

ELETTROTECNICA

PARTE VI: REGIME SINUSOIDALE

Michele Bonnin e Fernando Corinto

`michele.bonnin@polito.it` `fernando.corinto@polito.it`

Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Politecnico di Torino

A.A. 2016/2017

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

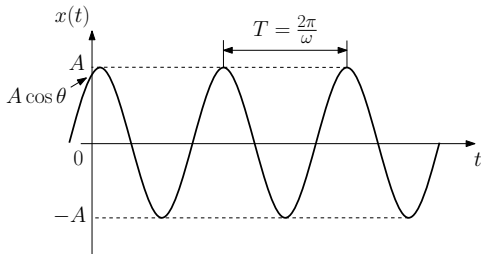
Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

Circuiti con generatori sinusoidali



- ▶ molti dei circuiti che usiamo quotidianamente operano in condizione di “regime sinusoidale” (risposta permanente)
- ▶ Segnali elettrici “complessi” possono essere scomposti in somma di sinusoidi usando la serie di Fourier

- ▶ $z \in \mathbb{C}$, $z = \rho e^{j\phi} = \rho \cos \phi + j \sin \phi$

- ▶ $v(t) = A \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re}[A e^{j(\omega t + \theta)}] = \operatorname{Re}[A e^{j\theta} e^{j\omega t}]$

Fasore: numero complesso associato ad una sinusoide di ampiezza A e fase θ

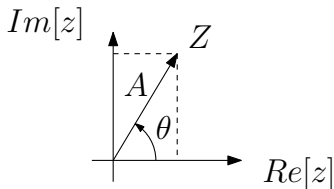
$$V(j\omega) = A e^{j\theta} \in \mathbb{C}$$

Fasori: esempi

- ▶ $z \in \mathbb{C}$, $z = \rho e^{j\phi} = \rho \cos \phi + j \sin \phi$
- ▶ $v(t) = A \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re}[A e^{j(\omega t + \theta)}] = \operatorname{Re}[A e^{j\theta} e^{j\omega t}]$

Fasore: numero complesso associato ad una senoide di ampiezza A e fase θ

$$V(j\omega) = A e^{j\theta} \in \mathbb{C}$$



- ▶ $i(t) = 6 \cos(50t - 40^\circ) \text{ A}$

$$I = 6e^{-j40^\circ}$$

- ▶ $v(t) = -4 \sin(30t + 50^\circ) \text{ V}$

$$v(t) = -4 \cos(30t + 50^\circ - 90^\circ) = -4 \cos(30t - 40^\circ)$$

$$V = -4e^{-j40^\circ} = 4e^{j140^\circ}$$

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

Proprietà dei fasori

- ▶ Oltre alle proprietà proprie dei numeri complessi si hanno le seguenti proprietà

1. Addizione

$$\begin{aligned}A_1 \cos(\omega t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega t + \theta_2) &= \operatorname{Re} [A_1 e^{j\theta_1} e^{j\omega t}] + \operatorname{Re} [A_2 e^{j\theta_2} e^{j\omega t}] \\&= \operatorname{Re} [A_1 e^{j\theta_1} e^{j\omega t} + A_2 e^{j\theta_2} e^{j\omega t}] \\&= \operatorname{Re} [(A_1 e^{j\theta_1} + A_2 e^{j\theta_2}) e^{j\omega t}]\end{aligned}$$

2. Derivazione

$$f(t) = A \cos(\omega t + \theta) \Rightarrow F = A e^{j\theta}$$

$$\begin{aligned}g(t) &= \frac{dA \cos(\omega t + \theta)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \theta) = A\omega \cos(\omega t + \theta + 90^\circ) \\&= \operatorname{Re} [A\omega e^{j(\omega t + \theta + 90^\circ)}] = \operatorname{Re} [A\omega e^{j90^\circ} e^{j(\omega t + \theta)}]\end{aligned}$$

$$g(t) \Rightarrow G = A\omega e^{j90^\circ} e^{j\theta} = j\omega F$$

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

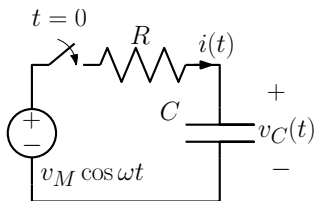
Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

Risposta permanente in un circuito RC



Tempo

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{\tau} v_C = \frac{1}{\tau} v_m \cos(\omega t)$$

$$v_C(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_m \cos(\omega t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_C(t) = A \cos(\omega t + \theta) = v_{pC}(t)$$

$$RC \frac{dA \cos(\omega t + \theta)}{dt} + A \cos(\omega t + \theta) = v_m \cos(\omega t)$$

⋮

Fasori

$$j\omega A e^{j\theta} + \frac{1}{\tau} A e^{j\theta} = \frac{1}{\tau} V_m$$

$$V_C = A e^{j\theta}$$

$$j\omega A e^{j\theta}$$

$$V_m e^{j0} = V_m$$

\Rightarrow

Risposta permanente in un circuito RC

Tempo

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{\tau} v_C = \frac{1}{\tau} v_m \cos(\omega t)$$

$$v_C(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_m \cos(\omega t)$$

\Rightarrow

Fasori

$$j\omega A e^{j\theta} + \frac{1}{\tau} A e^{j\theta} = \frac{1}{\tau} V_m$$

$$V_C = A e^{j\theta}$$

$$j\omega A e^{j\theta}$$

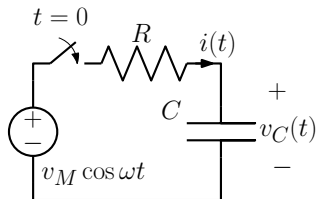
$$V_m e^{j0} = V_m$$

$$A e^{j\theta} = \frac{\frac{V_m}{\tau}}{j\omega + \frac{1}{\tau}} = \frac{V_m}{1 + j\omega\tau} \Rightarrow A e^{j\theta} = \frac{V_m(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$A = \left| \frac{V_m(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} \right| = \frac{V_m}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad \theta = \arg \left[\frac{V_m(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} \right] = -\arctan(\omega\tau)$$

$$v_C(t) = \frac{V_m}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega\tau))$$

