamo la funzione di $\mathcal{R}^2$:

$$t \mapsto K_M(t) = \frac{\sin 2\pi M t}{\pi t} \tag{5.15}$$

Sappiamo che $\widehat{K_M} = I_{[-M,M]}$. Segue dunque da Teorema 5.30 e dalla Proposizione 8.31 che, se $f \in \mathcal{R}^1$

$$\widehat{K_M * f} = \widehat{K_M}\cdot\hat{f} = \hat{f}\cdot I_{[-M,M]} \tag{5.16}$$

che può essere interpretata nel modo seguente: la convoluzione di una funzione f con il nucleo K_M ha l'effetto, nel dominio della frequenza, di tagliare tutte le frequenze γ con $|\gamma| \geq M$. Si noti che prendendo la trasformata di Fourier di ambo i membri di (5.16) ed utilizzando il Teorema 5.21, si ottiene nuovamente l'eguaglianza (5.5).

5.3 Trasformata di Fourier di distribuzioni a supporto compatto

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione in $\mathcal{R}^1(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier si definisce come

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\omega x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Per generalizzare il concetto di trasformata di Fourier alle distribuzioni, saremmo tentati di scrivere l'espressione sopra come,

$$\hat{f}(\omega) =< T_f(x), e^{-2\pi i\omega x} >$$

e di definire la trasformata di Fourier di una qualunque distribuzione T come

$$\hat{T}(\omega) =< T(x), e^{-2\pi i\omega x} > \, . \tag{5.17}$$

Si noti tuttavia come la funzione

$$x \mapsto e^{-2\pi i\omega x} \tag{5.18}$$

non sia una funzione test: primo perché non è a valori reali ma complessi, secondo perché non è comunque a supporto limitato. Al primo problema si può ovviare facilmente. In effetti se $u(x)$, $v(x) \in \mathcal{D}$ e T è una distribuzione, si può definire

$$< T(x), u(x) + iv(x) >=< T(x), u(x) > +i < T(x), v(x) > \, . \tag{5.19}$$

In questo modo abbiamo esteso in modo naturale l'azione della distribuzione T a tutte le funzioni C^∞ a supporto compatto a valori complessi. Se ad esempio consideriamo la δ_{x_0}, otteniamo

$$< \delta_{x_0}(x), u(x) + iv(x) >=< \delta_{x_0}(x), u(x) > +i < \delta_{x_0}(x), v(x) >= u(x_0) + iv(x_0)\, .$$

Quindi la distribuzione δ_{x_0} agisce anche sulle funzioni test complesse, come la valutazione nel punto x_0.

Non abbiamo tuttavia risolto il nostro problema perché comunque la funzione (5.18) non è a supporto compatto. Possiamo dare un senso a (5.17) se T è a supporto compatto. In effetti in tal caso T agisce su tutte le funzioni C^∞ e quindi anche su tutte le funzioni C^∞ a valori complessi con il trucco dell'estensione (5.19). Possiamo quindi definire la trasformata di Fourier tramite la formula (5.17) per le distribuzioni a supporto compatto. Si può dimostrare, generalizzando la Proposizione 4.45 che $\hat{T}(\omega)$ è una funzione di classe C^∞.

Esempio 5.31 Calcoliamo la trasformata di Fourier della delta di Dirac. In base alla definizione (5.17) e alle considerazioni precedenti sull'azione della delta su funzioni a valori complesse abbiamo che

$$\hat{\delta}_{x_0}(\omega) =< \delta_{x_0}(x), e^{-2\pi i\omega x} >= e^{-2\pi i\omega x_0}\, .$$

In particolare, abbiamo che

$$\hat{\delta}_0(\omega) = 1\, .$$

Non è soddisfacente per vari motivi aver esteso la trasformata di Fourier esclusivamente alle distribuzioni a supporto compatto. Intanto perché non si tratta di una vera estensione in quanto la trasformata di Fourier di funzioni era stata definita anche per funzioni non a supporto compatto. Secondo perché è comunque molto limitativo considerare solo questo tipo di distribuzioni. Per estendere oltre la trasformata di Fourier dovremmo cambiare completamente strategia e non passare per la formula (5.17). Come vedremo non riusciremo ad estenderla a tutte le distribuzioni, ma ad una ampia classe di esse che contiene quelle a supporto compatto, ad esempio anche il treno di impulsi o le distribuzioni regolari con simboli anche non limitati. La classe di distribuzioni della quale stiamo parlando è quella delle cosiddette distribuzioni temperate che verrà esattamente definita e studiata nel prossimo paragrafo.

5.4 Distribuzioni temperate

Consideriamo lo spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni rapidamente decrescenti[1]. Come sappiamo, si tratta di uno spazio vettoriale chiuso per le operazioni di moltiplicazione per la variabile indipendente x e per l'operazione di derivazione. In esso possiamo inoltre definire un concetto di convergenza come segue. Sia ϕ_n una successione di elementi in $\mathcal{S}$ e sia $\phi \in \mathcal{S}$. Diciamo che ϕ_n converge a ϕ in $\mathcal{S}$ ($\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{S}$) se per ogni $p, q \in \mathbb{N}$ si ha che

$$x^p \phi_n^{(q)}(x) \to x^p \phi^{(q)}(x)$$

uniformemente su $\mathbb{R}$. Dalla definizione stessa segue che se $\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{S}$, allora si ha anche che $x\phi_n \to x\phi$ in $\mathcal{S}$ e che $\phi_n' \to \phi'$ in $\mathcal{S}$.

Si definisce distribuzione temperata una qualunque applicazione

$$T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$$

che sia lineare e continua ($< T, \phi_n > \to < T, \phi >$ se $\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{S}$). L'insieme delle distribuzioni temperate si indica con il simbolo $\mathcal{S}'$.

Come accadeva per le distribuzioni usuali, l'azione di una distribuzione temperata può essere analogamente estesa allo spazio delle funzioni rapidamente decrescenti a valori complessi che sarà indicato con il solito simbolo $\mathcal{S}$. In questo modo una distribuzione temperata diventa un'applicazione

$$T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$$

lineare e continua. Questa estensione sarà fondamentale nel trattare la trasformata di Fourier.

Si noti che essendo $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$, data una distribuzione temperata T, se ne può considerare la restrizione $T_{|\mathcal{D}}$ su $\mathcal{D}$. Tale restrizione è sicuramente lineare e si può vedere che è continua: segue dal fatto (provarlo per esercizio) che se abbiamo ϕ_n successione in $\mathcal{D}$ tale che $\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{D}$ allora si ha anche $\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{S}$. Dunque ogni distribuzione temperata può essere pensata come una ordinaria distribuzione semplicemente restringendo la sua azione alle funzioni test in $\mathcal{D}$. Abbiamo dunque stabilito un'inclusione $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{D}'$. Viceversa, data una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ ci possiamo chiedere se essa proviene da una distribuzione temperata, cioè se la sua azione può essere estesa dallo spazio delle funzioni test $\mathcal{D}$ allo spazio più grande $\mathcal{S}$. Si osserva innanzitutto che se tale estensione esiste essa è unica: fatto non del

[1] Una funzione $f \in \mathcal{S}$ se è C^∞, decrescente per $|x| \to \infty$ più rapidamente di una qualunque potenza di $1/|x|$, così come tutte le sue derivate.

tutto facile da far vedere e che segue dal fatto che lo spazio $\mathcal{D}$ è denso dentro $\mathcal{S}$ intendendo con questo il fatto che ogni funzione rapidamente decrescente può essere ottenuta come limite nel senso di $\mathcal{S}$ di una successione di funzioni in $\mathcal{D}$. Questo motiva il fatto che l'eventuale estensione di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ allo spazio $\mathcal{S}$ verrà indicata con lo stesso simbolo T.

Vediamo ora alcuni esempi di distribuzioni che sono effettivamente temperate. Iniziamo con il seguente

Proposizione 5.32 *Ogni distribuzione a supporto compatto è temperata.*

Dimostrazione. Sia T una distribuzione a supporto compatto. Abbiamo già esteso la sua azione a tutto C^∞. Essa quindi agisce in particolare sullo spazio $\mathcal{S}$. Rimane da vedere se la continuità è verificata.

