ELETTROTECNICA
PARTE VII: ANALISI IN FREQUENZA, DIAGRAMMI DI BODE, TRASFORMATORI

Michele Bonnin e Fernando Corinto
michele.bonnin@polito.it fernando.corinto@polito.it

Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Politecnico di Torino

A.A. 2016/2017

Indice

Indice

Serie di Fourier

- Una funzione è periodica se $f(t) = f(t + nT)$, dove $n \in \mathbb{N}$, T è il periodo e $\omega_0 = 2\pi/T$ è la pulsazione
- $f(t)$ è rappresentabile per mezzo della serie di Fourier

$$f(t) = \underbrace{a_0}_{dc} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right]}_{ac}$$

- I coefficienti della serie sono dati da

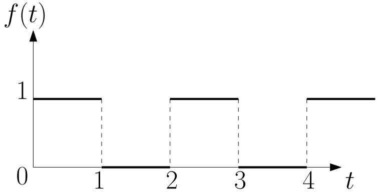
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Serie di Fourier

Esempio: onda quadra



$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \\ 1 & 2 < t < 3 \\ \dots & \end{cases}$$

$$T = 2,\ \omega_0 = 2\pi/T = \pi$$

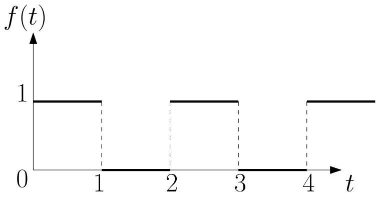
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 1 \cdot dt + \int_1^2 0 \cdot dt\right] = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \int_0^1 1 \cdot \cos(n\pi t)dt + \int_1^2 0 \cdot \cos(n\pi t)dt$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi) = 0$$

Serie di Fourier

Esempio: onda quadra



$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \\ 1 & 2 < t < 3 \\ \dots \end{cases}$$

$$T = 2, \ \omega_0 = 2\pi/T = \pi$$

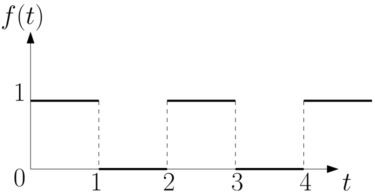
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \int_0^1 1\cdot\sin(n\pi t)dt + \int_1^2 0\cdot\sin(n\pi t)dt$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)\Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - 1\right)$$

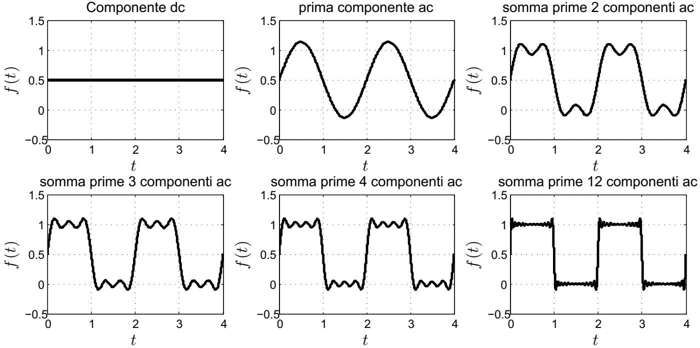
$$\cos(n\pi) = (-1)^n \Rightarrow b_n = \frac{1}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & n \ dispari \\ 0 & n \ pari \end{cases}$$

Serie di Fourier

Esempio: onda quadra



$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi t) \qquad n = 2k-1$$



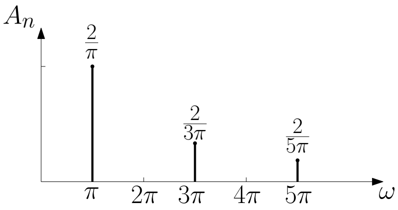
Serie di Fourier

- Rappresentazione alternativa

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

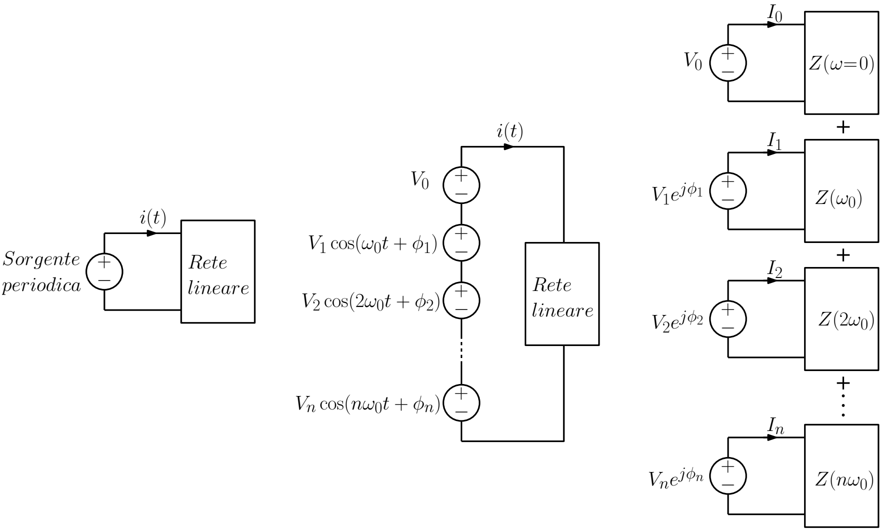
- $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- $\phi_n = -\arctan(b_n/a_n)$

Facendo riferimento all'esempio dell'onda quadra



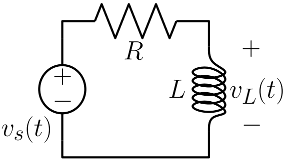
Indice

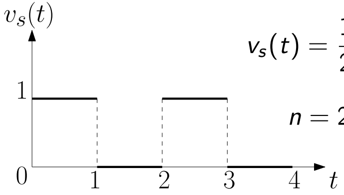
Risposta ad un ingresso periodico



Risposta ad un ingresso periodico

Esempio:





$$v_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi t)$$

$$n = 2k - 1 \qquad \omega = \pi$$

$$v_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos(n\pi t - 90^\circ)$$

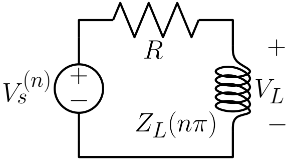
$$V_s^{(0)} = \frac{1}{2},\ (\omega_0 = 0); \qquad V_s^{(1)} = \frac{2}{\pi}\, e^{-j90^\circ},\ (\omega_0 = \pi)$$

$$V_s^{(3)} = \frac{2}{3\pi}\, e^{-j90^\circ},\ (3\omega_0 = 3\pi)\ldots$$

$$V_s^{(n)} = \frac{2}{n\pi}\, e^{-j90^\circ},\ (n\omega_0 = n\pi) \qquad n \text{ dispari}$$

Risposta ad un ingresso periodico

Esempio:



$$V_L = V_s \frac{Z_L}{R + Z_L}$$

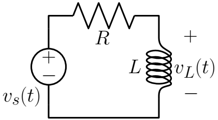
$$\boxed{V_s^{(0)} = \frac{1}{2} \Rightarrow Z_L = 0; \qquad V_L^{(0)} = 0\mathrm{V}}$$

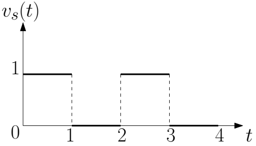
$$\begin{array}{|lll|}
\hline
V_s^{(1)} = & \frac{2}{\pi}\, e^{-j90^\circ} & (\omega = \pi) \Rightarrow Z_L = j\pi L \\
V_L^{(1)} = & \frac{2}{\pi}\, e^{-j90^\circ} \dfrac{j\pi L}{R + j\pi L} & = \dfrac{2L}{\sqrt{R^2 + \pi^2 L^2}} e^{-j \arctan \pi L/R} \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{|lll|}
\hline
V_s^{(n)} = & \frac{2}{n\pi}\, e^{-j90^\circ} & (\omega = n\pi) \Rightarrow Z_L = jn\pi L \\
V_L^{(n)} = & \frac{2}{n\pi}\, e^{-j90^\circ} \dfrac{jn\pi L}{R + jn\pi L} & = \dfrac{2L}{\sqrt{R^2 + n^2\pi^2 L^2}} e^{-j \arctan n\pi L/R} \\
\hline
\end{array}$$

Risposta ad un ingresso periodico

Esempio:





$$v_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi t)$$

$$n = 2k - 1 \qquad \omega = \pi$$

$$V_L^{(0)} = 0 \Rightarrow v_L^{(0)}(t) = 0$$

$$V_L^{(1)} = \frac{2L}{\sqrt{R^2 + \pi^2 L^2}} e^{-j \arctan \pi L/R} \Rightarrow v_L^{(1)}(t) = \frac{2L}{\sqrt{R^2 + \pi^2 L^2}} \cos(\pi t - \arctan \pi L/R)$$

$$\vdots$$

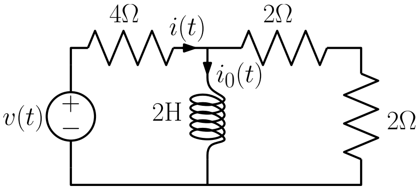
$$V_L^{(n)} = \frac{2L}{\sqrt{R^2 + n^2\pi^2 L^2}} e^{-j \arctan n\pi L/R} \Rightarrow v_L^{(n)}(t) = \frac{2L}{\sqrt{R^2 + n^2\pi^2 L^2}} \cos(n\pi t - \arctan n\pi L/R)$$

Somma (nel dominio del tempo):

$$\boxed{v_L(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2L}{\sqrt{R^2 + n^2\pi^2 L^2}} \cos(n\pi t - \arctan n\pi L/R) \qquad n = 2k - 1}$$

