05BQX Metodi Matematici per l'ingegneria 2011-2012

Marina Santacroce

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

3. Probabilità condizionata e indipendenza

Riferimenti: S.Ross *Calcolo delle probabilità* Cap.3

Outline

Introduzione

Introduciamo il concetto di probabilità condizionata, importante per

- calcolare la probabilità degli eventi disponendo di un'informazione parziale;
- rendere più facile il calcolo di eventi complicati.

Esempio: Supponiamo di lanciare due dadi (uno rosso e uno verde). [1]
Sia E l'evento $\{$*la somma dei risultati è* $8\}$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)} = \frac{5}{36}$.

Sapendo che il dado rosso ha dato come risultato 6, come si modificherà la probabilità dell'evento E alla luce della nuova informazione?

Posto $F = \{$*il dado rosso dà come risultato* $6\}$, indichiamo con $\mathbb{P}(E|F)$ la "*probabilità condizionata di E dato F*"

$\Rightarrow \mathbb{P}(E|F) = \frac{\#(E\cap F)}{\#(F)} = \frac{1}{6}$.

⋆ *Si calcoli la probabilità condizionata* $\mathbb{P}(E|G)$ *dove G è l'evento G={almeno uno dei due dadi ha dato risultato pari}.*

---

[1] $S = \{(i, j); i, j : 1, \ldots, 6\}$.

Probabilità condizionata

Def. Sia F un evento non trascurabile, i.e. $\mathbb{P}(F) > 0$, la probabilità di un evento E condizionata ad F è

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}.$$

Esempio: Una moneta equa viene lanciata due volte. Si calcoli la probabilità dell'evento E={*si ottengono due teste*} condizionatamente a

a) F={ *al primo lancio è venuta testa*}
b) G={*esce testa almeno una volta*}.

Dalla definizione di probabilità condizionata si ricava immediatamente la relazione

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(E|F),$$

che permette di calcolare la probabilità dell'intersezione di due eventi a partire dalla probabilità condizionata.

Vediamone la generalizzazione per n eventi.

Formula del prodotto o legge delle probabilità composte

Prop. Sia $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \ldots E_{n-1}) > 0$, allora

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \ldots E_n) = \mathbb{P}(E_1)\, \mathbb{P}(E_2|E_1)\, \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots \mathbb{P}(E_n|E_1 \cap E_2 \ldots E_{n-1}).$$

Si dimostra applicando la definizione di probabilità condizionata. Si noti che la condizione $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \ldots E_{n-1}) > 0$ *è sufficiente per definire tutte le probabilità condizionate che intervengono nella formula.*

Esempio 1: Un'urna contiene 8 palline rosse e 4 bianche. Estraendo 3 palline senza reinserimento, qual è la probabilità di E ={*estrarre 2 rosse e una bianca*}?
Definiamo gli eventi R_i (B_i) *"pallina rossa (bianca) alla i-esima estrazione"*.

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}((B_1 R_2 R_3) \cup (R_1 B_2 R_3) \cup (R_1 R_2 B_3))$ essendo i tre eventi incompatibili,

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(B_1 R_2 R_3) + \mathbb{P}(R_1 B_2 R_3) + \mathbb{P}(R_1 R_2 B_3)$.

$\mathbb{P}(B_1 R_2 R_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(R_2|B_1)\mathbb{P}(R_3|B_1 R_2) = \frac{4}{12}\,\frac{8}{11}\,\frac{7}{10} = \frac{28}{165}$

i tre eventi hanno la stessa probabilità $\Rightarrow \mathbb{P}(E) = 3\,\frac{28}{165} = \frac{28}{55}$

Esempio 2: (Bridge) Un mazzo di 52 carte viene suddiviso in 4 mazzetti di 13 carte ognuno. Calcolare la probabilità che ci *sia un asso in ogni mazzetto*.

Definiamo gli eventi:

$$E_1 = \{\textit{Asso di picche in uno dei mazzetti}\}$$

$$E_2 = \{\textit{Asso di picche e di cuori in mazzetti diversi}\}$$

$$E_3 = \{\textit{Asso di picche e di cuori e di fiori in 3 mazzetti diversi}\}$$

$$E_4 = \{\textit{ gli assi sono in 4 mazzetti diversi}\}.$$

La probabilità che cerchiamo è

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = \mathbb{P}(E_1)\, \mathbb{P}(E_2|E_1)\, \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2)\mathbb{P}(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

$\mathbb{P}(E_1) = 1$ (*essendo E_1 l'evento certo*)

$\mathbb{P}(E_2|E_1) = \frac{39}{51}$ (*39 sono le carte che non sono con l'A di picche e 51 il numero delle carte (escluso l'asso di picche)*)

Analogamente, $\mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) = \frac{26}{50}$ e $\mathbb{P}(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{13}{49}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E) = \frac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49}$$

Ripetere l'esercizio utilizzando gli eventi E_i={il mazzo i contiene un solo asso} con $i : 1, \ldots, 4$.