Supponiamo che suppT $\subseteq [-M, M]$ e sia $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\psi(x) = 1$ per ogni $x \in [-M, M]$. Consideriamo ora una successione convergente in $\mathcal{S}$: $\phi_n \to \phi$. Allora,

$$< T, \phi_n > - < T, \phi > = < T, \phi_n - \phi > = < T, \psi(\phi_n - \phi) >$$

Poiché $\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{S}$ e $\psi \in \mathcal{D}$ si può far vedere (esercizio) che $\psi(\phi_n - \phi) \to 0$ in $\mathcal{D}$. Ne segue che $< T, \psi(\phi_n - \phi) > \to 0$ e questo completa la dimostrazione. □

Esempio 5.33 Segue dalla Proposizione precedente che le delta di Dirac e tutte le loro derivate $\delta_{x_0}^{(q)}$ sono distribuzioni temperate. Più in generale ogni combinazione lineare finita di distribuzioni delta e di loro derivate è una distribuzione temperata.

Non tutte le distribuzioni temperate sono a supporto compatto come vedremo tra breve.

Esempio 5.34 Consideriamo il treno di impulsi definito nell'Esempio 4.31

$$T = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n \,,$$

e facciamo vedere che T è temperata. Sia $\phi \in \mathcal{S}$. Possiamo definire, analogamente al caso di funzioni test,

$$< T, \phi > = \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi(n) \,, \tag{5.20}$$

La somma sopra non è più finita come nel caso delle ϕ a supporto compatto, è effettivamente una serie, ma essa è assolutamente convergente. In effetti, poiché sappiamo che $(x^2 + 1)\phi(x)$ sta ancora in $\mathcal{S}$, essa è sicuramente limitata, cioè si ha $(x^2 + 1)|\phi(x)| \le K$ e quindi

$$|\phi(x)| \le \frac{K}{x^2 + 1} \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In particolare si ha, qualunque sia $n \in \mathbb{Z}$,

$$|\phi(n)| \leq \frac{K}{n^2+1}$$

Poiché la serie associata a $1/(n^2+1)$ è convergente (sia per n positivi che negativi), ne segue, per confronto, che anche la serie associata a $|\phi(n)|$ è convergente. Questo mostra che la definizione (5.20) ha perfettamente senso. Facile vedere che T così definita è lineare; rimane da vedere se è continua. Sia $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{S}$ e consideriamo

$$|< T, \phi_k > - < T, \phi >| = \left|\sum_{-\infty}^{+\infty} (\phi_k(n) - \phi(n))\right| \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |\phi_k(n) - \phi(n)| \tag{5.21}$$

Per come è definita la convergenza su $\mathcal{S}$, sappiamo che $(x^2+1)(\phi_k(x) - \phi(x))$ converge a 0 uniformemente su $\mathbb{R}$. Possiamo quindi stimare

$$|\phi_k(x) - \phi(x)| = |(x^2+1)(\phi_k(x) - \phi(x))| \frac{1}{x^2+1} \leq a_k \frac{1}{x^2+1} \tag{5.22}$$

dove

$$a_k = \max_{x \in \mathbb{R}} |(x^2+1)(\phi_k(x) - \phi(x))|$$

è una successione infinitesima per $k \to +\infty$. Inserendo ora la stima (5.22) specializzata nel caso di $x = n \in \mathbb{Z}$ in (5.21) otteniamo,

$$|< T, \phi_k > - < T, \phi >| \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \frac{1}{n^2+1} = a_k \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} .$$

Poiché la successione a_k è infinitesima e $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ è un numero finito essendo la somma di una serie convergente, ne segue che, per confronto, $< T, \phi_k > - < T, \phi >$ converge a 0 per $k \to +\infty$. Questo conclude la dimostrazione della continuità.

Esercizio 5.3 Consideriamo una successione a_n indicizzata con $n \in \mathbb{Z}$ per la quale esistono una costante $A > 0$ e $q \in \mathbb{N}$ tali che

$$|a_n| \leq A|n|^q .$$

Dimostrare che

$$T = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \delta_n ,$$

è una distribuzione temperata.

Esercizio 5.4 Mostrare che la distribuzione

$$T = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^n \delta_n ,$$

non è una distribuzione temperata.

Presentiamo ora una classe di distribuzioni regolari temperate. Premettiamo una definizione: una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a tratti, si dice a crescita lenta se esistono $A > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tali che

$$|f(x)| \leq A(1 + |x|)^m\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposizione 5.35 *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione a crescita lenta, allora la distribuzione regolare T_f è temperata.*

Dimostrazione. Se $\phi \in \mathcal{S}$, si può in effetti definire

$$< T_f, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x$$

in quanto la funzione integranda è assolutamente integrabile: questo segue dal fatto che

$$|f(x)\phi(x)| \leq A|x^m\phi(x)|$$

e che $x^m\phi(x)$ sta in $\mathcal{S}$. Rimane da verificare la continuità su $\mathcal{S}$: questo si vede con tecniche simili a quanto visto sinora e viene lasciato come esercizio. $\square$

Esempio 5.36 Consideriamo una funzione razionale $f(x) = p(x)/q(x)$ con $p(x)$ e $q(x)$ polinomi e $q(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si vede facilmente che $f(x)$ è a crescita lenta (farlo per esercizio) e che quindi T_f è una distribuzione temperata.

L'insieme $\mathcal{S}'$ delle distribuzioni temperate risulta chiuso rispetto a tutta una serie di operazioni come descritto nella proposizione seguente che mostra in particolare come esso sia un sottospazio vettoriale dello spazio $\mathcal{D}'$ delle distribuzioni.

Proposizione 5.37 *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) Se $S, T \in \mathcal{S}'$ e λ, $\mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda S + \mu T \in \mathcal{S}'$.
(b) Se $T \in \mathcal{S}'$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, allora $T(x - x_0) \in \mathcal{S}'$.
(c) Se $T \in \mathcal{S}'$ e $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $T(ax) \in \mathcal{S}'$.
(d) Se $T \in \mathcal{S}'$ e $p(x)$ è un polinomio , allora $p(x)T(x) \in \mathcal{S}'$.
(e) Se $T \in \mathcal{S}'$, allora $T' \in \mathcal{S}'$.

Dimostrazione. La dimostrazione delle varie proprietà non presenta particolari difficoltà e si fa utilizzando le tecniche fin qui utilizzate per lavorare con le funzioni in $\mathcal{S}$. Viene dunque lasciata per esercizio. $\square$

Esercizio 5.5 Dire, giustificando la risposta data quali delle seguenti funzioni sono simboli di distribuzioni temperate:

$$\begin{array}{llll} \sin x\,, & \arctan x\,, & e^x \cos x\,, & x^3 - e^{-x^2} \\ H(x)e^{-x} & x \sin e^x\,, & \frac{e^x}{e^x+1}\,, & \frac{\sin x}{x} \end{array}$$

5.5 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

Lo spazio $\mathcal{S}'$ è l'ambiente appropriato per estendere la nozione di trasformata di Fourier. Prima di farlo dobbiamo però richiamare alcuni aspetti importanti della trasformata di Fourier di funzioni rapidamente decrescenti e presentare anche qualche nuovo risultato. Come vedremo la trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'$ sarà definita sfruttando proprio quella su $\mathcal{S}$.