Risposta permanente in un circuito RC



$$v_C(t) = \frac{V_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega \tau))$$

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{V_m \omega C}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\omega t - \arctan(\omega \tau))$$

$$v_R(t) = R i(t) = -\frac{V_m \omega R C}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\omega t - \arctan(\omega \tau))$$

Si dice che un circuito è in **regime sinusoidale** quando tutte le tensioni e tutte le correnti sono sinusoidali con la *medesima pulsazione* ω

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

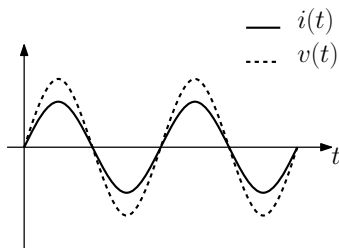
Rifasamento

Adattamento energetico

Legge di Ohm nel dominio dei fasori – resistore

Dominio del tempo

$$v(t) = R i(t)$$

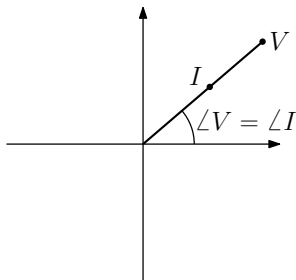


Dominio dei fasori

$$V = R I$$

$$|V| = R |I|$$

$$\angle V = \angle I$$

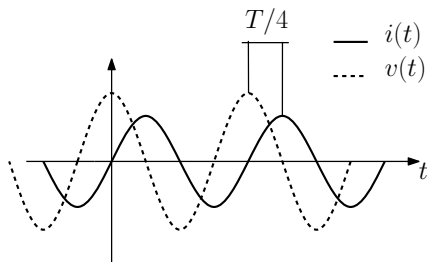


Tensione e corrente sono in fase

Legge di Ohm nel dominio dei fasori – induttore

Dominio del tempo

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

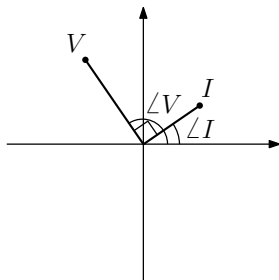


Dominio dei fasori

$$V = j\omega L I$$

$$|V| = \omega L |I|$$

$$\angle V = \angle I + \frac{\pi}{2}$$

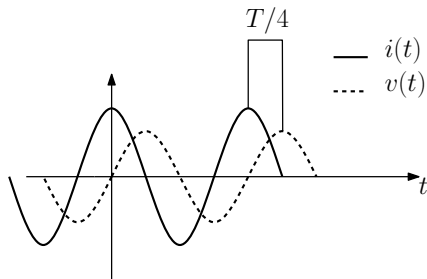


La corrente è in ritardo rispetto alla tensione

Legge di Ohm nel dominio dei fasori: Condensatore

Dominio del tempo

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

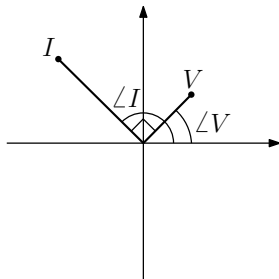


Dominio dei fasori

$$I = j\omega C V$$

$$|I| = \omega C |V|$$

$$\angle I = \angle V + \frac{\pi}{2}$$



La tensione è in ritardo rispetto alla corrente

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

Impedenza e ammettenza

	Dominio del tempo	Dominio dei fasori
Resistore	$v(t) = R i(t)$	$V = R I$
Induttore	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$V = j\omega L I$
Condensatore	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$I = j\omega C V$

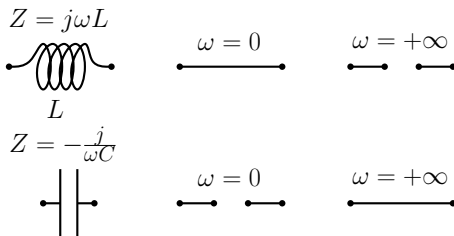
Impedenza Z : vale la legge: $V = Z I$

Resistore: $Z = R$ Induttore $Z = j\omega L$ Condensatore: $Z = -\frac{j}{\omega C}$

Ammettenza Y : vale la legge: $I = Y V$

Resistore: $Y = G$ Induttore $Y = -\frac{j}{\omega L}$ Condensatore: $Y = j\omega C$

Impedenza e ammettenza



$$Z = \frac{V}{I} = \frac{|V| e^{j\angle V}}{|I| e^{j\angle I}} = \frac{|V|}{|I|} e^{j(\angle V - \angle I)}$$

L'impedenza è un rapporto tra due fasori, ma non è un fasore

Proprietà dei fasori

- ▶ I fasori soddisfano le leggi di Kirchhoff

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^n V_k = 0$$

Spiegazione

$$i_k(t) = |I_k| \cos(\omega t + \angle I_k)$$

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}[|I_k| e^{j\angle I_k} e^{j\omega t}] = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}[I_k e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} \left[\left(\sum_{k=1}^n I_k \right) e^{j\omega t} \right]$$

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

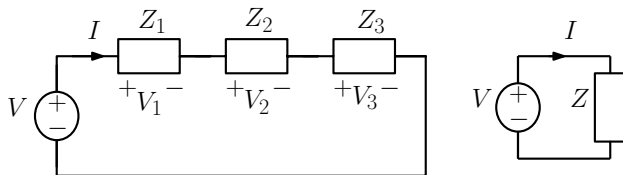
Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

