MDI220, Statistique
Cours 1

Equipe pédagogique: Thomas Bonald , Anas Barakat, Anne Sabourin, Umut Simsekli, Guillaume Staerman.

Septembre 2019

Chapitre 1
Introduction : analyse statistique de données

1. Exemples
   - Proportion de défaults
   - Test A/B
2. Formalisation
   - Cadre probabiliste
   - Modèle statistique,paramétrisation
3. Théorie de la décision : concepts de base
   - Actions, fonction de coût
   - Risque
   - Exemples de coûts et risques associés.

Faire des statistiques ?

- Utiliser les données pour **apprendre** / **extraire de l'information** sur leur distribution probabiliste

- Beaucoup de données $\rightarrow$ beaucoup d'applications

. . . Big data . . . . . . Data Science . . . . . . Machine Learning . . .
Intelligence artificielle . . .

- **ce cours** : vous donner outils théoriques + mise en oeuvre pratique pour attaquer problèmes de
  - procédures d'estimation
  - tests, intervalles de confiance
  - . . .

  $\rightarrow$ procédures d'« inférence » ou « apprentissage » sur lesquels reposent beaucoup d'algorithmes.

Fonctionnement du cours

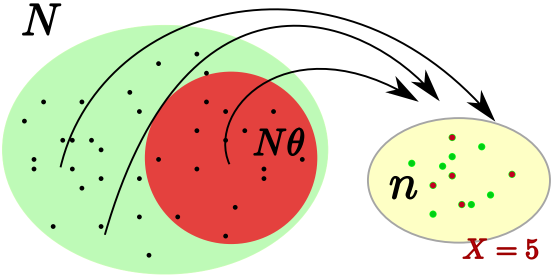
- Mardi matin
- TH1 : cours en amphi ; TH2 : TD (présence obligatoire ? cf votre prof de TD)
  (Aujourd'hui : 2eme TH = TP, prise en main du logiciel `R`)
- poly : en ligne, version papier : imminente.
- TDs : en ligne au fil du cours +corrigés.

- Evaluation :
  - Contrôle continu + mini projet : 40%
  - Contrôle final : 60% $\rightarrow$ droit à 1 feuille manuscrite de notes, pas de poly ni TD

- Mini-projet :
  - individuel
  - $\approx$ un gros DM avec théorie + code (R, Rstudio, cf. TP aujourd'hui)
  - rendu : un notebook + scripts

Proportion de défauts dans un population

- N individus/clients/pièces produites par une machine
- proportion θ de défecteux, $\theta \in \{1/N, \ldots, (N-1)/N, 1\}$.
- **expérience :** tirage aléatoire, uniforme, sans remise, de n individus parmi N
- **on observe :** X : nombre de défaults parmi les n tirés.



Comment utiliser X pour apprendre qqchose de θ ?

Objectifs possibles

- Tester si $\theta < 5\%$
- Estimer θ (construire un estimateur $\widehat{\theta}$)
- Donner un intervalle de confiance contenant θ avec grande probabilité.

Modélisation

à θ fixé, comment se comporte X ?

Idée de la suite : résoudre ensuite un « problème inverse » pour retrouver θ à partir de X

- $\mathbb{P}_\theta$: proba sous jacente lorsque le paramètre vaut θ.
- Calcul de $\mathbb{P}_\theta(X = k)$:

au tableau

- $\mathbb{P}_\theta(X = k) =$ une fonction de k, θ, n, N

On a défini un « modèle statistique », *i.e.* une famille de lois de probas possibles pour X (une pour chaque valeur de θ.

- On supposera que $X \sim \mathbb{P}_\theta$, avec θ inconnu.

Estimation de θ

- Ayant observé « $X = x$ », peut-on donner une estimation $\widehat{\theta}$ de θ ?
- **idée 1** : calculer l'espérance théorique de X à θ fixé, $\mathbb{E}_\theta(X)$, et ajuster $\widehat{\theta}$ pour avoir $x = \mathbb{E}_{\widehat{\theta}}(X)$.
- ... gros calcul ...

$$\mathbb{E}_\theta(X) = n\theta, \quad \forall \theta \in \{0, 1/N, 2/N, \dots, 1\}.$$

$\rightarrow$ estimateur « naturel » de θ :

$$\widehat{\theta} = \frac{X}{n}$$

N.B. : $\widehat{\theta}$ est une fonction de X

Estimation de θ (ii)

- **idée 2 :** puisque $X \leq N\theta$, prendre
$$\widehat{\theta}_2 = \frac{X}{N}$$
(ainsi : on est sûrs de ne pas sur-estimer θ)
- **idée 3 :** : puisque $n - X \leq N - N\theta$, prendre
$$\widehat{\theta}_3 = \frac{N - (n - X)}{N}$$
(ainsi : on est sûrs de ne pas sous-estimer θ)
- **idée 4 :** $\widehat{\theta}_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{X}{N} + \frac{N-(n-X)}{N}\right]$
- tous ces estimateurs sont des **fonctions de** X
- choix : en fonction du "risque" attaché à chaque estimateur (dépend de la préférence de l'utilisateur).