Risposta ad un ingresso periodico

Esempio:



$$v(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nt - n \sin nt)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{2(-1)^n}{1+n^2}\sqrt{1+n^2}$$

$$\phi_n = -\arctan(b_n/a_n) = \arctan n$$

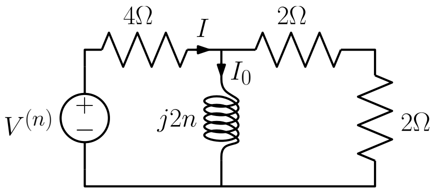
$$\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} v(t) =& 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}}(\cos nt + \arctan n) \\ =& 1 - 1,414\cos(t + 45^\circ) + 0,8944\cos(2t + 63,45^\circ) \\ & - 0,6345\cos(3t + 71,56^\circ) - 0,4851\cos(4t + 78,7^\circ) + \dots \end{aligned}$$

Risposta ad un ingresso periodico

Esempio:

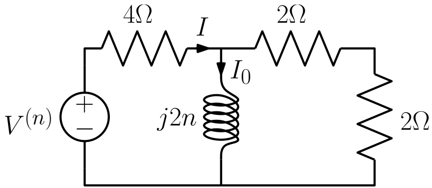
$$v(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}}(\cos nt + \arctan n)$$



$$\begin{aligned} V^{(0)} &= 1, \ (\omega_0 = 0) \\ V^{(1)} &= -\frac{2}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}, \ (\omega_0 = 1) \\ &\vdots \\ V^{(n)} &= \frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}} e^{j\arctan n}, \ (n\omega_0 = n) \end{aligned}$$

Risposta ad un ingresso periodico

Esempio:



$$Z(n\omega_0) = 4 + [j2n||(2+2)] = \frac{8+j8n}{2+jn}$$

$$I^{(n)} = \frac{V^{(n)}}{Z(n\omega_0)} = V^{(n)}\frac{2+jn}{8+j8n}$$

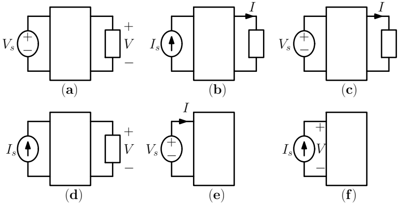
$$I_0^{(0)} = \frac{V^{(0)}}{4} = \frac{1}{4}\ \mathrm{A}$$

$$I_0^{(n)} = I^{(n)}\frac{4}{4+j2n} = \frac{V^{(n)}}{4(1+jn)} = \frac{(-1)^n}{2(1+n^2)}e^{j0^\circ}$$

$$\boxed{i_0(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2(1+n^2)}\cos(nt)\ \mathrm{A}}$$

Indice

Funzione di trasferimento



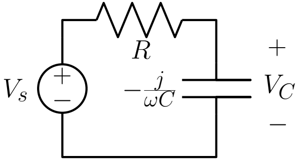
Funzione di Trasferimento

$$H(\omega) = \frac{\textit{Fasore della risposta}}{\textit{Fasore dell'ingresso}}$$

Figura	Definizione	Denominazione	Unità di misura
(a)	$H_v = \frac{V}{V_s}$	Funzione di trasferimento in tensione	Adimensionale
(b)	$H_i = \frac{I}{I_s}$	Funzione di trasferimento in corrente	Adimensionale
(c)	$Y_t = \frac{I}{V_s}$	Ammettenza di trasferimento	Siemens
(d)	$Z_t = \frac{V}{I_s}$	Impedenza di trasferimento	Ohm
(e)	$Y = \frac{I}{V_s}$	Ammettenza d'ingresso	Siemens
(f)	$Z = \frac{V}{I_s}$	Impedenza d'ingresso	Ohm

Circuito RC in frequenza

Funzione di Trasferimento: $H(\omega) = \dfrac{Fasore\ della\ risposta}{Fasore\ dell'ingresso}$

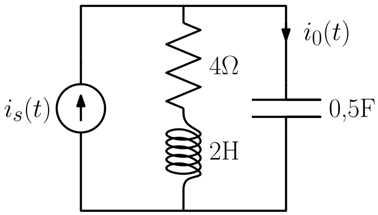


$$V_C = V_s \frac{-\frac{j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} = V_s \frac{-j}{\omega RC - j} = V_s \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Funzione di trasferimento

Esempio:



$$I_0(\omega) = I_s(\omega)\frac{4 + j\omega 2}{4 + j\omega 2 - j/(\omega 0,5)}$$

$$\frac{I_0(\omega)}{I_s(\omega)} = \frac{4 + j\omega 2}{4 + j\omega 2 - j/(\omega 0,5)}$$

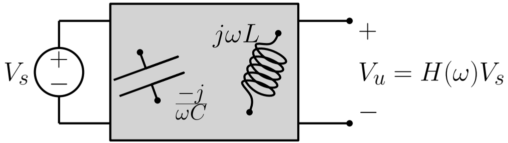
$$H(\omega) = \frac{j0,5\omega(4 + j\omega 2)}{1 + j\omega 2 + (j\omega)^2}$$

In generale, qualunque funzione di rete è una funzione razionale reale della variabile complessa $j\omega$

$$F(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(j\omega) + a_0}$$

Indice

Risposta in frequenza



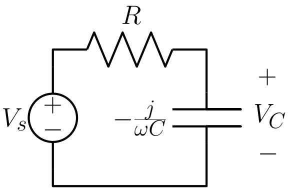
$$V_u = |V_u|e^{j\theta_u} \qquad V_s = |V_s|e^{j\theta_s} \qquad H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

$$V_u = |V_s|\,|H(\omega)|\,e^{j[\theta_s+\theta(\omega)]}$$

$$v_u(t) = |V_u|\cos(\omega t + \theta_u) = |V_s|\,|H(\omega)|\cos[\omega t + \theta_s + \theta(\omega)]$$

- $|H(\omega)|$ Risposta in ampiezza
- $\theta(\omega)$ Risposta in fase

Risposta in ampiezza e fase



ω/ω_c	$\|H\|$	θ
0	1	0
1	0,71	-45°
2	0,45	-63°
3	0,32	-72°

$$V_c = V_s \frac{-\frac{j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} = V_s \frac{1}{1 + j\omega RC} = H(\omega)\, V_s$$

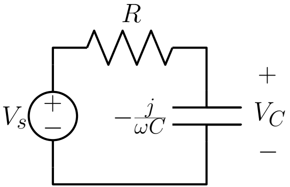
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$|H(\omega)| = \left|\frac{1}{1 + j\omega RC}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\theta(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

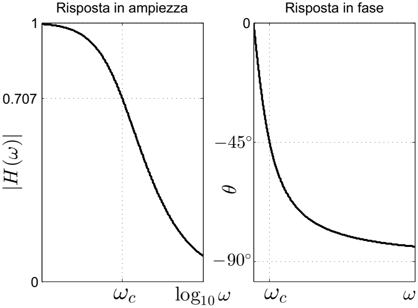
$$\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \quad \textit{frequenza (angolare) di taglio}$$

Risposta in ampiezza e fase



$$V_c = V_s \frac{-\frac{j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} = V_s \frac{1}{1 + j\omega RC} = H(\omega)\, V_s$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

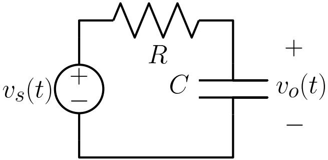


$$v_C(t) = |H(\omega)|\, |V_s| \cos[\omega t + \theta_s + \theta(\omega)]$$

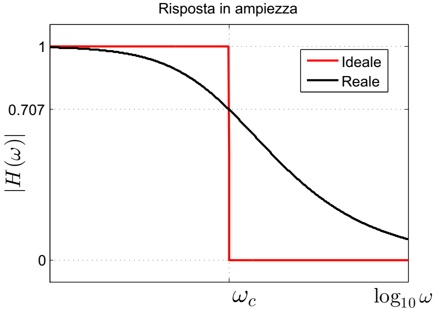
Indice

Filtri del primo ordine

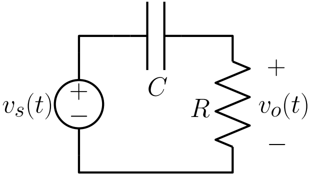
Filtro passa–basso



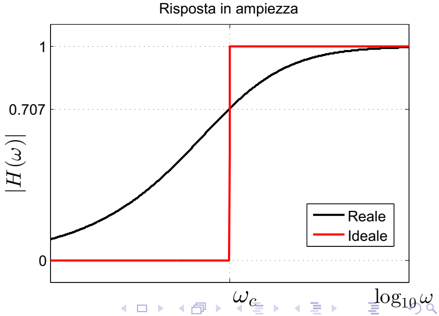
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



Filtro passa–alto

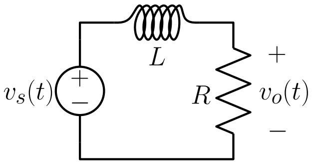


$$H(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

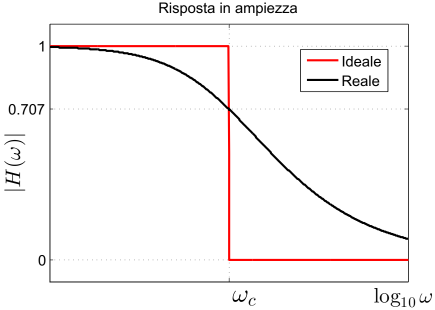


Filtri del primo ordine

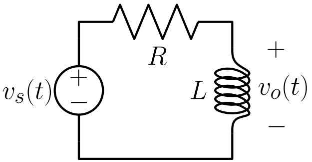
Filtro passa–basso



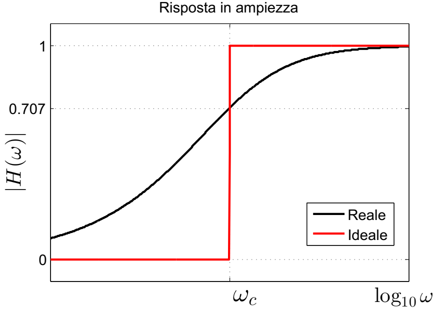
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega GL}$$



