Analysis 1

1. April 2018

Informationen zu den Klausuraufgaben: Die Aufgaben werden sich auf eine Teilmenge der in der Vorlesung behandelten Themen beziehen. Über den folgenden Link gelangen Sie zu einer Seite mit einer Themenübersicht der bisherigen Vorlesungen. Zur Bearbeitung der Aufgaben wird es dabei notwendig sein, in der Vorlesung erworbenes Verständnis zu demonstrieren sowie in der Vorlesung und in den zugehörigen Übungen erlernte Methoden anzuwenden. Es kann also Aufgaben geben, in denen Sie zeigen sollen, dass Sie den Inhalt wichtiger Definitionen und Sätze aus der Vorlesung verstanden haben. Auch kann es kann Aufgaben geben, bei denen mit den erlernten Methoden etwas zu berechnen oder zu beweisen ist. Die Definitionen und Sätze (ohne Beweise und natürlich ohne Nummern aus dem Skript) der folgenden Liste sollten Sie auswendig wissen und anwenden können (zu den Definitionen sollten Sie Beispiele und Gegenbeispiele angeben können und entscheiden können, ob gegebene Objekte die Definition erfüllen oder nicht).

Inhaltsverzeichnis

1 Logik und Mengenlehre (4-21)

Definition von logischer Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz. Bestimmung von Wahrheitswerten von Aussageformen. Definition von Gleichheit von Mengen, Teilmenge (Inklusion), Obermenge, Durchschnitt, Vereinigung, Differenz von Mengen, Komplement, Disjunktheit und disjunkte Vereinigung, Potenzmenge.

1.1 Definition von logischer Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz. (5f)

$$\begin{aligned} \text{Negation} \quad & \neg A \\ \text{Konjunktion (and)} \quad & A \wedge B \\ \text{Disjunktion (or)} \quad & A \vee B \\ \text{Implikation} \quad & (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \\ \text{Äquivalenz} \quad & (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \end{aligned} \tag{1}$$

1.2 Bestimmung von Wahrheitswerten von Aussageformen.

1.3 Definition von Gleichheit von Mengen, Teilmenge (Inklusion), Obermenge, Durchschnitt, Vereinigung, Differenz von Mengen, Komplement, Disjunktheit und disjunkte Vereinigung, Potenzmenge. (12ff)

1.3.1 Gleichheit von Mengen

$M = N$ wenn alle Elemente von N in M vorkommen. $\Rightarrow$ Wir können nur Aussagen über Mengen treffen wenn wir alle ihre Elemente kennen. $\forall x \in M : x \in N \wedge \forall y \in N : y \in M$

1.3.2 Teilmenge (Inklusion)

$M \subseteq N$, wenn alle Elemente aus M in N vorkommen. $\forall x \in M : x \in N$
$M \subset N$, wenn Elemente in N vorhanden sind, die in M nicht vorkommen spricht man von einer echten Teilmenge. $\exists x \in N : x \notin M$

1.3.3 Obermenge

Ist $M \subseteq N$, dann ist N die Obermenge von M.

Ist M Obermenge von N und umgekehrt, so sind die Mengen äquivalent, $M = N$

1.3.4 Durschnitt

$M, N : x \in M \wedge x \in N$ Der Durchschnitt zweier Mengen $M \cap N$ ist die Menge an Elementen, die in beiden Mengen M, N vorkommen.

1.3.5 Vereinigung

$M, N : x \in M \vee x \in N$ Die Vereinigung zweier Mengen $M \cup N$ ist die Menge an Elementen, die in entweder M oder N vorkommen.

1.3.6 Differenz von Mengen

Die Differenz zweier Mengen $M \setminus N$ ist die Menge an Elementen, die in M vorkommen, aber nicht in N. $M, N : x \in M \wedge x \notin N$

1.3.7 Komplement

Ist Menge N eine Teilmenge der Menge M ($M \subseteq N$, M ist Universum von N), dann wird $M \setminus N$ auch das Komplement N zu M genannt. $N^c := M \setminus N$

1.3.8 Disjunktheit und disjunkte Vereinigung

Ist der Durchschnitt zweier Mengen $M \cap N$ die leere Menge, so sind diese Mengen disjunkt. Die Vereinigung zweier disjunkter Mengen lautet dann eine disjunkte Vereinigung und wird $M \dot{\cup} N$ geschrieben.