Efficacité d'un traitement/ une stratégie marketting/ ...

- Le traitement/la stratégie est-il efficace ?
- 2 échantillons $(X_1, \dots, X_n) \overset{i.i.d.}{\sim} F, (Y_1, \dots, Y_n) \overset{i.i.d.}{\sim} G$
- Question : $F = G$?
- besoin de faire des hypothèses, ex :
  - $Y_i \overset{\text{loi}}{=} X_i + \Delta$, *i.e.* $G(\cdot) = F(\cdot - \Delta)$
  - $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu + \Delta, \sigma^2)$, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ inconnu, σ^2 connu
  - ...
- choix de modèle : problème récurrent !

Notations (I)

- Univers Ω, réalisation $\omega \in \Omega$.

- tribu $\mathcal{F}$ sur Ω : ensemble des événements
  (un événement $=$ un élément de $\mathcal{F}$ $=$ un sous ensemble de Ω)

- Espace des observations : $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$
  tribu $\mathcal{B}(\mathcal{X})$: $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ si $\mathcal{X}$ discret, boréliens si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$.

- Observation : variable aléatoire (*i.e.* une fonction mesurable)
  $X : \Omega \to \mathcal{X}$.

Notations(II)

- loi de X : P. C'est une probabilité sur $\mathcal{X}$:

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \qquad \begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= \mathbb{P}(X \in A) \\ &= \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \in A\} \\ &= \mathbb{P} \circ X^{-1}(A) \\ &= \text{« mesure image de } \mathrm{P} \text{ par } X \text{ »} \end{aligned}$$

- on écrit $X \sim P$.

- En statistique, la proba sous-jacente $\mathbb{P}$ est inconnue, donc P aussi.

- **But** : obtenir de l'info sur P en observant X.

modèle statistique

modèle = connaissance « a priori » du statisticien (avant l'expérience)
$\to$ famille de lois « possibles » pour X :

definition : modèle statistique

Un modèle statistique est une famille de lois de probabilités, notée $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} \subset \{ \text{ toutes les lois de proba sur } \mathcal{X} \}$$

Lors de l'expérience statistique, on suppose que $X \sim \mathrm{P}$ avec $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$.

paramétrisation, espace des paramètres

définition : espace des paramètres, paramétrisation

paramétrisation : application

$$\Theta \to \mathcal{P}$$
$$\theta \mapsto \mathrm{P}_\theta$$

où Θ est un ensemble appelé "espace des paramètres".

(paramétrisation = **étiquetage** des lois $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$: par un **paramètre** $\theta \in \Theta$, supposé facile à manipuler (ex : $\theta \in \mathbb{R}^d$))

ex : espace des paramètres pour le modèle contenant toutes les lois normales ?

paramétrique/ non paramétrique

- modèle **paramétrique** : $\exists$ une paramétrisation telle que $\Theta \subset \mathbb{R}^d$
- exemple ?

- modèle **paramétrique** : $\nexists$ de paramétrisation telle que $\Theta \subset \mathbb{R}^d$
- exemple : ensemble de toutes les lois de probas à densité, dont la densité est « symétrique » (une fonction paire).

Notations : variable aléatoire dans un modèle

- on note
$$X \sim \mathrm{P}_\theta, \theta \in \Theta.$$
(X suit la loi P_θ), où (généralement) θ est fixé mais n'est pas observé et X est observé.

- **N.B.** même en non paramétrique, on peut toujours choisir $\Theta = \mathcal{P}$ et écrire
$$\mathcal{P} = \{\mathrm{P}_\theta, \theta \in \Theta\}.$$
$\rightarrow$ pas de problèmes de notations

Travail du statisticien

- **La seule connaissance mise à la disposition du statisticien est un modèle $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ et une réalisation de l'observation $X \sim \mathrm{P}_\theta$, où $\theta \in \Theta$ est inconnu.**

- **L'objectif est d'approcher une certaine quantité d'intérêt $g(\theta)$ (dépendant uniquement de θ) en utilisant une procédure fondée uniquement sur l'observation X (une fonction ne dépendant que de X).**

Quantités d'intérêt $g(\theta)$ usuelles

- intervalle contenant θ
- $\mathbb{P}_\theta(X > u)$ (u : seuil à risque)
- $\mathbb{E}_\theta(X)$
- $\mathbb{1}_{\Theta_0}(\theta)$ où $\Theta_0 \subset \Theta$.

souvent : $g(\theta)$ est aussi appelée 'paramètre' (d'intérêt) même si $g(\theta)$ ne détermine pas entièrement P_θ.