Sappiamo che la trasformata di Fourier preserva lo spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni rapidamente decrescenti a valori complessi, cioè possiamo scrivere:

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

Abbiamo inoltre che l'applicazione $\mathcal{F}$ è continua su $\mathcal{S}$ nel senso che trasforma successioni convergenti in successioni convergenti:

Proposizione 5.38 *Sia ϕ_n una successione in $\mathcal{S}$ tale che $\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{S}$. Allora si ha che $\mathcal{F}(\phi_n) \to \mathcal{F}(\phi)$ in $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la successione $\phi_n - \phi$. Poiché essa converge a 0 in $\mathcal{S}$, segue in particolare che $(x^2+1)(\phi_n(x) - \phi(x)) \to 0$ uniformemente su $\mathbb{R}$. Ricordando che $|\hat{f}(\nu)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$, ne segue

$$\begin{aligned}
\max_{\nu\in\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\phi_n - \phi)(\nu)| &\le \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_n(x) - \phi(x)| \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |(x^2+1)(\phi_n(x) - \phi(x))| \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x \\
&\le \max_{x\in\mathbb{R}} |(x^2+1)(\phi_n(x) - \phi(x))| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

L'ultimo membro della catena di diseguaglianze sopra tende a 0 per $n \to +\infty$ e quindi, per confronto, anche il primo deve fare altrettanto. Questo mostra che $\mathcal{F}(\phi_n - \phi)(\nu)$ converge a 0 uniformemente su $\mathbb{R}$. Per concludere la dimostrazione bisogna però far vedere che $\nu^p \mathcal{F}(\phi_n - \phi)^{(q)}(\nu)$ converge uniformemente a 0 qualunque siano $p, q \in \mathbb{N}$. D'altra parte,

$$\nu^p \mathcal{F}(\phi_n - \phi)^{(q)}(\nu) = (-1)^q (2\pi i)^{q-p} \mathcal{F}\left((x^q(\phi_n - \phi))^{(p)} \right) .$$

Poiché $(x^q(\phi_n - \phi))^{(p)}$ converge a 0 in $\mathcal{S}$ (si pensi al perché) utilizzando il ragionamento iniziale possiamo far vedere che la sua trasformata di Fourier converge a 0 uniformemente e concludere così la dimostrazione. □

Siamo ora pronti per definire la trasformata di Fourier di distribuzioni temperate. Fissiamo dunque $T \in \mathcal{S}'$ e ricordiamo che essa è un'applicazione $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ (ricordiamo che sta agendo su $\mathcal{S}$ che è lo spazio delle funzioni rapidamente decrescenti a valori complessi, e che quindi essa stessa assume valori complessi). Ricordiamo che la trasformata di Fourier trasforma $\mathcal{S}$ in se stesso, cioè $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Le due applicazioni $\mathcal{F}$ e T possono quindi essere composte e determinare

$$T \circ \mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{C}\,.$$

Essendo composizione di applicazioni lineari, $T \circ \mathcal{F}$ è anch'essa lineare. Inoltre essendo T continua per definizione e $\mathcal{F}$ continua in virtù della Proposizione 5.38, ne segue che $T \circ \mathcal{F}$ è continua, nel senso che trasforma successioni convergenti in $\mathcal{S}$ in successioni numeriche convergenti. Dunque essa è una distribuzione temperata che viene detta la trasformata di Fourier di T ed indicata con i simboli $\hat{T}$ o $\mathcal{F}(T)$. Abbiamo così definito una nuova trasformata di Fourier

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$$

$$\mathcal{F}(T) = T \circ \mathcal{F}$$

(dove naturalmente la $\mathcal{F}$ in $T \circ \mathcal{F}$ rappresenta la vecchia trasformata di Fourier sulle funzioni in $\mathcal{S}$.

La nuova definizione, si legge meglio se vista nell'azione contro le funzioni in $\mathcal{S}$. In effetti se $T \in \mathcal{S}'$ e $\phi \in \mathcal{S}$ abbiamo che

$$< \mathcal{F}(T), \phi >= (T \circ \mathcal{F})(\phi) = T(\mathcal{F}(\phi)) =< T, \mathcal{F}(\phi) > \;.$$

che si può anche scrivere come

$$< \hat{T}, \phi >=< T, \hat{\phi} > \;.$$

Che cosa succede per le distribuzioni a supporto compatto? Per esse avevamo già dato una definizione di trasformata di Fourier nella formula (5.17). E' compatibile con questa nuova definizione? La risposta è affermativa e si vede nel modo seguente:

$$< \hat{T}, \phi >=< T, \hat{\phi} >=< T(t), \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-2\pi i x t}\, \mathrm{d}x >= \int_{-\infty}^{+\infty} < T(t), e^{-2\pi i x t} > \phi(x)\, \mathrm{d}x$$

(la terza eguaglianza segue sulla linea degli stessi ragionamenti utilizzati in (4.22)). Dunque, in questo caso, $\hat{T}$ coincide con la distribuzione regolare che ha come simbolo proprio $x \mapsto < T(t), e^{-2\pi i x t} >$ che era esattamente la primitiva definizione di trasformata di Fourier per le distribuzioni a supporto compatto. Quindi non c'è alcuna contraddizione tra le due definizioni. In seguito, quando T è a supporto compatto, indicheremo con $\hat{T}$ direttamente il simbolo della distribuzione regolare; ad esempio scriveremo $\hat{\delta}_{x_0}(\nu) = e^{-2\pi i x_0 \nu}$.

La trasformata di Fourier su $\mathcal{D}'$ gode di proprietà analoghe alla trasformata di Fourier di funzioni e vengono raccolte nella seguente proposizione.

Proposizione 5.39 *(a) Linearità.* $\mathcal{F}(\lambda S + \mu T) = \lambda \mathcal{F}(S) + \mu \mathcal{F}(T)$.
(b) Traslazione. $\mathcal{F}(T(x - x_0))(\nu) = e^{-2\pi i \nu x_0} \mathcal{F}(T)(\nu)$.
(c) Modulazione. $\mathcal{F}(e^{2\pi i \nu_0 x} T(x))(\nu) = \mathcal{F}(T)(\nu - \nu_0)$.
(d) Riscalamento. $\mathcal{F}(T(ax))(\nu) = |a|^{-1} \mathcal{F}(T)(\nu a^{-1})$.
(e) Derivazione. $\mathcal{F}(T')(\nu) = 2\pi i \nu \mathcal{F}(T)(\nu)$.
(f) Moltiplicazione. $\mathcal{F}(xT(x))(\nu) = -(2\pi i)^{-1} (\mathcal{F}(T))'(\nu)$.

Dimostrazione. Si dimostrano tutte utilizzando la definizione di trasformata di Fourier per distribuzioni temperate e le corrispondenti proprietà della trasformata di Fourier di funzioni.

A titolo di esempio dimostriamo la (e):

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}(T')(\nu), \phi(\nu) > &= < T'(x), \mathcal{F}(\phi)(x) >= - < T(x), (\mathcal{F}(\phi))'(x) > \\ &= - < T(x), -2\pi i \mathcal{F}(\nu \phi(\nu))(x) >= 2\pi i < \mathcal{F}(T)(\nu), \nu\phi(\nu) > \\ &= < 2\pi i \nu \mathcal{F}(T)(\nu), \phi(\nu) > \end{aligned}$$

(dove la prima eguaglianza segue dalla definizione di trasformata di Fourier per T, la seconda dalla definizione di derivata, la terza dal punto 2. del Teorema 1.10 (dispense sulla trasformata di Fourier), la quarta ancora dalla definizione di trasformata di Fourier per le distribuzioni ed infine, la quinta, dalla definizione di moltiplicazione di una distribuzione per una funzione C^∞. □

C'è anche un importante risultato di connessione con la convoluzione che presentiamo senza dimostrazione.

Proposizione 5.40 *Siano $S, T \in \mathcal{S}'$ e supponiamo che T è a supporto compatto. Supponiamo inoltre che $S * T \in \mathcal{S}'$. Allora si ha*

$$\mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S) \tag{5.23}$$

(si noti che $\mathcal{F}(T)$ è una distribuzione regolare con simbolo C^∞ per cui la moltiplicazione a secondo membro a senso).

La trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'$ è invertibile in quanto lo è quella su $\mathcal{S}$. In effetti se consideriamo la trasformata di Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$ su $\mathcal{S}$, possiamo definire $\mathcal{F}^{-1}$ su $\mathcal{S}'$ come segue

$$< \mathcal{F}^{-1}(T), \phi >=< T, \mathcal{F}^{-1}(\phi) > \tag{5.24}$$

Si noti che

$$< \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)), \phi >=< \mathcal{F}(T), \mathcal{F}^{-1}(\phi) >=< T, \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\phi)) >=< T, \phi > \ .$$

Questo mostra che effettivamente $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$ è l'identità su $\mathcal{S}'$. Similmente si fa vedere che anche $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1}$ è l'identità. Quindi effettivamente l'operatore $\mathcal{F}^{-1}$ su $\mathcal{S}'$ definito in (5.24) è l'inversa della trasformata di Fourier $\mathcal{F}$. Si noti inoltre che poiché la trasformata di Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$ su $\mathcal{S}$ ha semplicemente la forma

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(x) = \mathcal{F}(\phi)(-x)\,,$$

ne segue che la $\mathcal{F}^{-1}$ su $\mathcal{S}'$ ha la forma

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}^{-1}(T)(x), \phi(x) > &= < T(t), \mathcal{F}^{-1}(\phi)(t) >=< T(t), \mathcal{F}(\phi)(-t) > \\ &= < T(-t), \mathcal{F}(\phi)(t) >=< \mathcal{F}(T(-t))(x), \phi(x) > \\ &= < \mathcal{F}(T(t))(-x), \phi(x) > \ . \end{aligned}$$

Cioè, anche su $\mathcal{S}'$ si ha che

$$\mathcal{F}^{-1}(T)(x) = \mathcal{F}(T)(-x)\,.$$

Esempio 5.41 Sappiamo che

$$\mathcal{F}(\delta_{x_0})(\nu) = e^{-2\pi i x_0 \nu}$$

Dunque, si ha anche

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi i x_0 \nu})(x) = \delta_{x_0}(x)\,.$$

In realtà avremmo dovuto scrivere sopra, a primo membro

$$\mathcal{F}^{-1}(T_{e^{-2\pi i x_0 \nu}})(x)$$

ma per semplicità, in tutto il resto di questa sezione, spesso confonderemo a livello notazionale, una distribuzione regolare con il suo simbolo. Per come agisce $\mathcal{F}^{-1}$, si può anche scrivere

$$\mathcal{F}(e^{-2\pi i x_0 \nu})(x) = \delta_{x_0}(-x) = \delta_{-x_0}(x)\,.$$

Quest'ultima si può scrivere più chiaramente come

$$\mathcal{F}(e^{2\pi i \nu_0 x})(\nu) = \delta_{\nu_0}(\nu)\,.$$

In particolare, abbiamo che

$$\mathcal{F}(1)(\nu) = \delta_0(\nu)\,. \tag{5.25}$$

Esempio 5.42 Dalla (5.25), utilizzando la (f) della Proposizione 5.39 che

$$\mathcal{F}(x)(\nu) = -\frac{1}{2\pi i}\delta_0'(\nu)\,.$$

ed iterando

$$\mathcal{F}(x^m)(\nu) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^m \delta_0^{(m)}(\nu)\,.$$

Se abbiamo dunque un polinomio $p(x) = \sum_{j=0}^m p_j x^j$ abbiamo che

$$\mathcal{F}(p(x))(\nu) = \sum_{j=0}^m p_j \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^j \delta_0^{(j)}(\nu)$$

Esercizio 5.6 Calcolare la trasformata di Fourier delle distribuzioni regolari associate ai seguenti simboli:

$$\cos ax\,, \quad \sin ax\,, \quad x \sin x\,, \quad e^{a|x|}$$

$$\frac{1}{1+x^2}\,, \quad \frac{x}{1+x^2}\,, \quad \frac{x^2}{1+x^2}\,, \quad \sin^2 x\,.$$

5.6 Altri esempi

In questa sezioni presentiamo il calcolo di alcune trasformate di Fourier particolarmente importanti per le applicazioni. Sono, con precisione, le trasformata di Fourier della funzione di Heaviside $H(x)$ (o meglio della distribuzione temperata T_H) e del treno di impulsi. Cominceremo con la funzione di Heaviside.

5.6.1 La trasformata di Fourier della funzione di Heaviside

Si noti che, poiché $T_H' = \delta_0$, segue dal punto (e) della Proposizione 5.39 che

$$T_1 = \mathcal{F}(\delta_0) = \mathcal{F}(T_H') = 2\pi i\nu \mathcal{F}(T_H)(\nu)\,. \tag{5.26}$$

Si può da questa relazione stabilire chi è $\mathcal{F}(T_H)(\nu)$? Saremmo tentati di dire che essa è eguale alla distribuzione regolare avente come simbolo $(2\pi i\nu)^{-1}$. Il problema è che un tale simbolo non è in $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, tuttavia noi sappiamo, da (4.17) che

$$T_1 = 2\pi i\nu \left[\frac{1}{2\pi i} \text{v.p.}\, \frac{1}{\nu}\right]. \tag{5.27}$$

Confrontando con la (5.26) si ha che

$$0 = \nu \left[\mathcal{F}(T_H)(\nu) - \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.}\, \frac{1}{\nu}\right]. \tag{5.28}$$

Segue allora dalla Proposizione 4.14 che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{F}(T_H)(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\left(\text{v.p.}\, \frac{1}{\nu}\right) + c\delta_0\,. \tag{5.29}$$

Rimane a questo punto da determinare il valore di c. Si noti che v.p.$1/\nu$ è una distribuzione dispari: la sua inversione temporale è eguale a $-$v.p.$1/\nu$ (verificare). Dunque

$$\mathcal{F}(T_H)(-\nu) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\text{v.p.}\, \frac{1}{\nu}\right) + c\delta_0\,. \tag{5.30}$$

Invece $H(-x) + H(x) = 1$. Dunque,

$$\mathcal{F}(T_H(-x))(\nu) = -\mathcal{F}(T_H(x))(\nu) + \delta_0$$

Ne segue che

$$\mathcal{F}(T_H(x))(-\nu) = \mathcal{F}(T_H(-x))(\nu) = -\mathcal{F}(T_H(x))(\nu)+\delta_0 = -\frac{1}{2\pi i}\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{\nu}\right)-c\delta_0+\delta_0 \tag{5.31}$$

Confrontando la (5.30) e la (5.31) otteniamo infine

$$c\delta_0 = -c\delta_0 + \delta_0$$

che implica $c = 1/2$. Otteniamo quindi,

$$\mathcal{F}(T_H)(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{2}\delta_0\,. \tag{5.32}$$

Esercizio 5.7 Calcolare

$$\mathcal{F}\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{x}\right)\,, \quad \mathcal{F}(\text{sgn}(x))\,.$$

5.6.2 La trasformata di Fourier del treno di impulsi

Per calcolare la trasformata di Fourier del treno di impulsi avremo bisogno di un semplice risultato preliminare:

Proposizione 5.43 *$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ è continua, cioè se $T_n \to T$ in $\mathcal{S}'$, allora $\mathcal{F}(T_n) \to \mathcal{F}(T)$ in $\mathcal{S}'$.*

Dimostrazione. Sia $\phi \in \mathcal{S}$. Abbiamo che

$$< \mathcal{F}(T_n), \phi > = < T_n, \mathcal{F}(\phi) > \to < T, \mathcal{F}(\phi) > = < \mathcal{F}(T), \phi > \;.$$