Filtro passa–alto

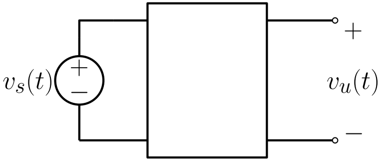


$$H(\omega) = \frac{j\omega GL}{1 + j\omega GL}$$



Proprietà filtranti

$$v_s(t) = v_{s1}(t) + v_{s2}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$



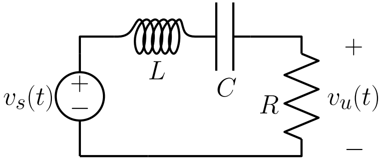
$$V_{u1} = H(\omega_1) V_{s1} \qquad\qquad V_{u2} = H(\omega_2) V_{s2}$$

$$v_u(t) = |H(\omega_1)|\, A_1 \cos[\omega_1 t + \theta_1 + \theta(\omega_1)] + |H(\omega_2)|\, A_2 \cos[\omega_2 t + \theta_2 + \theta(\omega_2)]$$

Se per esempio $\omega_1 \ll \omega_c \ll \omega_2$, allora:

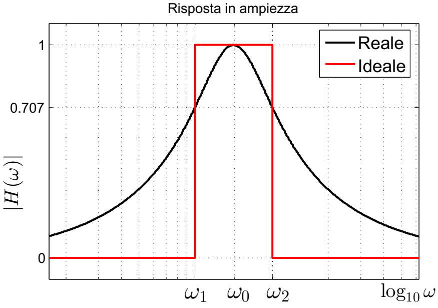
- Passa–basso: $v_u(t) \simeq |H(\omega_1)|\, A_1 \cos[\omega_1 t + \theta + \theta(\omega_1)] = v_{s1}(t)$
- Passa–alto: $v_u(t) \simeq |H(\omega_2)|\, A_2 \cos[\omega_2 t + \theta + \theta(\omega_2)] = v_{s2}(t)$

Filtri del secondo ordine



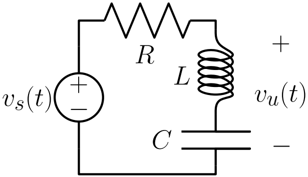
$$H(\omega) = \frac{V_u}{V_s} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



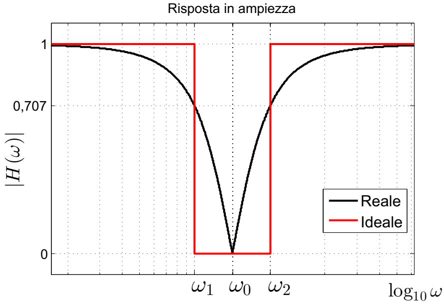
- Filtro passa–banda

Filtri del secondo ordine



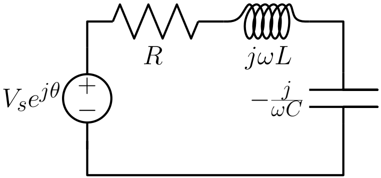
$$H(\omega) = \frac{V_u}{V_s} = \frac{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

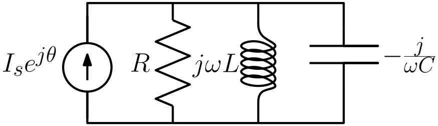
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



- Filtro elimina–banda

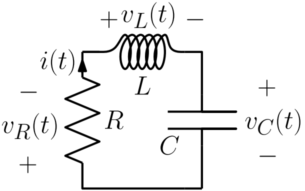
Circuiti risonanti





Indice

RLC in evoluzione libera

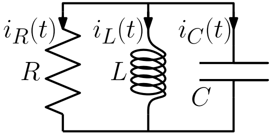


$$R\ i + v_L + v_C = 0$$

$$i = C\ \frac{dv_C}{dt} \qquad v_L = L\ \frac{di}{dt}$$

$$R\ C\ \frac{dv_C}{dt} + L\ C\ \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C = 0$$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\ \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L\ C} v_C = 0$$



$$\frac{v}{R} + i_L + i_C = 0$$

$$v = L\ \frac{di_L}{dt} \qquad i_C = C\ \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L + L\ C\ \frac{d^2 i_L}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{R\ C}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{L\ C} i_L = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

RLC in evoluzione libera: soluzione

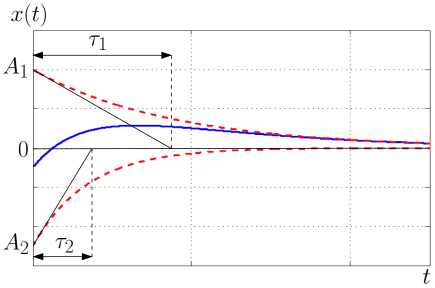
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

- Coefficiente di smorzamento:
  $\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{G}{2C}$
- pulsazione di risonanza:
  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$s^2 + 2\alpha\, s + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

Circuito sovrasmorzato $\alpha > \omega_0$

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



RLC in evoluzione libera: soluzione

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

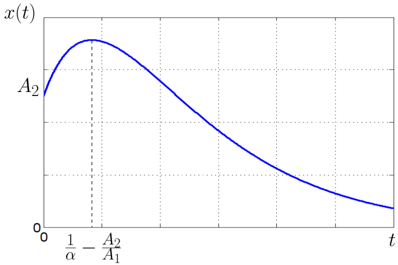
- Coefficiente di smorzamento:
  $\alpha = \dfrac{R}{2L}; \quad \alpha = \dfrac{1}{2RC} = \dfrac{G}{2C}$
- pulsazione di risonanza:
  $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$$s^2 + 2\alpha\, s + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

Circuito con smorzamento critico $\alpha = \omega_0$

$$x(t) = (A_1 t + A_2)e^{-\alpha t}$$

$$s_1 = s_2 = -\alpha$$



RLC in evoluzione libera: soluzione

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

- Coefficiente di smorzamento: $\alpha = \frac{R}{2L}$; $\quad \alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{G}{2C}$
- pulsazione di risonanza: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

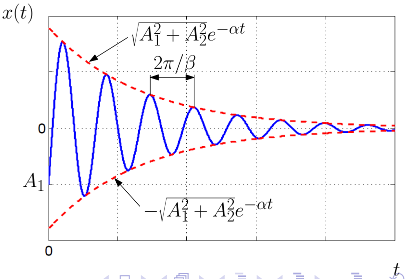
$$s^2 + 2\alpha\, s + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

Circuito sottosmorzato $\alpha < \omega_0$

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \qquad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$x(t) = [A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t)]e^{-\alpha t}$$

$$s_1 = -\alpha + j\beta \qquad s_2 = -\alpha - j\beta$$



RLC in evoluzione libera: soluzione

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

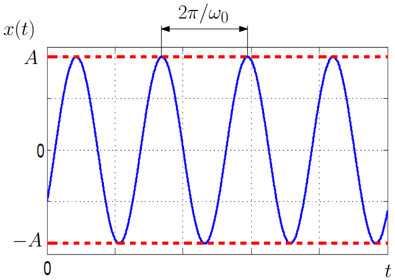
- Coefficiente di smorzamento:
  $\alpha = \dfrac{R}{2L}; \quad \alpha = \dfrac{1}{2RC} = \dfrac{G}{2C}$
- pulsazione di risonanza:
  $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$$s^2 + 2\alpha\, s + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

Circuito senza smorzamento $\alpha = 0$

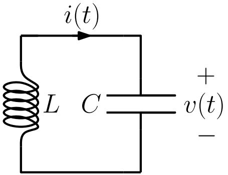
$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$s_1 = j\omega_0 \qquad s_2 = -j\omega_0$$



RLC in evoluzione libera: soluzione

Circuito senza smorzamento $\alpha = 0$



- Coefficiente di smorzamento:
  $\alpha = \dfrac{R}{2L}$; $\quad \alpha = \dfrac{1}{2RC} = \dfrac{G}{2C}$
- pulsazione di risonanza:
  $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

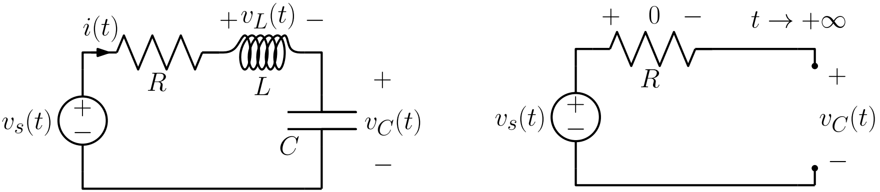
$$v(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad \phi = -\arctan A_2/A_1$$

$$\begin{aligned} w(t) =& \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} L [C\, A\, \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)]^2 + \frac{1}{2} C [A \cos(\omega_0 t + \phi)]^2 \\ =& \frac{1}{2} L\, C^2\, A^2\, \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2} C A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2} C\, A^2 \end{aligned}$$

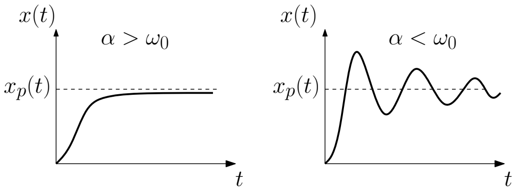
Indice

RLC con ingresso costante



$$\boxed{x(t) = x_0(t) + x_p(t)}$$

- Se le frequenze naturali sono reali negative, oppure complesse coniugate con parte reale negativa, il circuito si dice stabile



RLC con ingresso costante

1. Se le condizioni iniziali $v_C(0)$ e $i_L(0)$ non sono note, ricavarle dal circuito a regime in $t = 0^-$
2. Sostituire ogni condensatore con un circuito aperto ed ogni induttore con un corto circuito; studiare il circuito resisitivo ottenuto, ricavando il valore $x(+\infty)$ della variabile desiderata
3. Spegnere i generatori indipendenti; scrivere un'equazione differenziale omogenea, determinando α e ω_0
4. La soluzione cercata è:

$$
\begin{aligned}
x(t) =& A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + x(+\infty) && \textit{per } \alpha > \omega_0 \\
x(t) =& (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t} + x(+\infty) && \textit{per } \alpha = \omega_0 \\
x(t) =& [A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t)] e^{-\alpha t} + x(+\infty) && \textit{per } \alpha < \omega_0
\end{aligned}
$$

