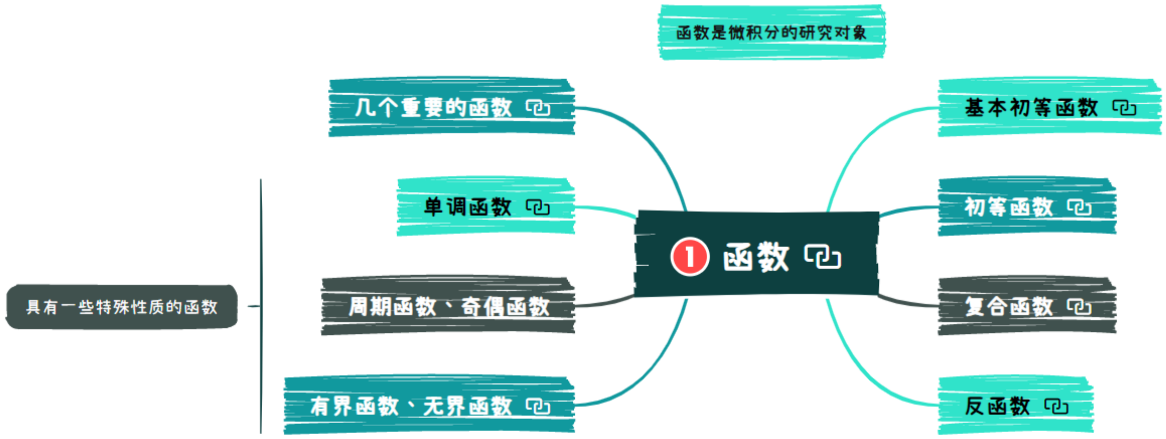
第一章 函数、极限、连续

微积分的研究对象是函数，核心和基础是极限。所以在第一章先介绍一些函数的基本概念，之后再是数列极限和函数极限

1.函数



首先介绍了六类基本初等函数（**要求掌握定义域、值域、图像、递增区间、递减区间**），基本初等函数经过有限次的四则运算得到简单函数，基本初等函数经过有限次四则运算和复合得到初等函数（**初等函数、复合函数的定义**），如果一个函数满足一一映射，可以对它取反得到它的反函数（**反函数的定义**）；除了初等函数和反函数外，还有一些特殊的函数——符号函数、取整函数、迪利克雷函数、幂指函数（**要求掌握表达式及其性质**），幂指函数可以经过由基本初等函数经过有限次的四则或复合运算得到，所以为初等函数，另外三种函数都不能算作初等函数；一些函数还有一些特殊的性质，总结出来便得到了奇偶函数、周期函数、单调函数和有界、无界函数的概念（**定义、性质、证明**）

2.数列极限

数列极限是整个微积分的核心，后面的很多内容都可以看作是数列极限的推广

数列极限的定义："数列极限"，从名字出发，首先"什么是数列？"，"什么是极限"（？？？），由此便可得到数列极限的定义的定性描述（？？？），定性描述没有办法进行推理，所以我们需要使用数学语言对定性描述的定义进一步的进行表述（？？？），由此得到数列极限的一般定义（？？？），数列极限的定义是前人经过漫长的思索才得到的，第一次不理解很正常，多看几遍就好了

对数列极限定义的进一步理解：

- 强调都有：？？？
- ε的任意性：？？？
- N的相应性：？？？
- 数列极限的几何意义：？？？
  - 由数列极限的几何意义可以得到：？？？（定理1.1）
  - 定理1.1证明**?**

了解了数列极限的定义之后，就是掌握数列极限的用法，用数列极限的定义来证明一些常用的重要极限，**证明数列的极限**一般有下面几种方法

- 直接法：？？？（分析法？？？）
- 适当放大法：？？？

证明一些常用的极限

$$
\begin{aligned}
&1.\lim_{n\to\infty} C = C(C\text{为常数}) && 4.\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1(a>0\text{为常数}) \\
&2.\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0(k>0\text{常}) && 5.\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0(a\text{常）}) \\
&3.\lim_{n\to\infty} q^n = 0(q\text{常}|，|q|<1) && 6.\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1
\end{aligned}
$$

