UNIVERSITE NUMERIQUE CHEIKH HAMIDOU KANE

Pôle : Sciences,Technologie et Numérique
PROGRAMME : CALCUL SCIENTIFIQUE

MODELISATION

24 mai 2023

NIVEAU : MASTER 1
Projet : Modèle proie-prédateur : souris et chats
Année Universitaire : 2022-2023

Membres du groupe :
Pascale Sara Sene, Khemesse Ndour, Khadidiatou Inna Mané, El hadji Massa SONKO
Formateurs :
Pr Abdou Sène, Dr Oumar Diop

PLAN

1.Introduction

Les mathématiques ont longtemps fait l'objet d'études scientifiques dans divers disciplines et notamment en biologie. La modélisation en biologie est utilisée en dynamique de population afin de modéliser d'une part la croissance des populations et d'autre part les interactions qui peuvent exister entre elles. Dans ce présent projet, nous détaillons une étude de la dynamique d'un modèle proie-prédateur à deux espèces, faire une simulation numérique sur Python ou Scilab et en fin une étude de la dynamique à chaîne alimentaire de trois espèces.

2.Un modèle proie-prédateur à deux espèces

a.Présentation d'un modèle proie-prédateur :cas de la souris et du chat

Ce modèle est un modèle d'interaction proie-prédateurs qui aura pour objet d'illustrer l'équation de Lotka-Voltera.
Cette équation explicite la dynamique des population proie-prédateurs.
Notre modèle prend en compte deux espéces distinctes, les proies et les prédateurs.
Les proies mangent les ressources, se reproduisent et se déplacent. Lorsque cette proie n'a plus d'énergie elle meurt. Les prédateurs eux se nourrissent des proies, se reproduisent et se déplacent.
Nous notre projet nous considérerons deux types d'espéces, les souris (S) qui sont nos proies et les chats (C) qui sont nos prédateurs.

b.Présentation des variables et paramètres :

Par conséquent, on modélise l'évolution de nos deux populations par le systéme différentiel suivant :
$S(t)$ représente le nombre de proies à l'instant t, et $C(t)$ le nombre de prédateurs.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} &= aS - cSC - bS \\ \frac{dC(t)}{d(t)} &= -eC + fSC + dC \end{cases}$$

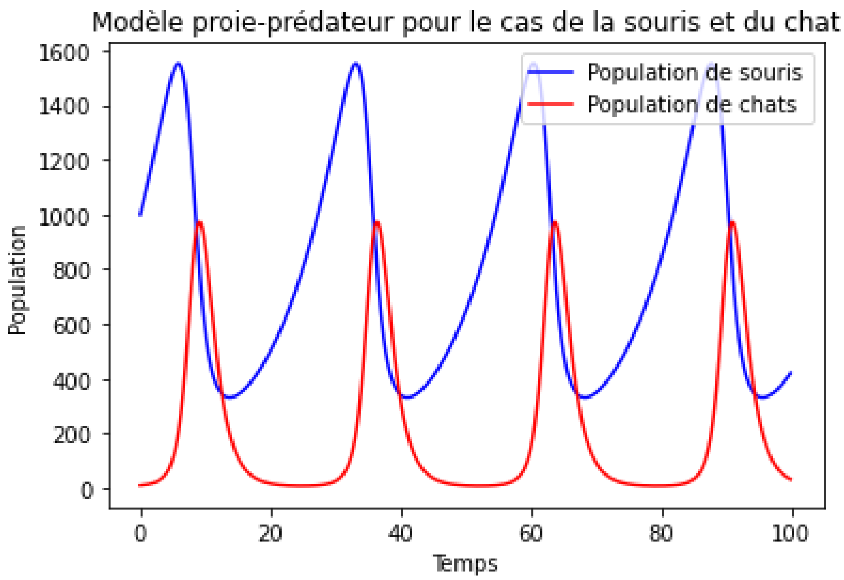
Six termes (supposés positifs) apparaissent, dont l'interprétation est la suivante :
$\mapsto$ a : est le taux d'accroissement de la population, en l'absence de prédateur
$\mapsto$ c : est le taux de prélèvement des proies par les prédateurs :
SC représente le nombre de rencontres possibles entre proies et prédateurs ;
c mesure l'efficacité avec laquelle les prédateurs chassent les proies
$\mapsto$ b : taux de mortalité des souris dû à la prédation des chats
$\mapsto$ e : est le taux de diminution de la population des prédateurs quand aucune proie n'est disponible
$\mapsto$ d : est le taux d'accroissement des prédateurs, quand $S(t)$ proies sont disponibles :
SC est le nombre de rencontres ;
$\mapsto$ f : mesure l'efficacité avec laquelle la consommation de proie permet d'augmenter la population des prédateurs.
Avec : a, b, c, d, e et f des constantes

