第二章 导数与微分

1.导数

导数作为微积分中重要的概念，是从研究因变量相对于自变量的变化率的问题中抽象出来的数学概念。例如**切线的斜率问题**、**瞬时速度问题**等；由此可以得到**三种不同形式的导数的定义**以及**导数在一点处的各种不同的表现形式**，每一种不同形式的导数定义都有其**擅长处理的问题**；根据在**导数在一点处的几何意义**可以求得该点的**切线方程**和**法线方程**，注意，曲线在一点处存在切线，但在该点不一定可导，**为什么?**

因为自变量的变化率可正可负，所以要使 $f(x_0)$ 导数存在，则函数要在 x_0 的两侧有定义；类似于函数的左右极限，当我们想要研究在点 x_0 一侧有定义的函数在点 x_0 的可导性或分段函数在分界点 x_0 出是否可导时，就需要使用到**左右导数的定义**。

求曲线在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处切线的斜率时，$Q\to P_0$ 即 $\Delta x\to 0$ 时，有 $f(x_0+\Delta x)\to f(x_0)$，即 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，说明可导必连续，但是该命题反之不成立，例如 $|x|$，综上可以得到**导数和连续的关系**

求导数的方法叫做微分法，求导数的运算简称求导；利用导数的定义，可以推出导数的**基本初等函数的导数公式**、**导数的四则运算**、**反函数的求导法则**及**复合函数的求导法则**，有了以上的求导方法，就可以对几乎所有的初等函数进行求导了

$$1.y=e^{cos^2\frac{1}{x}}\quad 2.y=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x^2+x^3}}}\quad 3.y=\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x-1}}}+\sqrt{1+cos^2\frac{1}{x}+sin^2\frac{1}{x}}$$

$$4.y=\ln|x|\quad 5.y=\ln|3x+1|\quad 6.y=\ln x+\sqrt{x^2+a^2}\ \ (a>0)$$

$$7.y=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\ \ (a>0)\ \ 8.y=x^{sinx}$$

$$9.y=e^{|x^3|}\qquad\qquad 10.f(x)\begin{cases}\frac{sinx}{x},x\neq 0\\ 1,\quad\ x=0.\end{cases}$$

对于函数 $y=f(x)$，可以化成方程 $y-f(x)=0$，但是对于一个方程 $F(x,y)=0$，如果 $F(x,y)=0$ 可以化成显式的 $y=f(x)$ 的形式，我们称 $y=f(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 确定的**显函数**，如果 $F(x,y)=0$ 可以确定函数 $y=f(x)$，但是无法显示的表示出来，我们称 $y=f(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 确定的**隐函数**，对于显函数的求导我们可以用已有的求导方法进行解决，对于隐函数的求导，我们引入了**隐函数的求导法则**；结合对数函数可以将乘除转换为加减、幂指转换为乘法的性质和隐函数的求导法则，我们可以得到**对数函数的求导法则**（注意使用条件）

$$1.y=f(x+y)\text{，二阶可导，求}y\text{的二阶导}\quad 2.y=x^{sinx}\quad 3.y=\frac{(lnx)^x}{x^{lnx}}$$

$$4.y=\frac{\sqrt[3]{3x+1}\,x^2}{\sqrt{2x+1}\sqrt[3]{1-5x}}\quad 5.y=\left(\frac{b}{a}\right)^x\left(\frac{x}{b}\right)^a\left(\frac{a}{x}\right)^b\quad 6.a^2x^2+b^2y^2=1(a>0,b>0\text{常})$$

由于我们在后面的泰勒公式、级数等问题中会使用到高阶导数，所以此处介绍了高阶导数的求导方法，并不是所有的函数的高阶导数都能够求出来的，所以只给出了**某些基本初等函数的n阶导数公式**和**高阶导数的四则运算**（注意高阶导没有除法公式，**乘积的n阶导有一些使用的注意事项**）

$$1.y=x^2e^x\text{，求}y^{(n)}\quad 2.y=cos^2x\text{，求}y^{(n)}$$

$$3.y=\frac{1}{x^2+3x+2}\text{，求}y^{(n)}\quad 4.y=e^xcosx\text{，求}y^{(n)}$$

2.微分

在实际测量中，往往会产生误差，例如，x_0为精确值，实际测量值 $x^*=x_0+\Delta x$，由此会产生误差 Δx，相应的函数值的误差为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；当 $f(x^*)$ 和 $f(x_0)$ 的计算比较复杂时，Δy 的计算也很麻烦，**微分的概念**就是从解决 Δy 的计算中得到的

微分的概念是通过导数的定义得到的，所以可导必可微；同样由可微的定义也可以得到可导的定义，所以可微必可导（**可微可导的关系**）

对 x 进行微分可得 $dx=\Delta x$，又因为 $dy=f^{'}(x)\Delta x$，所以可以得到 $\frac{dy}{dx}=f^{'}(x)$，我们将其称作**微商**，此时的 $\frac{dy}{dx}$不仅可以看作一个记号，也可看作 dy 与 dx 的商；当 Δx 足够小时，$\Delta y\approx dy$，由此可以得到 **Δy 和 $f(x_0+\Delta x)$ 的近似计算公式**

可微和可导本质上是一样的，可导中有基本初等函数的导数、导数的四则运算、复合函数的求导法则、反函数的求导法则，对应着微分中也有**基本初等函数的微分公式**、**微分的四则运算**，复合函数的求导法则对应着**一阶微分形式的不变性**

$$1.y=e^{\sqrt{1+x^2}}\text{，求}dy\quad 2.\text{已知}dy=e^{\sqrt{1+x^2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx\text{，求原函数}$$

$$2.y^{'}=\frac{lnx}{x}\text{，求原函数}$$

没有学微分之前，我们可以通过将参数方程化成一般方程进行求导；学了微分之后，y 对 x 的导就是 dy/dx，而参数方程中 x，y 都是 t 的函数可以转换成 y 对 t 的导数和 x 对 t 的导数的关系，由此可以得到**参数方程确定的导数的求导公式**