5. Determinare le costanti A_1 e A_2, usando le condizioni iniziali ricavate al punto 1

Circuito del secondo ordine

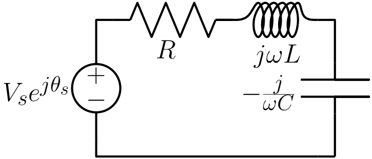
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dx_1}{dt} & = & a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + u_1 \\ \frac{dx_2}{dt} & = & a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + u_2 \end{array} \right. \qquad \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

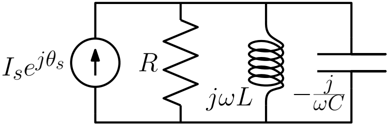
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = (a_{11} + a_{22})\frac{dx_1}{dt} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 + \frac{du_1}{dt} + a_{12}u_2 - a_{22}u_1$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - T\frac{dx_1}{dt} + \Delta\, x_1 = y_1$$

- T: traccia della matrice dei coefficienti
- Δ: determinante della matrice dei coefficienti
- $\alpha = -T/2$
- $\omega_0^2 = \Delta$

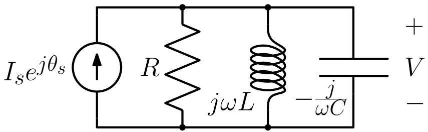
RLC con ingresso sinusoidale





$$\boxed{x(t) = x_o(t) + \boxed{x_p(t)}}$$

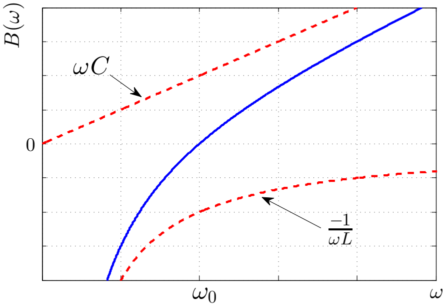
RLC risonante parallelo



$$Y(\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

$$= \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$

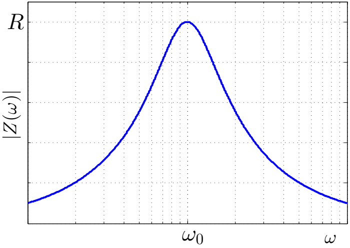


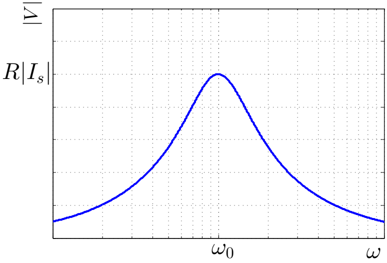
RLC risonante parallelo

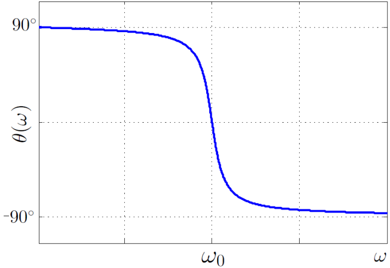
Funzione di Trasferimento

$$Z(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

$$V = Z(\omega) I_s$$

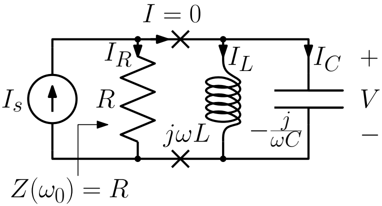


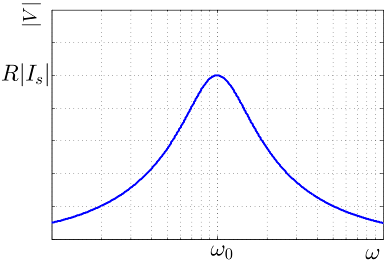




RLC risonante parallelo

In condizioni di risonanza





$$V = R\, I_s$$

$$I_L = -I_C = -j\omega_0 C\, V = -j\omega_0 C\, R\, I_s = -jQ\, I_s$$

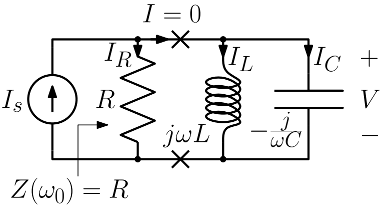
- $\boxed{Q \doteq \omega_0\, R\, C}$ Fattore di qualità

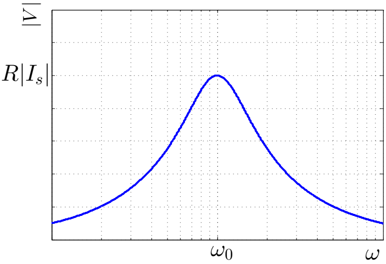
$$|I_L| = |I_C| = Q\,|I_s|$$

Se il fattore di qualità è molto elevato, l'ampiezza delle correnti attraverso l'induttore e il condensatore diventa molto elevata, tanto da poter danneggiare i componenti

RLC risonante parallelo

In condizioni di risonanza





$$V = R\, I_s$$

- Energia immagazzinata nel circuito

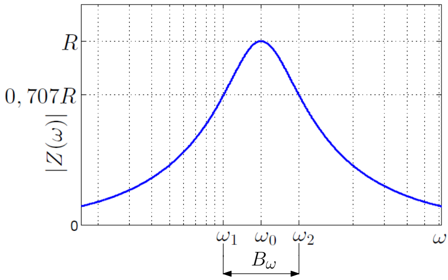
$$w_0 = \frac{1}{2} C\, R^2\, |I_s|^2$$

- $\dfrac{\textit{Energia immagazzinata}}{\textit{Energia dissipata da R}}$

$$\frac{w_0}{P \cdot T} = \frac{\frac{1}{2} C\, R^2\, |I_s|^2}{\frac{1}{2} R\, |I_s|^2 \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0\, R\, C}{2\pi} = \frac{Q}{2\pi}$$

RLC risonante parallelo

Filtro passa–banda



- ω_0 frequenza (angolare) di risonanza
- Q Fattore di qualità
- ω_1, ω_2 frequenze (angolari) di taglio
- B_ω banda passante

$$Q = \omega_0 \, R \, C$$

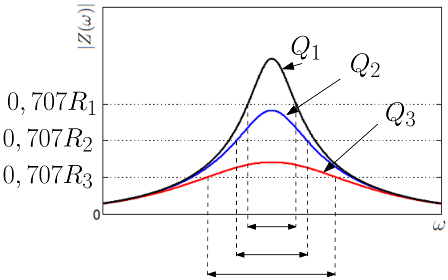
$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \, \omega_2}$$

$$\boxed{\omega_{1,2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \mp \frac{\omega_0}{2Q} \qquad B_\omega \doteq \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}$$

- Per circuiti con elevato fattore di qualità $\omega_{1,2} \simeq \omega_0 \pm \dfrac{\omega_0}{2Q}$

RLC risonante parallelo

Filtro passa–banda

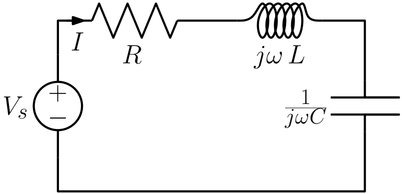


- ω_0 frequenza (angolare) di risonanza
- Q Fattore di qualità
- ω_1, ω_2 frequenze (angolari) di taglio
- B_ω banda passante

$$Q_1 > Q_2 > Q_3$$

- Per ω_0 fissata, al crescere di Q la banda passante diventa più stretta
- La transizione tra banda passante e banda eliminata diventa più netta
- Il filtro è detto *più selettivo*

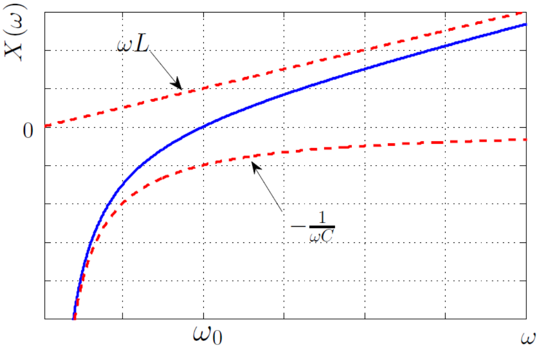
RLC risonante serie



$$Z(\omega) = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$



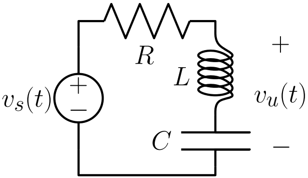
RLC risonante serie

Funzione di Trasferimento

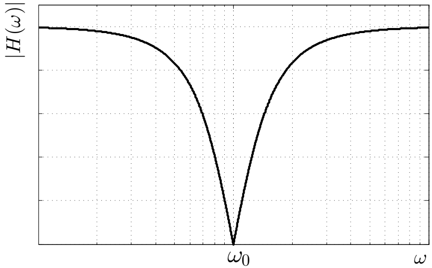
$$Y(\omega) = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Caso duale rispetto al RLC parallelo

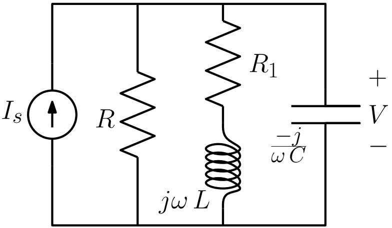
Filtro elimina–banda

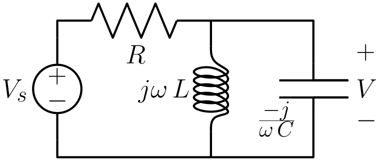


$$H(\omega) = \frac{j\omega\, L - \frac{j}{\omega C}}{R + j\omega\, L - \frac{j}{\omega\, C}}$$