3.Simulation numérique sur Python ou Scilab

Dans cette partie, nous supposerons comme valeurs initiales 1000 souris et 10 chats.
Pour finalement décidé que :

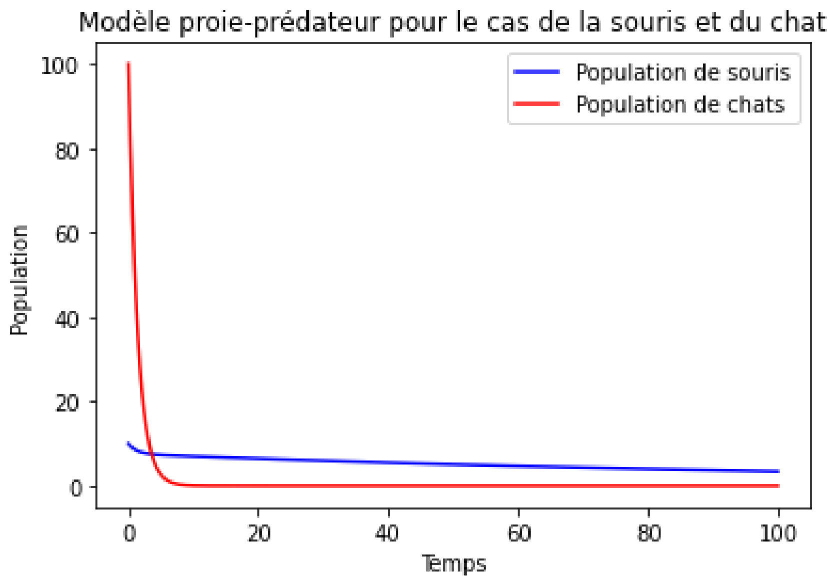
$\mapsto$ Le taux de reproduction des souris : $a = 0.012$
$\mapsto$ le taux de mortalité des souris : $b = 0.02$
$\mapsto$ le taux de mortalité des souris dû à la prédation des chats : $c = 0.0005$
$\mapsto$ le taux de diminution de la population des prédateurs quand aucune proie n'est disponible : $d = 0.01$
$\mapsto$ le taux d'accroissement des prédateurs, quand $S(t)$ proies sont disponibles : $e = 0.8$
$\mapsto$ l'efficacité avec laquelle la consommation de proie permet d'augmenter la population des prédateurs : $f = 0.001$
Ces différents paramétres on été choisis en considérant que le taux de natalité des souris est trés fort, q'une rencontre chats/souris est systématiquement fatal, le taux de natalité des chats est plutot faible et en fin, le taux de mortalité des chats est trés faible.