Suggerimento: E_1={estrarre 1 asso (dai 4 possibili) e 12 carte (dalle 48 che non sono assi)} $\Rightarrow \mathbb{P}(E_1) = \frac{4\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}$. Analogamente, $\mathbb{P}(E_2|E_1) = \frac{3\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}}$ e così via.

$\mathbb{P}(\cdot|F)$ è una probabilità.

Prop. Dato uno spazio campionario S, una famiglia di eventi, una probabilità $\mathbb{P}$ e un evento non trascurabile F, la probabilità $\mathbb{P}(\cdot|F)$ è una *misura di probabilità* sullo spazio campionario S.

▷ Controlliamo che $\mathbb{P}(\cdot|F)$ verifichi gli assiomi:

A.1 per ogni evento E, $0 \leq \mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)} \leq 1$

A.2 $\mathbb{P}(S|F) = \frac{\mathbb{P}(S\cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F)} = 1$

A.3 Se $\{E_n, n \geq 1\}$ è una successione di eventi a due a due incompatibili, allora $\mathbb{P}(\bigcup_{n:1}^{\infty} E_n|F) = \sum_{n:1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n|F)$.

Dalla definizione di probabilità condizionata,

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n:1}^{\infty} E_n|F) = \frac{\mathbb{P}((\bigcup_{n:1}^{\infty} E_n) \cap F)}{\mathbb{P}(F)}.$$

Per la proprietà distributiva e l'assioma A.3 di $\mathbb{P}$ (osserviamo che $(E_n \cap F) \cap (E_m \cap F)) = \emptyset$ se $n \neq m$), il numeratore si scrive

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n:1}^{\infty} (E_n \cap F)) = \sum_{n:1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n \cap F).$$

Dividendo per $\mathbb{P}(F)$, si ottiene il risultato.

Formula delle probabilità totali

Sia $0 < \mathbb{P}(F) < 1$, allora per ogni evento E

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(E|F) + \mathbb{P}(F^c)\mathbb{P}(E|F^c).$$

La generalizzazione per più eventi è nota come formula delle probabilità totali.

Prop. Si consideri una partizione di S[2] di n eventi $F_1, \ldots F_n$ non trascurabili. Allora, per ogni evento E

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i:1}^{n} \mathbb{P}(F_i)\mathbb{P}(E|F_i),$$

(*media ponderata* delle $\mathbb{P}(E|F_i)$ con pesi $\mathbb{P}(F_i)$).

Utilizzando *solo* la definizione di probabilità condizionata, dalla formula delle probabilità totali si ricava la seguente proposizione, conosciuta come formula di Bayes.

[2] $\cup_{i:1}^{n} F_i = S$ e $F_i \cap F_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$

Formula di Bayes

Prop. Si consideri una partizione di S formata da n eventi $F_1, \dots F_n$ non trascurabili. Sia E un evento di probabilità positiva. Allora, per ogni evento F_j con $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}(F_j|E) = \frac{\mathbb{P}(F_j)\mathbb{P}(E|F_j)}{\sum_{i:1}^{n} \mathbb{P}(F_i)\mathbb{P}(E|F_i)}$$

- gli eventi F_j rappresentano delle “ipotesi” alternative,
- $\mathbb{P}(F_j)$ le *probabilità iniziali* (o a priori),
- $\mathbb{P}(F_j|E)$ le *probabilità a posteriori* dato E.

Esempio: Una compagnia di assicurazioni divide i suoi assicurati in due gruppi (quelli più propensi agli incidenti e quelli che non lo sono). Stima che per i primi la probabilità di avere un incidente entro un anno sia 0.4, mentre per gli altri sia 0.2. Se il 30% della popolazione è incline agli incidenti, calcolare la probabilità che un nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno. Se lo ha avuto, qual è la probabilità che faccia parte degli inclini agli incidenti?

