ELETTROTECNICA
PARTE II: ANALISI NODALE E AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

Michele Bonnin e Fernando Corinto
michele.bonnin@polito.it fernando.corinto@polito.it

Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Politecnico di Torino

A.A. 2016/2017

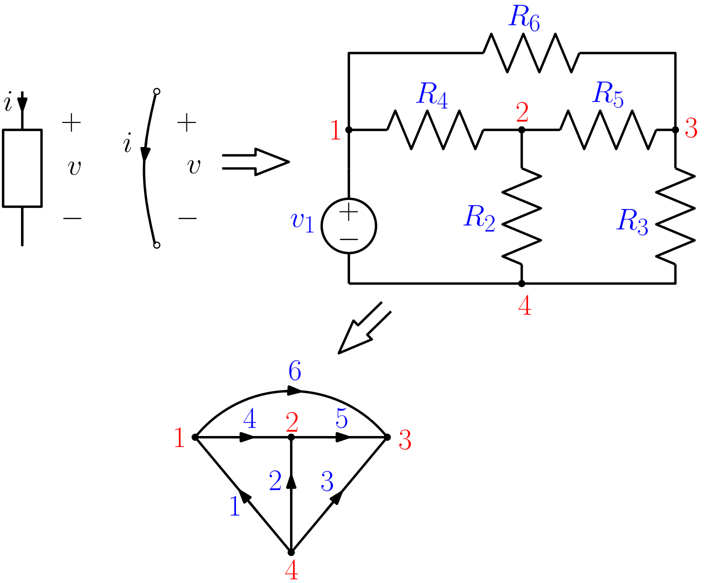
Indice

Indice

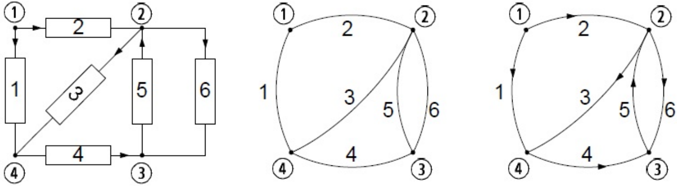
Connessione di bipoli

- Le leggi di Kirchhoff rappresentano delle “equazioni topologiche” in quanto esse dipendono solo dal modo in cui i bipoli sono collegati tra loro. Esse si determinano in base ad una struttura astratta, ad esempio di tipo “geometrico”.
- Il grafo orientato associato ad un circuito si ottiene nel modo seguente:
  1. si sostituisce ogni elemento a due morsetti con un arco di linea, detto ramo (o lato);
  2. si assegnano numeri diversi ai nodi della rete;
  3. su ogni ramo viene fissato un verso, coincidente con il verso positivo assunto per la corrente. Sul ramo non è segnato il verso della tensione, che viene implicitamente fissato in accordo con la convenzione degli utilizzatori

Grafi orientati



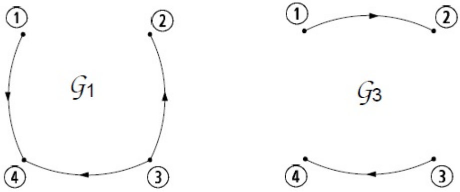
Grafi orientati



- Un *grafo* $\mathcal{G}(N, L)$ è costituito dall'insieme di *n nodi*, che indicheremo con $N = \{①, ②, \dots, ⓝ\}$ e dall'insieme di L *lati* (bipoli) che indicheremo con $L = \{1, 2, \dots, l\}$
- Se ogni lato del grafo è orientato, il grafo si dice *orientato*

Grafi orientati

- Un grafo si dice connesso se ogni nodo è collegato ad un qualsiasi altro nodo attraverso uno o più lati

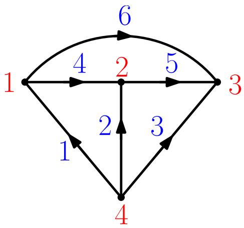


- $\mathcal{G}_1$ è connesso. $\mathcal{G}_3$ non è connesso. I circuiti di interesse nelle applicazioni sono sempre connessi.

KCL in forma matriciale

Se in un circuito si scrivono le KCL a tutti i nodi, allora le equazioni ottenute risultano linearmente dipendenti

Se un circuito ha n nodi, e si scrivono le KCL a tutti i nodi tranne uno, allora le $(n-1)$ equazioni ottenute risultano linearmente indipendenti.



$$\begin{aligned} -i_1 + i_4 + i_6 &= 0 \\ -i_2 - i_4 + i_5 &= 0 \\ -i_3 - i_5 - i_6 &= 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \mathbf{A}\,\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n-1,l} \end{array}$$

KCL in forma matriciale

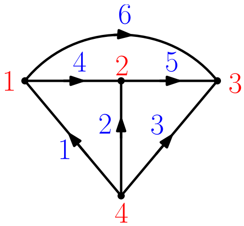
$$\mathbf{A}\,\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

- La matrice $\mathbf{A}$ è detta **matrice di incidenza ridotta**, in quanto associata ad $n-1$ nodi.
- Il numero di colonne è uguale al numero di lati l del grafo. Il numero di righe è uguale al numero di nodi meno 1, ossia $n-1$
- I suoi elementi a_{ij} valgono:
  - $+1$ se il ramo j incide nel nodo i con il verso della corrente uscente dal nodo
  - -1 se il ramo j incide nel nodo i con il verso della corrente entrante nel nodo
  - 0 se il ramo j non incide nel nodo i.

KVL in forma matriciale

Se in un circuito si scrivono le KVL a tutte le sequenze chiuse di nodi, allora le equazioni ottenute risultano linearmente dipendenti

Un circuito (planare) con n nodi e l lati ha $l-n+1$ maglie. Se si scrivono le KVL alle $l-n+1$ maglie, allora le equazioni ottenute risultano linearmente indipendenti.



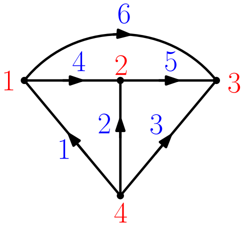
$$\begin{aligned} -v_1 + v_2 - v_4 &= 0 \quad (4 \to 1 \to 2 \to 4) \\ -v_2 + v_3 - v_5 &= 0 \quad (4 \to 2 \to 3 \to 4) \\ v_4 + v_5 - v_6 &= 0 \quad (2 \to 1 \to 3 \to 2) \\ v_1 - v_3 + v_6 &= 0 \quad (4 \to 3 \to 1 \to 4) \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

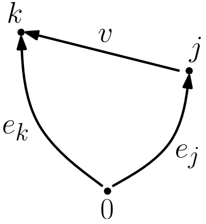
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{l-n+1,l}$ è detta **matrice di un insieme di maglie fondamentali**

KVL in forma matriciale

Potenziale di nodo



$$
\begin{aligned}
-v_1 + v_2 - v_4 &= 0 \qquad (4 \to 1 \to 2 \to 4)\\
-v_2 + v_3 - v_5 &= 0 \qquad (4 \to 2 \to 3 \to 4)\\
v_4 + v_5 - v_6 &= 0 \qquad (2 \to 1 \to 3 \to 2)\\
v_1 - v_3 + v_6 &= 0 \qquad (4 \to 3 \to 1 \to 4)
\end{aligned}
$$