□

Consideriamo ora il treno di impulsi

$$T = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k$$

che sappiamo essere una distribuzione temperata. Sappiamo anche che essa è il limite in $\mathcal{D}'$ della successione di distribuzioni

$$T_n = \sum_{k=-n}^{+n} \delta_k\,.$$

Non è difficile verificare che in realtà $T_n \to T$ anche nel senso di $\mathcal{S}'$. In virtù della proposizione precedente abbiamo dunque che

$$\mathcal{F}(T_n) \to \mathcal{F}(T)$$

in $\mathcal{S}'$. Si noti che

$$\mathcal{F}(T_n)(\nu) = \sum_{k=-n}^{+n} e^{-2\pi i\nu k} .$$

Possiamo dunque scrivere

$$\mathcal{F}(T)(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\nu k} ,$$

ricordando però che la serie precedente converge non nel senso usuale delle funzioni, ma nel senso delle distribuzioni temperate! Vorremmo però trovare un'altro modo, più operativo, di esprimere la trasformata di Fourier del treno di impulsi. Cominciamo col dimostrare la cosa seguente

$$e^{2\pi i\nu}\mathcal{F}(T)(\nu) = \mathcal{F}(T)(\nu) . \tag{5.33}$$

Per dimostrare (5.33) si noti innazitutto che (si pensi al perché), per $n \to +\infty$,

$$e^{2\pi i\nu}\mathcal{F}(T_n)(\nu) \to e^{2\pi i\nu}\mathcal{F}(T)(\nu) \tag{5.34}$$

D'altra parte,

$$e^{2\pi i\nu}\mathcal{F}(T_n)(\nu) - \mathcal{F}(T_n)(\nu) = e^{2\pi i(n+1)\nu} - e^{-2\pi in\nu} \tag{5.35}$$

Poiché $\hat{\delta}_n = e^{2\pi in\nu}$ e $\delta_n \to 0$ in $\mathcal{S}'$ per $n \to \pm\infty$, ne segue che $e^{2\pi in\nu} \to 0$ in $\mathcal{S}'$ per $n \to \pm\infty$. Questo implica, per la (5.35), che per $n \to +\infty$,

$$e^{2\pi i\nu}\mathcal{F}(T_n)(\nu) - \mathcal{F}(T_n)(\nu) \to 0 \tag{5.36}$$

Dalle (5.34) e (5.36) segue (5.33) che può essere riscritta come.

$$\left(e^{2\pi i\nu} - 1\right)\mathcal{F}(T)(\nu) = 0 \tag{5.37}$$

Si noti ora che

$$e^{2\pi i\nu} - 1 = 0 \iff \nu \in \mathbb{Z}$$

ed inoltre che

$$\frac{d}{d\nu}(e^{2\pi i\nu} - 1) = 2\pi i e^{2\pi i\nu} \neq 0 \;\forall \nu$$

Segue allora dall'Esercizio 4.9 che necessariamente

$$\mathcal{F}(T)(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \delta_k(\nu) . \tag{5.38}$$

Rimangono da determinare i coefficienti c_k. Con la stessa tecnica utilizzata per dimostrare (5.33) si può anche mostrare che

$$\mathcal{F}(T)(\nu-1)=\mathcal{F}(T)(\nu) \tag{5.39}$$

Utilizzando (5.39) in (5.38), otteniamo

$$\mathcal{F}(T)(\nu)=\mathcal{F}(T)(\nu-1)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\delta_k(\nu-1)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\delta_{k+1}(\nu)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_{k-1}\delta_k(\nu)\,. \tag{5.40}$$

Confrontando (5.40) con (5.38) otteniamo subito che $c_k = c_{k-1}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, cioè che (c_k) è una successione costante: $c_k = c$ per ogni k. Dunque

$$\mathcal{F}(T)(\nu)=c\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta_k(\nu)\,. \tag{5.41}$$

Rimane da determinare c. Per fare questo, si consideri una successione $\phi_m(x)$ di funzioni test tali che

$$\begin{cases} \phi_m(x)=1 & \forall x\,:|x|\le 1/2 \\ \phi_m(x)=0 & \forall x<-1/2-1/m \text{ e } x>1/2+1/m \\ |\phi_m(x)|\le 1 & \forall x \end{cases}$$

Allora

$$<\mathcal{F}(T)(\nu),\phi_m(\nu)>=\left\langle c\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta_k(\nu),\phi_m(\nu)\right\rangle=c \quad \forall m\ge 3\,. \tag{5.42}$$

D'altra parte, segue dalla definizione di trasformata di Fourier che

$$<\mathcal{F}(T)(\nu),\phi_m(\nu)>=\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_m(\nu)e^{-2\pi ik\nu}\,d\nu$$

Si può dimostrare che, per come sono fatte le ϕ_m e notando in particolare che

$$\lim_{m\to+\infty}\phi_m(x)=I_{[-1/2,1/2]}(x)\,,$$

si ha

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_m(\nu)e^{-2\pi ik\nu}\,d\nu=\int_{-1/2}^{1/2}e^{-2\pi ik\nu}\,d\nu=\begin{cases}1 & \text{se } k=0\\ 0 & \text{se } k\neq 0\end{cases}$$

Dunque,

$$\lim_{m\to+\infty}<\mathcal{F}(T)(\nu),\phi_m(\nu)>=\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{-1/2}^{1/2}e^{-2\pi ik\nu}\,d\nu=1 \tag{5.43}$$

Confrontando (5.42) con (5.43), otteniamo quindi che $c = 1$ e che dunque

$$\mathcal{F}(T)(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k(\nu)\,. \tag{5.44}$$

In particolare si noti che

$$\mathcal{F}(T)(\nu) = T(\nu)\,.$$

Esercizio 5.8 Dimostrare che

$$\mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k T(x)\right)(\nu) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{k/T}(\nu)\,.$$

Esempio 5.44 Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodica in $\mathcal{R}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Consideriamo

$$f_0(x) = f(x)I_{[0,T[}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0,T[\\ 0 & \text{se } x \notin [0,T[\end{cases}$$

Si noti che

$$f(x)I_{[-nT,(n+1)T]}(x) = \sum_{k=-n}^{n} f_0(x+kT) = \sum_{k=-n}^{n} f_0(x)*\delta_{kT}(x) = f_0(x)*\left[\sum_{k=-n}^{n} \delta_{kT}(x)\right].$$

Si può dimostrare che per $n \to +\infty$, l'eguaglianza precedente converge a

$$f(x) = f_0(x) * \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{kT}(x)\right].$$

nel senso delle distribuzioni temperate. Si noti in particolare che $f(x)$ essendo una funzione periodica è sicuramente a crescita lenta e quindi induce una distribuzione temperata. Invece $f_0(x)$ è una funzione a supporto compatto e quindi induce una distribuzione a supporto compatto. $f(x)$ e $f_0(x)$ d'ora in avanti indicheranno le rispettive distribuzioni temperate associate ai due simboli. Usando la Proposizione 5.40 e il risultato dell'Esercizio 5.8 otteniamo la trasformata di Fourier di f:

$$\mathcal{F}(f(x))(\nu) = \frac{1}{T}\mathcal{F}(f_0(x))(\nu)\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{k/T}(\nu) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f_0)(k/T)\delta_{k/T}(\nu)\,.$$

Antitrasformando poi si ottiene

$$f(x) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f_0)(k/T)e^{2\pi i \frac{k}{T} x} \tag{5.45}$$

e si noti che

$$\mathcal{F}(f_0)(k/T) = \int_0^T f(x) e^{-2\pi i \frac{k}{T} x} \, \mathrm{d}x$$

Quindi, (5.45) è lo sviluppo in serie di Fourier complessa della funzione T-periodica $f(x)$. Si noti tuttavia che in questo contesto la convergenza della serie non è nel senso della norma quadratica, ma nel senso delle distribuzioni $\mathcal{S}'$. E' interessante notare come la trasformata di Fourier estesa alle distribuzioni temperate permette di vedere la trasformata di Fourier classica di funzioni e la serie di Fourier in maniera unificata.

5.7 Esercizi

5.7.1 Soluzioni

6

Trasformata di Laplace

6.1 Introduzione

6.2 Trasformata di Laplace di funzioni

Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ sia una funzione continua a tratti. Definiamo

$$\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} \mid x \mapsto e^{-sx} f(x) \in \mathcal{R}^1(0, +\infty)\}$$

Una funzione $f(x)$ si dice Laplace trasformabile (o anche $\mathcal{L}$-trasformabile) se $\Omega_f \neq \emptyset$ ed in tal caso si definisce la trasformata di Laplace di f come la funzione $\mathcal{L}(f) : \Omega_f \to \mathbb{C}$ definita dall'espressione

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} \, \mathrm{d}x$$

La struttura dell'insieme Ω_f è chiarito dalla seguente proposizione.

