CHƯƠNG II: TÍCH PHÂN BỘI

§1. Tích phân kép

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT

1. Định nghĩa

Cho hàm *f(x,y)* xác định trong miền đóng, bị chặn *D*. Chia miền *D* thành n mảnh rời nhau $D_1, D_2, .., D_n$ có diện tích lần lượt là $\Delta S_1, \Delta S_2, .., \Delta S_n$. Trong mỗi mảnh D_i , lấy tùy ý một điểm $M_i(x_i, y_i)$. Lập tổng (gọi là tổng tích phân của hàm *f(x,y)*)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

Gọi $d(D_i)$ là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trong D_i. Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{\max_i d(D_i)\to 0} S_n = S$$

hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia miền *D* và cách chọn điểm $M_i(x_i,y_i)$, thì hàm *f(x,y)* gọi là khả tích trên miền *D*, và *S* gọi là tích phân kép của hàm *f(x,y)* trên miền *D*, ký hiệu

$$\iint_D f(x,y)dS$$

Nếu *f(x,y)* khả tích trên miền *D*, thì tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền *D*. Do đó, ta chia miền *D* bởi các đường thẳng song song với các trục tọa độ. Khi đó, $\Delta S_i = \Delta x \,.\, \Delta y$ và $dS = dx \,.\, dy$

Vì vậy có thể viết

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Người ta chứng minh được rằng: Hàm *f(x,y)* liên tục trên một miền đóng, bị chặn *D* thì khả tích trên miền đó.

Tính chất:

a) $\iint_D dS = S(D)$ (diện tích của *D*)

b) $\iint\limits_D C.f(x,y)dS = C.\iint\limits_D f(x,y)dS$

c) $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]dS = \iint\limits_D f(x,y)dS + \iint\limits_D g(x,y)dS$

d) Nếu $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \Phi$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS$$

e) Nếu $f(x,y) \le g(x,y)\ \forall (x,y) \in D$ thì $\iint\limits_D f(x,y)dS \le \iint\limits_D g(x,y)dS$

f) Nếu m $\le f(x,y) \le$ M $\forall\ (x,y) \in$ D, m và M là hằng số, thì

$$m.S(D) \le \iint\limits_D f(x,y)dS \le M.S(D)$$

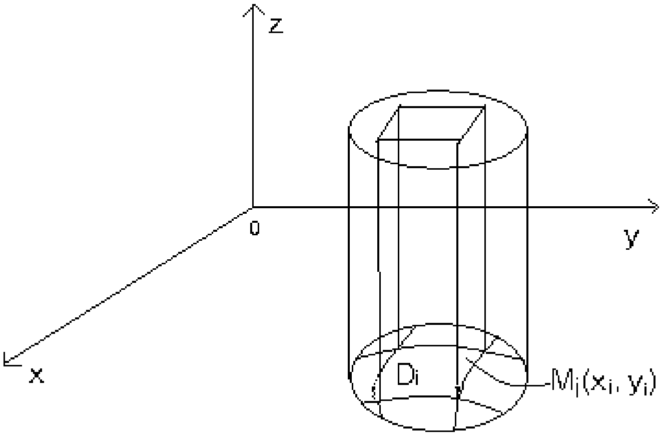
g) Nếu $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D thì tồn tại điểm M(x_0,y_0) sao cho $\iint\limits_D f(x,y)dS = f(x_0,y_0).S(D)$

(Định lý về giá trị trung bình).

Đại lượng $\frac{1}{S(D)}\iint\limits_D f(x,y)dS$ gọi là giá trị trung bình của hàm $f(x,y)$ trên D.

2. Ý nghĩa hình học

Ta xét bài toán: " Tìm thể tích của vật thể Ω giới hạn dưới bởi miền $D \subset$(Oxy), giới hạn trên bởi mặt cong có phương trình $z = f(x,y) \ge 0$ và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với Oz và đường chuẩn là biên của D ".



Ta tính thể tích của Ω bằng phương pháp gần đúng.

Chia miền D thành n mảnh rời nhau $D_1, D_2, .., D_n$ có diện tích $\Delta S_1, \Delta S_2, .., \Delta S_n$. Lấy mỗi mảnh nhỏ làm đáy, dựng hình trụ con có đường sinh song song với Oz, mặt phía trên giới hạn bởi mặt $z = f(x,y)$.