Résultats obtenus de la simulation :



Faisons varier les populations initiales de la proie et du prédateur pour faire apparaître les scénarios suivants
pour cela, on suppose comme valeurs initiales 100 souris et 10 chats
$\mapsto$ i. Extinction de la proie,

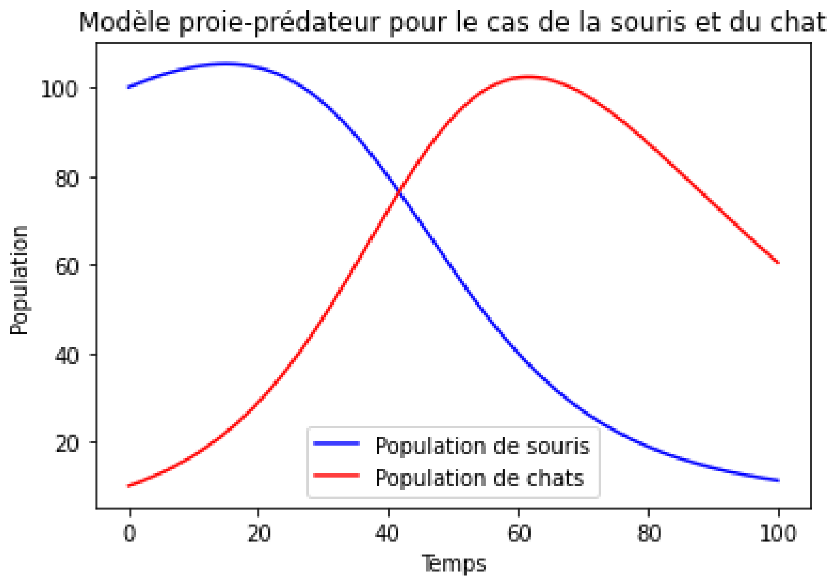
On a les paramétres suivants :
$\mapsto$ Le taux de reproduction des souris : $a = 0.012$
$\mapsto$ le taux de mortalité des souris : $b = 0.001$
$\mapsto$ le taux de mortalité des souris dû à la prédation des chats : $c = 0.0005$
$\mapsto$ le taux de diminution de la population des prédateurs quand aucune proie n'est disponible : $d = 0.05$
$\mapsto$ le taux d'accroissement des prédateurs, quand $S(t)$ proies sont disponibles : $e = 0.8$
$\mapsto$l'efficacité avec laquelle la consommation de proie permet d'augmenter la population des prédateurs : $f = 0.008$
Résultats obtenus de la simulation :



↦ ii. Coexistence proie-prédateur

On a les paramétres suivants :
↦ Le taux de reproduction des souris : $a = 0.012$
↦ le taux de mortalité des souris : $b = 0.001$
↦ le taux de mortalité des souris dû à la prédation des chats : $c = 0.0005$
↦ le taux de diminution de la population des prédateurs quand aucune proie n'est disponible : $d = 0.05$
↦ le taux d'accroissement des prédateurs, quand $S(t)$ proies sont disponibles : $e = 0.08$
↦l'efficacité avec laquelle la consommation de proie permet d'augmenter la population des prédateurs : $f = 0.0008$

Résultats obtenus de la simulation :



↦ iii. Commentons les résultats obtenus

une extinction primare conduit souvent à la disparition d'espéces secondaires, mes de façon assez inattendu.

la relation proie-prédateur est complexe. S'il n'y a plus de proie, le prédateur disparaît .
Tant disque pour la Coexistence proie-prédateur, la population des souris va baisser et la population des chats va augmenter Cette tendance ne peut pas être valable à longue terme : si la population des chats ne cesse d'augmenter et celle des souris à diminuer, le moment arrivera où les prédateurs ne trouvent plus suffisamment de nourriture. Par conséquent leur croissance sera arrêtée et inversée.

4.Chaîne alimentaire de trois espèces

a.Ajoutons une troisième espèce appelée super-prédateur.

$\mapsto$ faisons une recherche sur l'internet pour trouver une espèce prédatrice des deux initialement choisies.