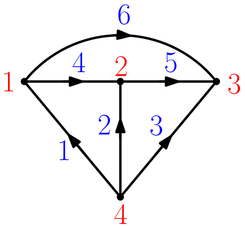
$$v = e_k - e_j$$

Sia v_k la tensione di un generico ramo $k = 1, \ldots, l$ (convenzione degli utilizzatori) e sia e_i la tensione di un generico nodo $i = 1, \ldots, n$ rispetto ad un nodo di riferimento. La tensione e_i è detta **potenziale di nodo**

Se le tensioni di un circuito sono espresse per mezzo dei potenziali di nodo allora esse verificano automaticamente la legge di Kirchhoff per le tensioni per qualsiasi sequenza chiusa di nodi del circuito

KVL in forma matriciale

Potenziale di nodo



$$-v_1 + v_2 - v_4 = 0 \qquad (4 \to 1 \to 2 \to 4)$$
$$-v_2 + v_3 - v_5 = 0 \qquad (4 \to 2 \to 3 \to 4)$$
$$v_4 + v_5 - v_6 = 0 \qquad (2 \to 1 \to 3 \to 2)$$
$$v_1 - v_3 + v_6 = 0 \qquad (4 \to 3 \to 1 \to 4)$$

$$v = e_k - e_j$$

$$\begin{aligned} v_1 &= -e_1 \\ v_2 &= -e_2 \\ v_3 &= -e_3 \\ v_4 &= e_1 - e_2 \\ v_5 &= e_2 - e_3 \\ v_6 &= e_1 - e_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e}$$

Indice

Teorema di Tellegen

Considerato un circuito costituito da l bipoli, siano i_k e v_k la corrente e la tensione del k-esimo bipolo (con versi secondo la convenzione degli utilizzatori). Allora la proprietà di conservazione della potenza si può scrivere:

$$\sum_{k=1}^{l} v_k(t)\; i_k(t) = 0$$

Dimostrazione: per il circuito in questione $\mathbf{A}\;\mathbf{i} = 0$ e $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\;\mathbf{e}$ con $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n-1,l}$. Allora

$$\mathbf{v}^T\mathbf{i} = (\mathbf{A}^T\mathbf{e})^T\;\mathbf{i} = \mathbf{e}^T\mathbf{A}\;\mathbf{i} = 0$$

Quindi

$$\mathbf{v}^T\mathbf{i} = \sum_{k=1}^{l} v_k(t)\; i_k(t) = 0$$

Per i circuiti a parametri concentrati la conservazione dell'energia è una conseguenza delle leggi di Kirchhoff.

Indice

Forma canonica delle equazioni circuitali

$$\mathbf{A}\,\mathbf{i} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n-1,l}$$

$$\mathbf{B}\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{l-n+1,l}$$

$$\underbrace{n-1}_{\text{KCL}} + \underbrace{l-n+1}_{\text{KVL}} = l$$

equazioni di interconessione in funzione delle l <u>correnti di ramo</u> e l <u>tensioni di ramo</u>

$$F(i, v) = 0$$

l equazioni caratteristiche che descrivono il comportamento dei bipoli in termini delle l <u>correnti di ramo</u> e l <u>tensioni di ramo</u>

Sistema di $2l$ equazioni in $2l$ incognite.

Nei casi di nostro interesse le equazioni di interconnessione e le equazioni caratteristiche sono tra di loro indipendenti e compatibili.

Metodo del tableau

$$\mathbf{A}\,\mathbf{i} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n-1,l}$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e} \qquad \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{l,n-1}$$

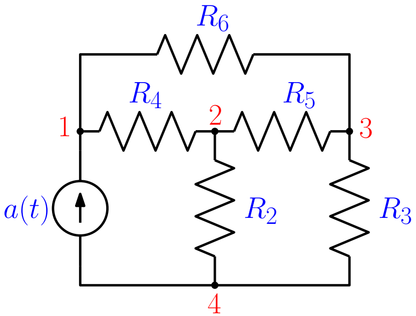
$n-1+l$	equazioni di interconnessione in funzione delle l correnti di ramo, l tensioni di ramo e $n-1$ potenziali di nodo.
$F(i,v) = 0$	l equazioni caratteristiche che descrivono il comportamento dei bipoli in termini delle l correnti di ramo e l tensioni di ramo

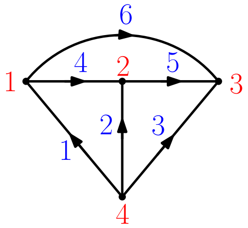
Sistema di $2l+n-1$ equazioni in $2l+n-1$ incognite.

Le equazioni possono risultare linearmente dipendenti, quindi l'esistenza e l'unicità della soluzione va verificata di volta in volta.

Indice

Circuito a–dinamico lineare

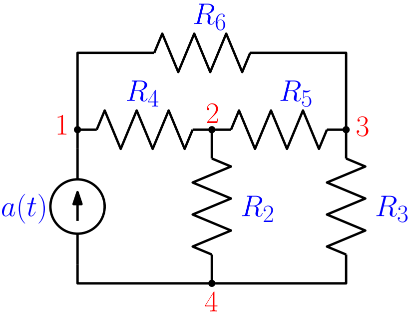




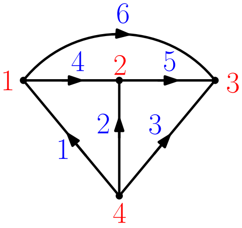
- Sia dato un grafo connesso $\mathcal{G}$. Un *albero* $\mathcal{A}$ di $\mathcal{G}$ è un suo sottografo connesso che comprende tutti i nodi del grafo e non contiene alcuna maglia.
- Il *coalbero* $\mathcal{C}$ di $\mathcal{G}$, corrispondente all'albero $\mathcal{A}$, è l'insieme dei lati complementari a quelli dell'albero; l'unione dei lati dell'albero e del coalbero coincide con l'insieme di tutti i lati di $\mathcal{G}$.

albero 1,2,3 ($n-1$ lati su cui definiamo i potenziali di nodo)
coalbero 4,5,6 ($l-n+1$ lati che definiscono le maglie fondamentali)

Circuito a–dinamico lineare



$\Rightarrow$



$$
\begin{array}{rcl}
-i_1 + i_4 + i_6 = 0 & 1 & i_1 = a(t) \\
-i_2 - i_4 + i_5 = 0 & 2 & v_2 = R_2 \; i_2 \\
-i_3 - i_5 - i_6 = 0 & 3 & v_3 = R_3 \; i_3 \\
-v_1 + v_2 - v_4 = 0 & (4,1,2,4) & v_4 = R_4 \; i_4 \\
-v_2 + v_3 - v_5 = 0 & (4,2,3,4) & v_5 = R_5 \; i_5 \\
v_4 + v_5 - v_6 = 0 & (2,1,3,2) & v_6 = R_6 \; i_6
\end{array}
$$