Xét hình trụ con thứ i: đáy là D_i, Lấy tùy ý 1 điểm $M_i(x_i, y_i)$. ta có thể tích hình trụ con thứ i

$$\Delta V_i \approx f(x_i, y_i).\Delta S_i$$

Thể tích gần đúng của Ω :

$$V(\Omega) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

Phép xấp xỉ này càng chính xác nếu n càng lớn và các mảnh D_i có đường kính càng nhỏ ($d(D_i)$: đường kính của D_i)

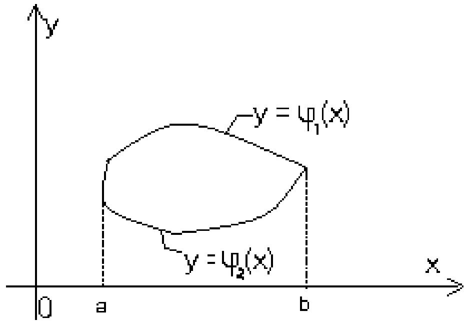
Vậy $V(\Omega) = \lim\limits_{\max_i d(D_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint\limits_D f(x,y)dS$

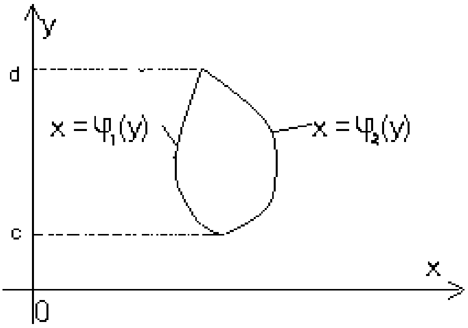
II. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP

1. Đưa về tích phân lặp

Nếu $D = \{(x,y) : a \le x \le b; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$





Nếu $D = \{(x, y) : c \le y \le d; \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$ thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$

Ví dụ 1: Xác định cận của tích phân $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ với miền *D* xác định bởi các đường

y = 0, y = x, x = 2

y = 0, y = x^2, x + y = 2

Giải:

Có hai cách biểu diễn *D*:

$$D = \{(x, y) : 0 \le x \le 2; 0 \le y \le x\}$$

hoặc

$$D = \{(x, y) : 0 \le y \le 2; y \le x \le 2\}$$

Do đó $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_y^2 f(x,y)dx$

Có 2 cách biểu diễn *D*:

$$D = \{(x, y) : 0 \le y \le 1; \sqrt{y} \le x \le 2 - y\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^0 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$$

$$D = D_1 \cup D_2 = \left\{(x,y): 0 \le x \le 1; 0 \le y \le x^2\right\} \cup \left\{(x,y): 1 \le x \le 2; 0 \le y \le 2-x\right\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$$

Ví dụ 2: Tính $I = \iint\limits_D xydxdy$, *D* giới hạn bởi các đường *y = x – 4*, $y^2 = 2x$

Giải: Hoành độ giao điểm:

$$2x = (x-4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 4 \end{array}\right.$$

Do đó, miền *D* được biểu diễn

$$D = \left\{(x,y): -2 \le y \le 4; \frac{y^2}{2} \le x \le y+4\right\}$$

Vậy

$$I = \int_{-2}^{4} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xydx = \int_{-2}^{4}\left(y.\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=y+4}\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(y^3 + 8y^2 + 16y - \frac{y^5}{4}\right)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24}\right)\Bigg|_{-2}^{4}$$

2. Đổi biến trong tích phân kép

a. Đổi biến tổng quát

Giả sử *x = x(u,v), y = y(u,v)* là hai hàm có đạo hàm riêng liên tục trên miền đóng, bị chặn D_{uv}. Gọi $D_{xy} = \left\{(x,y) / x = x(u,v); y = y(u,v), (u,v) \in D_{uv}\right\}$