1.3.9 Potenzmenge

Die Potenzmenge einer Menge ist die Menge aller Teilmengen:
$M = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

2 Funktionen und Relationen (21-33)

Definition der Funktion (insbesondere: Definitionsbereich, Wertebereich, Zuordnungsvorschrift, Graph). Definition von Bild und Urbild einer Menge zu einer gegebenen Funktion. Definition von Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Monotonie (wachsend, streng wachsend, fallend, streng fallend). Definition der Komposition von Abbildungen. Definition der Invertierbarkeit und der inversen Abbildung. Satz: Funktion ist invertierbar genau dann, wenn sie bijektiv ist. Satz: Strenge Monotonie impliziert Injektivität. Definition von oberer Schranke, unterer Schranke, Supremum, Infimum, Beschränktheit von Mengen. Definition der Familie. Definition der Folge.

2.1 Definition der Funktion (insbesondere: Definitionsbereich, Wertebereich, Zuordnungsvorschrift, Graph).

Eine Funktion oder Abbildung f ist eine Beziehung zwischen zweier Mengen A, B, welche jedes Element $x \in A$ einem Element $y \in B$ zuordnet. In diesem Fall schreibt man auch $f(x)$ für das Element y. Die Menge A wird das der Definitionsbereich von f gennant, auch geschrieben $\mathcal{D}(f)$, und die Menge B der Wertebereich, geschrieben $\mathcal{R}(f)$.

Eine Funktion wird in folgender Weise notiert: $f : A \longrightarrow B$, $x \mapsto f(x)$ wobei $x \mapsto f(x)$ die Zuordnungsvorschrift genannt wird.

Die Menge der geordneten Paare $\{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$ wird der Graph von f, graph(f) genannt.

2.2 Definition von Bild und Urbild einer Menge zu einer gegebenen Funktion.

Seien A, B Mengen und $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion.

- Ist T eine Teilmenge von A, dann ist $f(T) := \{f(x) \in B : x \in T\}$ das Bild von T unter f.
- Ist U eine Teilmenge von B, dann ist $f^{-1}(U) := \{x \in A : f(x) \in U\}$ das Urbild von U unter f.

2.3 Definition von Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Monotonie (wachsend, streng wachsend, fallend, streng fallend).

2.3.1 Injektivität

Eine Funktion f ist injektiv, wenn jedes $y \in B$ (maximal) genau ein Urbild besitzt, also wenn das Urbild von $\{y\}$ höchstens ein Element besitzt: (eine Definiton reicht)

$$f \quad \text{injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{y \in B}(f^{-1}\{y\} = \emptyset \vee \exists! f(x) = y)$$

$$f \quad \text{injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{x_1, x_2 \in A}(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

2.3.2 Surjektivität

Eine Funktion f ist surjektiv, wenn jedes Element des Wertebereichs (mindestens) ein Urbild besitzt: (eine Definiton reicht)

$$f \quad \text{surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{y \in B} \exists_{x \in A} \quad y = f(x)$$

$$f \quad \text{surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{y \in B} f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$$

2.3.3 Bijektivität

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

2.3.4 Monotonie (wachsend, streng wachsend, fallend, streng fallend)

Sind A, B nichtleere Mengen mit einer Partialordnung, hier beide als $\leq$ bezeichnet (auch wenn sie unterschiedlich sein können). Eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ ist

- (strikt) isoton (steigend), wenn

$$\forall_{x,y \in A} \quad (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (bzw. f(x) < f(y)))$$

- (strikt) antiton (fallend), wenn

$$\forall_{x,y \in A} \quad (x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (bzw. f(x) > f(y)))$$

Ist eine Funktion (strikt) isoton oder (strikt) antiton, dann ist sie (streng) monoton.