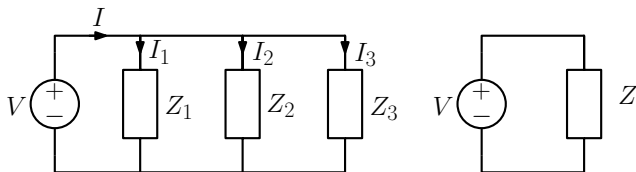
Impedenze connesse in serie



$$V = V_1 + V_2 + V_3 = I(Z_1 + Z_2 + Z_3) \quad V = Z I$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

Impedenze connesse in parallelo



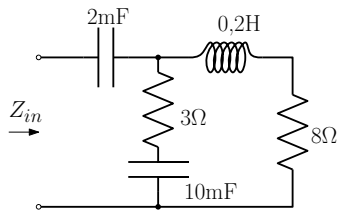
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = V \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \quad I = \frac{V}{Z}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

Calcolo di impedenze

Esempio:



$$\omega = 50 \text{ rad/s}$$

$$Z_1 = -\frac{j}{\omega C_1} = \frac{-j}{50 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = -j10\Omega$$

$$Z_2 = 3 - \frac{j}{\omega C_2} = 3 - \frac{j}{50 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = (3 - j2)\Omega$$

$$Z_3 = 8 + j\omega L = 8 + j50 \cdot 0,2 = (8 + j10)\Omega$$

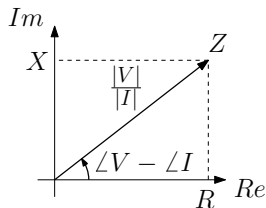
$$Z_{in} = Z_1 + Z_2 || Z_3 = -j10 + \frac{(3 - j2)(8 + j10)}{(3 - j2) + (8 + j10)}$$

$$= -j10 + \frac{44 + j14}{11 + j8} \frac{11 - j8}{11 - j8} = (-j10 + 3,22 - j0,7)\Omega$$

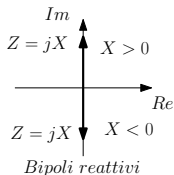
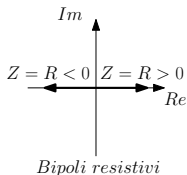
Impedenza e ammettenza di un bipolo

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{|V|}{|I|} e^{j(\angle V - \angle I)} = R + jX$$

- R è detta resistenza
- X è detta reattanza



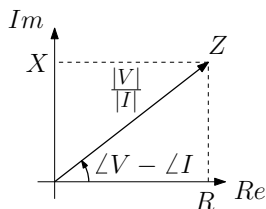
Resistore	$Z = R$	$R = R$	$X = 0$
Induttore	$Z = j\omega L$	$R = 0$	$X = \omega L$
Condensatore	$Z = -\frac{j}{\omega C}$	$R = 0$	$X = -\frac{1}{\omega C}$



Impedenza e ammettenza di un bipolo

$$Y = \frac{I}{V} = \frac{|I|}{|V|} e^{j(\angle I - \angle V)} = G + jB$$

- ▶ G è detta conduttanza
- ▶ X è detta suscettanza



Resistore	$Y = \frac{1}{R}$	$G = \frac{1}{R}$	$B = 0$
Induttore	$Y = -\frac{j}{\omega L}$	$G = 0$	$B = -\frac{1}{\omega L}$
Condensatore	$Y = j\omega C$	$G = 0$	$B = \omega C$

$$Y = \frac{1}{Z} \Rightarrow G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

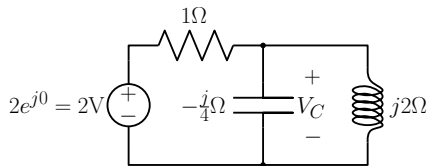
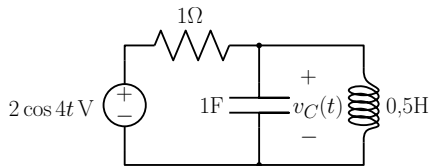
Rifasamento

Adattamento energetico

Il metodo simbolico dei fasori

1. Sostituire ogni generatore indipendente di pulsazione ω con un generatore pari al fasore corrispondente
2. Associare ad ogni variabile (tensione o corrente) il corrispondente fasore
3. Sostituire ogni elemento R , L , C con un bipolo avente l'impedenza corrispondente
4. Analizzare il circuito nel dominio dei fasori con i metodi dei circuiti "resistivi"
5. Ricavare le grandezze sinusoidali associate ai fasori determinati

Il metodo simbolico dei fasori



$$\frac{V_C - 2}{1} + \frac{V_C}{-j\frac{1}{4}} + \frac{V_C}{j2} = 0 \Rightarrow V_C = \frac{j4}{-7 + j2} \text{ V}$$

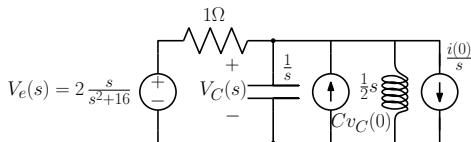
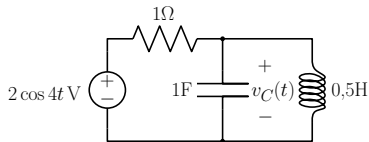
$$|V_C| = \frac{4}{\sqrt{(-7)^2 + 2^2}} \simeq 0,55 \text{ V}$$

$$\angle V_C = 90^\circ - \arctan(-2/7) + 180^\circ = -74^\circ$$

$$v_C(t) = 0,55 \cos(4t - 74^\circ) \text{ V}$$

Il metodo simbolico dei fasori

Confronto con il metodo della trasformata di Laplace



$$\frac{V_C - V_e}{1} + \frac{V_C}{\frac{1}{s}} + \frac{V_C}{\frac{s}{2}} = v_C(0) - \frac{i(0)}{s}$$

$$V_C = 2 \frac{s^2}{(s^2 + 16)(s^2 + s + 2)} + \frac{v_C(0)s - i(0)}{s^2 + s + 2}$$