Nếu *f(x,y)* khả tích trên D_{xy} và định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0$$

trên D_{uv} thì ta có

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)).|J|.dudv$$

-

Ví dụ 3: Tính $\iint\limits_{D} dxdy$ với *D* giới hạn bởi các đường

$$y = 1 - x, y = 2 - x, y = 2x - 1, y = 2x - 3$$

Giải: Các đường thẳng viết lại $x + y = 1, x + y = 2, 2x - y = 1, 2x - y = 3$

Đặt *u = x + y, v = 2x – y* thì $x = \dfrac{u+v}{3}, y = \dfrac{2u-v}{3}$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{3}; D_{uv} = \{(u,v): 1 \le u \le 2; 1 \le v \le 3\}$$

Vậy $\iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}\int\limits_{1}^{2} du \int\limits_{1}^{3} dv = \frac{2}{3}$

b. Tích phân kép trong tọa độ cực

Công thức liên hệ tọa độ

$x = r.cos\varphi$

$y = r.sin\varphi$

Ta có:

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Do vậy: $\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$

Ví dụ 4: Tính $I = \iint\limits_{D} \dfrac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, với D giới hạn bởi: $(x-1)^2 + y^2 \le 1, y \ge 0$

Giải:

Rõ ràng $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Thay x = rcosφ , y = rsinφ vào $(x-1)^2 + y^2 = 1$, ta được r = 2cosφ

Vậy $D_{r\varphi} = \left\{(r,\varphi): 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}; 0 \le r \le 2\cos\varphi\right\}$

Do đó:

$$I = \iint_{D_{r\varphi}} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{4-r^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)d\varphi = \pi - 2$$

<u>Ví dụ 5:</u> Tính $I = \iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ với D là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$.

<u>Giải:</u> Chuyển sang hệ tọa độ cực, ta có:

$$D_{r\varphi} = \{(r,\varphi): 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R\}$$

Do đó:

$$I = \iint_{D_{r\varphi}} e^{-r^2} rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} rdr = 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_0^R = \pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

BÀI TẬP

1 -Tính các tích phân kép

a) $\int_0^2\int_2^3 (4-x^2)dydx$

b) $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}dxdy$

c) $\int_0^4\int_0^x x\sin y\,dydx$

d) $\int_0^1 \int_0^{1/y} y e^{xy} dxdy$

2-Tính các tích phân kép

a) $\iint_D (4x+2)dxdy$, D: $0 \le x \le 2$; $x^2 \le y \le 2x$

b) $\iint_D (1-6xy^2)dxdy$, D: $0 \le x \le 2$; $-1 \le y \le 1$

c) $\iint_D y \ln x dxdy$, D: $xy = 1$; $y = \sqrt{x}$; $x = 2$

3- Đổi thứ tự biến lấy tích phân

a) $\int_0^1 \int_2^{4-2x} f(x,y)dydx$

b) $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} f(x,y)dydx$

c) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dxdy$

d) $\int_0^1 \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$

4- Tính các tính phân

d) $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$, D: $y = \sqrt{1-x^2}$; $y = 0$

e) $\iint_D x dxdy$, D: $y = x$; $x = \sqrt{2-y^2}$; $y = 0$

f) $\iint_D \frac{2dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, D: $x^2 + y^2 \le 1$

g) $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dxdy$, D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$; $a, b > 0$

h) $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, D: $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{4}; x^2+y^2=\pi^2$

i) $\iint\limits_D (y-x)dxdy$, D: y = x + 1; y = x – 3; $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{9}; y=-\frac{1}{3}x+5$

5-Tính diện tích miền D giới hạn bởi

j) D: $y = x^2$; $y = x + 2$

k) D: $y^2 = x$; $y = 2x - x^2$

l) D: $y=2\sqrt{1-x^2}$; $x = \pm 1$; $y = -1$

m) D: $y = 2^x$; $y = -2x$; $y = 4$

§2 Tích phân bội 3

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1. Định nghĩa

Cho hàm số f (x,y,z) xác định trong miền đóng, giới nội Ω của không gian Oxyz.

Chia miền Ω thành n miền nhỏ có thể tích là $\Delta V_1,\ldots,\Delta V_n$. Lấy tùy ý một điểm $M_i(x_i,y_i,z_i)$ trong miền nhỏ thứ i.