- Forma canonica delle equazioni circuitali. Sistema di 12 ($2l$) equazioni in 12 ($2l$) incognite

$$\mathbf{A}\;\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}\;\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}\;\mathbf{v} + \mathbf{N}\;\mathbf{i} = \mathbf{u_s}$$

Circuito a–dinamico lineare

$$
\begin{array}{rcl}
-i_1 + i_4 + i_6 = 0 & 1 & i_1 = a(t) \\
-i_2 - i_4 + i_5 = 0 & 2 & v_2 = R_2\ i_2 \\
-i_3 - i_5 - i_6 = 0 & 3 & v_3 = R_3\ i_3 \\
-v_1 + v_2 - v_4 = 0 & (4,1,2,4) & v_4 = R_4\ i_4 \\
-v_2 + v_3 - v_5 = 0 & (4,2,3,4) & v_5 = R_5\ i_5 \\
v_4 + v_5 - v_6 = 0 & (2,1,3,2) & v_6 = R_6\ i_6
\end{array}
$$

- Forma canonica delle equazioni circuitali. Sistema di 12 ($2l$) equazioni in 12 ($2l$) incognite

$$\mathbf{A}\ \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}\ \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}\ \mathbf{v} + \mathbf{N}\ \mathbf{i} = \mathbf{u_s}$$

$$
\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_6 \end{bmatrix}
\quad
\mathbf{u_s} = \begin{bmatrix} a(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

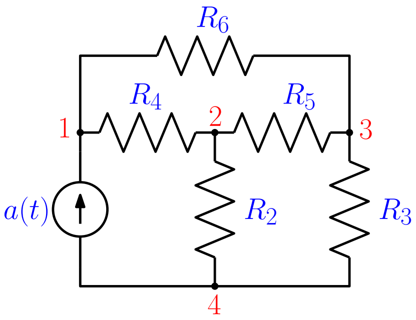
Circuito a–dinamico lineare

$$
\begin{array}{rcl}
-i_1 + i_4 + i_6 = 0 & 1 & i_1 = a(t) \\
-i_2 - i_4 + i_5 = 0 & 2 & v_2 = R_2\ i_2 \\
-i_3 - i_5 - i_6 = 0 & 3 & v_3 = R_3\ i_3 \\
-v_1 + v_2 - v_4 = 0 & (4,1,2,4) & v_4 = R_4\ i_4 \\
-v_2 + v_3 - v_5 = 0 & (4,2,3,4) & v_5 = R_5\ i_5 \\
v_4 + v_5 - v_6 = 0 & (2,1,3,2) & v_6 = R_6\ i_6
\end{array}
$$

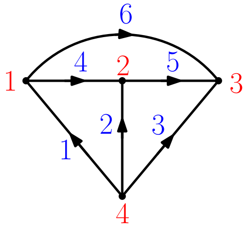
- Sistema ridotto di 6 equazioni in 6 incognite.

$$
\Rightarrow \left\{
\begin{array}{rcl}
-a(t) + i_4 + i_6 & = & 0 \\
-i_2 - i_4 + i_5 & = & 0 \\
-i_3 - i_5 - i_6 & = & 0 \\
-v_1 + R_2\ i_2 - R_4\ i_4 & = & 0 \\
-R_2\ i_2 + R_3\ i_3 - R_5\ i_5 & = & 0 \\
R_4\ i_4 + R_5\ i_5 - R_6\ i_6 & = & 0
\end{array}
\right.
$$

Circuito a–dinamico lineare



$\Rightarrow$



- Metodo del tableau. Sistema di 15 $(2l + n - 1)$ equazioni in 15 $(2l + n - 1)$ incognite

$$
\begin{aligned}
-i_1 + i_4 + i_6 &= 0 \quad \color{red}{1}\\
-i_2 - i_4 + i_5 &= 0 \quad \color{red}{2}\\
-i_3 - i_5 - i_6 &= 0 \quad \color{red}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= -e_1 & i_1 &= a(t)\\
v_2 &= -e_2 & v_2 &= R_2\ i_2\\
v_3 &= -e_3 & v_3 &= R_3\ i_3\\
v_4 &= e_1 - e_2 & v_4 &= R_4\ i_4\\
v_5 &= e_2 - e_3 & v_5 &= R_5\ i_5\\
v_6 &= e_1 - e_3 & v_6 &= R_6\ i_6
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{A}\ \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e}$$

$$\mathbf{M}\ \mathbf{v} + \mathbf{N}\ \mathbf{i} = \mathbf{u_s}$$

Circuito a–dinamico lineare

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,\mathbf{i} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{A}^T\mathbf{e} \\ \mathbf{M}\,\mathbf{v} + \mathbf{N}\,\mathbf{i} &= \mathbf{u_s} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^T & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u_s} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{T}\,\mathbf{w} &= \mathbf{u} \\ \det(\mathbf{T}) &\neq 0 \end{aligned}$$

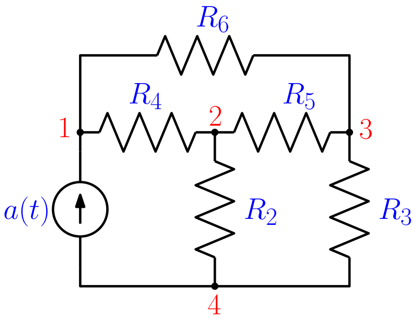
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

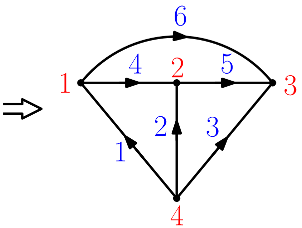
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u_s} = \begin{bmatrix} a(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Circuito a–dinamico lineare



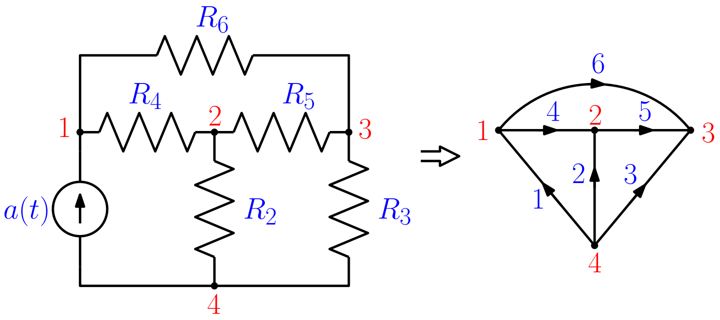


$$
\begin{aligned}
-i_1 + i_4 + i_6 &= 0 \quad \color{red}{1} \\
-i_2 - i_4 + i_5 &= 0 \quad \color{red}{2} \\
-i_3 - i_5 - i_6 &= 0 \quad \color{red}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{array}{llll}
v_1 = & -e_1 & i_1 = & a(t) \\
v_2 = & -e_2 & v_2 = & R_2\ i_2 \\
v_3 = & -e_3 & v_3 = & R_3\ i_3 \\
v_4 = & e_1 - e_2 & v_4 = & R_4\ i_4 \\
v_5 = & e_2 - e_3 & v_5 = & R_5\ i_5 \\
v_6 = & e_1 - e_3 & v_6 = & R_6\ i_6
\end{array}
}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
i_1 & = & a(t) \\
i_2 & = & -G_2 e_2 \\
i_3 & = & -G_3 e_3 \\
i_4 & = & G_4(e_1 - e_2) \\
i_5 & = & G_5(e_2 - e_3) \\
i_6 & = & G_6(e_1 - e_3)
\end{array}
\right.
$$