Antitrasformando

$$v_C(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{371} \left[7(-8 + 53v_C(0)) \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \sqrt{7}(20 + 53v_C(0) + 106i(0)) \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \right] \\ + \frac{28}{371} [2 \cos(4t) + 7 \sin(4t)]$$

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

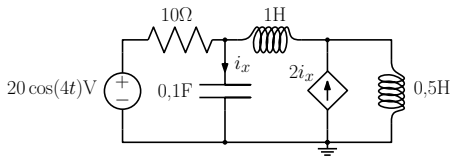
Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

Analisi nodale con il metodo simbolico

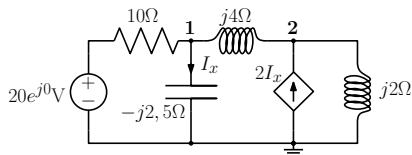


$$20 \cos(4t) \Rightarrow 20e^{j0^\circ}$$

$$1\text{H} \Rightarrow j\omega L = j4\Omega$$

$$0,5\text{H} \Rightarrow j\omega L = j2\Omega$$

$$0,1\text{F} \Rightarrow -\frac{j}{\omega C} = -j2,5\Omega$$



$$\frac{V_1 - 20}{10} + \frac{V_1}{-j2,5} + \frac{V_1 - V_2}{j4} = 0$$

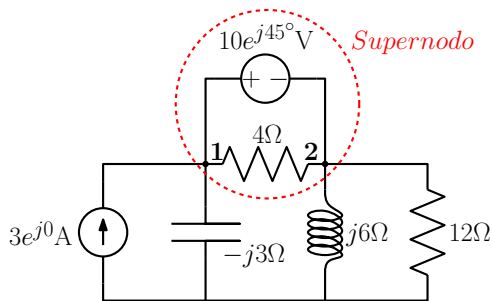
$$\frac{V_2 - V_1}{j4} + \frac{V_2}{j2} - 2\frac{V_1}{-j2,5} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 + j1,5 & j2,5 \\ 11 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{300}{15 - j5} = 18,97e^{j18,43^\circ} \text{ V} \Rightarrow v_1(t) = 18,97 \cos(4t + 18,43^\circ) \text{ V}$$

$$V_2 = -\frac{220}{15 - j5} = 13,91e^{j198,3^\circ} \text{ V} \Rightarrow v_2(t) = 13,91 \cos(4t + 198,3^\circ) \text{ V}$$

Analisi nodale con il metodo simbolico



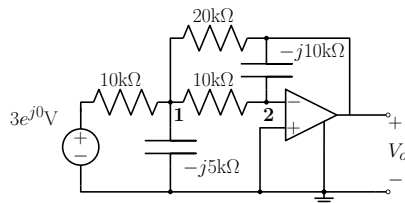
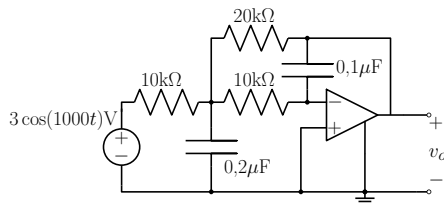
$$-3 + \frac{V_1}{-j3} + \frac{V_2}{j6} + \frac{V_2}{12} = 0$$

$$V_1 - V_2 = 10e^{j45^\circ}$$

$$V_1 = 25,78e^{-j70,48^\circ} \text{ V}$$

$$V_2 = 31,41e^{-j87,18^\circ} \text{ V}$$

Analisi nodale con il metodo simbolico

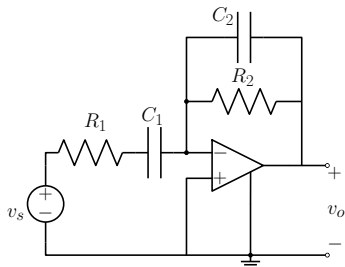


$$\frac{V_1 - 3}{10} + \frac{V_1}{-j5} + \frac{V_1 - V_2}{10} + \frac{V_1 - V_o}{20} = 0$$

$$V_2 = 0 \Rightarrow \frac{0 - V_1}{10} + \frac{0 - V_o}{-j10} = 0 \Rightarrow V_1 = -jV_o$$

$$V_o = \frac{6}{3 - j5} = 1,029e^{j59,04^\circ} \text{ V} \Rightarrow v_o(t) = 1,029 \cos(1000t + 59,04^\circ) \text{ V}$$

Analisi nodale con il metodo simbolico

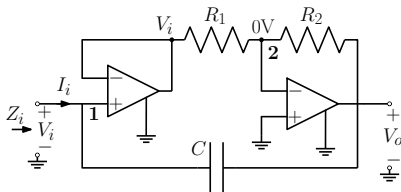


$$Z_f = Z_{C_2} \parallel R_2 = \frac{-\frac{j}{\omega C_2} R_2}{-\frac{j}{\omega C_2} + R_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

$$Z_i = R_1 - \frac{j}{\omega C_1} = \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{j\omega C_1}$$

$$\frac{V_o}{V_s} = -\frac{Z_f}{Z_i} = -\frac{j\omega C_1 R_2}{(1 + j\omega R_1 C_1)(1 + j\omega R_2 C_2)}$$

