Mesure et integration T_{D_1} : Operations sur les ensembles et denombrabilite

Exercice 1

1. Soit $n \geq 1$, montrons que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable

Considerons $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$(n, p) \longmapsto 2^n(2p+1)$$

et montrons que $\mathbb{N}^2$ est denombrable

Soient (n, p) et $(n', p') \in \mathbb{N}^2$ tels que $f(n,p) = f(n',p')$

On a $2^n(2p+1) = 2^{n'}(2p'+1)$ $(*)$

- Si $n < n'$: $(*) \Rightarrow 2^{n'-n}(2p+1) = 2p+1$ comme $n'-n > 0$ $2^{n'-n}(2p+1)$ est un nombre pair qui est égal à $2p+1$ qui est impaire ce qui est absurde

- Si $n > n'$: $(*) \Rightarrow 2^{n-n'}(2p+1) = 2p'+1$ ce qui est absurde

D'où $n = n'$. Donc $(*) \Rightarrow 2p+1 = 2p'+1 \Rightarrow p = p'$

d'où f est injective et comme $\mathbb{N}$ est denombrable alors $\mathbb{N}^2$ l'est aussi

Montrons que $\mathbb{N}^k$ est denombrable

- On sait que c'est vrai pour $k=1$ et $k=2$
- On suppose que $\mathbb{N}^k$ est denombrable pour $k \geq 2$

- Montrons que $\mathbb{N}^{k+1}$ est denombrable

$\varphi_k : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ injective

$\varphi_2 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ injective

$\varphi_{k+1} : \mathbb{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$(n_1, \cdots, n_k, n_{k+1}) \longmapsto \varphi_2(\varphi_k(n_1, \cdots, n_k), n_{k+1}) \in \mathbb{N}$$

$\varphi_{k+1}(n_1, n_2, \cdots, n_{k+1}) = \varphi_{k+1}(p_1, p_2, \cdots, p_{k+1})$

$\varphi_k(n_1, \cdots, n_k) = \varphi_k(p_1, \cdots, p_k)$ et $n_{k+1} = p_{k+1}$ car φ est injective. Comme φ_k est injective alors $(n_1, \cdots, n_k) = (p_1, \cdots, p_k)$, finalement $(n_1, \cdots, n_{k+1}) = (p_1, \cdots, p_{k+1})$ donc φ_{k+1} est injective d'où $\mathbb{N}^{k+1}$ est denombrable.

Par conséquent $\mathbb{N}^k$ est denombrable

2. Montrons que le produit cartesien d'un nombre ... denombrable

Soient $E_1, E_2, \cdots E_k$ des ensembles denombrables alors $\forall\ 1 \leq i \leq k$ il existe $\varphi_i : E_i \longrightarrow \mathbb{N}$ injective

$$\varphi : E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k \longrightarrow \mathbb{N}^k$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_k) \longmapsto (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \cdots, \varphi_k(x_k))$$

Soient $(x_1, \cdots, x_k) \in E$ et $(y_1, \cdots, y_k) \in E$ tels que

$\varphi(x_1, \cdots, x_k) = \varphi(y_1, \cdots, y_k)$

$(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \cdots, \varphi_k(x_k)) = (\varphi_1(y_1), \cdots \varphi_k(y_k))$

On a $\varphi_i(x_i) = \varphi_i(y_i) \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k$

comme φ_i est injective alors on a $x_i = y_i$

alors $(x_1, \cdots, x_k) = (y_1, \cdots, y_k)$ d'où φ est injective

Comme $\mathbb{N}^k$ est dénombrable alors E l'est aussi

3. <u>Montrons que $\mathbb{Q}$ est dénombrable</u>

Soit $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$

$$(p,q) \longmapsto \frac{p}{q}$$

En effet $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\exists\, (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$x = \frac{p}{q} = \varphi(p,q)$ or $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable et

φ est surjective alors $\mathbb{Q}$ est dénombrable

Exercice 2

1. Soit X un ensemble contenant au moins deux éléments distincts $\exists (x_0, x_1) \in X^2 / x_0 \neq x_1$, $X^{\mathbb{N}}$ ensemble de suites de X

Considérons $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$
$A \longmapsto (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad a_n = \begin{cases} x_0 & \text{si } n \in A \\ x_1 & \text{si } n \notin A \end{cases}$

Montrons que ψ est une injection

Soient A et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) / \psi(A) = \psi(B)$ montrons que $A = B$

$\psi(A) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\psi(B) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On a $\psi(A) = \psi(B)$ donc $a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrons que $A \subseteq B$.

Soit $n \in A \Rightarrow a_n = x_0$ donc $b_n = x_0 \Rightarrow n \in B$

De même on montre que $B \subseteq A$.

Par conséquent $A = B$ et ψ est injective

Supposons que $X^{\mathbb{N}}$ est denombrable alors

$\exists : \varphi : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}$ injective donc $\varphi \circ \psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ est une injection. On en deduit que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est denombrable ce qui est absurde ainsi $X^{\mathbb{N}}$ n'est pas denombrable.