2.4 Definition der Komposition von Abbildungen.

Eine Komposition oder eine Verknüpfung zweier Funktionen f, g, wobei $f : A \longrightarrow B, g : C \longrightarrow D$ und $f(A) \subseteq C$ ist definiert als die Funktion

$$g \circ f : A \longrightarrow D, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

und wird “g verknüpft mit f”, “g komponiert mit f” oder “g nach f” gelesen. Verknüpfungen sind nicht kommutativ.

2.5 Definition der Invertierbarkeit und der inversen Abbildung.

Gegeben eine nichtleere Menge A ist die Funktion $\mathrm{Id}_A : A \longrightarrow A$, wobei $\mathrm{Id}_A(x) := x$, die identische Abbildung, oder die Identität. Eine Funktion $g : B \longrightarrow A$ wird das rechts-inverse (bzw. links-inverse) einer Funktion $f : A \longrightarrow B$ genannt, wenn $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ (bzw. $g \circ f = \mathrm{Id}_A$). Ist g ein Inverses von f, so schreibt man auch f^{-1}. Eine Funktion f wird (rechts- bzw. links) invertierbar gennant, wenn ein solches (rechts- bzw. links) Inverses existiert.

2.6 Satz: Funktion ist invertierbar genau dann, wenn sie bijektiv ist.

Sind A, B nichtleere Mengen, dann ist die Funktion

- $f : A \longrightarrow B$ rechts-invertierbar, wenn die Funktion injektiv ist.
- $f : A \longrightarrow B$ links-invertierbar, wenn die Funktion surjektiv ist.
- $f : A \longrightarrow B$ invertierbar, wenn die Funktion bijektiv ist.

2.7 Satz: Strenge Monotonie impliziert Injektivität.

Seien A,B nichtleere Mengen mit Partialordnungen, hier beide $\leq$, und ist die Ordnung auf A eine Totalordnung, so gilt: Ist die Funktion $f : A \longrightarrow B$ strikt isoton oder strikt antiton, so ist f injektiv.

2.8 Definition von oberer Schranke, unterer Schranke, Supremum, Infimum, Beschränktheit von Mengen.

Sei $\leq$ eine Partialordnung auf $A \neq \emptyset, \emptyset \neq B \subseteq A$.

2.8.1 obere (untere) Schranke

$x \in A$ lautet untere (bzw. obere) Schranke von B, wenn für alle $b \in B : x \leq b \quad$ (bzw. $b \leq x$). B lautet nach unten (bzw. nach oben) beschränkt, wenn eine untere (bzw. obere) Schranke existiert.

Es sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$, $A \subseteq M, a \in M, B \subseteq \mathbb{R}$

- f hat ein globales Maximum in a genau dann wenn gilt $\forall_{x \in M} f(x) \leq f(a)$
- f hat ein streng globales Maximum in a genau dann wenn gilt $\forall_{x \in M} f(x) < f(a)$

$y \in B$ lautet das Minimum (bzw. das Maximum) von B, wenn y eine untere bzw. eine obere Schranke von B ist.

2.8.2 Supremum

Das Supremum der Menge B ist das Minimum der Menge an oberer Schranken zur Menge B, geschrieben $\sup B$.

2.8.3 Infimum

Das Infimum der Menge B ist das Maximum der Menge an unterer Schranken zur Menge B, geschrieben $\inf B$.

2.8.4 Beschränktheit von Mengen

Eine Menge ist *beschränkt*, wenn sie sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt ist.

2.9 Definition der Familie.

Gegeben einer Indexmenge I und einer Menge A, wird eine Funktion $f : I \longrightarrow A$ eine Familie und wird als $(a_i)_{i \in I}$, wobei $a_i := f(i)$, notiert.

2.10 Definition der Folge.

Eine Folge in Menge A ist eine Familie an Elementen aus A, bei der die Indexmenge die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist. Notiert wird diese in der Form $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, ...)$. Eine Familie wird auch eine Folge genannt, wenn eine bijektive Funktion zwischen der Indexmenge I und einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ existiert.