Analisi nodale con il metodo simbolico

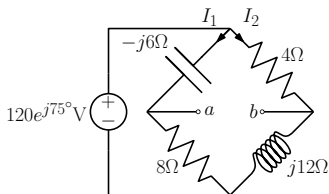


$$-I_i + \frac{V_i - V_o}{-j/(\omega C)} = 0 \Rightarrow I_i = j\omega C(V_i - V_o)$$

$$\frac{0 - V_i}{R_1} + \frac{0 - V_o}{R_2} = 0 \Rightarrow V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_i$$

$$I_i = j\omega C \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_i \Rightarrow Z_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{1}{j\omega C_{eq}} \quad C_{eq} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) C$$

Thevenin e Norton con il metodo simbolico



$$Z_1 = -j6 \parallel 8 = \frac{-j6 \cdot 8}{8 - j6} = (2,88 - j3,84)\Omega$$

$$Z_2 = j12 \parallel 4 = \frac{j12 \cdot 4}{4 + j12} = (3,6 + j1,2)\Omega$$

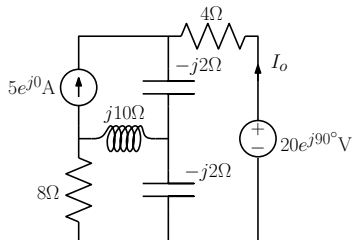
$$Z_{Th} = Z_1 + Z_2 = (6,48 - j2,64)\Omega$$

$$V_{Th} = 4I_2 + j6I_1 = 4 \frac{120e^{j75^\circ}}{4 + j12} + j6 \frac{120e^{j75^\circ}}{8 - j6} = 37,95e^{j3,43^\circ} + 72e^{j201,87^\circ}$$

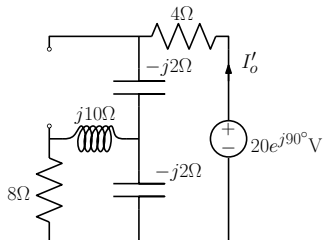
$$= -28,94 - j24,55 = 37,95e^{j220,31^\circ} \text{ V}$$

Sovrapposizione degli effetti con il metodo simbolico

Generatori isofrequenziali



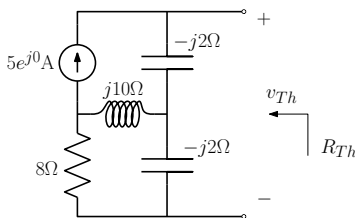
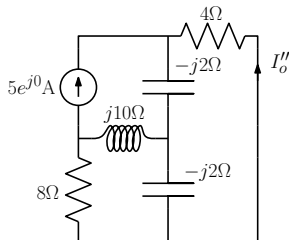
$$I_o = I'_o + I''_o$$



$$I'_o = \frac{20e^{j90^\circ}}{4 - j2 + [(j10 + 8) \parallel (-j2)]}$$
$$= (-2, 35 + j2, 35) \text{ A}$$

Sovrapposizione degli effetti con il metodo simbolico

Generatori isofrequenziali

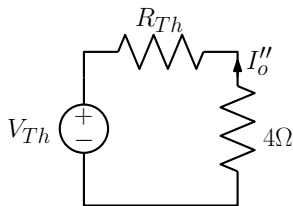


$$Z_{Th} = -j2 + (j10 + 8) \parallel (-j2) = \left(\frac{1}{4} - j\frac{17}{4} \right) \Omega$$

$$V_{Th} = -j2 \cdot 5 + 5 \cdot \frac{j10}{j10 - j2 + 8} (-j2) = \left(\frac{25}{4} - j\frac{65}{4} \right) \text{ V}$$

Sovrapposizione degli effetti con il metodo simbolico

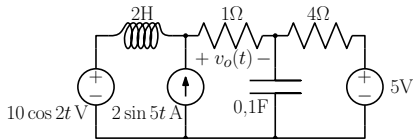
Generatori isofrequenziali



$$I_o'' = -\frac{V_{Th}}{R_{Th} + 4} = \left(-\frac{45}{17} + j\frac{20}{17}\right) A$$

Sovrapposizione degli effetti con il metodo simbolico

Generatori non isofrequenziali



$$v_o(t) = v'_o + v''_o + v'''_o$$

Primo effetto: $10 \cos 2t \Rightarrow 10e^{j0^\circ}$ $\omega = 2 \text{ rad/s}$

$$2\text{H} \Rightarrow Z_L = j\omega L = j4\Omega \quad 0,1\text{F} \Rightarrow Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -j5\Omega$$

Secondo effetto: $2 \sin 5t \Rightarrow 2e^{-j90^\circ}$ $\omega = 5 \text{ rad/s}$

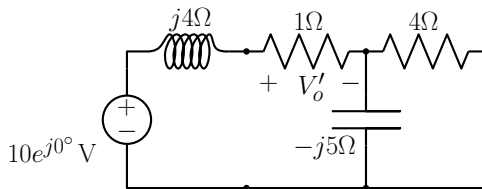
$$2\text{H} \Rightarrow Z_L = j\omega L = j10\Omega \quad 0,1\text{F} \Rightarrow Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -j2\Omega$$

Terzo effetto: $5 \Rightarrow 5$ $\omega = 0 \text{ rad/s}$

$$2\text{H} \Rightarrow Z_L = j\omega L = 0\Omega \quad 0,1\text{F} \Rightarrow Z_C = -\frac{j}{\omega C} = +\infty\Omega$$