Le coyote : Les coyotes sont des prédateurs opportunistes qui chassent une grande variété de proies, y compris les souris, les lapins, les oiseaux et les petits mammifères. Bien qu'ils ne chassent pas régulièrement les chats, les coyotes peuvent s'attaquer aux chats domestiques ou sauvages s'ils ont faim ou s'ils se sentent menacés. Les coyotes sont des chasseurs agiles et rapides, capables de courir à des vitesses allant jusqu'à $65km/h$ pour attraper leurs proies.

b.Reprennons les questions de la section précédente pour les trois espèces.

Dans le modèle proie-prédateur à trois espèces impliquant la souris, le chat et le coyote,les variables et les paramètres sont les suivants :
Les Variables sont :
S = la population de la souris
C = la population du chat
B = la population du coyote
Les paramétrés sont :
a = le taux de croissance de la population de souris à l' absence de prédateurs
b =le taux de rencontre entre les souris et les chats (proie-prédateur)
c = le taux de conversion des chats de la nourriture en énergie pour la croissance et la reproduction ou représente la croissance de la population de chat en fonction du nombre de proie disponible (souris)
d = le taux de mortalité des chats à l'absence de nourriture
e = le taux de rencontre entre les chats et les coyotes (proie-prédateur)
f =le taux de conversion des coyotes de la nourriture en énergie pour la croissance et la reproduction ou représente la croissance de la population de coyote en fonction du nombre de proie disponible (souris et chat)
h =le taux de mortalité des coyotes à l'absence de nourriture
Dans une chaîne alimentaire de trois espèces impliquant la souris, le chat et le coyote, la souris est la proie du chat, qui est à son tour la proie du coyote. Ainsi, le modèle proie-prédateur à trois espèces pour le cas de la souris, du chat et du coyote peut être décrit par les équations suivantes :

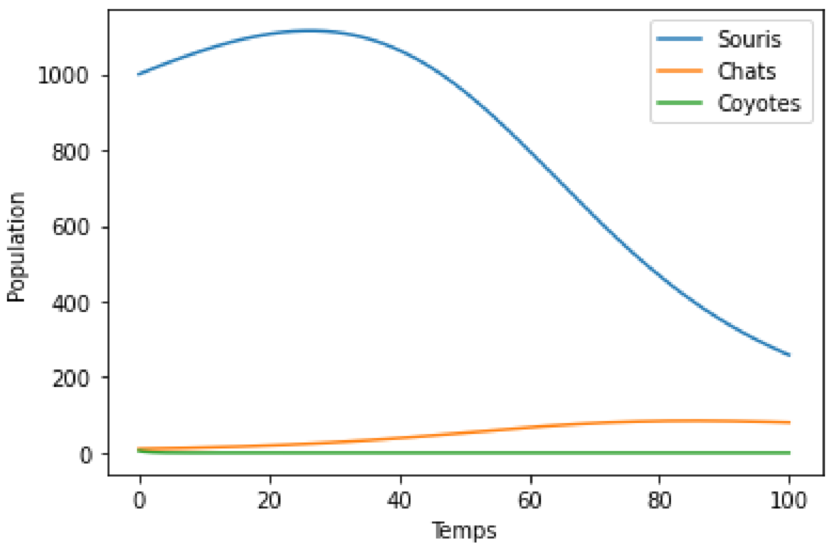
$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{dS(t)}{dt} & = & aS - bSC \\ \frac{dC(t)}{d(t)} & = & cSC - dC - eBC \\ \frac{dB(t)}{d(t)} & = & feCB - hB \end{array}\right.$$

Avev :
$\mapsto$ S : représente la population de souris,
$\mapsto$ C : représente la population de chats,

↦ B : représente la population de coyotes,
et les paramètres a, b, c, d, e, f et h sont des constantes positives qui déterminent le taux de croissance des populations et le taux de mortalité dû à la prédation.
• aS : représente la croissance de la population de souris en l'absence de prédateurs.
• bSC : représente la mortalité des souris due à la prédation des chats, ou b est le taux de rencontre entre les souris et les chats.
• cSC : représente la croissance de la population de chats en fonction du nombre de proies disponibles, ou c est le taux de conversion des chats de la nourriture en énergie pour la croissance et la reproduction.
• dC : représente le taux de mortalité des chats en l'absence de nourriture.
• eBC : représente la mortalité des chats due à la prédation des coyotes, ou e est le taux de rencontre entre les chats et les coyotes.
• fCeB : représente la croissance de la population de coyotes en fonction du nombre de proies disponibles, ou f représente la croissance de la population des coyotes en fonction du nombre de proies disponibles.
• hB : taux de mortalité des coyotes en l'absence de nouritur.