3 Induktion, Rekursion, Kardinalität (33ff)

Beweisprinzip der vollständigen Induktion. Rekursive Definition. Summationssymbol. Produktsymbol. Formel für (endliche) geometrische Summen. Definition von endlich, unendlich, abzählbar.

3.1 Beweisprinzip der vollständigen Induktion (34)

Induktionsverankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ ergibt sich die Aussage **TBD** welche wahr ist. Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$. Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung **TBD (1)**, erhält man **TBD** was zeigt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt und somit den Induktionsbeweis abschließt.

- **IA** $n = 1$
- **IV**
- **IS** $n \to n + 1$

3.2 Rekursive Definition (36)

z.B. Fibonacci-Folge

$$\begin{aligned} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

3.3 Summationssymbol (38)

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{1} a_i &:= a_i \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i &:= a_i + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \text{ für } n \geq 1 \end{aligned} \tag{3}$$

3.4 Produktsymbol (39)

$$\begin{aligned} \textstyle\prod_{i=1}^{1} a_i &:= a_i \\ \textstyle\prod_{i=1}^{n+1} a_i &:= a_i * \textstyle\prod_{i=1}^{n} \text{ für } n \geq 1 \end{aligned} \tag{4}$$

3.5 Formel für (endliche) geometrische Summen (40)

Given $a \in \mathbb{R}$ and $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be the geometric sequence as defined in (3.16a). We will prove by induction that

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad x_n = a\,q^{n-1}, \tag{3.22a}$$

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad S_n := \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (a\,q^{i-1}) = a \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \begin{cases} n\,a & \text{for } q = 1, \\ \frac{a\,(1-q^n)}{1-q} & \text{for } q \neq 1, \end{cases} \tag{3.22b}$$

where the S_n are called *geometric sums*.

Abbildung 3.1: 40 example 3.11b

3.6 Definition von endlich, unendlich, abzählbar (40f)

Die Menge A lautet

- endlich $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $\#A = n$ ($\#A :=$ Kardinalität, Anzahl Elemente in A)
- unendlich $\Leftrightarrow A$ ist nicht endlich. ($\#A = \infty$)
- abzählbar $\Leftrightarrow A$ ist endlich oder $\#A = \#\mathbb{N}$

4 Reelle (47ff) und komplexe Zahlen (53ff)

Es wird erwartet, dass Sie die schon aus der Schule bekannten in den natürlichen, rationalen und reellen Zahlen gütigen Rechengesetze beherrschen: Dazu gehören die in Theorem 4.6 und Theorem 4.7 im Skript aufgelisteten Gesetze, insbesondere die Bruchrechnung, sowie die binomischen Formeln und die Potenzgesetze. Definition von Intervallen (alle Typen aus (4.11) sollten Sie kennen). Definition der komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen, Definition der komplexen Addition und Multiplikation. Definition von Realteil und Imaginärteil komplexer Zahlen. Definition von und Rechenregeln für komplexe/r Konjugation. Definition der Betragsfunktion reeller und komplexer Zahlen. Rechenregeln der Betragsfunktion, speziell Dreiecksungleichung und umgekehrte Dreiecksungleichung. Veranschaulichung der komplexen Zahlen und ihrer Arithmetik (speziell von Konjugation, Addition, Multiplikation und Betrag) in der komplexen Ebene. Regeln für endliche Summen und Produkte.

Theorem 4.6. *The following statements and rules are valid in the set of real numbers $\mathbb{R}$ (and, more generally, in every field):*

(a) *Inverse elements are unique. For each $x \in \mathbb{R}$, the unique inverse with respect to addition is denoted by $-x$. Also define $y - x := y + (-x)$. For each $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, the unique inverse with respect to multiplication is denoted by x^{-1}. For $x \neq 0$, define the* fractions $\frac{y}{x} := y/x := yx^{-1}$ *with* numerator y *and* denominator x.