RLC risonante serie

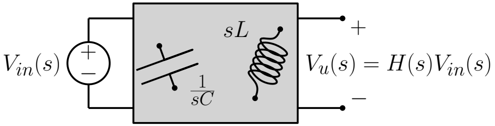




In condizioni di risonanza l'ammettenza e l'impedenza sono **reali**

Indice

Funzioni di rete

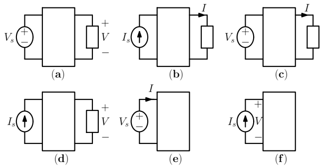


- Condizioni iniziali nulle
- Un solo generatore indipendente (ingresso)

$$V_u(s) = H(s)\, V_{in}(s)$$

$$H(s) = \frac{\textit{trasformata di Laplace della risposta forzata}}{\textit{trasformata di Laplace dell'ingresso}}$$

Funzione di trasferimento



Funzione di Rete

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}[risposta\ all'ingresso]}{\mathcal{L}[segnale\ d'ingresso]}$$

Figura	Definizione	Denominazione	Unità di misura
(a)	$H_v = \frac{V}{V_s}$	Funzione di trasferimento in tensione	Adimensionale
(b)	$H_i = \frac{I}{I_s}$	Funzione di trasferimento in corrente	Adimensionale
(c)	$Y_t = \frac{I}{V_s}$	Ammettenza di trasferimento	Siemens
(d)	$Z_t = \frac{V}{I_s}$	Impedenza di trasferimento	Ohm
(e)	$Y = \frac{I}{V_s}$	Ammettenza d'ingresso	Siemens
(f)	$Z = \frac{V}{I_s}$	Impedenza d'ingresso	Ohm

Funzione di rete

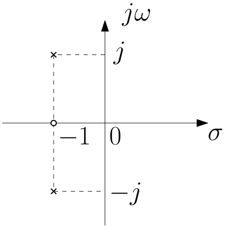
In generale, le funzioni di rete nel dominio dei fasori si ottengono dalle funzioni di rete nel dominio di Laplace sostituendo s con $j\omega$.

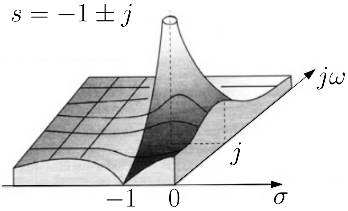
$$V_u = H_v(\omega)\, V_{in} = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)}\, |V_{in}| e^{j\theta_{in}} = |H(\omega)|\, |V_{in}| e^{j[\theta(\omega)+\theta_{in}]}$$

$$|V_u| = |H(\omega)|\, |V_{in}|$$

$$\theta_u = \theta(\omega) + \theta_{in}$$

Funzione di rete





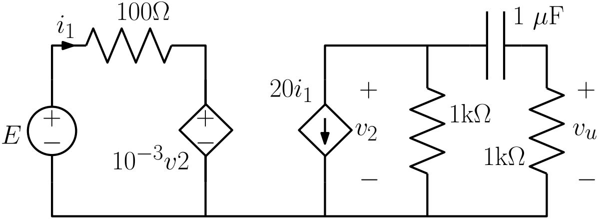
$$F(-j\omega) = [F(j\omega)]^* \qquad |F(-j\omega)| = |F(j\omega)| \qquad \arg F(-j\omega) = -\arg F(j\omega)$$

$$\boxed{|F(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|F(j\omega)|}$$

- Poichè l'asse delle ordinate ha una scala lineare (graduata in *dB*) mentre l'asse delle ascisse ha scala logaritmica, il diagramma è in *scala semi–logaritmica*

Funzione di rete

Esempio: trovare $H(s) = \dfrac{V_0(s)}{E(s)}$

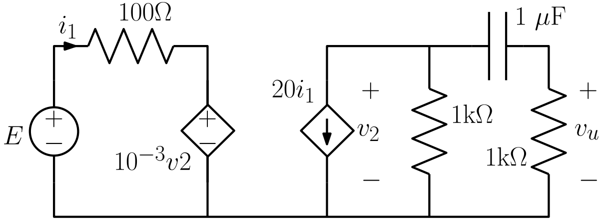


$$\frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2}{R_3 + 1/sC} + \beta I_1 = 0$$

$$I_1 = \frac{E - \alpha V_2}{R_1}$$

Funzione di rete

Esempio: trovare $H(s) = \dfrac{V_0(s)}{E(s)}$

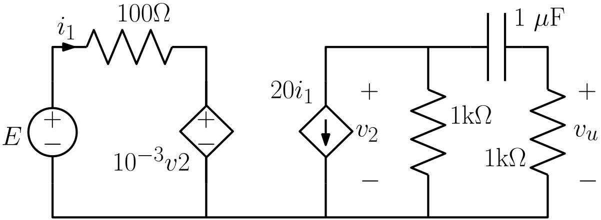


$$V_2 = -\frac{\beta G_1(R_3Cs+1)}{(G_2-\alpha\beta G_1)(R_3Cs+1)+sC}E$$

$$V_u = V_2\frac{R_3}{R_3+1/sC} = -\frac{\beta G_1R_3Cs}{(G_2-\alpha\beta G_1)(R_3Cs+1)+sC}E$$

Funzione di rete

Esempio: trovare $H(s) = \dfrac{V_0(s)}{E(s)}$



$$H(s) = \frac{V_u}{E} = -\frac{\beta G_1 R_3 Cs}{(G_2 - \alpha\beta G_1)(R_3 Cs + 1) + sC} = -\frac{10^3 s}{4 \cdot 10^3 + 9s}$$

$$H(s) = -\frac{1}{9} \cdot 10^3 \frac{s}{s + \frac{4}{9} \cdot 10^3}$$

Curve di risposta

Esempio:

$$H(\omega) = \frac{200j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)}$$

$$H(\omega) = \frac{10j\omega}{(1 + j\omega/2)(1 + j\omega/10)} = \frac{10|j\omega|}{|1 + j\omega/2|\,|1 + j\omega/10|} e^{j(90^\circ - \arctan \omega/2 - \arctan \omega/10)}$$

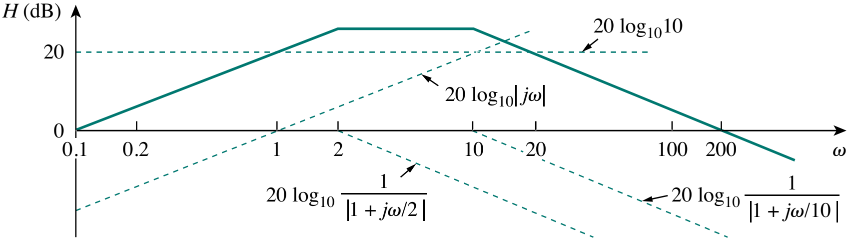
$$H_{dB} = 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} |j\omega| - 20 \log_{10} \left|1 + \frac{j\omega}{2}\right| - 20 \log_{10} \left|1 + \frac{j\omega}{10}\right|$$

$$\theta = 90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2} - \arctan \frac{\omega}{10}$$

Curve di risposta

Esempio:

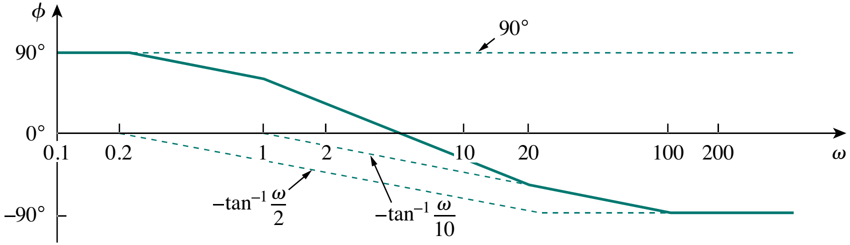
$$H(\omega) = \frac{200j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)}$$



Curve di risposta

Esempio:

$$H(\omega) = \frac{200j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)}$$



Indice

Curve di risposta: diagrammi di Bode

$$H(\omega) = \frac{K\,(j\omega)^{\pm 1}(1 + j\omega/z_1)[1 + j2\,\zeta_1\,\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]\ldots}{(1 + j\omega/p_1)[1 + j2\,\zeta_2\,\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]\ldots}$$

- Un guadagno K
- Un polo $(j\omega)^{-1}$ o uno zero $(j\omega)$ nell'origine
- Un polo semplice $(1 + j\omega/p_1)^{-1}$ o uno zero semplice $(1 + j\omega/z_1)$
- Un polo quadratico $[1 + j2\,\zeta_2\,\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ o uno zero quadratico $[1 + j2\,\zeta_1\,\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]$

Curve di risposta: diagrammi di Bode

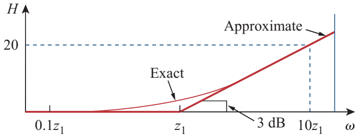
$$H(\omega) = \frac{K\,(j\omega)^{\pm 1}(1 + j\omega/z_1)[1 + j2\,\zeta_1\,\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]\ldots}{(1 + j\omega/p_1)[1 + j2\,\zeta_2\,\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]\ldots}$$

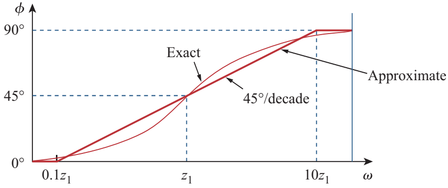
- Un guadagno K

$$H_{dB} = 20\log_{10} K$$

- Un polo/zero semplice

$$H_{dB} = 20\log_{10}\left|1 + \frac{j\omega}{z_1}\right| \Rightarrow \begin{cases} 20\log_{10} 1 = 0 & per\ \omega \to 0 \\ 20\log_{10}\dfrac{\omega}{z_1} & per\ \omega \to +\infty \end{cases}$$