Notion de 'statistique'

Toute l'inférence doit se faire à partir des données seulement :

définition : statistique

Une *statistique* est une variable aléatoire s'écrivant comme une fonction mesurable des observations, de type $\varphi(X)$ où
$\varphi : (\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X})) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est une fonction mesurable.

en particulier

definition : estimateur

Un *estimateur* d'une quantité $g(\theta) \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^d$ est une statistique
$\widehat{g} : x \in \mathcal{X} \quad \mapsto \quad \widehat{g}(x) \in \mathcal{G}$.

Exemples

- nombre de défauts :
  - modèle ? Θ ?
  - modèle paramétrique ou non ?
- modèle 'semi-paramétrique' :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \{&\text{lois de densité } f(\cdot - \mu),\ \text{où} \\ &f:\ \text{densité paire sur } \mathbb{R} \\ &\mu \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$$\Theta = \{(f, \mu):\ f \text{ densité paire }, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Identifiabilité

Quand a-t-on une chance de “retrouver” θ à partir des observations ?

définition : identifiabilité.

- La paramétrisation $\theta \mapsto \mathrm{P}_\theta$ est dite identifiable si elle est injective. (*i.e.* $\theta_1 \neq \theta_2 \Rightarrow \mathrm{P}_{\theta_1} \neq \mathrm{P}_{\theta_2}$).

- une grandeur d'intérêt $g(\theta)$ est dite identifiable si

$$g(\theta_1) \neq (\theta_2) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{P}_{\theta_1} \neq \mathrm{P}_{\theta_2}.$$

Modèle dominé

définition : modèle dominé

le modèle $\mathcal{P} = \{\mathrm{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ est appelé **dominé**,
si toutes les lois $\mathrm{P}_\theta, \theta \in \Theta$ admettent une densité par rapport à une **même** mesure de référence σ-finie* μ,

* σ-finie : l'espace $\mathcal{X}$ est une union dénombrable d'ensembles de mesure finie.

- **Rappel** Une probabilité P sur $\mathcal{X}$ **admet une densité** f par rapport à une mesure μ sur $\mathcal{X}$, si

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathrm{P}(A) = \int_A f(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

Rappels : densité/ mesure

- Caractérisations équivalentes d'une densité :

$$
\begin{array}{lll}
(i) & & \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathrm{P}(A) = \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x) \\
(ii) & & \forall \phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+ \text{ (mesurable)}, \mathbb{E}(\phi) = \int_{\mathcal{X}} \phi(x) f(x)\mathrm{d}\mu(x) \\
(iii) & \text{(Radon-Nikodym)} & \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mu(A) = 0 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = 0.
\end{array}
$$

exemples

- $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\}$: $\mu =$ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}oisson(\lambda), \lambda > 0\}$: $\mu =$ mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

contre-exemple

- $\mathcal{P} = \{\delta_x, x \in \mathbb{R}\}$: seule μ possible : comptage sur $\mathbb{R}$, $\mu(A) = |A|$ (infini dès que A continent un intervalle) : pas σ-fini !

- Ici trois cas possibles (suffisent pour comprendre)
  1. μ= Lebesgue, sur $\mathbb{R}$: alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x)\mathrm{d}x \quad \text{(intégrale de Riemann, si elle existe.)}$$

  2. μ : mesure de comptage sur $\mathcal{X}$ discret, $\mu = \sum_{x\in\mathcal{X}} \delta_x$ (Diracs)

$$\int_{\mathcal{X}} \Phi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \Phi(x).$$

  3. Mélange des deux : $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$ où :
     μ_1 : comptage sur $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ discret et μ_2 : Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

$$\int_{\mathcal{X}} \Phi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{x\in\mathcal{X}_0} \Phi(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x)\mathrm{d}x.$$

Vraisemblance

- Dans un modèle dominé $\mathcal{P} = \{\mathrm{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$.
- chaque P_θ admet une densité $p_\theta : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$ par rapport à la mesure de référence μ.

définition : vraisemblance

Soit $x \in \mathcal{X}$ une observation. L'application

$$\theta \mapsto p_\theta(x)$$

est appelée "fonction de vraisemblance", ou "vraisemblance" associée à x.

- Attention : la vraisemblance est une fonction de θ, à x fixé.
- Intérêt : d'habitude, (en probas) on s'intéresse à $p_\theta(\,\cdot\,)$, à θ fixé.
- en stats : on ne "voit" que x, on cherche θ.
- à x fixé, θ est d'autant plus "vraisemblable" que $p_\theta(x)$ est élevé.
- un moyen d'estimer θ est de maximiser en θ (à x fixé), la vraisemblance. cf. estimateur du maximum de vraisemblance, chap. 2.