Proposizione 6.1 *Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ sia una funzione continua a tratti. Allora Ω_f è un insieme dei possibili quattro tipi seguenti:*

- *semipiano destro chiuso $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s \geq x_0\}$,*
- *semipiano destro aperto $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > x_0\}$,*
- *l'intero piano complesso $\mathbb{C}$,*
- *l'insieme vuoto $\emptyset$.*

La seguente proposizione richiama invece alcune proprietà di base della trasformata di Laplace.

Proposizione 6.2 *Siano f e g continue a tratti. Siano $\lambda, \mu, s_0 \in \mathbb{C}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Allora*

(A) $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(s) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$ *per ogni* $s \in \Omega_f \cap \Omega_g$.

(B) $\mathcal{L}(e^{s_0 x} f(x))(s) = \mathcal{L}(f(x))(s - s_0)$ *per ogni* $s \in \Omega_f + s_0$.
(C) $\mathcal{L}(f(x - x_0)H(x - x_0))(s) = e^{-sx_0}\mathcal{L}(f(x))(s)$ *per ogni* $s \in \Omega_f$.
(D) *Se* f *è derivabile in* $(0, +\infty)$ *e* f' *è continua a tratti, allora*

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0+)$$

per ogni $s \in \Omega_f \cap \Omega_{f'}$.
(E) $\mathcal{L}(f)(s)$ *è olomorfa nella parte interna di* Ω_f *e si ha*

$$\mathcal{L}(f)'(s) = -\mathcal{L}(xf(x))(s)$$

per ogni s *nella parte interna di* Ω_f.

Esempio 6.3 Utilizzando la proposizione precedente si vede subito che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\Omega_{x^k H(x)} = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > 0\}$$

e che

$$\mathcal{L}(x^k H(x)) = \frac{k!}{s^{k+1}} \quad \forall s \text{ tale che } \operatorname{Re} s > 0\,.$$

Vediamo ora il collegamento tra la trasformata di Laplace e quella di Fourier. Supponiamo che f sia una funzione Laplace trasformabile. Possiamo scrivere, per $s = a + ib \in \Omega_f$,

$$\mathcal{L}(f(x))(a + ib) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-ax}e^{-ibx}\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}(f(x)e^{-ax})\left(\frac{b}{2\pi}\right). \tag{6.1}$$

Questo collegamento mostra come la trasformata di Laplace completamente determini la funzione nel senso più precisamente espresso dalla seguente proposizione la cui dimostrazione segue dal corrispondente risultato per la trasformata di Fourier:

Proposizione 6.4 *Siano* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ *e* $g : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ *due funzioni continue a tratti tali che* $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ *su una retta verticale* $\operatorname{Re} s = x_0$ *che stia in* $\Omega_f \cap \Omega_g$. *Allora,* $f(x) = g(x)$ *per ogni* x *dove entrambe le funzioni sono continue. Di conseguenza abbiamo che* $\Omega_f = \Omega_g$ *e* $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ *per ogni* $s \in \Omega_f$.

Inoltre (6.1) suggerisce un modo per invertire la trasformata di Laplace. In effetti, se ipotizziamo che $f(x)$ sia una funzione che ammette pseudoderivate destra e sinistra in ogni punto, utilizzando il Teorema 1.12 (dispense trasformata di Fourier) si ottiene che per ogni x dove f è continua,

$$f(x)e^{-ax} = \mathcal{F}^{-1}(b \mapsto \mathcal{L}(f(x))(a + ib)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(f(x))(a + ib)e^{2\pi ibx}\,db \tag{6.2}$$

dove l'integrale è in generale da intendersi nel senso del valor principale cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(f(x))(a+ib)e^{2\pi ibx}\,db = \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} \mathcal{L}(f(x))(a+2\pi ib)e^{2\pi ibx}\,db\,.$$

Da (6.2) otteniamo anche che per ogni x dove f è continua, si ha

$$f(x) = \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} \mathcal{L}(f(x))(a+2\pi ib)e^{(a+2\pi ib)x}\,db \tag{6.3}$$

Consideriamo ora la funzione complessa $\mathcal{L}(f)(s)e^{sx}$ che sappiamo essere olomorfa su Ω_f (in quanto prodotto di funzioni ivi olomorfe). Integriamola sulla curva $\gamma_M : [-M,M] \to \mathbb{C}$ data da $\gamma(t) = a + 2\pi it$. Otteniamo

$$\int_{\gamma_M} \mathcal{L}(f)(s)e^{sx}\;\mathrm{d}s = 2\pi i \int_{-M}^{+M} \mathcal{L}(f(x))(a+2\pi it)e^{(a+2\pi it)x}\;\mathrm{d}t$$

Si ha dunque la seguente formula di inversione

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{M\to+\infty} \int_{\gamma_M} \mathcal{L}(f)(s)e^{sx}\;\mathrm{d}s\,. \tag{6.4}$$

per tutti gli x dove $f(x)$ è continua. Questa formula di inversione viene spesso scritta, esplicitando la curva γ_M come

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{M\to+\infty} \int_{a-2\pi iM}^{a+2\pi iM} \mathcal{L}(f)(s)e^{sx}\;\mathrm{d}s\,. \tag{6.5}$$

o anche, inglobando il limite nel processo di integrazione

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-2\pi i\infty}^{a+2\pi i\infty} \mathcal{L}(f)(s)e^{sx}\;\mathrm{d}s\,. \tag{6.6}$$

Si noti che se la funzione integranda $\mathcal{L}(f)(s)e^{sx}$ è assolutamente integrabile per $s = a + 2\pi it$ e $t \in (-\infty,+\infty)$, non ha importanza come si svolge l'integrale improprio; se però non è assolutamente integrabile la formula (6.6) è da intendersi nel senso della (6.4): l'integrale va fatto sulla curva simmetrica γ_M e successivamente si prende il limite $M \to +\infty$.

Se partiamo da una funzione $F(s)$ olomorfa su qualche semipiano aperto $\{s \mid \operatorname{Re} s > x_0\}$, ci possiamo chiedere come si può riconoscere se essa è la trasformata di Laplace di una qualche funzione $f(x)$. Sotto condizioni opportune di limitatezza della F si può considerare la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{M\to+\infty} \int_{a-2\pi iM}^{a-2\pi iM} F(s)e^{sx}\ \mathrm{d}s\,. \tag{6.7}$$

Sotto opportune ipotesi effettivamente la trasformata di Laplace di $f(x)$ è $F(s)$ come mostra il seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 6.5 *Sia $F(s)$ una funzione olomorfa sul semipiano aperto $\Pi = \{s \mid \mathrm{Re}\, s > x_0\}$ e supponiamo che esista una costante $M > 0$ tale che $|F(s)| \le M|s|^{-2}$ per ogni $s \in \Pi$. Allora se a è scelto in modo che $a > x_0$, la (6.7) definisce una funzione $f(x)$ che è continua su $\mathbb{R}$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $x < 0$. Inoltre $f(x)$ è Laplace trasformabile, si ha $\Pi \subseteq \Omega_f$ e vale $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ per ogni $s \in \Pi$.* □

6.3 Trasformata di Laplace di distribuzioni

Se $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ è una funzione Laplace trasformabile, la sua trasformata di Laplace si può scrivere come

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\ \mathrm{d}x =< T_f(x), e^{-sx} >$$

così che saremmo tentati di definire la trasformata di Lapace di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ a supporto in $[0, +\infty[$ come qualcosa del tipo

$$\mathcal{L}(T)(s) =< T(x), e^{-sx} > \tag{6.8}$$

La (6.8) presenta una serie di problemi che ci impediscono di poterla utilizzare così come è. Intanto $x \mapsto e^{-sx}$ non è mai in $\mathcal{D}$ e neppure in $\mathcal{S}$, è soltanto in C^∞. Quindi la (6.8) funziona soltanto se T è una distribuzione a supporto compatto. In questo caso è il modo giusto per definire la trasformata di Laplace di una distribuzione e si noti che s può assumere un qualsiasi valore sul piano complesso.