(b) $-(-x) = x$ *and* $(x^{-1})^{-1} = x$ *for* $x \neq 0$.

(c) $(-x) + (-y) = -(x + y)$ *and* $x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1}$ *for* $x, y \neq 0$.

(d) $x + a = y + a \;\Rightarrow\; x = y$ *and, for* $a \neq 0$, $xa = ya \;\Rightarrow\; x = y$.

(e) $x \cdot 0 = 0$.

(f) $x(-y) = -(xy)$.

(g) $(-x)(-y) = xy$.

(h) $x(y - z) = xy - xz$.

(i) $xy = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \vee y = 0$.

(j) Rules for Fractions:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}, \qquad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}, \qquad \frac{a/c}{b/d} = \frac{ad}{bc},$$

where all denominators are assumed $\neq 0$.

Theorem 4.7. *The following statements and rules are valid in the set of real numbers $\mathbb{R}$ (and, more generally, in every totally ordered field):*

(a) $x \leq y \;\Rightarrow\; -x \geq -y$.

(b) $x \leq y \wedge z \geq 0 \;\Rightarrow\; xz \leq yz$ *holds as well as* $x \leq y \wedge z \leq 0 \;\Rightarrow\; xz \geq yz$.

(c) $x \neq 0 \;\Rightarrow\; x^2 := x \cdot x > 0$. *In particular* $1 > 0$.

(d) $x > 0 \;\Rightarrow\; 1/x > 0$, *whereas* $x < 0 \;\Rightarrow\; 1/x < 0$.

(e) *If* $0 < x < y$, *then* $x/y < 1$, $y/x > 1$, *and* $1/x > 1/y$.

(f) $x < y \wedge u < v \;\Rightarrow\; x + u < y + v$.

(g) $0 < x < y \wedge 0 < u < v \;\Rightarrow\; xu < yv$.

(h) $x < y \wedge 0 < \lambda < 1 \;\Rightarrow\; x < \lambda x + (1 - \lambda)y < y$. *In particular* $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Abbildung 4.1: 50 theorem 4.7

4.1 Intervalle (alle Typen aus (4.11))

For $a, b \in \mathbb{R}$ with $a \leq b$, one also defines the following *intervals*:

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \text{(bounded closed interval)}, \tag{4.11a}$$
$$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{(bounded open interval)}, \tag{4.11b}$$
$$]a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \text{(bounded half-open interval)}, \tag{4.11c}$$
$$[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \text{(bounded half-open interval)}, \tag{4.11d}$$
$$]-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \quad \text{(unbounded closed interval)}, \tag{4.11e}$$
$$]-\infty,b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \quad \text{(unbounded open interval)}, \tag{4.11f}$$
$$[a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \quad \text{(unbounded closed interval)}, \tag{4.11g}$$
$$]a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \quad \text{(unbounded open interval)}. \tag{4.11h}$$

For $a = b$, one says that the intervals defined by (4.11a) – (4.11d) are *degenerate* or *trivial*, where $[a,a] = \{a\}$, $]a,a[=]a,a] = [a,a[= \emptyset$ – it is sometimes convenient to have included the degenerate cases in the definition. It is sometimes also useful to abandon the restriction $a \leq b$, to let $c := \min\{a,b\}$, $d := \max\{a,b\}$, and to define

$$[a,b] := [c,d], \quad]a,b[:=]c,d[, \quad]a,b] := [c,d] \setminus \{a\}, \quad [a,b[:= [c,d] \setminus \{b\}. \tag{4.11i}$$

4.2 Definition der komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen (54), Definition der komplexen Addition und Multiplikation (53)

$z \in \mathbb{C} : z = x + iy = (x,y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$i^2 = -1$

Notation 5.3. The number $i := (0,1)$ is called the *imaginary unit* (note that, indeed, $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1$). Using i, one obtains the commonly used representation of a complex number $z = (x,y) \in \mathbb{C}$:

$$z = (x,y) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1) = x + iy, \tag{5.7}$$

where one calls $\operatorname{Re} z := x$ the *real part* of z and $\operatorname{Im} z := y$ the *imaginary part* of z. Moreover, z is called *purely imaginary* if, and only if, $\operatorname{Re} z = 0$ (as a consequence of this convention, one has the (harmless) pathology that 0 is both real and purely imaginary).