Sovrapposizione degli effetti con il metodo simbolico

Generatori non isofrequenziali: primo effetto

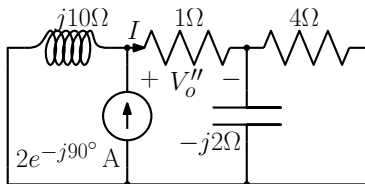


$$V_o' = 10e^{j0^\circ} \frac{1}{j4 + 1 + (-j5) \parallel 4} = 2,498e^{-j30,79^\circ} \text{ V}$$

$$v_o'(t) = 2,498 \cos(2t - 30,79^\circ) \text{ V}$$

Sovrapposizione degli effetti con il metodo simbolico

Generatori non isofrequenziali: secondo effetto



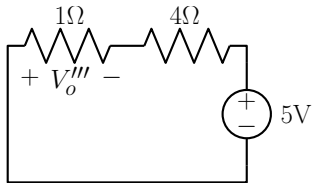
$$I = 2e^{-j90^\circ} \frac{j10}{j10 + 1 + (-j2) \parallel 4} = 2,328e^{-j77,91^\circ} \text{ A}$$

$$V_o'' = 1 \cdot I = 2,328e^{-j77,91^\circ} \text{ V}$$

$$v_o''(t) = 2,328 \cos(5t - 77,91^\circ) \text{ V}$$

Sovrapposizione degli effetti con il metodo simbolico

Generatori non isofrequenziali: terzo effetto

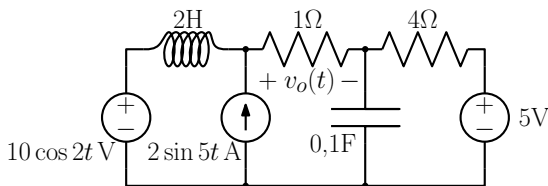


$$V_o''' = -5 \frac{1}{1+4} = -1 \text{ V}$$

$$v_o'''(t) = -1 \text{ V}$$

Sovrapposizione degli effetti con il metodo simbolico

Generatori non isofrequenziali



$$v_o(t) = [2,498 \cos(2t - 30,79^\circ) + 2,328 \cos(5t - 77,91^\circ) - 1] \text{ V}$$

In presenza di generatori non isofrequenziali la somma degli effetti va fatta nel dominio del tempo

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

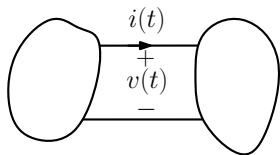
Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

Potenza istantanea



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \Rightarrow V = V_m e^{j\theta_v}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \Rightarrow I = I_m e^{j\theta_i}$$

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)}_{\text{valore costante}} + \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)}_{\text{valor medio nullo}}$$

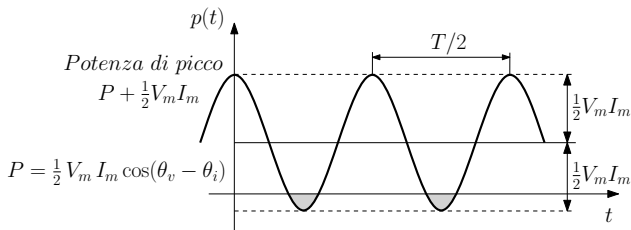
Potenza attiva media

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Potenza attiva

Potenza attiva media. Si misura in watt

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$



$$w = \int_0^{\Delta t} p(t)dt = P\Delta t + \int_0^{\Delta t} \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)dt \simeq P\Delta t$$

Potenza istantanea: resistore

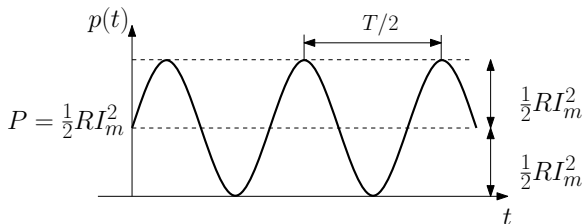
Potenza istantanea

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

$$\theta_v = \theta_i \Rightarrow \cos(\theta_v - \theta_i) = 1$$

$$V_m = R I_m$$

$$p(t) = \frac{1}{2} R I_m^2 + \frac{1}{2} R I_m^2 \cos(2\omega t + 2\theta_i)$$



Potenza istantanea: induttore

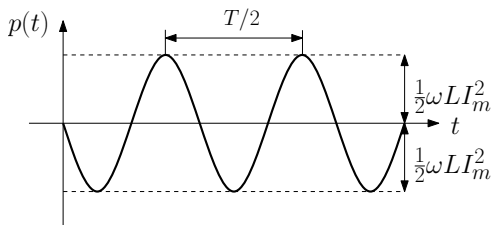
Potenza istantanea

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

$$\theta_v = \theta_i + 90^\circ \Rightarrow \cos(\theta_v - \theta_i) = 0$$

$$V_m = \omega L I_m$$

$$p(t) = -\frac{1}{2} \omega L I_m^2 \sin(2\omega t + 2\theta_i)$$



Potenza istantanea: condensatore

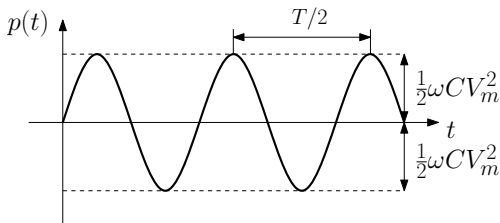
Potenza istantanea

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

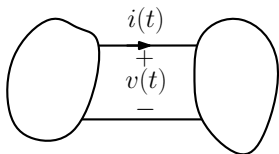
$$\theta_v = \theta_i - 90^\circ \Rightarrow \cos(\theta_v - \theta_i) = 0$$

$$I_m = \omega C V_m$$

$$p(t) = \frac{1}{2} \omega C V_m^2 \sin(2\omega t + 2\theta_i)$$



Potenza reattiva



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \Rightarrow V = V_m e^{j\theta_v}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \Rightarrow I = I_m e^{j\theta_i}$$

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t + 2\theta_i)] - \frac{1}{2} V_m I_m \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\theta_i)$$

$$= \underbrace{P}_{\text{active}} [1 + \cos(2\omega t + 2\theta_i)] - \underbrace{Q}_{\text{reactive}} \sin(2\omega t + 2\theta_i)$$