Circuito a–dinamico lineare



$$\left\{\begin{array}{lcl} i_1 & = & a(t) \\ i_2 & = & -G_2 e_2 \\ i_3 & = & -G_3 e_3 \\ i_4 & = & G_4(e_1 - e_2) \\ i_5 & = & G_5(e_2 - e_3) \\ i_6 & = & G_6(e_1 - e_3) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{lll} -i_1 + i_4 + i_6 & = 0 & \color{red}{1} \\ -i_2 - i_4 + i_5 & = 0 & \color{red}{2} \\ -i_3 - i_5 - i_6 & = 0 & \color{red}{3} \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} (G_6 + G_4)e_1 - G_4 e_2 - G_6 e_3 & = a(t) \\ -G_4 e_1 + (G_2 + G_4 + G_5)e_2 - G_5 e_3 & = 0 \\ -G_6 e_1 - G_5 e_2 + (G_3 + G_5 + G_6)e_3 & = 0 \end{array}\right.$$

Sistema ridotto di 3 equazioni in 3 incognite

<u>METODO DEI NODI</u>: $\mathbf{G}\,\mathbf{e} = \mathbf{u}$

Metodo dei nodi

Si articola nei seguenti passi:

1. Si numerano i nodi del circuito, prendendone uno come riferimento (nodo 0). Quindi si assumono come incognite le tensioni dei nodi rispetto al nodo di riferimento prescelto
2. Ad ogni nodo si scrive la legge di Kirchhoff delle correnti (KCL), assumendo per semplicità lo stesso verso di riferimento per tutti i rami incidenti nel nodo (tipicamente si assume come verso positivo di riferimento quello uscente)
3. Si utilizzano le relazioni costitutive dei singoli rami per esprimere le correnti dei rami in funzione delle rispettive tensioni di ramo e delle correnti dei generatori di corrente indipendenti
4. Infine si usa la legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL) per esprimere le tensioni dei rami in funzione delle tensioni dei nodi

Metodo dei nodi

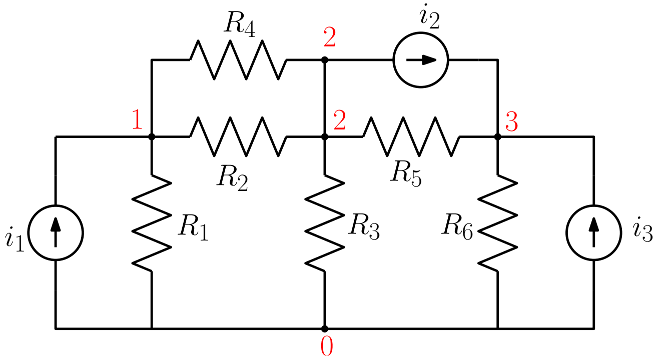
Osservazioni:

- Perché il metodo possa essere applicato così come indicato, occorre che i singoli rami del circuito siano descritti da relazioni costitutive del tipo $i = g(v)$, in modo che ciascuna corrente di ramo possa essere espressa in funzione della corrispondente tensione di ramo (bipoli comandati in tensione)
- In tal caso il sistema di equazioni che descrive il circuito può essere scritto in forma automatica, a vista
- Il metodo permette di scrivere un numero minimo di equazioni e si presta assai bene ad essere utilizzato per analisi di circuiti di dimensioni limitate, usando carta e penna
- Nel caso siano presenti generatori ideali di tensione, indipendenti o dipendenti, oppure amplificatori operazionali ideali, il metodo dei nodi deve essere opportunamente modificato per poter essere utilizzato anche con questi componenti

Metodo dei nodi

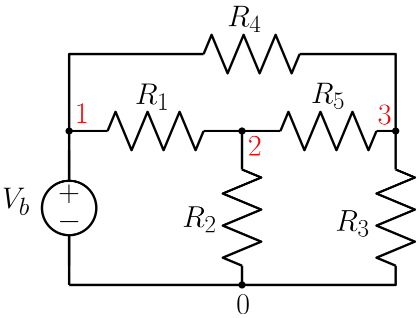
- La matrice **G** delle conduttanze di nodo ha la seguente struttura
  - gli elementi della diagonale principale g_{ii} contengono la somma delle conduttanze che incidono nel nodo i-esimo del circuito
  - gli elementi fuori diagonale $g_{ij}, i \neq j$ sono gli opposti delle conduttanze esistenti tra il nodo i-esimo e j-esimo
  - La matrice **G** è simmetrica
- Il vettore dei termini noti è costituito, per ciascuna riga i, dalla somma algebrica delle intensità di corrente impresse dai generatori

Metodo dei nodi



$$
\begin{aligned}
G_1\ e_1 + (G_2 + G_4)(e_1 - e_2) &= i_1 \\
(G_2 + G_4)(e_2 - e_1) + G_3\ e_2 + G_5(e_2 - e_3) &= -i_2 \\
G_5(e_3 - e_2) + G_6\ e_3 &= i_2 + i_3
\end{aligned}
$$

Metodo dei nodi

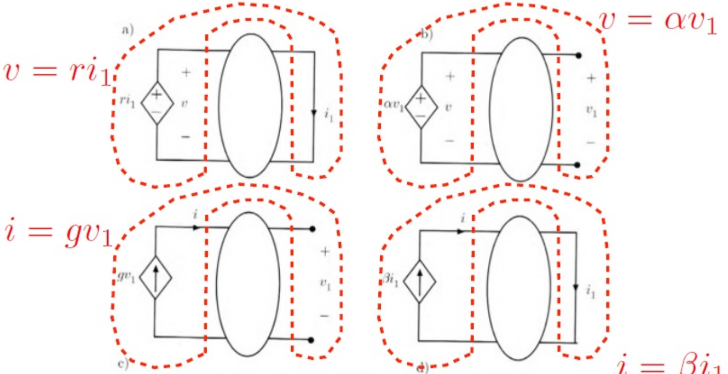


$$\begin{cases} G_1(e_2 - V_b) + G_2\ e_2 + G_5(e_2 - e_3) & = & 0 \\ G_4(e_3 - V_b) + G_3\ e_3 + G_5(e_3 - e_2) & = & 0 \end{cases}$$

In presenza di generatori di tensione il metodo dei nodi va opportunamente modificato