2. Montrons que $[0,1]$ n'est pas denombrable

D'après 1. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas denombrable

$\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 0$ ou $1 \Rightarrow a_n \leqslant 1$

$0 \leqslant \frac{2a_n}{3^{n+1}} \leqslant \frac{2}{3^{n+1}}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{3^{n+1}}$ converge car il s'agit d'une série géométrique de raisons $\frac{1}{3} < 1$ donc $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2a_n}{3^{n+1}}$ converge par comparaison et on a :

$$\Psi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

$$0 \leqslant \Psi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} \Psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow [0,1] \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}} \end{aligned}$$ est bien définie

<u>Montrons que Ψ est injective</u>

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telles que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrons que $\Psi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq \Psi((b_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Soit $N = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$ donc $\begin{cases} a_N = 0 \text{ et } b_N = 1 \\ \text{ou} \\ a_N = 1 \text{ et } b_N = 0 \end{cases}$

On traite le cas $\begin{cases} a_N = 0 \\ \text{et } b_N = 1 \end{cases}$

$$\Psi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2a_n}{3^{n+1}} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}}$$

Pour $0 \leqslant n \leqslant N-1$ on a $a_n = b_n$

$$\Psi((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2b_n}{3^{n+1}} + \frac{2b_N}{3^{N+1}} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2b_n}{3^{n+1}}$$

$$\Psi((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \geqslant \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2a_n}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{N+1}}$$

$$\begin{aligned}\Psi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2a_n}{3^{n+1}} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}} \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2a_n}{3^{n+1}} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{3^{n+1}} \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2a_n}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{N+1}} < \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2a_n}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{N+1}} \\ &< \Psi((b_n)_{n\in\mathbb{N}})\end{aligned}$$

donc $\Psi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq \Psi((b_n)\in\mathbb{N})$

ainsi Ψ est injective et $[0,1]$ est non-denombrable

Exercice 3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $x \in \Omega$ et J_x la réunion de tous les intervalles ouverts inclus dans Ω et contenant x

1. Soient $x, y \in \Omega$, montrons que $J_x = J_y$ ou $J_x \cap J_y = \phi$

$\forall x, y \in \Omega$ on a $J_x \cap J_y = \phi$ ou $J_x \cap J_y \neq \phi$

Montrons que $J_x \cap J_y \neq \phi \Leftrightarrow J_x = J_y$

Soit $a \in J_x \cap J_y$ alors $a \in J_x$ et $a \in J_y$

$a \in J_x \Rightarrow$ il existe un intervalle inclus dans Ω contenant x et a. Comme $I_x \subseteq \Omega$ et contenant alors $I_x \subset J_a$ donc $x \in J_a$ ainsi on a $J_a = J_x$ (*)

De même on montre que $J_a = J_y$ (**)

Par conséquent $\forall x, y \in \Omega$ $J_x = J_y$ ou $J_x \cap J_y = \phi$

2. Déduisons-en que Ω est une réunion dans...

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur Ω définie par :

$\forall x, y \in \Omega \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow J_x = J_y$

Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

- $x \mathcal{R} y \Rightarrow J_x = J_y = J_y = J_x \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- $\forall x \in \Omega$, $J_x = J_x \Rightarrow$ donc $x \mathcal{R} x$
- Transitivité : Soit $x, y, z \in \Omega$
  $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x \Rightarrow J_x = J_y$ et $J_y = J_z$ donc $J_x = J_z \Rightarrow x \mathcal{R} y$. La réunion des classes d'équivalence de cette relation d'équivalence $\Omega = \bigcup_{[x] \in \Omega/\mathcal{R}} J_x$

Montrons que J_x est un intervalle ouvert

Comme J_x est la réunion d'intervalle ouvert alors J_x est un ouvert.

Soient $a, b \in J_x$ tels que $a < b$. Soit $c \in [a, b]$

Montrons que $c \in J_x$

$J_x = \bigcup]a_x, b_x[\quad x \in]a_x, b_x[$

$I =]a, b[$ et $J =]c, d[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$

$I \cap J \neq \phi \Leftrightarrow c < b$. Si $I \cap J \neq \phi$ alors $I \cup J =]a, d[$ qui est un intervalle

$J_x = \bigcup I_x$ or $x \in I_x \subset \Omega$ I_x un intervalle

Comme $\bigcap I_x \neq \phi$ alors $\bigcup I_x = J_x$ est un intervalle

$\Omega = \bigcup\limits_{x \in \Omega} J_x$ est une réunion disjointe et dénombrable d'intervalle ouvert.

$\Omega = \bigcup\limits_{[x] \in \Omega/R} J_x$ réunion disjointe d'intervalles ouverts

J_x est un intervalle donc il existe $q \in J_x \cap \mathbb{Q}$

$\Omega = \bigcup\limits_{[q] \in \Omega \cap \mathbb{Q}/R} J_x$ réunion disjointe dénombrable d'intervalles ouverts

$\Omega \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ alors $\Omega \cap \mathbb{Q}$ est dénombrable.