Abbildung 4.2: 54 notation 5.3

Definition 5.1. We define the set of *complex numbers* $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, where, keeping in mind (5.1), *addition* on $\mathbb{C}$ is defined by

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \big((x,y),(u,v)\big) \mapsto (x,y) + (u,v) := (x+u, y+v), \tag{5.2}$$

and *multiplication* on $\mathbb{C}$ is defined by

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \big((x,y),(u,v)\big) \mapsto (x,y) \cdot (u,v) := (xu - yv,\ xv + yu). \tag{5.3}$$

Abbildung 4.3: 53 definition 5.1

4.3 Definition von Realteil und Imaginärteil komplexer Zahlen (54)

Komplexe Zahl $z = Re(z) + Im(z) = x + iy$

4.4 Definition von und Rechenregeln für komplexe/r Konjugation (54f)

Definition and Remark 5.5. Conjugation: For each complex number $z = x + iy$, we define its *complex conjugate* or just *conjugate* to be the complex number $\bar{z} := x - iy$. We then have the following rules that hold for each $z = x + iy, w = u + iv \in \mathbb{C}$:

(a) $\overline{z+w} = x+u-iy-iv = \bar{z}+\bar{w}$ and $\overline{zw} = xu-yv-(xv+yu)i = (x-iy)(u-iv) = \bar{z}\bar{w}$.

(b) $z + \bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re} z$ and $z - \bar{z} = 2yi = 2i \operatorname{Im} z$.

(c) $z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Abbildung 4.4: 54 defintion 5.5a

(d) $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_0^+$.

Abbildung 4.5: 54 defintion 5.5b

4.5 Definition der Betragsfunktion reeller und komplexer Zahlen (56)

(b) The *absolute value* or *modulus* function is defined by

$$\operatorname{abs} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad z = x + iy \mapsto |z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{5.10}$$

where the term *absolute value* is often preferred for real numbers $z \in \mathbb{R}$ and the term *modulus* is often preferred if one also considers complex numbers $z \notin \mathbb{R}$.

Abbildung 4.6: 56 defintion 5.9b

Lemma 5.10. *For each $x \in \mathbb{R}$, one has*

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0, \\ -x & \text{for } x < 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Abbildung 4.7: 56 lemma 5.10

4.6 Rechenregeln der Betragsfunktion, speziell Dreiecksungleichung und umgekehrte Dreiecksungleichung (57)

Lemma 5.10. *For each $x \in \mathbb{R}$, one has*

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0, \\ -x & \text{for } x < 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Abbildung 4.8: 56 lemma 5.10

4.7 Veranschaulichung der komplexen Zahlen und ihrer Arithmetik (speziell von Konjugation, Addition, Multiplikation und Betrag) in der komplexen Ebene

???

4.8 Regeln für endliche Summen und Produkte (58f)

Theorem 5.13. **(a)** *For each* $n \in \mathbb{N}$ *and each* $\lambda, \mu, z_j, w_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda\, z_j + \mu\, w_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} z_j + \mu \sum_{j=1}^{n} w_j.$$

(b) *For each* $n \in \mathbb{N}_0$ *and each* $z \in \mathbb{C}$:

$$(1-z)(1+z+z^2+\dots+z^n) = (1-z)\sum_{j=0}^{n} z^j = 1 - z^{n+1}.$$

Abbildung 4.9: 58 theorem 5.13a

(c) *For each* $n \in \mathbb{N}_0$ *and each* $z, w \in \mathbb{C}$:

$$w^{n+1} - z^{n+1} = (w-z)\sum_{j=0}^{n} z^j\, w^{n-j} = (w-z)(w^n + zw^{n-1} + \dots + z^{n-1}w + z^n).$$

(d) *For each* $n \in \mathbb{N}$ *and each* $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\left(\underset{j \in \{1,\dots,n\}}{\forall} x_j \le y_j \right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \le \sum_{j=1}^{n} y_j,$$

where equality can only hold if $x_j = y_j$ *for each* $j \in \{1, \dots, n\}$.