使用定义证明数列极限比较复杂，为此前人总结了一些**性质**，让我们能够更方便的求解数列极限

- 性质一（唯一性）
  - 唯一性：？？？
  - 证明唯一性常用的两种方法：？？？
  - 证明过程：？？？
- 性质二（有界性）
  - 有界性：？？？
  - 相关定义：
    - 数列收敛：？？？
    - 数列有界：？？？
  - 证明过程：？？？
  - 逆命题成立吗：？？？
- 性质三（不等式性质）
  - 不等式性质：？？？
  - 证明过程：？？？
  - 推论：？？？（下标可以不一致）
  - 推论（保号性）：？？？
    - 保号性：？？？
    - 证明过程：？？？
    - 为什么要加η：？？？
- 性质四（不等式性质）
  - 不等式性质：？？？
  - 证明过程：？？？
  - $\geq$是否可以改成>：？？？
- 性质五（数列极限的四则运算）
  - 数列极限的四则运算：？？？
  - 一般怎么使用：？？？
  - 数列极限的四则运算可以推广到有限项吗？
  - 数列极限的四则运算可以推广到无穷项吗？
  - 证明过程：？？？
- 多项式的数列极限：
  - 多项式的数列极限总结：？？？
  - 证明过程：？？？

虽然数列极限的性质提供了一些求极限的方法，但是对于一些极限问题还是无法求解，因此，引入了**数列极限的存在准则**

- 夹逼定理（定理1.2）
  - 夹逼定理：？？？
  - 证明过程：？？？
  - 什么时候使用夹逼定理：？？？

- 例题：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}\ \ (a\geq b\geq c，\text{常})\qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1*2}}{n^2+1}+\frac{\sqrt{2*3}}{n^2+2}+\ldots+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{n^2+n}\right)$$

- 数列收敛的充要条件（定理1.3）
  - 子数列的概念：？？？
  - 子数列的一个特殊性质及其证明：？？？
  - 定理1.3：？？？
  - 证明过程：？？？
  - 推论：？？？
  - 推论的证明过程：？？？
  - 定理1.3的逆否命题：？？？ （两个）
  - 由1.3的逆否命题可以得到定理1.4：？？？
  - 例题：

$$1.\text{证明}\left\{sin\frac{n\pi}{4}\right\}\text{发散}\qquad\qquad 2.\text{证明}\left\{(-1)^{n-1}\right\}\text{发散}$$

- 单调有界定理（定理1.5）
  - 单调有界定理：？？？
  - 证明过程：？？？ （不要求）
  - 注意：？？？
  - 什么时候使用单调有界定理：？？？
  - 例题：

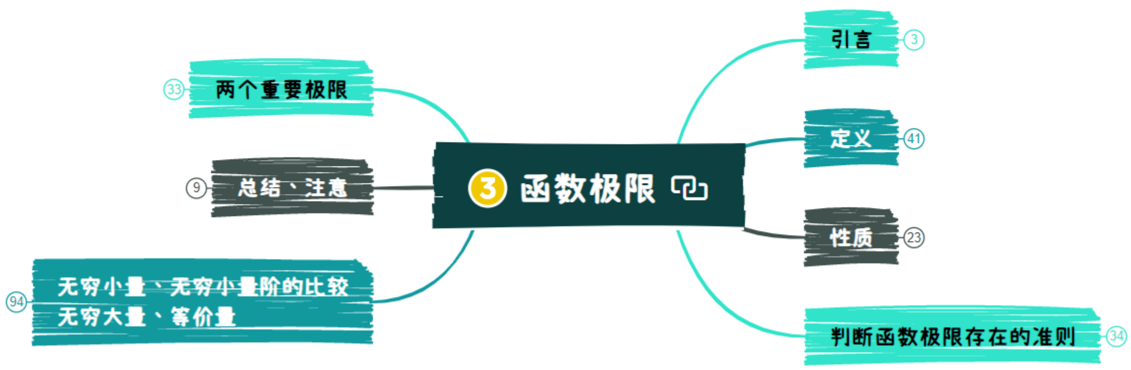
$$1.\text{研究}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\text{的收敛性}$$

$$2.\text{设}c>0,x_1=\sqrt{c},x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}},\ldots,x_n=\sqrt{c+\sqrt{c+\ldots\sqrt{c}}}$$
$$\text{证明}x_n\text{收敛，并求}\lim_{n\to\infty}x_n$$

$$3.x_0=2,\quad x_n=\frac{2x_{n-1}^3+1}{3x_{n-1}^2}(n=1,2,3,\ldots,n),\text{证明收敛并求极限}$$

$$4.\text{设}x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!},\text{证明}a_n\text{收敛}$$