Lập tổng

$$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

Nếu giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\lim\limits_{\max d_i\to 0} I_n=I$: hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia miền Ω , và M_i, thì f (x,y,z) gọi là khả tích trên miền Ω , và I gọi là tích phân bội 3 của hàm f trên Ω , ký hiệu

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$$

Tương tự như tích phân kép, ta ký hiệu dxdydz thay cho dV và tích phân bội 3 thường viết

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

Chú ý: Nếu f (x,y,z) = 1 thì $\iiint_{\Omega} dxdydz = V(\Omega)$ (thể tích của Ω).

2. Tính chất

$$\iiint_{\Omega} Cf(x,y,z)dV = C\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$$

$$\iiint_{\Omega}(f+g)dV = \iiint_{\Omega} fdV + \iiint_{\Omega} gdV$$

- Nếu $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$ thì $\iiint_{\Omega} fdV = \iiint_{\Omega_1} fdV + \iiint_{\Omega_2} fdV$
- Nếu f (x,y,z) ≥ g(x,y,z) ∀ (x,y,z) ∈ Ω thì $\iiint_{\Omega} fdV \geq \iiint_{\Omega} gdV$
- Nếu f (x,y,z) liên tục trong miền đóng, bị chặn Ω thì tồn tại điểm $(x_0,y_0,z_0) \in \Omega$ sao cho

$$f(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{V(\Omega)}\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$$ (Định lý về giá trị trung bình)

II. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN Bội 3

1. Tích phân bội 3 trong hệ tọa độ Descartes

Cho Ω giới hạn bỡi:

- Mặt trên: $z = \varphi_2(x,y)$
- Mặt dưới: $z = \varphi_1(x,y)$
- Xung quanh: mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz và đường chuẩn là biên của miền D thuộc mặt phẳng Oxy. (D là hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy).

Khi đó

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D}\left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy$$

Nếu miền $D = \{(x,y): a \le x \le b, \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x)\}$ thì

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} dy \int_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

<u>Ví dụ 1</u>: Cho miền Ω giới hạn bởi các mặt: x = 0, y = 0, z = 0, x + y + 2z = 2.

Viết tích phân bội 3 $I = \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ theo các thứ tự :

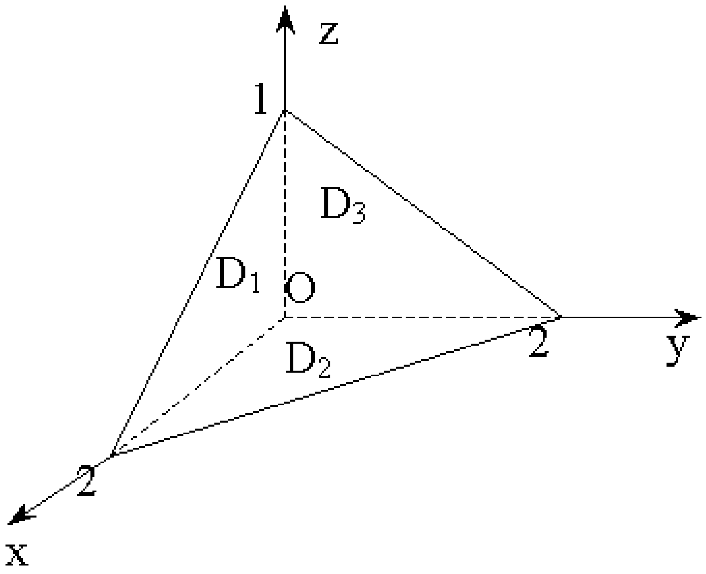
a). dxdydz

b). dxdzdy

c). dydzdx

<u>Giải:</u>

a). Hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy là miền



$D_1 = \{(x,y):\ 0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2 - x\}$

Giới hạn trên của Ω: $z = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$

Giới hạn dưới của Ω: $z = 0$

Vậy:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}} f(x,y,z)dz$$

b). Hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxz là miền

$$D_2 = \left\{(x,z):\ 0 \le x \le 2;\ 0 \le z \le 1 - \frac{x}{2}\right\}$$

Giới hạn trên của Ω: $y = 0 - x - 2z$

Giới hạn dưới của Ω: $y = 0$

Vậy:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dz \int_0^{2-x-2z} f(x,y,z)dy$$