Se $T \in \mathcal{S}'$ tuttavia, dovremmo riuscire a dare un senso alla (6.8) se $\mathrm{Re}\, s \ge 0$ in quanto e^{-sx} è rapidamente decrescente se guardata per $x \ge 0$ e d'altra parte il supporto di T è per ipotesi in $[0, +\infty[$. Per rendere rigorosa questa intuizione, si consideri una funzione $\lambda(x) \in C^\infty$ tale che $\mathrm{supp}(\lambda) \subseteq [-1, +\infty[$ e tale che $\lambda(x) = 1$ per ogni $x \ge 0$. Definiamo, per gli s tali che $\mathrm{Re}\, s \ge 0$,

$$\mathcal{L}(T)(s) =< T(x), \lambda(x)e^{-sx} > \tag{6.9}$$

Si noti che se $\mathrm{Re}\, s \ge 0$ effettivamente la funzione $\lambda(x)e^{-sx}$ è in $\mathcal{S}$ e dunque la (6.9) ha senso. Si noti che poiché $\lambda(x) = 1$ sul supporto di T, 'moralmente' non abbiamo cambiato niente; che sia comunque una buona definizione lo prova il fatto che essa non dipende dalla particolare $\lambda(x)$ scelta (verificarlo per esercizio).

Per poter definire la trasformata di Laplace anche per distribuzioni non temperate (si noti che la funzione e^x ad esempio è Laplace trasformabile ma non determina una distribuzione temperata), è necessario fare un'ulteriore modifica alla (6.9). Cominciamo con una definizione: una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ si dice Laplace trasformabile se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $e^{-cx}T(x) \in \mathcal{S}'$. Se ne troviamo uno di siffatti c ve ne è per lo meno una semiretta destra. In tal caso poniamo

$$c_T = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid e^{-cx}T(x) \in \mathcal{S}'\}$$

e

$$\Omega_T = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} s > c_T\}\,.$$

La trasformata di Laplace di T è una funzione $\mathcal{L}(T) : \Omega_T \to \mathbb{C}$ definita nel modo seguente: dato $s \in \Omega_T$, sia $c \in \mathbb{R}$ tale che $c_T < c < \mathrm{Re}\, s$ (un tal c sicuramente esiste) e poniamo

$$\mathcal{L}(T)(s) =< e^{-cx}T(x), \lambda(x)e^{-(s-c)x} > \tag{6.10}$$

Si noti che l'espressione sopra ha senso in quanto, essendo $c < \mathrm{Re}\, s$, la funzione $\lambda(x)e^{-(s-c)x}$ è ancora in $\mathcal{S}$, mentre per ipotesi $e^{-cx}T(x) \in \mathcal{S}'$. Si noti che passando il fattore moltiplicativo e^{-cx} a destra, esso si cancellerebbe con l'altro e ritorneremmo alla (6.9). Questo lo possiamo fare se T è già lei in $\mathcal{S}'$, altrimenti non possiamo spostarlo. Infine si noti che dato $s \in \Omega_T$, di numeri reali c tali che $c_T < c < \mathrm{Re}\, s$ ve ne sono chiaramente infiniti: non è tuttavia difficile mostrare che la definizione (6.10) non dipende da quale scegliamo.

Un'ultima osservazione. Se $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ è Laplace trasformabile, per definire correttamente T_f dobbiamo ipotizzare di aver definito $f(x) = 0$ per $x < 0$. Fatto questo, può tuttavia accadere che $\Omega_f \neq \Omega_{T_f}$: in effetti, per definizione Ω_{T_f} è sempre un insieme aperto, mentre sappiamo che Ω_f può anche essere un semipiano chiuso. Si rifletta su un esempio concreto mostrando la differenza tra i due insiemi. In ogni caso la trasformata di Laplace $\mathcal{L}(f)(s)$ coincide con $\mathcal{L}(T_f)(s)$ per $s \in \Omega_{T_f}$ (segue da come è stata definita la trasformata di Laplace di distribuzioni).

La trasformata di Laplace di distribuzioni gode di proprietà molto simili alla trasformata di Laplace di funzioni. Alcune di queste sono riportate nella seguente proposizione.

Proposizione 6.6 *Siano S e T due distribuzioni Laplace trasformabili. Allora*

(A) $\mathcal{L}(\lambda S + \mu T)(s) = \lambda\mathcal{L}(S) + \mu\mathcal{L}(T)$ *per ogni* $s \in \Omega_T \cap \Omega_S$.
(B) $\mathcal{L}(e^{s_0 x}T(x))(s) = \mathcal{L}(T(x))(s - s_0)$ *per ogni* $s \in \Omega_T + s_0$.
(C) $\mathcal{L}(T')(s) = s\mathcal{L}(T)(s)$ *per ogni* $s \in \Omega_T \subseteq \Omega_{T'}$.
(D) $\mathcal{L}(T)(s)$ *è olomorfa in* Ω_T *e si ha*

$$\mathcal{L}(T)'(s) = -\mathcal{L}(xT(x))(s)$$

per ogni $s \in \Omega_T$.

Esempio 6.7 Calcoliamo la trasformata di Laplace delle distribuzioni delta. Sono a supporto compatto quindi si può utilizzare la definizione più semplice (6.8). Abbiamo per ogni $s \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}(\delta_{x_0}(x))(s) =< \delta_{x_0}(x), e^{-sx} >= e^{-sx_0}$$

In particolare,

$$\mathcal{L}(\delta_0(x))(s) = 1\,.$$

Dimostrazione. (parziale con alcuni commenti) (A) afferma che, come nel caso delle funzioni, la trasformata di Laplace di distribuzioni è lineare; si noti che implicitamente (A) afferma anche che $\Omega_{\lambda S+\mu T} \supseteq \Omega_T \cap \Omega_S$. La dimostrazioni di (A) è una semplice verifica e viene lasciata per esercizio. così come quella di (B).

(C) la dimostriamo in dettaglio. Si noti che essa intanto afferma che $\Omega_T \subseteq \Omega_{T'}$. Vediamo prima questo. Sia $c \in \mathbb{R}$ tale che $c_T < c$. Osserviamo che, poiché per Leibnitz,

$$(e^{-cx}T(x))' = -ce^{-cx}T(x) + e^{-cx}T'(x)$$

abbiamo che

$$e^{-cx}T'(x) = (e^{-cx}T(x))' + ce^{-cx}T(x) \tag{6.11}$$

Si noti che $e^{-cx}T(x) \in \mathcal{S}'$ per ipotesi, e quindi anche $(e^{-cx}T(x))' \in \mathcal{S}'$. Segue dunque dall'espressione sopra che $e^{-cx}T'(x) \in \mathcal{S}'$. Questo mostra che sicuramente $c_{T'} \leq c_T$ e dunque che $\Omega_T \subseteq \Omega_{T'}$. Per mostrare il resto di (C), consideriamo $s \in \Omega_T$ e $c \in \mathbb{R}$ tale che $c_T < c < \operatorname{Re} s$. Utilizzando (6.11) e le proprietà delle distribuzioni, abbiamo che,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(T')(s) &= < e^{-cx}T'(x), \lambda(x)e^{-(s-c)x} > \\
&= < (e^{-cx}T(x))', \lambda(x)e^{-(s-c)x} > + < ce^{-cx}T(x), \lambda(x)e^{-(s-c)x} > \\
&= - < e^{-cx}T(x), (\lambda(x)e^{-(s-c)x})' > + c < e^{-cx}T(x), \lambda(x)e^{-(s-c)x} > \\
&= - < e^{-cx}T(x), \lambda'(x)e^{-(s-c)x} > + (s-c) < e^{-cx}T(x), \lambda(x)e^{-(s-c)x} > \\
&\quad + c < e^{-cx}T(x), \lambda(x)e^{-(s-c)x} > \\
&= s < e^{-cx}T(x), \lambda(x)e^{-(s-c)x} >= s\mathcal{L}(T)(s)
\end{aligned}$$

(Nella penultima eguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che poiché $\lambda(x) = 1$ per ogni $x \geq 0$, ne segue $\lambda'(x) = 0$ per ogni $x \geq 0$; quindi il termine dove compare $\lambda'(x)$ scompare in quanto la distribuzione ha supporto in $[0, +\infty[$.)