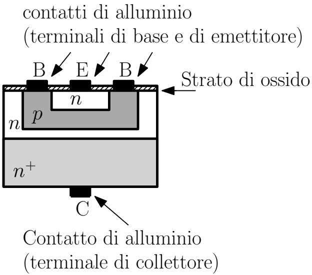
Indice

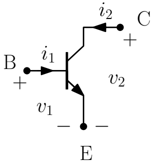
Generatori dipendenti

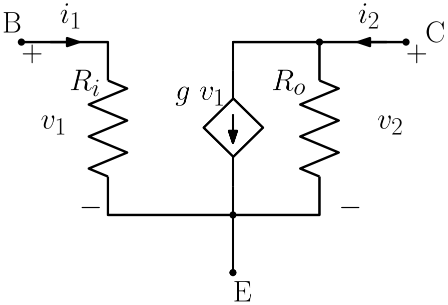


quadri-polo $\Rightarrow$ due-porta (o doppio bipolo)

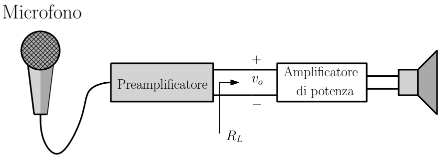
Generatori dipendenti

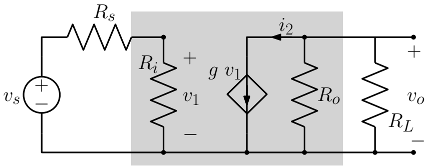


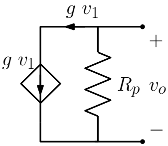




Generatori dipendenti







$$v_1 = v_s \frac{R_i}{R_i + R_s} \qquad R_p = \frac{R_o R_L}{R_o + R_L}$$

$$v_o = -R_p g\ v_1 = -\frac{R_o R_L}{R_o + R_L} \frac{R_i}{R_i + R_s} g\ v_s$$

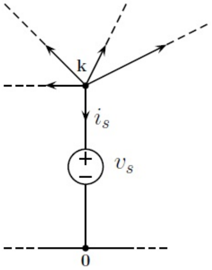
$$R_s = 500\Omega \quad R_i = 2\mathrm{k}\Omega \quad R_o = 50\mathrm{k}\Omega$$
$$R_L = 10\mathrm{k}\Omega \quad g = 30\mathrm{mS}$$

$$v_o = -200 v_s$$

Indice

Metodo dei nodi con generatori di tensione

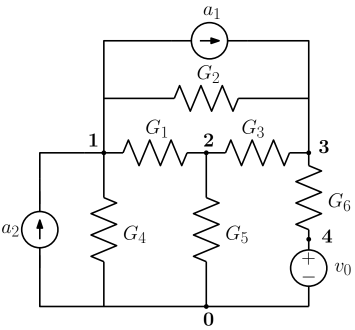
Generatore di tensione con un terminale connesso al riferimento



La tensione del nodo k è nota (ovvero $e_k = v_s$) e quindi il numero delle tensioni dei nodi incognite diminuisce di uno.

- *Nel caso in cui siano presenti generatori di tensione (indipendenti o dipendenti) con un terminale connesso al nodo di riferimento, si può ugualmente analizzare il circuito con il metodo dei nodi, purché non si scriva l'equilibrio delle correnti ai nodi corrispondenti ai terminali dei suddetti generatori di tensione.*

Esempio



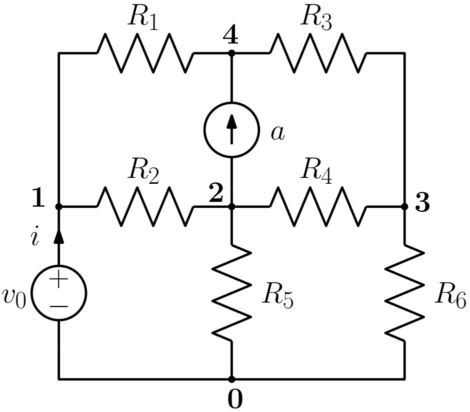
$$e_4 = v_0$$

$$\begin{aligned}
G_4\ e_1 + G_1(e_1 - e_2) + G_2(e_1 - e_3) &= a_2 - a_1 \\
G_1(e_2 - e_1) + G_5\ e_2 + G_3(e_2 - e_3) &= 0 \\
G_2(e_3 - e_1) + G_3(e_3 - e_2) + G_6(e_3 - v_0) &= a_1
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_1 & -G_2 \\ -G_1 & G_1 + G_3 + G_5 & -G_3 \\ -G_2 & -G_3 & G_2 + G_3 + G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 - a_1 \\ 0 \\ a_1 + G_6\ v_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_1 & -G_2 \\ -G_1 & G_1 + G_3 + G_5 & -G_3 \\ -G_2 & -G_3 & G_2 + G_3 + G_6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_2 - a_1 \\ 0 \\ a_1 + G_6 v_0 \end{bmatrix}$$

Esempio



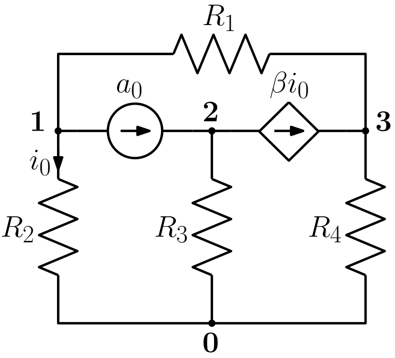
$$
\begin{aligned}
R_1 &= 4\Omega \\
R_2 &= 2\Omega \\
R_3 &= 8\Omega \\
R_4 &= 6\Omega \\
R_5 &= 3\Omega \\
R_6 &= 1\Omega \\
v_0 &= 30\text{V} \\
a &= 4\text{A}
\end{aligned}
$$

$$e_1 = v_0$$

Indice

Metodo dei nodi con generatori dipendenti

Esempio



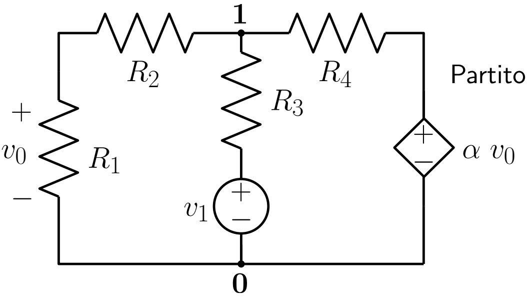
Legge di Ohm

$$i_0 = G_2 \; e_1$$

$$\begin{aligned} G_2 e_1 + G_1(e_1 - e_3) &= -a_0 \\ G_3 \; e_2 &= a_0 - \beta \; i_0 \\ G_1(e_3 - e_1) + G_4 \; e_3 &= \beta \; i_0 \end{aligned}$$

Metodo dei nodi con generatori dipendenti

Esempio



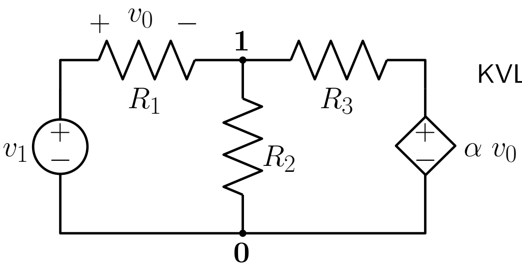
Partitore di tensione

$$v_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\ e_1$$

$$\frac{e_1}{R_1 + R_2} + \frac{e_1 - v_1}{R_3} + \frac{e_1 - \alpha\ v_0}{R_4} = 0$$