- ▶ $\cos \varphi$: **Fattore di potenza**
- ▶ $P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \varphi$ [W]: **Potenza attiva**
- ▶ $Q = \frac{1}{2} V_m I_m \sin \varphi$ [VAR] (Volt-Ampere reattivi): **Potenza reattiva**

Valore efficace

$$x_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_m \cos(\omega t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} \int_0^T [1 + \cos(2\omega t)] dt}$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} \int_0^T dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = V_{eff} I_{eff} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

Potenza complessa

Potenza complessa S

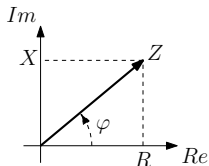
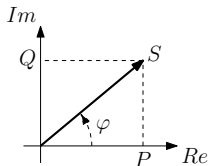
$$S \doteq \frac{1}{2} V I^* \quad \begin{array}{l} V = V_m e^{j\theta_v} \\ I = I_m e^{j\theta_i} \Rightarrow I^* = I_m e^{-j\theta_i} \end{array}$$

$$S = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} V_m I_m e^{j(\theta_v - \theta_i)}$$

- ▶ $|S| = \frac{1}{2} V_m I_m$ [VA]: **Potenza apparente**
- ▶ $\angle S = \theta_v - \theta_i = \varphi \Rightarrow \cos \varphi$ **Fattore di potenza**

Relazioni tra le potenze

$$S = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} V_m I_m e^{j(\theta_v - \theta_i)} = \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \cos \varphi}_{\text{Potenza attiva}} + j \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \sin \varphi}_{\text{Potenza reattiva}} = P + jQ$$





- ▶ $S = P + jQ$ [VA]: **Potenza complessa**
- ▶ $|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$: **Potenza apparente**
- ▶ $\cos \varphi = \frac{P}{|S|}$: **Fattore di potenza**
- ▶ $P = |S| \cos \varphi$ [W]: **Potenza attiva**
- ▶ $Q = |S| \sin \varphi$ [VAR]: **Potenza reattiva**


Relazioni tra le potenze

$$S = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} Z I I^* = \frac{1}{2} Z |I|^2 = \frac{1}{2} (R + jX) |I|^2$$

$$S = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} V (YV)^* = \frac{1}{2} Y^* |V|^2 = \frac{1}{2} (G - jB) |V|^2$$

 $S = \frac{1}{2} R I_m^2 \Rightarrow P = \frac{1}{2} R I_m^2 \quad Q = 0$

 $S = \frac{1}{2} \frac{-j}{\omega C} I_m^2 \Rightarrow P = 0 \quad Q = -\frac{1}{2} \frac{I_m^2}{\omega C} = -\frac{1}{2} \omega C V_m^2$

 $S = \frac{1}{2} (j\omega L) I_m^2 \Rightarrow P = 0 \quad Q = \frac{1}{2} \omega L I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{\omega L}$

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

Conservazione della potenza

Teorema di conservazione della potenza complessa

In un circuito lineare, tempo invariante, alimentato da generatori sinusoidali isofrequenziali, a regime la somma delle potenze complesse fornite dai generatori è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite dagli elementi circuitali.

Dimostrazione: $\mathbf{AI} = 0$, quindi $\mathbf{AI}^* = 0$ (perché \mathbf{A} è reale), quindi anche \mathbf{I}^* soddisfa la KCL. Per il teorema di Tellegen

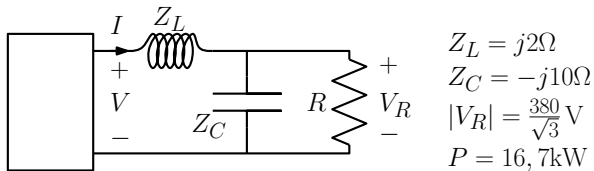
$$\sum_k V_k I_k^* = 0 \Rightarrow \sum_k S_k = 0$$

Conseguenza

Questo significa che si conservano sia la potenza attiva che quella reattiva

Conservazione della potenza

Esempio:



P è la potenza dissipata dal resistore. Trovare $|V|$, $|I|$, $\cos \varphi$

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

Classificazione di bipoli

bipoli passivi $R \geq 0, G \geq 0$ $P \geq 0$

bipoli resistivi $X = B = 0$ $Q = 0$

bipoli reattivi $R = G = 0$ $P = 0$

bipoli induttivi $X > 0, B < 0$ $Q > 0$

bipoli capacitivi $X < 0, B > 0$ $Q < 0$

I bipoli costituiti esclusivamente da resistori, induttori e condensatori sono passivi

$$P = \sum_k P_k \geq 0$$

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

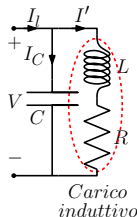
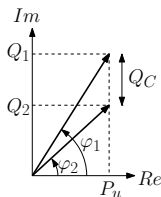
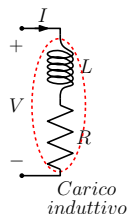
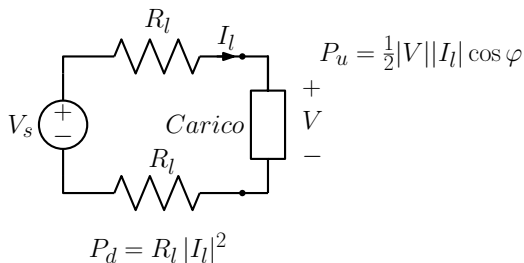
Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

Rifasamento



$$Q_C = -\frac{1}{2} \omega C |V|^2$$

$$Q_1 = P_u \tan \varphi_1$$

$$Q_2 = P_u \tan \varphi_2$$

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P_u (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)$$

$$C = \frac{2|Q_C|}{\omega |V|^2} = \frac{2P_u (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)}{\omega |V|^2}$$

Rifasamento

Esempio: un carico assorbe 10kW con un fattore di potenza 0,75 in ritardo. La tensione è pari a 220 V efficaci e la frequenza è 50 Hz. Rifasare il carico in modo da portare il fattore di potenza a 0,95. Calcolare la corrente di linea e la potenza dissipata sulla linea prima e dopo il rifasamento, assumendo $R_l = 0,5\Omega$.