(e) *For each* $n \in \mathbb{N}$ *and each* $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\left(\underset{j \in \{1,\dots,n\}}{\forall} 0 < x_j \le y_j \right) \quad \Rightarrow \quad \prod_{j=1}^{n} x_j \le \prod_{j=1}^{n} y_j,$$

where equality can only hold if $x_j = y_j$ *for each* $j \in \{1, \dots, n\}$.

(f) Triangle Inequality: *For each* $n \in \mathbb{N}$ *and each* $z_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} z_j \right| \le \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Abbildung 4.10: 58 theorem 5.13b

5 Funktionsarithmetik und Polynome (63-67)

Die punktweise definierte Arithmetik reell- und komplexwertiger Funktionen. Monome und Polynome. Grad von Polynomen.

5.1 Punktweise definierte Arithmetik reell- und komplexwertiger Funktionen (63)

We will write $\mathbb{K}$ in situations, where we allow $\mathbb{K}$ to be $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

If A is any nonempty set, then one can add and multiply arbitrary functions $f, g : A \to \mathbb{K}$, and one can define several further operations to create new functions from f and g:

$$\begin{aligned}
(f+g) : A \to \mathbb{K}, &\qquad (f+g)(x) := f(x) + g(x), && (5)\\
(\lambda f) : A \to \mathbb{K}, &\qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{for each } \lambda \in \mathbb{K}, && (6)\\
(fg) : A \to \mathbb{K}, &\qquad (fg)(x) := f(x)g(x), && (7)\\
(f/g) : A \to \mathbb{K}, &\qquad (f/g)(x) := f(x)/g(x) \quad (\text{ assuming } g(x) \neq 0), && (8)\\
\operatorname{Re} f : A \to \mathbb{R}, &\qquad (\operatorname{Re} f)(x) := \operatorname{Re}(f(x)), && (9)\\
\operatorname{Im} f : A \to \mathbb{R}, &\qquad (\operatorname{Im} f)(x) := \operatorname{Im}(f(x)). && (10)
\end{aligned}$$

For $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, we further define

$$\begin{aligned}
\max(f,g) : A \to \mathbb{R}, &\qquad \max(f,g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}, && (11)\\
\min(f,g) : A \to \mathbb{R}, &\qquad \min(f,g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}, && (12)\\
f^+ : A \to \mathbb{R}, &\qquad f^+ := \max(f, 0), && (13)\\
f^- : A \to \mathbb{R}, &\qquad f^- := \max(-f, 0). && (14)
\end{aligned}$$

Finally, once again also allowing $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$|f| : A \to \mathbb{R}, \qquad |f|(x) := |f(x)|. \tag{15}$$

One calls f^+ and f^- the *positive part* and the *negative part* of f, respectively. For $\mathbb{R}$-valued functions f, we have

$$|f| = f^+ + f^-. \tag{16}$$

5.2 Monome und Polynome (64)

Let $n \in \mathbb{N}$. Each function from $\mathbb{K}$ into $\mathbb{K}$, $x \mapsto x^n$, is called a *monomial*.

A function P from $\mathbb{K}$ into $\mathbb{K}$ is called a *polynomial* if, and only if, it is a linear combination of monomials, i.e. if, and only if P has the form

$$P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_j \in \mathbb{K}. \tag{17}$$

The a_j are called the *coefficients* of P. The largest number $d \leq n$ such that $a_d \neq 0$ is called the degree of P, denoted deg(P). If all coefficients are 0, then P is called the *zero polynomial*; the degree of the zero polynomial is defined as -1 (in Th. 6.6(b) below, we will see that each polynomial of degree $n \in \mathbb{N}_0$ is uniquely determined by its coefficients $a_0, ..., a_n$ and vice versa).