Metodo dei nodi con generatori dipendenti

Esempio



KVL

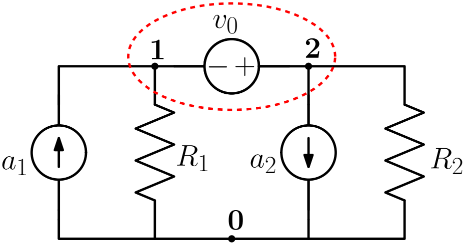
$$v_0 + e_1 - v_1 = 0 \rightarrow v_0 = v_1 - e_1$$

$$G_1(e_1 - v_1) + G_2\ e_1 + G_3(e_1 - \alpha\ v_0) = 0$$

Indice

Generatore di tensione non connesso al riferimento

Nel caso in cui il generatore di tensione è posto tra una coppia di nodi che non comprende il nodo di riferimento.



Soluzione

1. Si considera la superficie che contiene il generatore e i nodi a cui è connesso (super nodo)
2. Si scrive la KLC al super nodo
3. Si aggiunge l'equazione imposta dal generatore di tensione al sistema

$$e_2 - e_1 = v_0$$

$$G_1 \ e_1 + G_2 \ e_2 = a_1 - a_2$$

Riepilogo

Metodo dei nodi (bipoli comandati in tensione)

Analisi nodale (algoritmo 1)

1. Scegliere un nodo qualsiasi come nodo di riferimento.
2. Applicare la KCL a tutti i nodi, tranne quello di riferimento.
3. Esprimere tutte le correnti nei resistori in funzione delle tensioni di nodo.

Riepilogo

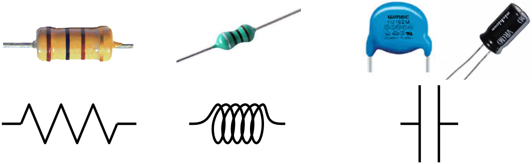
Metodo dei nodi in presenza di generatori di tensione dipendenti ed indipendenti

Analisi nodale (algoritmo 2)

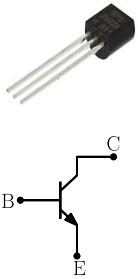
1. Scegliere un nodo qualsiasi come nodo di riferimento
2. Evidenziare eventuali *super nodi*, relativi a generatori di tensione non connessi al nodo di riferimento. Ogni super nodo ingloba anche i due nodi a cui connesso il generatore.
3. Applicare la KCL a tutti i nodi e super nodi escludendo quello di riferimento e quelli connessi al riferimento per mezzo di un generatore di tensione.
4. Esprimere tutte le correnti nei resistori in funzione delle tensioni di nodo. Aggiungere i vincoli imposti dai generatori di tensione.

Indice

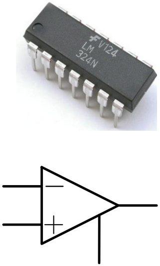
Componenti circuitali



Resistore *Induttore* *Condensatore*

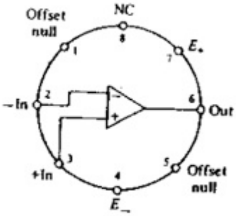


Transistor



Operazionale

Amplificatore operazionale

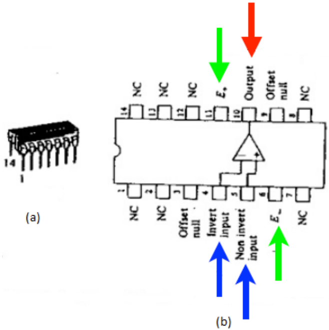


- Contenitore metallico a otto terminali

(a) Vista laterale

(b) Vista dall'alto

Amplificatore operazionale

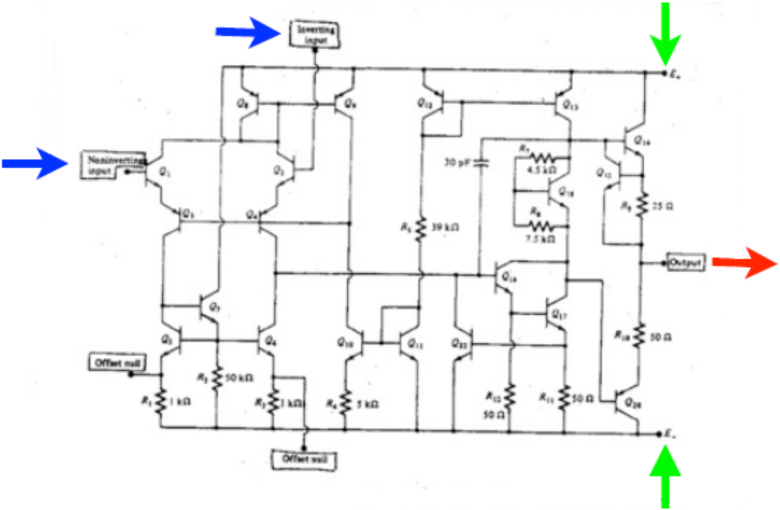


- Un contenitore DIP (Dual In–line Package) a 14 piedini.

(a) Vista laterale

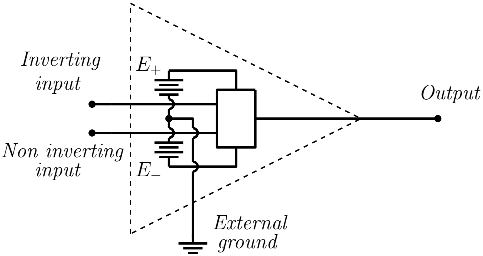
(b) Vista dall'alto

Amplificatore operazionale



μA 741 ($\sim$1968)

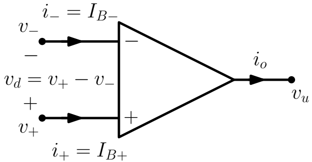
Amplificatore operazionale

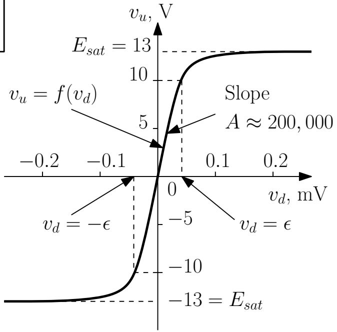


- Elemento circuitale a quattro terminali

Amplificatore operazionale

$$\boxed{\begin{aligned} i_- &= I_{B-} \\ i_+ &= I_{B+} \\ v_u &= f(v_d) \end{aligned}}$$