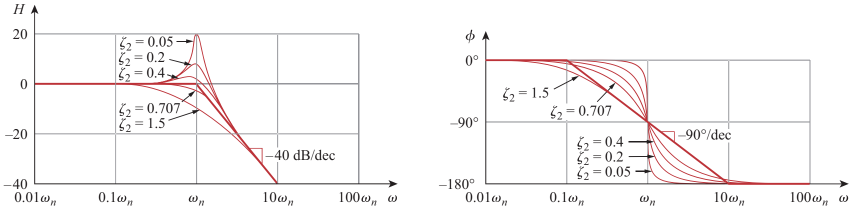


Curve di risposta: diagrammi di Bode

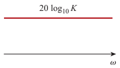
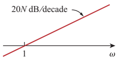
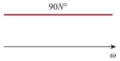
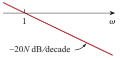
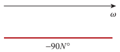
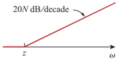
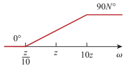
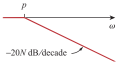
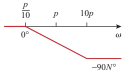
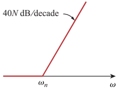
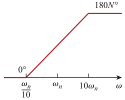
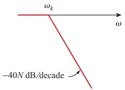
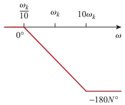
$$H(\omega) = \frac{K\,(j\omega)^{\pm 1}(1 + j\omega/z_1)[1 + j2\,\zeta_1\,\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]\ldots}{(1 + j\omega/p_1)[1 + j2\,\zeta_2\,\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]\ldots}$$

- Un polo/zero quadratico

$$H_{dB} = -20\log_{10}\left|1 + \frac{j2\,\zeta_2\,\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right| \Rightarrow \begin{cases} 0 & per\ \omega \to 0 \\ -40\log_{10}\dfrac{\omega}{\omega_n} & per\ \omega \to +\infty \end{cases}$$



Diagrammi di Bode: sommario dei diagrammi approssimati

Factor	Magnitude	Phase
K		
$(j\omega)^N$		
$\dfrac{1}{(j\omega)^N}$		
$\left(1+\dfrac{j\omega}{z}\right)^N$		
$\dfrac{1}{(1+j\omega/p)^N}$		
$\left[1+\dfrac{2j\omega\zeta}{\omega_n}+\left(\dfrac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^N$		
$\dfrac{1}{[1+2j\omega\zeta/\omega_k+(j\omega/\omega_k)^2]^N}$		

Diagrammi di Bode

Esempio:

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 10}{j\omega(j\omega + 5)^2} = \frac{0,4(1 + j\omega/10)}{j\omega(1 + j\omega/5)^2} \qquad \omega_{1,2} = 5,\ 10\mathrm{rad/s}$$

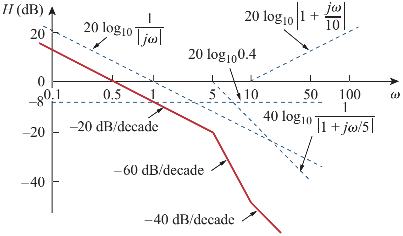
$$H_{dB} = 20\log_{10} 0,4 + 20\log_{10}\left|1 + \frac{j\omega}{10}\right| - 20\log_{10}|j\omega| - 40\log_{10}\left|1 + \frac{j\omega}{5}\right|$$

$$\theta = 0^\circ + \arctan\frac{\omega}{10} - 90^\circ - 2\arctan\frac{\omega}{5}$$

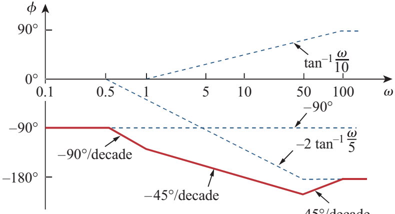
Diagrammi di Bode

Esempio:

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 10}{j\omega(j\omega + 5)^2} = \frac{0,4(1 + j\omega/10)}{j\omega(1 + j\omega/5)^2}$$



(a)



(b)

Diagrammi di Bode

Esempio:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+60s+100} \Rightarrow H(\omega) = \frac{j\omega+1}{(j\omega)^2+j60\omega+100}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{100}\,\frac{1+j\omega}{1+j6\omega/10+(j\omega/10)^2}$$

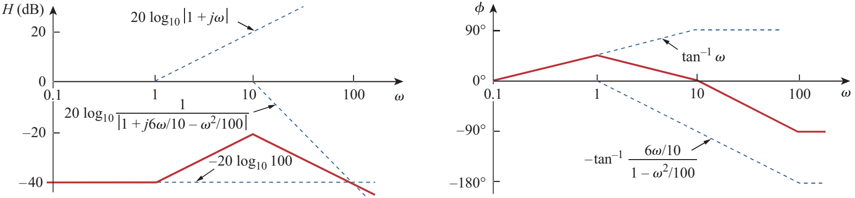
$$H_{dB} = -20\log_{10}100 + 20\log_{10}|1+j\omega| - 20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega 6}{10}-\frac{\omega^2}{100}\right|$$

$$\theta = 0^\circ + \arctan\omega - \arctan\left(\frac{6\omega/10}{1-\omega^2/100}\right)$$

Diagrammi di Bode

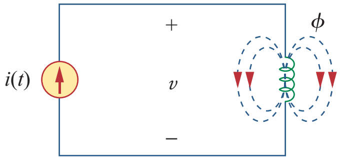
Esempio:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 60s + 100} \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{100}\,\frac{1 + j\omega}{1 + j6\omega/10 + (j\omega/10)^2}$$

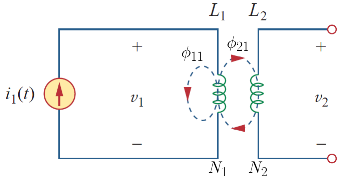


Indice

Induttori accoppiati



- Una spira percorsa da corrente produce un flusso magnetico

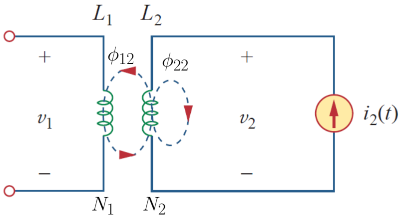


- ϕ_{11} Flusso attraverso la bobina 1 dovuto alla corrente i_1
- ϕ_{21} Flusso attraverso la bobina 2 dovuto alla corrente i_1

$$\phi_{11} = L_1\, i_1 \qquad \phi_{21} = M_{21}\, i_1$$

- L_1 (auto)-**induttanza** della bobina 1
- M_{21} **induttanza mutua** tra le due bobine

Induttori accoppiati

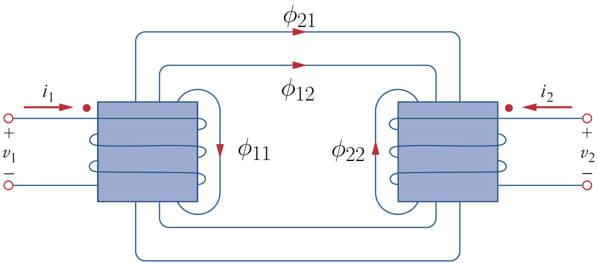


- ϕ_{12} Flusso attraverso la bobina 1 dovuto alla corrente i_2
- ϕ_{22} Flusso attraverso la bobina 2 dovuto alla corrente i_2

$$\phi_{22} = L_2 \, i_2 \qquad \phi_{12} = M_{12} \, i_2$$

- L_2 (auto)-**induttanza** della bobina 2
- M_{12} **induttanza mutua** tra le due bobine

Induttori accoppiati



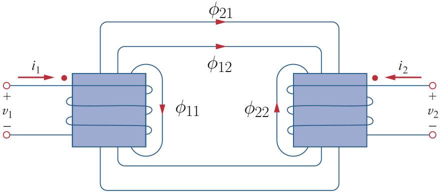
- In generale $M_{12} = M_{21} = M$
- ϕ_1, ϕ_2, flussi complessivi attraverso ciascuna bobina prodotti dalle correnti

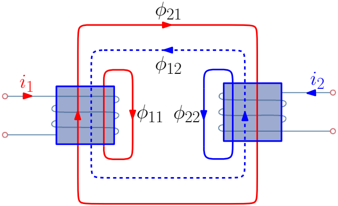
$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = L_1\, i_1 + M\, i_2$$

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} = M\, i_1 + L_2\, i_2$$

Induttori accoppiati

- Per la legge di Faraday: $v_1 = \dfrac{d\phi_1}{dt}; \qquad v_2 = \dfrac{d\phi_2}{dt}$
- M può essere preso con il suo segno oppure cambiato





$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}}$$

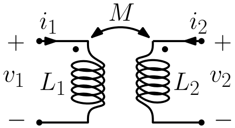
$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}}$$

Induttori accoppiati

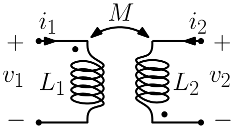
- Convenzione dei puntini: una corrente che entra in un terminale in corrispondenza di un puntino, provoca nell'altro induttore una tensione positiva in corrispondenza dell'altro puntino

Convenzione dei puntini

1. Assegnare versi di riferimento coordinati per le tensioni e le correnti
2. Se le correnti sono entrambe entranti (o entrambe uscenti) dai terminali con i puntini allora si usano le equazioni con M
3. Altrimenti si usano quelle con $-M$

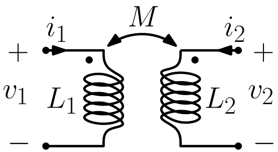


$+M$



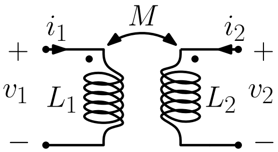
$-M$

Induttori accoppiati: energia



$$
\begin{aligned}
w(t) &= \int_0^t \left[v_1(\tau) i_1(\tau) + v_2(\tau) i_2(\tau)\right] d\tau \\
&= \int_0^t \left[\left(L_1 \frac{di_1}{d\tau} + M \frac{di_2}{d\tau}\right) i_1 + \left(L_2 \frac{di_2}{d\tau} + M \frac{di_1}{d\tau}\right) i_2\right] d\tau \\
&= \int_0^t \left[L_1\, i_1\, \frac{di_1}{d\tau} + M\left(\frac{di_1}{d\tau} i_2 + \frac{di_2}{d\tau} i_1\right) + L_2\, i_2\, \frac{di_2}{d\tau}\right] d\tau \\
&= \frac{1}{2} L_1 i_1(t)^2 + M\, i_1(t)\, i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2(t)^2
\end{aligned}
$$