c). Hình chiếu Ω của xuống mặt phẳng Oyz là

$$D_3 = \left\{(y,z): 0 \le y \le 2; 0 \le z \le 1 - \frac{y}{2}\right\}$$

Giới hạn trên của Ω là : x = 2-y-2z

Giới hạn dưới của Ω là : x = 0

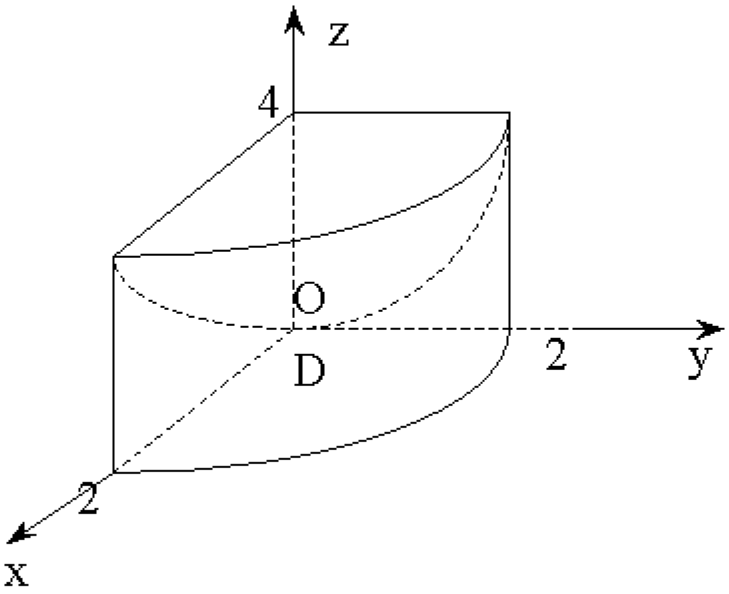
Vậy

$$I = \int_0^2 dy \int_0^{1-\frac{y}{2}} dz \int_0^{2-y-2z} f(x,y,z)dx$$

<u>Ví dụ 2</u>: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$, Ω là miền giới hạn bởi các mặt:

$z = x^2+y^2$; $z = 4$; $x = 0$; $y = 0$.

<u>Giải:</u>



Hình chiếu của miền Ω xuống mặt phẳng Oxy là $\frac{1}{4}$ hình tròn :

$$D_4 = \left\{(y,z): 0 \le y \le 2; 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}$$

Mặt trên của Ω: z=4,

Mặt dưới của Ω: $z=x^2+y^2$.

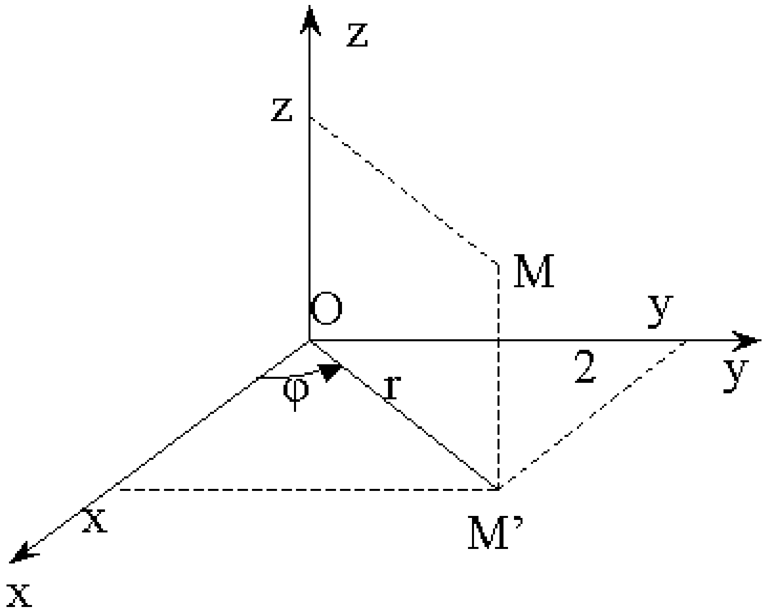
Vậy:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{4} x.dz = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(x.z \Big|_{z=x^2+y^2}^{z=4} \right) dy$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4x - x^3 - xy^2) dy = \int_0^2 (4xy - x^3 y - \frac{xy^3}{3}) \Big|_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$I = \frac{2}{3}\int_0^2 x(4-x^2)^{3/2} dx = \frac{64}{15}$$

2. Tính tích phân bội 3 trong hệ toạ độ trụ



Toạ độ trụ của điểm M(x,y,z) là bộ ba số (r,φ,z), với (r,φ) là toạ độ cực của hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy (Hình vẽ)

Ta luôn có: $r \geq 0$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; $-\infty < z < +\infty$.