Nombre d'observations

- Soit $\mathcal{P}$ un modèle pour X
- $\mathbf{X}_{1:n} = (X_1, \ldots, X_n)$ échantillon i.i.d.(indépendant, identiquement distribué) de même loi que X.
- modèle pour $\mathbf{X}_{1:n}$?

- Loi jointe avec indépendance = loi produit $\mathrm{P}_{\theta,1:n} = \mathrm{P}_\theta^{\otimes n}$
- On écrit encore (pour simplifier) P_θ, p_θ, pour désigner la loi de $\mathbf{X}_{1:n}$.
- densité jointe : produit des densité
- donc vraisemblance d'un échantillon i.i.d. : produit des vraisemblances

$$p_\theta(\mathbf{x}_{1:n}) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i)$$

Actions

- Faire des stats : entreprendre une action $a \in \mathcal{A}$ après avoir observé $x \in \mathcal{X}$.
- actions : produire
  - une estimation $\widehat{\theta} \in \Theta$,
  - un intervalle/ régtion $R \subset \Theta$,
  - une réponse $0/1$ à une question de type $\theta \in \Theta_0$.

  $\rightarrow \mathcal{A} = \Theta/\mathcal{P}(\Theta)/\{0,1\}$.
- $\mathcal{A}$: espace des actions.

définition : procédure de décision

Une fonction (mesurable) $\delta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$.

Fonction de coût

- hiérarchie entre les actions ? quelle procédure de décision choisir ?
- dépend des préférences de l'utilisateur, autrement de sa 'fonction de coût'.

définition : fonction de coût

Une fonction de coût est une application

$$\begin{array}{rcl} L : \Theta \times \mathcal{A} & \to & [0, +\infty] \\ (\theta, a) & \mapsto & L(\theta, a). \end{array}$$

($L(\theta_0, a)$ est le "prix à payer" lorsque le vrai θ vaut θ_0 et qu'on entreprend l'action a.

- **Idée :** classer les procédures δ en fonction du 'comportement' de

$$L(\underbrace{\theta}_{\text{inconnu !}}, \delta(\underbrace{X}_{\text{aléatoire !}})).$$

Risque

- **Idée :** classer les procédures δ en fonction du 'comportement' de
- Simplification : considérer le "coût moyen" $\stackrel{\text{def}}{=}$ risque.

définition : Risque d'une procédure de décision.

Le risque d'une procédure de décision δ, **étant donné** θ, est :

$$R(\theta, \delta) = \mathbb{E}_\theta(L(\theta, \delta(X)) \quad = \int_{\mathcal{X}} L(\theta, \delta(x)) \, \mathrm{dP}_\theta(x).$$

Estimation d'un paramètre

$g(\theta) \in \mathbb{R}$.

- Coût quadratique : $L(\theta, a) = (g(\theta) - a)^2$,

  risque quadratique : $R(\theta, \widehat{g}) = \int_{\mathbb{R}} (g(\theta) - \widehat{g}(x))^2 \, \mathrm{d}P_\theta(x)$.

- Coût L_1, $L(\theta, a) = |g(\theta) - a|$,

  risque L_1 : $R(\theta, \widehat{g}) = \int_{\mathbb{R}} |g(\theta) - \widehat{g}(x)| \, \mathrm{d}P_\theta(x)$.

Test

$a \in \{0,1\}$. (Question $\theta \in \Theta_0$?)
$a = 0$: "oui, $\theta \in \Theta_0$" ; $a = 1$: "non, $\theta \notin \Theta_0$".
On note $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$.

- coût $0-1$:

$$L(\theta, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in \Theta_a \\ 1 & \text{si } \theta \notin \Theta_a. \end{cases}$$

- risque associé :

$$R(\theta, \delta) = \begin{cases} \mathbb{P}_\theta(\delta(X) = 1) = \mathbb{E}_\theta(\delta(X)) & (\theta \in \Theta_0) \\ \mathbb{P}_\theta(\delta(X) = 0) = 1 - \mathbb{E}_\theta(\delta(X)) & (\theta \in \Theta_1) \end{cases}$$

Région de confiance

ex : $\Theta = \mathbb{R}, \quad \mathcal{A} = \{$ intervalles $I \subset \mathbb{R}\}$.

- Coût $0 - 1$ (encore) :

$$L(\theta, I) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in I \\ 1 & \text{si } \theta \notin I. \end{cases}$$

- risque associé :

$$R(\theta, \delta) = \mathbb{P}_\theta(\delta(X) \not\ni \theta)$$

Exemple : Prospection pétrolière

au tableau