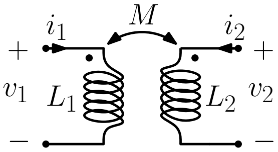
Induttori accoppiati: energia



- Il dispositivo è senza perdite
- Si può definire l'energia immagazzinata

$$w_M(t) \doteq \frac{1}{2} L_1 i_1(t)^2 + M\, i_1(t)\, i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2(t)^2$$

Induttori accoppiati: passività



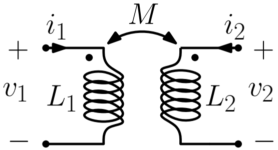
- $w(t) \geq 0$ per ogni t, $i_1 \neq 0$, $i_2 \neq 0$
- La forma quadratica associata $\frac{1}{2}\left[L_1 i_1(t)^2 + 2M\, i_1(t)\, i_2(t) + L_2 i_2(t)^2\right]$ deve essere semidefinita positiva

$$L_1\, L_2 - M^2 \geq 0 \Rightarrow |M| \leq \sqrt{L_1\, L_2}$$

- coefficiente di accoppiamento $\boxed{k \doteq \frac{|M|}{\sqrt{L_1\, L_2}}}$ $\qquad 0 \leq k \leq 1$

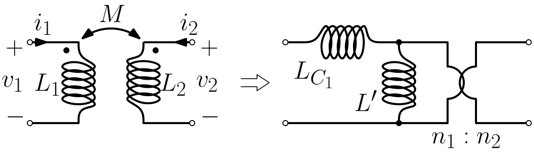
Induttori accoppiati

- Accoppiamento perfetto



- $k = 0 \Rightarrow M = 0$: non si hanno flussi creati da un avvolgimento che si concatenano con l'altro. I due induttori **non sono accoppiati**
- $k = 1 \Rightarrow M^2 = L_1 \, L_2$: tutte le linee di flusso sono concatenate con entrambe le bobine, i flussi dispersi sono nulli, **l'accoppiamento è perfetto**

Induttori accoppiati: circuito equivalente



$$
\begin{aligned}
v_1 &= L_1 \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \right) \\
v_2 &= M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{L_2}{M} \frac{di_2}{dt} \right)
\end{aligned}
$$

$$M^2 = L_1 \, L_2 \Rightarrow L_2 = \frac{M^2}{L_1}$$

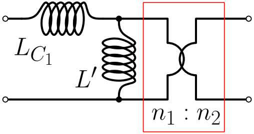
$$\boxed{\frac{v_2}{v_1} = \frac{M}{L_1}} = n \doteq \frac{N_2}{N_1}$$

$$L_{C_1} = (1 - k^2) L_1 \qquad L' = k^2 L_1$$

$$\frac{n_1}{n_2} = k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

Indice

Induttori accoppiati: trasformatore ideale



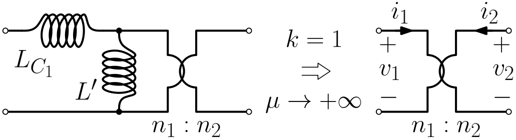
$$L_{C_1} = (1 - k^2)L_1$$
$$L' = k^2 L_1$$

- Se non si hanno flussi dispersi $k = 1 \Rightarrow L_{C_1} = 0;\ L' = L_1$
- Se $L_1 \to +\infty$ (ovvero essendo $\phi = L\, i$ si ha un flusso finito con correnti infinitesime, il che implica $\mu \to +\infty$), allora il trasformatore puramente induttivo tende al trasformatore ideale per il quale risulta

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2}$$

dove N_1 e N_2 sono il numero di spire del primo e del secondo induttore

Induttori accoppiati: trasformatore ideale



$$v_2 = n\, v_1$$

$$i_2 = -\frac{1}{n}\, i_1$$

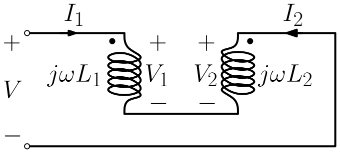
$$n = \frac{N_2}{N_1}$$

- Il trasformatore ideale risulta essere il limite a cui tende un trasformatore puramente induttivo, senza flussi dispersi e con permeabilità magnetica infinita
- Il trasformatore ideale è un doppio bipolo a–dinamico
- Il trasformatore ideale è un elemento passivo (la potenza assorbita in qualunque istante è nulla)

Indice

Induttori accoppiati: esempio

Trovare il bipolo equivalente agli induttori accoppiati mostrati in figura



- Regime sinusoidale

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

- Usando la KCL e KVL

$$I_2 = -I_1$$

$$V = V_1 - V_2$$

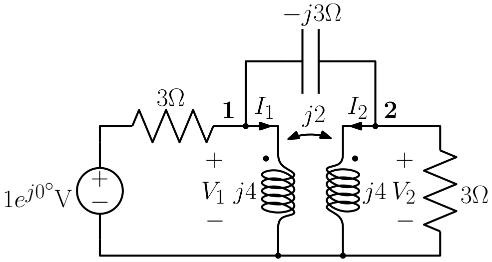
- Sostituendo

$$V = j\omega L_1\, I_1 - j\omega M\, I_1 - j\omega M\, I_1 + j\omega L_2\, I_1 = j\omega L_{eq}\, I_1$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$

Induttori accoppiati: esempio

Trovare le tensioni nodali



$$I_1 - \frac{V_1 - 1}{3} + \frac{V_1 - V_2}{-j3} = 0$$

$$I_2 + \frac{V_2}{3} + \frac{V_2 - V_1}{-j3} = 0$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j4 & j2 \\ j2 & j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j4 & j2 \\ j2 & j4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

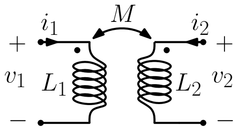
$V_1 = \frac{4}{5}$V $\qquad V_2 = j\frac{2}{5}$V

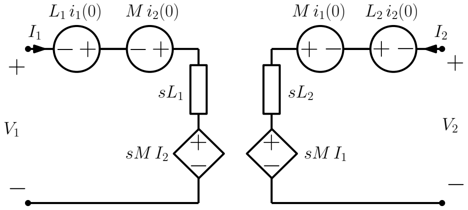
Induttori accoppiati: dominio di Laplace

$$
\begin{aligned}
v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\
v_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}
\end{aligned}
$$

- Nel dominio di Laplace

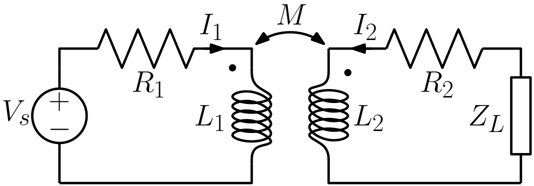
$$
\begin{aligned}
V_1 &= L_1 \left[s\, I_1(s) - i_1(0)\right] + M \left[s\, I_2(s) - i_2(0)\right] \\
V_2 &= M \left[s\, I_1(s) - i_1(0)\right] + L_2 \left[s\, I_2(s) - i_2(0)\right]
\end{aligned}
$$





Impedenza d'ingresso

Il circuito funziona in regime sinusoidale. Calcolare l'impedenza d'ingresso vista dal generatore



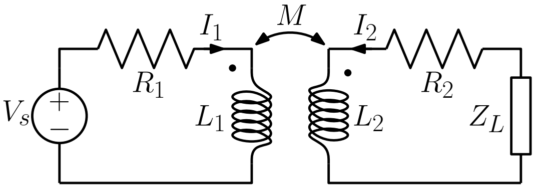
Relazioni costitutive

$$V_1 = j\omega L_1\, I_1 + j\omega M\, I_2$$
$$V_2 = j\omega M\, I_1 + j\omega L_2\, I_2$$

Applicando le KVL alle due maglie

$$R_1\, I_1 + V_1 - V_s = 0$$
$$R_2\, I_2 + Z_L\, I_2 + V_2 = 0$$

Impedenza d'ingresso



Sostituendo le relazioni costitutive nelle KVL

$$(R_1 + j\omega L_1)I_1 + j\omega M I_2 = V_s$$
$$(R_2 + Z_L + j\omega L_2)I_2 + j\omega M I_1 = 0$$

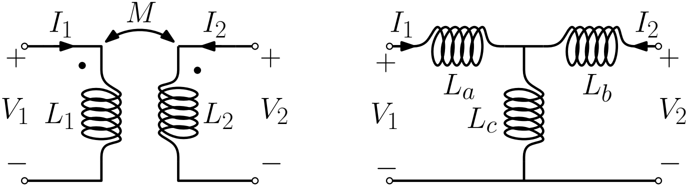
Dalla seconda

$$I_2 = -\frac{j\omega M}{R_2 + Z_L + j\omega L_2}\, I_1$$

Sostituendo nella prima

$$Z_{in} = \frac{V_s}{I_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + Z_L + j\omega L_2}$$

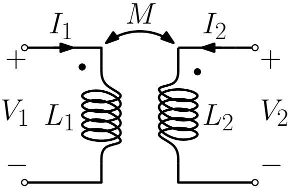
Circuito equivalente a T

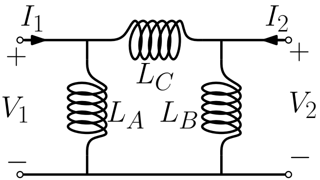


$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega(L_a + L_c) & j\omega L_c \\ j\omega L_c & j\omega(L_b + L_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_a + L_c &= L_1 \quad &\Rightarrow \quad L_a &= L_1 - M \\ L_b + L_c &= L_2 \quad &\Rightarrow \quad L_b &= L_2 - M \\ L_c &= M \quad &\Rightarrow \quad L_c &= M \end{aligned}$$