3.函数极限

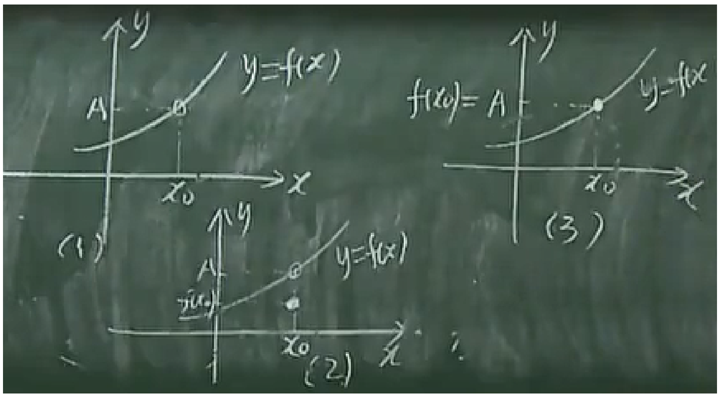


可以通过类比数列极限的定义来得到函数极限的定义（$x\to+\infty$时的极限定义），但需要注意，数列是平面上离散的点，n取的是自然数，而函数是平面上连续的点，x取的是实数。

- 极限趋向于∞的定义
    - $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$：？？？
        - 为什么$f(x)$要在$[a,+\infty)$上有定义？
    - $\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$：？？？
    - $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$：？？？
    - 定理1.9：？？？
    - 几何意义：？？？
    - 例题：

$$\text{证明} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^k}=0\ \ (k>0,\text{常})$$

- 极限趋向于x_0的定义：
    - 对极限趋向与x_0的分析



        - 在$x\to x_0$的过程中，图中的$f(x)$是否和某个常数无限接近？
        - 由图可以得到什么结论：？？？
    - $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$：？？？
        - 为什么$f(x)$要在$\bigcup^0(x_0,\delta_0)$中有定义？
    - $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$：？？？
    - $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$：？？？
    - 定理1.10：？？？
    - 几何意义：？？？
    - 例题：

$$\text{证明} \lim_{x\to1}(3x+2)=5$$

类似与数列极限，学习完定义之后就是学习**相关的性质**了

- 性质一（唯一性）
    - 唯一性：？？？
- 性质二（局部有界性）
    - 局部有界性：？？？
    - 为什么只能得到局部有界：？？？
    - 证明过程：？？？
- 性质三（不等式性质）
    - 不等式性质：？？？
    - 推论（局部保号性）：？？？
- 性质四（不等式性质）
    - 不等式性质：？？？
- 性质五（极限的四则运算）
    - 极限的四则运算：？？？
- 性质六（复合函数的极限）
    - 复合函数的极限：？？？
    - 证明过程：？？？

类似与数列极限，函数极限对于一些求极限的问题还是无法解决，因此引入了**函数极限的存在准则**

- 夹逼定理
  - 夹逼定理：？？？
  - 例题：

$$求\lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]$$

- 海涅定理（归结原理）
  - 归结原理的来由：？？？
  - 归结原理：？？？
  - 证明过程：？？？
  - 如何使用这个定理：？？？
  - 例题：

$$1.证明\lim_{x\to +\infty} sinx不存在 \qquad 2.证明\lim_{x\to 0^+} sin\frac{1}{x}不存在$$

与数列极限不同，一些特殊的极限值在函数极限中特别重要——极限值趋向于0和极限值趋向于∞，由此便得到了**无穷小量、无穷大量**的定义

- 无穷小量
  - 定义：？？？
  - 定理：？？？
    - 证明：？？？
  - 性质：？？？（三个性质及一个推论）
    - 有界量：？？？
    - 有界量的推论：？？？
- 无穷小量阶的比较
  - 高阶无穷小：？？？
    - 例题：

$$1.证明：o(x^2) - o(x^2) = o(x^2)\ \ (x\to 0)$$

$$2.证明：o(x^3) - o(x^4) + o(x^4) - 2*o(x^8) = o(x^3)\ \ (x\to 0)$$

$$3.证明：o(x^2)*o(x^3) = o(x^5)\ \ (x\to 0)$$

  - 同阶无穷小：？？？
  - 等价无穷小：？？？
  - k阶无穷小：？？？
- 无穷大量
  - 利用无穷小量对无穷大量进行定义：？？？
  - 使用数学语言对上述定义进行描述：？？？
  - $+\infty$的定义：？？？
  - $-\infty$的定义：？？？
  - 定理：？？？
  - 性质：？？？（三个性质，三个推论）
- 等价量
  - 定义：？？？
  - 等价无穷小量：？？？
  - 等价无穷大量：？？？
  - 一般等价量：？？？
  - 性质：？？？
  - 重要等价量：？？？