La dimostrazione di (D) si basa sulle proprietà di continuità delle distribuzioni in $\mathcal{S}'$ e viene omessa. □

Si confronti la proprietà (D) della Proposizione 6.2 con la proprietà (C) nella Proposizione 6.6: non sono in contraddizione? In effetti se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è tale che

$f(x) = 0$ per $x < 0$, è Laplace trasformabile e derivabile con f' ancora Laplace trasformabile, abbiamo due formule:

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+)\,, \quad \mathcal{L}(T'_f)(s) = s\mathcal{L}(T_f)(s)\,. \tag{6.12}$$

Si noti che poiché f è derivabile ovunque tranne che eventualmente in 0 dove potrebbe avere un salto (se $f(0+) \neq 0$) abbiamo che

$$T'_f(x) = T_{f'}(x) + f(0+)\delta_0(x)$$

Dunque abbiamo, usando la prima delle due in (6.12),

$$\mathcal{L}(T'_f)(s) = \mathcal{L}(T_{f'}) + f(0+)\mathcal{L}(\delta_0)(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+) + f(0+)$$

$$= s\mathcal{L}(f)(s) = s\mathcal{L}(T_f)(s)\,.$$

Abbiamo dunque ottenuto la seconda in (6.12). Questo mostra come le due formule siano essanzialemnte la stessa formula, modulo la corretta interpretazione della derivata distribuzionale.

Esempio 6.8 Usando poi la proprietà (C) della Proposizione 6.6 otteniamo

$$\mathcal{L}(\delta_{x_0}^{(q)}(x))(s) = s^q e^{-sx_0}\,.$$

In particolare,

$$\mathcal{L}(\delta_0^{(q)}(x))(s) = s^q\,.$$

Usando la linearità abbiamo quindi che

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \delta_0^{(k)}(x)\right)(s) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k s^k\,.$$

Esempio 6.9 Calcoliamo la trasformata di Laplace del treno di impulsi a destra

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k$$

E' una distribuzione temperata, quindi si può usare l'espressione (6.9). Otteniamo, per $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\mathcal{L}(T)(s) =< T(x), \lambda(x)e^{-sx} >= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-sk} = \frac{1}{1 - e^{-s}}\,.$$

6.4 Legami tra la trasformata di Fourier e la trasformata di Laplace

Come nel caso di funzioni, c'è un profondo collegamento con la trasformata di Fourier di distribuzioni temperate espresso nel seguente risultato:

Teorema 6.10 *Sia T una distribuzione Laplace trasformabile e sia $a > C_T$. Allora vale,*

$$\mathcal{L}(T)(a+it) = \mathcal{F}(e^{-ax}T(x))(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Poiché come sappiamo la trasformata di Fourier è invertibile su $\mathcal{S}'$, possiamo scrivere l'eguaglianza sopra anche come

$$e^{-ax}T(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{L}(T)(a+it)\right)(x)\,.$$

o anche

$$T(x) = e^{ax}\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{L}(T)(a+it)\right)(x)\,. \tag{6.13}$$

che mostra come la trasformata di Laplace di distribuzioni possa sempre essere invertita. L'operazione inversa si indica $\mathcal{L}^{-1}$. In particolare vale un risultato di unicità:

Corollary 6.11. *Siano S e T due distribuzioni Laplace trasformabili tali che*

$$\mathcal{L}(S)(s) = \mathcal{L}(T)(S)$$

su una retta del tipo $\operatorname{Re} s = x_0$ (con $x_0 > c_S,\, c_T$). Allora $S = T$.

Dimostrazione. Conseguenza immediata della formula di inversione (6.13). □

Esempio 6.12 Segue dall'Esempio 6.7 che

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k s^k\right)(x) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k \delta_0^{(k)}\,.$$

Abbiamo così determinato la trasformata di Laplace inversa di un qualunque polinomio.

Consideriamo ora una qualunque funzione razionale $F(s) = p(s)/q(s)$ e facciamo vedere che essa è sempre la trasformata di Laplace di una distribuzione su un opportuno semipiano destro. Dividendo p per q otteniamo $p = rq + d$ dove r e d sono altri due polinomi con il grado di d strettamente inferiore al grado di q. Possiamo quindi scrivere

$$\frac{p(s)}{q(s)} = r(s) + \frac{d(s)}{q(s)}$$

$r(s)$ essendo un polinomio può essere antitrasformato utilizzando l'esempio precedente ottenendo una combinazione lineare di delta e delle sue derivate nell'origine. Per quanto concerne la seconda frazione, essendo strettamente propria, si può antitrasformare in un opportuno semipiano destro che escluda tutti i poli, ottenendo una combinazione lineare di espressioni del tipo $x^k e^{ax} H(x)$: questo si vede riducendo la frazione in fratti semplici od utilizzando la tecnica dei residui. L'antitrasformata di $p(s)/q(s)$ si ottiene infine per linearità sommando i due pezzi ottenuti.

Esempio 6.13 Consideriamo

$$F(s) = \frac{s}{s+1}$$

Abbiamo

$$\frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1}\,.$$

Dunque,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}(1) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = \delta_0(x) - e^{-x}H(x)$$

Si noti che $e^{-x}H(x)$ è da intendersi come la distribuzione avente come simbolo $e^{-x}H(x)$,

Vale infine un teorema di inversione che generalizza il Teorema 6.5

Theorem 6.14. *Sia $F(s)$ una funzione olomorfa sul semipiano aperto $\Pi = \{s \mid \operatorname{Re} s > x_0\}$ e supponiamo che esista una costante $M > 0$ e un numero $m \in \mathbb{Z}$ tale che $|F(s)| \leq M s^m$ per ogni $s \in \Pi$. Allora esiste una distribuzione T con supporto in $[0, +\infty[$, Laplace trasformabile con $\Omega_T \supseteq \Pi$ tale che $\mathcal{L}(T)(s) = F(s)$ per ogni $s \in \Pi$.*

Dimostrazione. Si basa sul Teorema 6.5. Se $m \leq -2$ siamo proprio nelle ipotesi del Teorema 6.5 e non c'è dunque niente da dimostrare. Supponiamo dunque che $m > -2$. In questo caso si sceglie $c > x_0$ e si considera $G(s) = F(s)(s-c)^{-m-2}$. Non è difficile dimostrare che $G(s)$ è ancora olomorfa in Π e ivi soddisfa una condizione di crescita del tipo $|G(s)| \leq M_1 s^{-2}$. Quindi, in virtù del Teorema 6.5, esiste una funzione continua $f(x)$ a supporto in $[0, +\infty[$, Laplace trasformabile con $\Omega_f \supseteq \Pi$ e tale che $\mathcal{L}(f)(s) = G(s)$ per ogni $s \in \Pi$. Di conseguenza $\mathcal{L}(T_f)(s) = G(s)$ per ogni $s \in \Pi$. Si noti ora che $F(s) = (s-c)^{m+2} G(s)$ e che per ipotesi $m + 2 > 0$. Segue dalla proprietà (C) della Proposizione 6.6 che

$$\mathcal{L}\left(\left(\frac{d}{dx} - c\right)^{m+2} T_f(x)\right)(s) = (s-c)^{m+2}\,\mathcal{L}(T_f)(s) = (s-c)^{m+2}\,G(s) = F(s)$$

Dunque

$$\left(\frac{d}{\mathrm{d}x} - c\right)^{m+2} T_f(x)$$

è la distribuzione cercata. □

6.5 Esercizi

6.5.1 Soluzioni