Solution de l'exercice "erreurs de fausse alarme et de non détection"

1) Le coût (ou risque conditionnel) associé à la décision d(x)=1 (classe ω_1) est :
$C_1(x) = \lambda(\omega_1|\omega_1)P(\omega_1|x) + \lambda(\omega_1|\omega_2)P(\omega_2|x) = \lambda(\omega_1|\omega_2)P(\omega_2|x)$

De même, le risque conditionnel associé à la décision ω_2 est :
$C_2(x) = \lambda(\omega_2|\omega_1)P(\omega_1|x)$
2) La règle de décision bayésienne est la règle du coût minimal :

$d(x) = 1$ si $C_1(x) < C_2(x)$ $d(x) = 2$ sinon
en remplaçant $C_1(x)$ et $C_2(x)$ par leurs expressions, on obtient :

$$d(x) = 1 \text{ si } \frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} > \frac{\lambda(\omega_1|\omega_2)}{\lambda(\omega_2|\omega_1)} \times \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$$

$d(x) = 2$ sinon

La décision s'opère à partir du rapport de vraisemblance et d'un seuil (partie droite de l'inégalité). Pour privilégier la classe ω_1, on diminue le seuil, ce qui correspond à prendre $\lambda(\omega_2|\omega_1) > \lambda(\omega_1|\omega_2)$

3) Soit x_0 le point frontière correspondant à la règle de décision bayésienne exprimée à partir du paramètre x.

$$P_{ND} = P(d(x) = 2, \omega_1) = \int_{x_0}^{+\infty} p(x|\omega_1)P(\omega_1)dx$$

De même $P_{FA} = P(d(x) = 1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x|\omega_2)P(\omega_2)dx$

Dans le domaine de la détection, l'erreur de fausse alarme est dénommée erreur de type I (ou de première espèce). Ceci fait référence au rejet erroné de l'hypothèse nulle de la théorie des tests, hypothèse qui suppose qu'il y a absence de maladie. La non détection est dénommée erreur de type II (ou de deuxième espèce).
Quand on augmente x_0 , P_{ND} diminue et P_{FA} augmente
La probabilité d'erreur globale est $P_E = P_{ND} + P_{FA}$

Pour des lois gaussiennes, le point frontière x_0 vérifie :
$$Log\frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} = -\frac{1}{2}\frac{(x-m_1)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{(x-m_2)^2}{\sigma^2} = Log\left[\frac{\lambda(\omega_1|\omega_2)}{\lambda(\omega_2|\omega_1)} \times \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}\right]$$
on obtient : $x_0 = \frac{m_1+m_2}{2} + \frac{\sigma^2}{m_1-m_2} \times Log\left[\frac{\lambda(\omega_1|\omega_2)}{\lambda(\omega_2|\omega_1)} \times \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}\right]$

application numérique : $m_1 = 1$; $m_2 = 2.5$; $\sigma = 0.5$; $P(\omega_1) = 0.1; P(\omega_2) = 0.9$; $\lambda(\omega_1|\omega_2) = 1; \lambda(\omega_2|\omega_1) = 4$

on trouve $x_0 = 1.61$; $P_{ND} = 0.01$ et $P_{FA} = 0.0345$

$$P_{ND} = P(x > x_0, \omega_1) = P(\omega_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_0}^{+\infty} e^{\frac{-(x-m_1)^2}{2\sigma^2}}dt \quad .$$

Par changement de variable $u = \frac{(x-m_1)}{\sigma\sqrt{2}}$, on obtient :
$$P_{ND} = \frac{P(\omega_1)}{2}erfc\left(\frac{x_0-m_1}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$
De même $P_{FA} = P(x < x_0, \omega_2) = \frac{P(\omega_2)}{2}erfc\left(\frac{m_2-x_0}{\sigma\sqrt{2}}\right)$

4) un seuil x_0 faible correspond à la partie inférieure gauche de la courbe COR (non détection élevée) tandis que les valeurs de x_0 élevées correspondent

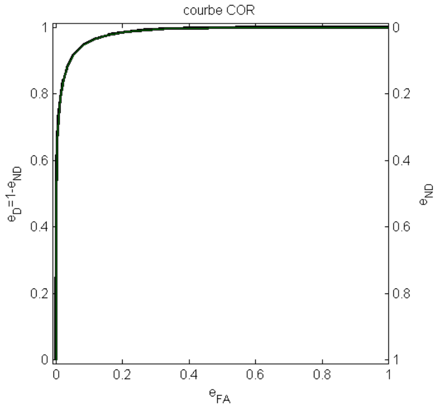

FIGURE 1 – Courbe COR.

à la partie supérieure droite (fausse alarme élevée). Comme on veut une probabilité de non détection faible, on choisit x_0 sur la partie horizontale de la courbe COR.