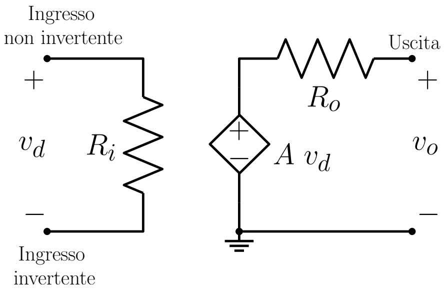


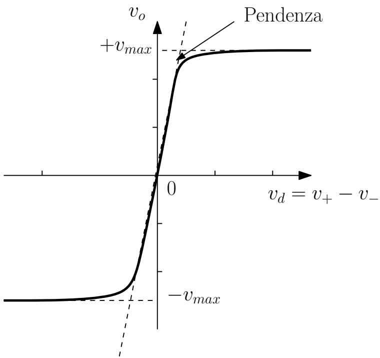


Caratterizzazione sperimentale di un tipico op amp

Amplificatore operazionale

- Circuito equivalente in regione lineare $\frac{-v_{max}}{A} < v_d < \frac{v_{max}}{A}$

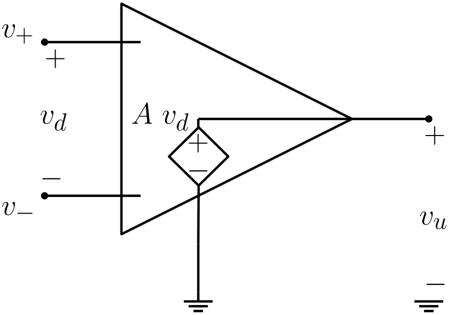




- Resistenza in ingresso $R_i \approx 10^5 \div 10^{12}\ \Omega$
- Resistenza in uscita $R_o \approx 5 \div 75\ \Omega$
- Guadagno ad anello aperto $A \approx 10^5 \div 10^8$

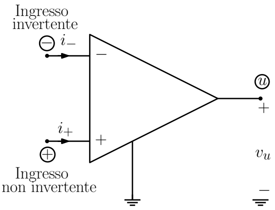
Indice

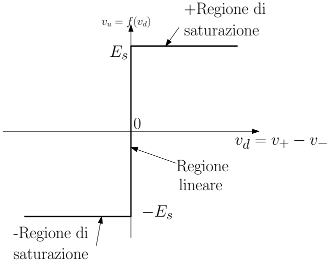
Amplificatore operazionale ideale



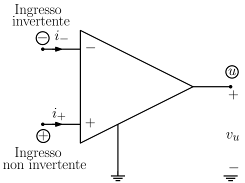
- $A \to +\infty \Rightarrow v_d = 0$
- $R_i \to +\infty \Rightarrow i_+ = i_- = 0$

Amplificatore operazionale ideale

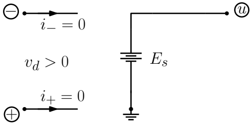




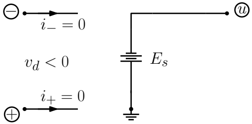
- $A \rightarrow +\infty \Rightarrow v_d = 0$
- $R_i \rightarrow +\infty \Rightarrow i_+ = i_- = 0$



$-E_s < v_u < E_s$ Circuito equivalente per la regione lineare



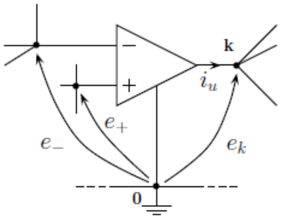
$v_+ - v_- > 0$ Circuito equivalente per la regione di saturazione positiva



$v_+ - v_- < 0$ Circuito equivalente per la regione di saturazione negativa

Indice

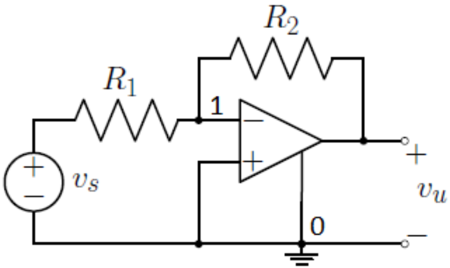
Amplificatore operazionale: analisi nodale



- Delle tre tensioni di nodo e_+, e_- ed e_k solo due sono incognite, in quanto $e_+ = e_-$. Inoltre le correnti i_+ e i_- sono nulle.
- L'amplificatore operazionale riduce il numero delle tensioni di nodo incognite

Nel caso in cui nel circuito siano presenti amplifcatori operazionali ideali, si può ugualmente utilizzare il metodo dei nodi, purché non si scriva l'equilibrio delle correnti ai nodi corrispondenti ai terminali d'uscita dei suddetti amplifcatori.

Amplificatore invertente



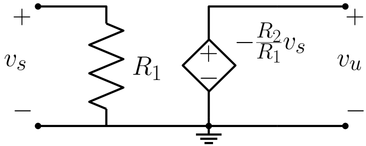
$$v_1 = v_- = v_+ = 0$$

$$-\frac{v_s}{R_1} - \frac{v_u}{R_2} = 0$$

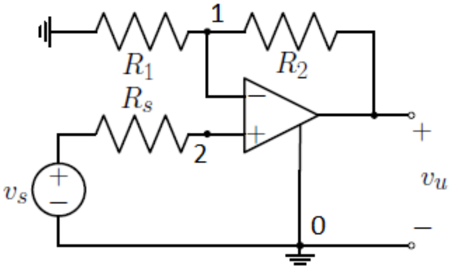
$$\frac{v_u}{v_s} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{|v_s| < \frac{R_1}{R_2} E_{sat}}$$

Circuito equivalente



Amplificatore non invertente



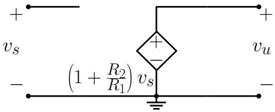
$$e_1 = v_- = v_+ = v_s$$

$$\frac{v_s}{R_1} + \frac{v_s - v_u}{R_2} = 0$$

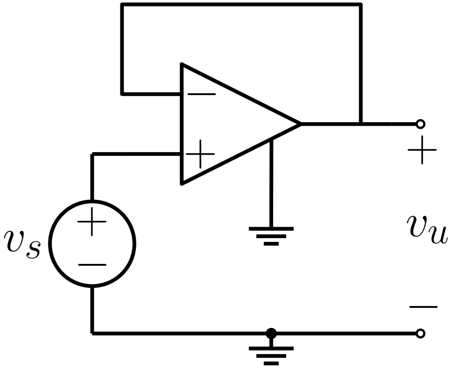
$$\frac{v_u}{v_s} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{|v_s| < \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_{sat}}$$

Circuito equivalente



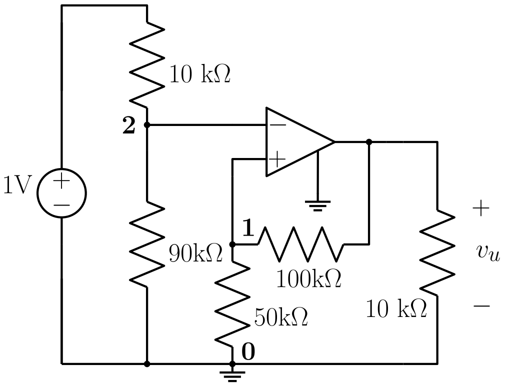
Amplificatore con guadagno unitario



$$v_u = v_- = v_+ = v_s$$

Inseguitore di tensione

Esempio



$$e_1 = v_+ = v_- = e_2$$

$$\begin{cases} \frac{e_1}{50} + \frac{e_1 - v_o}{100} & = 0 \\ \frac{e_2}{90} + \frac{e_2 - 1}{10} & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_o & = 100 e_1 \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{100}\right) = 2,7\mathrm{V} \\ e_1 & = \frac{90}{100} = 0,9\mathrm{V} \end{cases}$$