Simulation :
Dans cette partie, nous supposerons comme valeurs initiales 1000 souris, 10 chats et 05 coyotes.
Définition des paramètres
a = 0.012 :le taux de croissance de la population de souris en l'absence de prédateurs
b = 0.0005 :le taux de rencontre entre les souris et les chats (proies-prédateurs)
c = 0.1 :représente la croissance de la population de chats en fonction du nombre de proies disponibles (souris)
d = 0.02 :le taux de mortalité des chats en l'absence de nourriture
e = 0.001 :le taux de rencontre entre les chats et les coyotes (proies-prédateurs)
f = 0.5 :représente la croissance de la population de coyote en fonction du nombre de proies disponibles (souris et chats)
h = 0.62 :le taux de mortalité des coyotes en l'absence de nourriture

Résultats obtenus de la simulation :

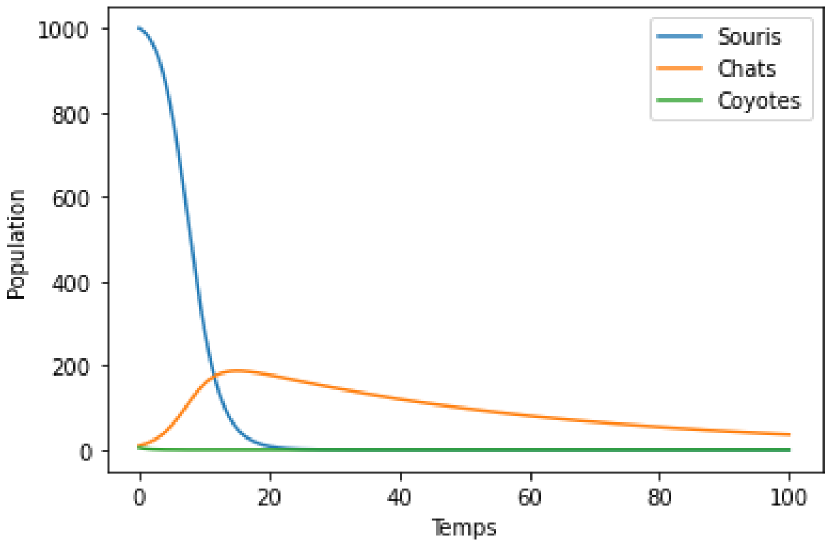


↦ i. Extinction de la proie

a = 0.012 :le taux de croissance de la population de souris en l'absence de prédateurs