Circuito equivalente a Π



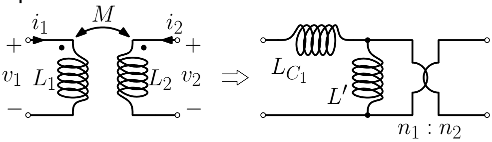


$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \frac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \\ \frac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \frac{L_1}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega L_A} + \frac{1}{j\omega L_C} & -\frac{1}{j\omega L_C} \\ -\frac{1}{j\omega L_C} & \frac{1}{j\omega L_B} + \frac{1}{j\omega L_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

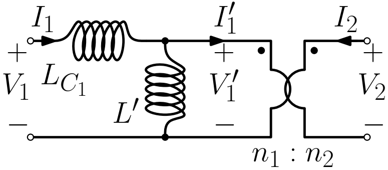
$$\begin{aligned} \frac{1}{L_A} + \frac{1}{L_C} &= \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} \\ \frac{1}{L_B} + \frac{1}{L_C} &= \frac{L_1}{L_1L_2 - M^2} \\ \frac{1}{L_C} &= \frac{M}{L_1L_2 - M^2} \end{aligned}$$

Circuito equivalente per trasformatore ideale

Determinare per quali valori di n_1/n_2, L_{C_1} e L' i due doppi bipoli mostrati in figura sono equivalenti



Si consideri il circuito a destra, per un trasformatore ideale



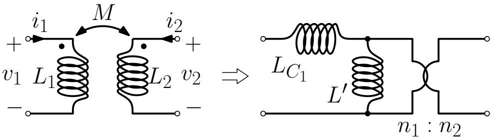
$$V_1' = kV_2$$
$$I_1' = -\frac{1}{k} I_2$$

Usando una KVL

$$V_1 = sL_{C_1} I_1 + sL' \left(I_1 + \frac{I_2}{k} \right)$$

$$V_2 = \frac{1}{k} sL' \left(I_1 + \frac{I_2}{k} \right)$$

Circuito equivalente per trasformatore ideale



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_1 & sM \\ sM & sL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(L_{C_1} + L') & \frac{sL'}{k} \\ \frac{sL'}{k} & \frac{sL'}{k^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$k = \frac{n_1}{n_2} = \frac{M}{L_2}$$

$$\begin{aligned} L_{C_1} + L' &= L_1 \\ L' &= kM \\ L' &= k^2 L_2 \end{aligned}$$

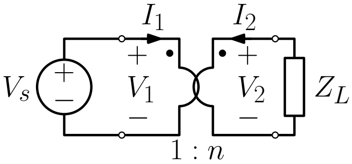
$$L' = \frac{M^2}{L_2}$$

$$L_{C_1} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$$

Indice

Trasformatore ideale

Determinare l'impedenza d'ingresso vista dal generatore

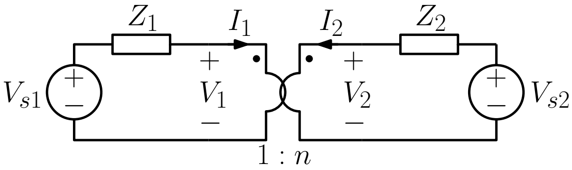


$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_2}{I_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{n}$$

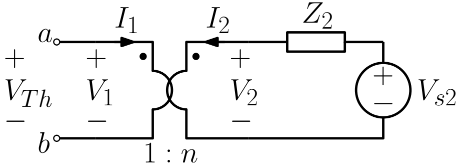
$$Z_{in} = \frac{V_s}{I_1} = \frac{V_1}{I_1} = -\frac{1}{n^2}\frac{V_2}{I_2} = \frac{Z_L}{n^2}$$

Trasformatore ideale: riflessione del secondario nel primario



Si costruisca l'equivalente Thevenin ai nodi a, b.

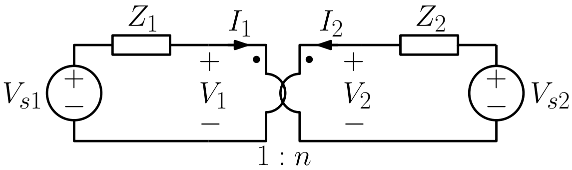
- Calcolo di V_{Th}



$$I_1 = 0 \Rightarrow I_2 = 0$$

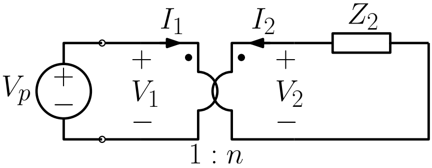
$$V_{Th} = V_1 = \frac{V_2}{n} = \frac{V_{s2}}{n}$$

Trasformatore ideale: riflessione del secondario nel primario



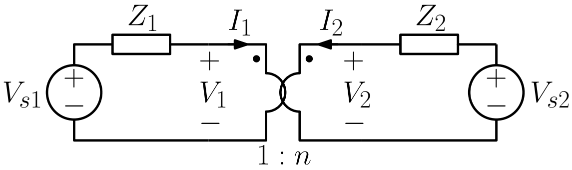
Si costruisca l'equivalente Thevenin ai nodi a, b.

- Calcolo di Z_{Th}

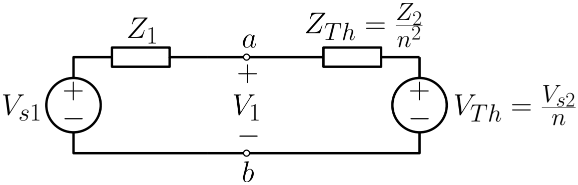


$$Z_{Th} = \frac{V_p}{I_1} = \frac{V_p}{I_1} = -\frac{V_2/n}{nI_2} = \frac{Z_2}{n^2}$$

Trasformatore ideale: riflessione del secondario nel primario



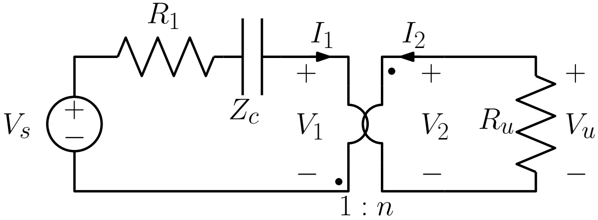
$\Downarrow$



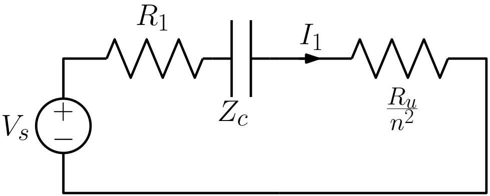
- In modo simile si può riflettere il primario nel secondario

Trasformatore ideale: riflessione del secondario nel primario

Per il circuito in figura, calcolare I_1, V_u e la potenza erogata dal generatore. $V_s = 100e^{j0}$V, $R_1 = 4\Omega$, $Z_C = -j6\Omega$, $R_u = 20\Omega$.

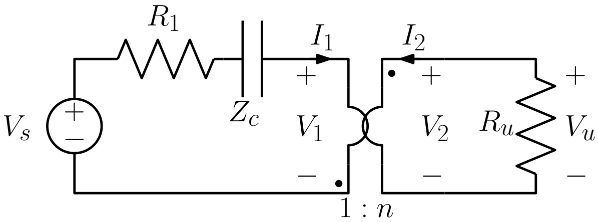


Riflettendo il secondario nel primario



$$I_1 = \frac{V_s}{R_1 + Z_c + R_u/n^2} = \frac{100e^{j0}}{4 - j6 + 5} = 11,09e^{j33,69^\circ}\, V$$

Trasformatore ideale: riflessione del secondario nel primario



Poiché I_1 esce dal terminale con il puntino

$$I_2 = \frac{1}{n} I_1 = 5,545 e^{j33,69^\circ} A$$

Usando la legge di Ohm

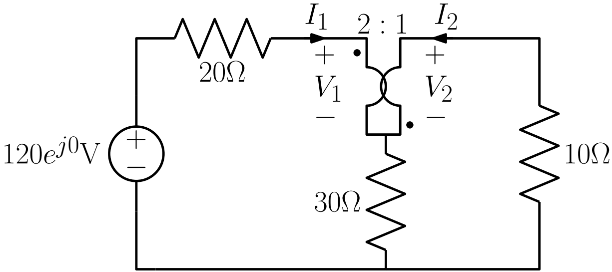
$$V_u = -R_u I_2 = -110,9 e^{j33,69^\circ} V$$

La potenza (complessa) erogata dal generatore vale

$$S = \frac{1}{2} V_s I_1^* = 1330,8 e^{-j33,69^\circ} VA$$

Trasformatore ideale

Calcolare la potenza assorbita dal resistore da 10Ω



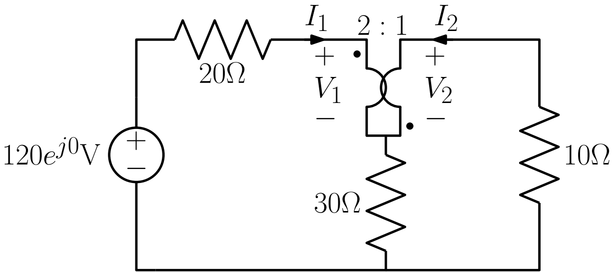
Poiché primario e secondario sono cortocircuitati, non si può applicare la riflessione.
Poichè la corrente I_2 esce dal puntino, le relazioni del traformatore ideale sono

$$V_2 = -\frac{1}{2}V_1 \qquad I_2 = 2I_1$$

Usando le KVL

$$20I_1 + V_1 + 30(I_1 + I_2) - 120 = 0$$
$$-10I_2 - 30(I_1 + I_2) - V_2 = 0$$

Trasformatore ideale



Introducendo le relazioni del traformatore nelle KVL

$$55I_2 - 2V_2 = 120 \qquad I_2 = \frac{120}{165}$$

$$-55I_2 - V_2 = 0 \qquad V_2 = -55I_2$$

$$P = \frac{1}{2}R|I_2|^2 = \frac{1}{2}\,10\left|\frac{120}{165}\right|^2 = 2,645W$$