Soluzione: L'angolo di fase iniziale è

$$\varphi_1 = \arccos 0,75 = 41,4^\circ$$

L'angolo di fase desiderato è

$$\varphi_2 = \arccos 0,95 = 18,2^\circ$$

Applicando la formula si ha

$$C = \frac{10^4 (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)}{2\pi \cdot 50 \cdot 220^2} = 0,36\text{mF}$$

Rifasamento

Esempio (cont.)

Per la corrente abbiamo

$$|I_1| = \frac{2P_u}{|V| \cos \varphi_1} = \frac{2 \cdot 10^4}{220\sqrt{2} \cdot 0,75} = 60\sqrt{2}\text{A}$$

Dopo il rifasamento

$$|I_2| = \frac{2P_u}{|V| \cos \varphi_2} = \frac{2 \cdot 10^4}{220\sqrt{2} \cdot 0,95} = 47,8\sqrt{2}\text{A}$$

La potenza dissipata prima del rifasamento è

$$P_{d1} = R_l |I_1|^2 = 0,5 \cdot (60\sqrt{2})^2 = 3600\text{W}$$

Dopo il rifasamento

$$P_{d2} = R_l |I_2|^2 = 0,5 \cdot (47,8\sqrt{2})^2 = 2284\text{W}$$

Con una riduzione di 1316W.

Indice

Circuiti con generatori sinusoidali

Proprietà dei fasori

Uso dei fasori

Legge di Ohm nel dominio dei fasori

Impedenza e ammettenza

Serie e parallelo di impedenze e ammettenze

Il metodo simbolico dei fasori

Uso del metodo simbolico

Potenza istantanea, potenza attiva e potenza reattiva

Potenza complessa

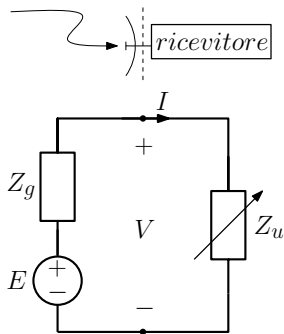
Conservazione della potenza

Classificazione di bipoli

Rifasamento

Adattamento energetico

Adattamento energetico



- ▶ Ipotizziamo di avere un generatore fissato, mentre il carico è variabile
- ▶ Per quale valore del carico Z_u la potenza fornita dal generatore al carico è massima?

$$Z_g = R_g + jX_g \quad Z_u = R_u + jX_u$$

$$P = \frac{1}{2} R_u |I|^2 = \frac{1}{2} \frac{R_u |E|^2}{(R_g + R_u)^2 + (X_g + X_u)^2}$$

Adattamento energetico

$$P = \frac{1}{2} R_u |I|^2 = \frac{1}{2} \frac{R_u |E|^2}{(R_g + R_u)^2 + (X_g + X_u)^2}$$

- Scegliendo $X_u = -X_g$ si ottiene $P = \frac{1}{2} |E|^2 \frac{R_u}{(R_g + R_u)^2}$
- $\frac{dP}{dR_u} = \frac{1}{2} |E|^2 \frac{R_g^2 - R_u^2}{(R_g + R_u)^4}$.
- La potenza è massima per

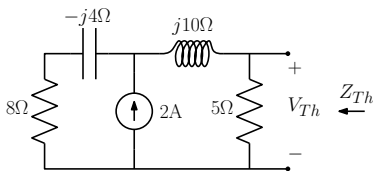
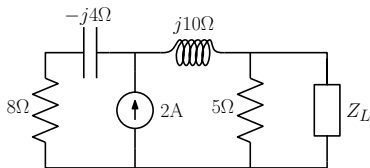
$$X_u = -X_g; R_u = R_g \Rightarrow Z_u = Z_g^*$$

Condizione di adattamento energetico (massimo trasferimento di potenza): $Z_u = Z_g^*$

$$P_{max} = \frac{|E|^2}{8R_g}$$

Adattamento energetico

Esempio: Trovare l'impedenza Z_L che assorbe la massima potenza



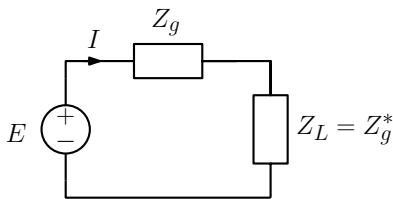
$$Z_{Th} = 5 \parallel (8 + j6) = \frac{40 + j30}{13 + j6} = \frac{700 + j150}{205} \Omega$$

$$V_{Th} = 5 \cdot 2 \frac{8 - j4}{13 + j6} \text{ V}$$

$$Z_L = Z_{Th}^* = \frac{700 - j150}{205} \Omega$$

$$P_{max} = \frac{|V_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{\left(40\sqrt{\frac{5}{205}}\right)^2}{8 \cdot \frac{700}{205}} = 1,429 \text{ W}$$

Rendimento



► Per un carico adattato

- $I = \frac{E}{Z_g + Z_L} = \frac{E}{2R_g}$
- $S_E = \frac{1}{2} E I^* = \frac{1}{4} \frac{|E|^2}{R_g} = P_E$ Potenza erogata dal generatore
- $P_{max} = \frac{|E|^2}{8R_g}$

$$\eta = \frac{P}{P_E} \quad \text{se } P = P_{max} \Rightarrow \eta = 0,5$$

- Se si vuole massimizzare la potenza sul carico, il massimo rendimento ottenibile è del 50%
- Se si vuole massimizzare l'efficienza, occorre avere $R_L \gg R_g$