Mối liên hệ giữa toạ độ Descartes và toạ độ trụ

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

Ta có :

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi, r\sin\varphi, z).r\,dr\,d\varphi\,dz$$

<u>Ví dụ 3</u>: Tính $I = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdydz$ với Ω là miền giới hạn bởi $z = x^2+y^2$; $z = 4$

<u>Giải:</u>

Hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2+y^2 \leq 4$

Chuyển sang toạ độ trụ

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z.$$

Ω giới hạn bởi: $o \le \varphi < 2\pi;\ 0 \le r \le 2;\ r^2 \le z \le 4$.

Vậy:

$$I = \iiint\limits_{\Omega} r^2 .r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr \int_{r^2}^4 dz = \frac{64\pi}{3}$$

3. Tính tích phân bội 3 trong hệ toạ □ộ cầu

Toạ độ cầu của một điểm M(x,y,z) là bộ 3 số (r,θ,φ), với r = OM, θ là góc giữa trục Oz và $\overrightarrow{OM}$, φ là góc giữa trục Ox và $\overrightarrow{OM'}$, với M' là hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy.

Ta có: Với mọi điểm M trong không gian thì $r \ge 0;\ 0 \le \theta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi$

Mối liên hệ giữa toạ độ Descartes và toạ độ cầu:

$x = r \sin\theta \cos\varphi$

$y = r \sin\theta \sin\varphi$

$z = r \cos\theta$

Công thức tích phân trong hệ toạ độ cầu

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

<u>Ví dụ 1</u>: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$ với Ω là miền giới hạn bởi hai mặt cầu

$x^2+y^2+z^2 = 1;\ x^2+y^2+z^2 = 4$.

Chuyển sang hệ toạ độ cầu, ta có: $I = \iiint\limits_{\Omega} r^4 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

Miền Ω xác định bởi $1 \le r \le 2;\ 0 \le \theta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Vậy:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_1^2 r^4 dr = \frac{124\pi}{5}$$

Ví dụ 4: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ với Ω là miền giới hạn bởi $x^2+y^2+z^2 \le z$.

Chuyển sang hệ toạn độ cầu ta có:

$$I = \iiint\limits_{\Omega} r^3 \sin\phi dr d\phi d\varphi$$

Miền Ω xác định bởi $0 \le r \le \cos\theta$; $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Vậy:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\cos\phi} r^3 \sin\phi dr = \frac{\pi}{10}$$

§3 Ứng dụng của tích phân bội

I. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC

1. Tính diện tích hình phẳng

Diện tích của miền D trong mặt phẳng Oxy

$$S(D) = \iint\limits_{D} dxdy$$

2. Thể tích vật thể

Vật thể Ω trong không gian Oxyz là:

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz$$

Nếu Ω giới hạn trên bởi mặt $z = f_2(x,y)$, giới hạn dưới bởi mặt $z = f_1(x,y)$ và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với Oz và có đường chuẩn là biên của miền D trong mặt phẳng Oxy thì

$$V(\Omega) = \iint\limits_{D} [f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy$$

Ví dụ 1: Tính thể tích phần hình nón $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$ nằm trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 4$

Giải:

Gọi Ω là vật thể hình nón $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong hình cầu $x^2+y^2+z^2 \leq 4$

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz$$

Chuyển sang hệ toạ độ cầu thì

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} r^2 \sin\phi dr d\phi d\varphi$$

Miền giới hạn bởi $0 \leq r \leq 2$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Vậy

$$V(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^2 r^2 \sin\phi dr = \frac{\pi^3}{3}(2-\sqrt{2})(đvtt)$$

Ví dụ 2: Tính thể tích hình cầu có bán kính R

Giải:

Ta có thể tích hình cầu hình cầu

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz$$

Hình cầu Ω: $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$

Chuyển sang hệ toạ độ cầu thì

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} r^2 \sin\phi dr d\phi d\varphi$$,

Và miền Ω: $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Vậy:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R r^2 \sin\theta dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta . \int_0^R r^2 dr$$

$$= 2\pi.(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} . \frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3 (đvtt)$$

II. ỨNG DỤNG CƠ HỌC

1. Tính khối lượng

a. Khối lượng của vật thể Ω có khối lượng riêng tại điểm M(x, y, z) là f(x, y, z) thì:

$$m(\Omega) = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$$

b. Nếu bản phẳng D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng là f(x, y) thì :

$$m(\Omega) = \iint_{D} f(x,y)\,dxdy$$

2. Momem quán tính của vật thể Ω với khối lượng riêng ρ(x, y, z) □ối với

c. trục Ox: $I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$

d. trục Oy: $I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2)\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$

e. trục Oz: $I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$

f. đường thẳng L: $I_L = \iiint_{\Omega} r^2(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$, r(x, y, z) là khoảng cách từ điểm M(x, y, z) đến L

g. Mặt Oxy: $I_{xy} = \iiint_{\Omega} z^2\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$

h. Mặt Oxz: $I_{xz} = \iiint_{\Omega} y^2\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$

i. Mặt Oyz: $I_{yz} = \iiint_{\Omega} x^2\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$

j. Gốc tọa độ: $I_o = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$

3. Momen tĩnh của Ω với khối lượng riêng ρ(x, y, z) □ối với

a) Mặt Oxy: $M_{xy} = \iiint_{\Omega} z\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$

b) Mặt Oxz: $M_{xz} = \iiint_\Omega y\rho(x,y,z)dxdydz$

c) Mặt Oyz: $M_{yz} = \iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dxdydz$

4. Trọng tâm của Ω với khối lượng riêng ρ(x, y, z) là

$$x_o = \frac{M_{yz}}{m(\Omega)}; y_o = \frac{M_{xz}}{m(\Omega)}; z_o = \frac{M_{xy}}{m(\Omega)}.$$

BÀI TẬP

1- Tính $\iiint_\Omega (1 - x - y)dxdydz$ với Ω

a) giới hạn bởi $0 \le x \le 1$; $1 \le y \le 2$; $2 \le z \le 3$.

b) giới hạn bởi các mặt: $x + y + z = 1$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2-Tính:

a) $\iiint_\Omega xdxdydz$, Ω: $z = x^2 + y^2$; $z = 4$, $x = 0$, $y = 0$ (lấy trong miền $x \ge 0$, $y \ge 0$).

b) $\iiint_\Omega ydxdydz$, Ω: $y = x^2$, $y + z = 1$, $z = 0$.

3- Tính:

a) $\iiint_\Omega zdxdydz$, Ω: $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$.

b) $\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)^3 dxdydz$, Ω: $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

c) $\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + 1)\ dxdydz$, Ω: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 + y^2$.

d) $\iiint_\Omega xyzdxdydz$, Ω: góc phần tám thứ nhất của khối cầu đơn vị.

e) $\iiint_\Omega zdxdydz$, Ω: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

f) $\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)^3dxdydz$, Ω: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $x \le 0$.

4-Tính thể tích vật giới hạn bởi:

a) $z = x^2 + 3y^2$, $z = 8 - x^2 - y^2$

b) $y + z = 2$; $x = 4 - y^2$, các mặt phẳng tọa độ nằm trong góc phần tám thứ nhất

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z^2$.

d) $z = 4 - x^2 - y^2$, các mặt phẳng tọa độ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

5- Tính momen quán tính đối với các trục Ox, Oy, Oz của khối chữ nhật đồng chất Ω: $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \le x \le \frac{b}{2}; -\frac{c}{2} \le x \le \frac{c}{2}$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm của vật thể đồng chất giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

b) Tìm tọa độ trọng tâm của nửa hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $z \ge 0$ nếu khối lượng riêng tại mỗi điểm tỷ lệ với khoảng cách từ điểm đó đến gốc tọa độ.