Monty Hall Problem: Goats and cars

Dietro una di tre porte chiuse si nasconde una Ferrari, dietro le rimanenti due ci sono due capre. Il presentatore invita il concorrente a scegliere una delle porte. Successivamente, il presentatore, che sa dove si trova la macchina, fa vedere che dietro una delle due porte non scelte si nasconde una capra ed offre al concorrente la possibilità di cambiare la sua scelta. Cosa gli conviene fare per massimizzare la probabilità di vincere la Ferrari?

Figure: Monty Hall picture

Moltissimi video su You Tube spiegano questo famoso problema... ho scelto per voi "***Testing out the Monty Hall problem***":

Alan Davies e il Professor Marcus Du Sautoy di Oxford "testano" il problema di Monty Hall.

Indipendenza

Def. Due eventi E e F si dicono *indipendenti* se la realizzazione di uno non modifica la probabilità del verificarsi dell'altro, i.e. se $\mathbb{P}(F) > 0$, E è indipendente da F se

$$\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E).$$

Dalla definizione data, *utilizzando la definizione di probabilità condizionata*, si ricava immediatamente la seguente definizione alternativa

Def.$(\star)$ Gli eventi E e F sono *indipendenti* se

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F). \qquad (\star)$$

$\Rightarrow$ L'indipendenza tra due eventi è una relazione simmetrica!

$\Rightarrow$ La definizione $(\star)$ permette di includere il caso di eventi trascurabili.

- ◇ Dimostrare che se due eventi E e F sono indipendenti anche i complementari lo sono (e anche E ed F^c).
- ◇ Dimostrare che se $E \subset F$ i due eventi sono indipendenti se e solo se E è un evento trascurabile o F è un evento certo.

Def. Tre eventi E, F e G si dicono indipendenti se

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E \cap F \cap G) &= \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G) \\ \mathbb{P}(E \cap F) &= \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F) \\ \mathbb{P}(E \cap G) &= \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(G) \\ \mathbb{P}(G \cap F) &= \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(F) \end{aligned}$$

ATTENZIONE le relazioni

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F) \qquad \mathbb{P}(E \cap G) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(G) \qquad \mathbb{P}(G \cap F) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(F)$$

non sono *sufficienti* a garantire l'indipendenza dei tre eventi!

Generalizzando per n eventi $E_1, \ldots E_n$ si ha la seguente:
Def. Gli eventi $E_1, E_2, \ldots E_n$ si dicono indipendenti se per ogni $k \in \{2, \ldots n\}$ e per ogni scelta di $\{i_1, \ldots i_k\}$ si ha

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots E_{i_k}) = \prod_{i_j \in \{i_1 \ldots i_k\}} \mathbb{P}(E_{i_j}).$$

Schema delle prove ripetute

Esempio: Viene realizzata una successione di prove indipendenti. Ogni prova ha come esito un successo con probabilità p e un insuccesso con probabilità $1 - p$. Qual è la probabilità di avere

1) almeno un successo nelle prime n prove;
2) esattamente k successi nelle prime n prove;
3) tutti successi?
4) qual è la probabilità di avere almeno n successi prima di m insuccessi?

Hint: n successi prima di m insuccessi significa almeno n successi nelle prime $n + m - 1$ prove

Indipendenza condizionale

Def. Sia F un evento non trascurabile. $E_1, E_2, \dots E_n$ sono indipendenti conditionalmente a F se per ogni $k \in \{2, \dots n\}$ e per ogni scelta $\{i_1, \dots i_k\}$

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots E_{i_k} | F) = \prod_{i_j \in \{i_1 \dots i_k\}} \mathbb{P}(E_{i_j} | F).^3$$

L'esempio che segue mostra come aggiornare le probabilità con successive informazioni.

Esempio: Dati dal United Nation Programs on HIV/AIDS (2006): Per un test si ha $\mathbb{P}(T^+ | \text{HIV}^+) = 0.99$ (sensitivity) e $\mathbb{P}(T^- | \text{HIV}^-) = 0.99$ (specificity). L'incidenza dell' HIV in East Asia è 0.001. Se il primo test è positivo, T_1^+, qual è la probabilità di essere malati di HIV? La procedura prevede ci sia un test di conferma dopo un primo test positivo. Se il secondo test risulta positivo, T_2^+, qual è la probabilità di essere malati di HIV?

Supponiamo gli eventi T_1^+ e T_2^+ siano condizionatamente indipendenti dato HIV^+ (HIV^-).

---

[3] i.e. se sono indipendenti rispetto alla probabilità $\mathbb{P}(\cdot | F)$.