- 等价量替换定理：？？？
    - 证明：？？？
    - 使用注意：？？？

函数极限的总结

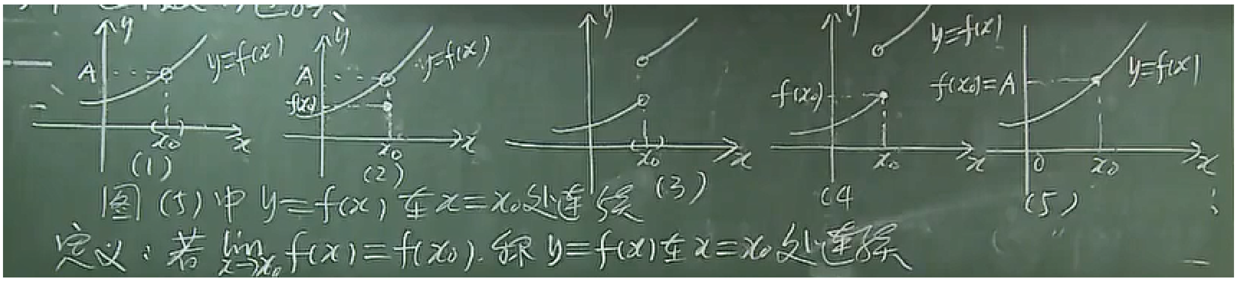
- 28种极限的定义：？？？
- 对极限存在和不存在的理解：？？？

两个重要极限：？？？

- 证明：？？？
- 一般形式：？？？
- 重要的不等式：？？？

4. 连续

接下来我们说函数极限的一种特殊情况——**函数连续**



由这个图可以发现函数连续需要满足什么条件：？？？

连续的定义

- 使用数学语言对发现进行描述：？？？（函数连续的定义）
    - 为什么函数极限的定义要求$0<|x-x_0|$：？？？
    - 函数连续的等价定义：？？？
- 使用变量代换，引入Δx、Δy得到函数连续的一个等价定义：？？？
    - 使用这个等价定义进行证明的好处：？？？
- 左连续、右连续的定义：？？？
    - 定理：？？？
- 间断点的定义：？？？
    - 分类：？？？
- 例题：

$$1.证明f(x)=sinx在R上连续$$

$$2.证明f(x)=cosx在R上连续$$

连续的性质

- 性质一（局部有界性）：？？？

- 性质二（不等式性质）：？？？
    - 推论（保号性）：？？？
- 性质三（连续的四则运算）：？？？

初等函数的连续性

- 引言：？？？
- 基本初等函数的连续性：？？？
- 复合函数的连续性：？？？
- 反函数的连续性：？？？
- 初等函数的连续性和基本初等函数的连续性有什么区别：？？？

区间连续

- 开区连续：？？
- 闭区连续：？？？
- 闭区间上连续函数的性质：？？？
    - 最大值最小值定理：？？？
        - 两个推论：？？？
    - 根的存在定理或零点定理：？？？
        - 使用介值定理证明根的存在定理：？？？
    - 介值定理：？？？
        - 使用根的存在定理证明介值定理：？？？
- 例题：

$$\text{证明：方程} x-\varepsilon sinx=1 \text{仅有一个实根}$$

总结：

- 十一个重要极限：？？？
- 十个重要极限的一般形式：？？？
- 九个重要的等价无穷小量：？？？

相关题型：

- 求极限：？？？
- 相关证明题：？？？
    - 例题：

$$1.\text{设} f(x) \text{在开区间} (a,b) \text{内连续} (a,b) \text{为常数，} \lim_{x\to a^+} f(x)=A>0(\text{常})\text{，} \lim_{x\to b^-} f(x)=B<0(\text{常})\text{，}$$
$$\text{证明存在} \xi\in(a,b)\text{，使} f(\xi)=0$$

$$2.\text{设} P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\text{，} a_0,a_1,\ldots,a_n \text{均为实常数，} a_0\neq 0$$
$$\text{证明当} n \text{为奇数时，} P_n(x)=0 \text{在} R \text{内至少有一个根}$$

- 确定函数的间断点及分类：？？？
    - 判断方法：？？？
    - 例题：

$$1.f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-2}\text{，} & x<1,\\ x^2, & x\geq 1,\end{cases}\text{，讨论} f(x) \text{的间断点，指出类型} \qquad 2.f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}\text{，} & x\leq 2,\\ x^2-3, & x>2,\end{cases}\text{，讨论} f(x) \text{的间断点，指出类型}$$

$$3.f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}\text{，讨论} f(x) \text{的间断点，指出类型} \qquad 4.f(x)=lnx\text{，讨论} f(x) \text{的间断点，指出类型}$$