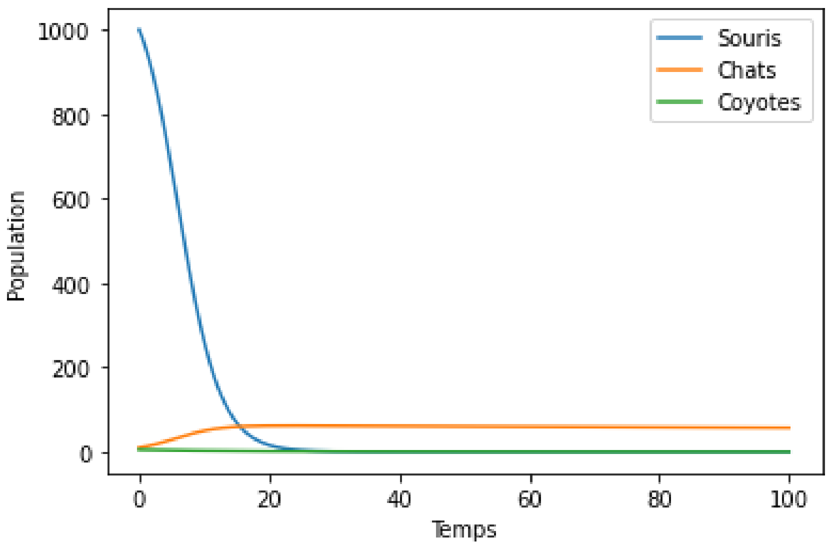
b = 0.002 :le taux de rencontre entre les souris et les chats (proies-prédateurs)
c = 0.2 :représente la croissance de la population de chats en fonction du nombre de proies disponibles (souris)
d = 0.02 :le taux de mortalité des chats en l'absence de nourriture
e = 0.001 :le taux de rencontre entre les chats et les coyotes (proies-prédateurs)
f = 0.2 :représente la croissance de la population de coyote en fonction du nombre de proies disponibles (souris et chats)
h = 0.6 :le taux de mortalité des coyotes en l'absence de nourriture

Résultats obtenus de la simulation :



↦ ii. Coexistence proie-prédateur

a = 0.012 :le taux de croissance de la population de souris en l'absence de prédateurs
b = 0.005 :le taux de rencontre entre les souris et les chats (proies-prédateurs)
c = 0.05 :représente la croissance de la population de chats en fonction du nombre de proies disponibles (souris)
d = 0.001 :le taux de mortalité des chats en l'absence de nourriture
e = 0.0005 :le taux de rencontre entre les chats et les coyotes (proies-prédateurs)
f = 0.05 :représente la croissance de la population de coyote en fonction du nombre de proies disponibles (souris et chats)
h = 0.06 :le taux de mortalité des coyotes en l'absence de nourriture
Résultats obtenus de la simulation :



c.Commentons les résultats obtenus

Ce modèle permet de prédire l'évolution des populations de souris, de chats et de coyotes en fonction de leur interaction mutuelle. Il permet également d'explorer les effets de différents paramètres, tels que les taux de croissance et de mortalité, sur les populations de proies et de prédateurs dans une chaîne alimentaire à trois niveaux trophiques.

5.Conclusion

L'un des plus célèbres modèles de l'écologie mathématique, celui de Volterra et Lotka, met en présence une population de proies et une autre de prédateurs qui les mangent. L'évolution des deux populations est bien décrite par un système d'équations différentielles qui aboutit à une fluctuation régulière et constante de chacune des deux. Lorsque les prédateurs sont peu nombreux, la population des proies s'accroît rapidement. Les prédateurs se développent à leur tour car leur subsistance est largement assurée, mais ils finissent par être si nombreux que la population des proies décline, décimée. Manquant de nourriture, les prédateurs se mettent à diminuer à leur tour jusqu'à ce que leur faible nombre permette le redémarrage de la population des proies et de l'ensemble du cycle.

La population des proies passe donc par un maximum avant celle des prédateurs.

Cependant bien qu'exploitable pour les systémes trés simplifié, ce modéle est trés incomplet. Beaucoup d'espéces interagissent, le modéle ne tient pas compte non plus de la notion de compétition entre les membres d'une *même* espéce , les facteurs extérieurs ponctuels ne sont pas pris en compte.

NB : Les paramétres ci-dessus ont été obtenu en se référant au lien suivant :

↦ https ://eliteextermination.com/nouvelles/vitesse-reproduction-souris-gare-infestation/

↦ https ://www.letemps.ch/sport/anabolisants-raccourcissent-vie-souris-probablement-sportifs

↦ https ://www.everland-petfood.com/conseils/reproduction-du-chat-tout-savoir-avant-de-se-lancer

↦ https ://www.ceaeq.gouv.qc.ca/ecotoxicologie/mammifere/Coyote.pdf