Riepilogo

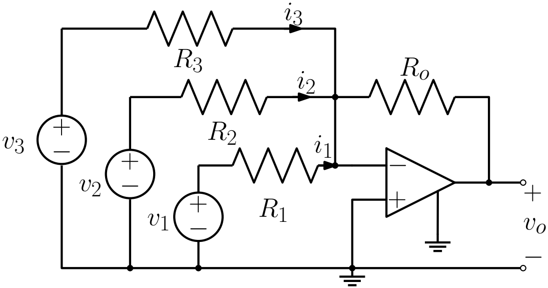
Metodo dei nodi modificato in presenza amplificatori operazionali ideali, generatori di tensione dipendenti e indipendenti

Analisi nodale (algoritmo 3)

1. Scegliere un nodo qualsiasi come nodo di riferimento
2. Evidenziare eventuali *super nodi*, relativi a generatori di tensione non connessi al nodo di riferimento. Ogni super nodo ingloba anche i due nodi a cui connesso il generatore.
3. Applicare la KCL a tutti i nodi e super nodi tranne:
   - il nodo di riferimento
   - eventuali nodi connessi al riferimento tramite un generatore di tensione
   - *i nodi di uscita di un amplificatore operazionale*
4. Esprimere tutte le correnti nei resistori in funzione delle tensioni di nodo. Aggiungere i vincoli imposti dai generatori di tensione e dagli amplificatori operazionali

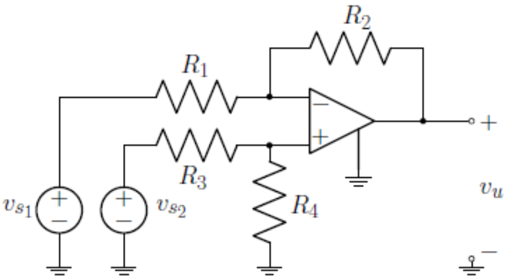
Indice

Sommatore



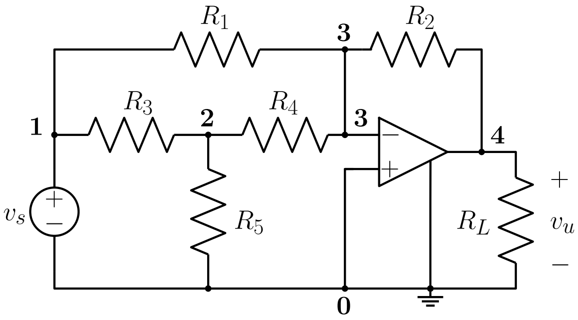
$$v_o = -R_0 \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} \right)$$

Amplificatore differenziale

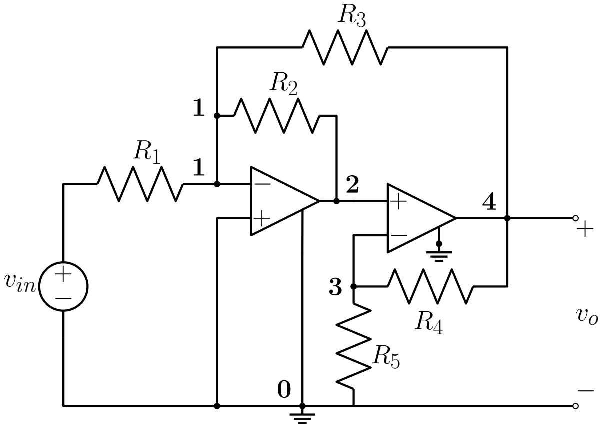


$$v_u = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_4}{R_3 + R_4}\ v_{s2} - \frac{R_2}{R_1}\ v_{s1}$$

Esempio

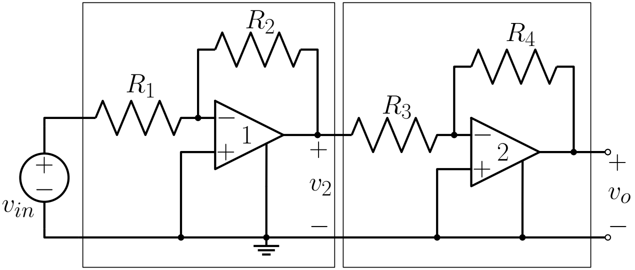


Esempio



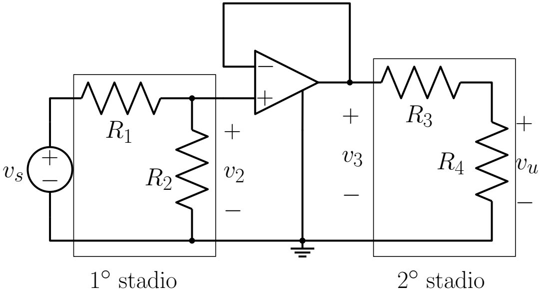
Indice

Amplificatori Operazionali in cascata

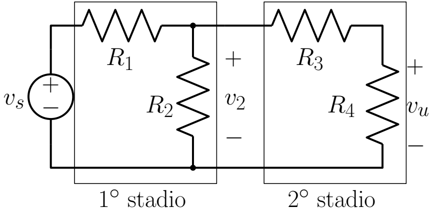


$$\frac{v_o}{v_{in}} = \left(-\frac{R_2}{R_1}\right)\left(-\frac{R_4}{R_3}\right)$$

Amplificatori Operazionali in cascata e partitore di tensione



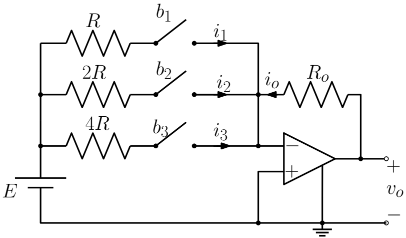
$$v_u = v_s \, \frac{R_2}{R_1 + R_2} \, \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$



$$R_p = R_2 || (R_3 + R_4)$$

$$v_u = v_s \, \frac{R_p}{R_1 + R_p} \, \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

Applicazione: convertitore digitale–analogico



Binario $b_1 b_2 b_3$	**Analogico** (x)
000	0
001	0,125
010	0,250
011	0,375
100	0,500
101	0,625
110	0,750
111	0,875

$$\frac{E}{R} b_1 + \frac{E}{2R} b_2 + \frac{E}{4R} b_3 + \frac{v_o}{R_o} = 0$$

$$v_o = -\frac{E\ R_o}{R} \left(b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{4} \right)$$