Polynomials of degree ≤ 0 are *constant*. Polynomials of degree ≤ 1 have the form $P(x) = a + bx$ and are called affine functions (often they are also called linear functions, even though this is not really correct for $a \neq 0$, since every function P that is linear (in the sense of linear algebra) must satisfy $P(0) = 0$). Polynomials of degree ≤ 2 have the form $P(x) = a + bx + cx^2$ and are called *quadratic* functions.

Each $\xi \in \mathbb{K}$ such that $P(\xi) = 0$ is called a zero or a root of P.

A rational function is a quotient P/Q of two polynomials P and Q.

5.3 Grad von Polynomen (66)

1. If P is a polynomial with $n := deg(P) \geq 0$, then P has at most n zeros.
2. Let P,Q be polynomials as in (6.3) with $n = m$, $deg(P) \leq n$, and $deg(Q) \leq n$. If $P(x_j) = Q(x_j)$ at $n + 1$ distinct points $x_0, x_1, ..., x_n x_n \in \mathbb{K}$, then $a_j = b_j$ for each $j \in 0, ..., n$.

   Consequence 1: If P,Q with degree $\leq n$ agree at $n + 1$ distinct points, then $P = Q$.

   Consequence 2: If we know $P = Q$, then they agree everywhere, in particular at $maxdeg(P), deg(Q) + 1$ distinct points, which implies they have the same coefficients.

6 Konvergenz reeller und komplexer Folgen (67-105)

Definition und Veranschaulichung der Epsilon-Umgebung sowie der Umgebung einer reellen Zahl sowie einer komplexen Zahl. Definition der Beschränktheit reeller und komplexer Folgen. Definition von Konvergenz und Grenzwert/Limes reeller und komplexer Folgen. Definition von Divergenz reeller und komplexer Folgen. Satz: Konvergente Folgen sind beschränkt. Nullfolgen sind solche, die gegen Null konvergieren. Satz: Eine durch eine Nullfolge beschränkte Folge ist selbst eine Nullfolge. Satz: Das Produkt aus einer Nullfolge und einer beschränkten Folge ist eine Nullfolge. Die Grenzwertsätze aus Th. 7.13 wissen und zur Bestimmung von Grenzwerten anwenden können. Einschachtelungssatz. Definition der bestimmten Divergenz gegen plus oder minus Unendlich. Eine monoton steigende Folge konvergiert oder divergiert bestimmt gegen plus Unendlich; eine monoton fallende Folge konvergiert oder divergiert bestimmt gegen minus Unendlich. Definition von Teilfolge und Umordnung einer Folge. Satz: Jede Teilfolge und jede Umordnung einer konvergenten Folge ist konvergent mit dem selben Limes.

6.1 Definition und Veranschaulichung der Epsilon-Umgebung sowie der Umgebung einer reellen Zahl sowie einer komplexen Zahl (69)

Given $z \in \mathbb{K}$ and $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, we call the set $B_\epsilon(z) := \{w \in \mathbb{K} : |w - z| < \epsilon\}$ the ϵ-neighborhood of z or, in anticipation of Calculus II, the (open) ϵ-ball with center z (in fact, for $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $B_\epsilon(z)$ represents an open disk in the complex plane with center z and radius ϵ, whereas, for $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $B_\epsilon(z) =]z - \epsilon, z + \epsilon[$ is the open interval with center z and length 2ϵ). More generally, a set $U \subseteq \mathbb{K}$ is called a neighborhood of z if, and only if, there exists $\epsilon > 0$ with $B_\epsilon(z) \subseteq U$ (so, for example, for $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(z)$ is always a neighborhood of z, whereas $\mathbb{R}$ and $[z - \epsilon, \infty[$ are neighborhoods of z for $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, but not for $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ($[z - \epsilon, \infty[$ not even being defined for $z \notin \mathbb{R}$); the sets $\{z\}$, $\{w \in \mathbb{K} : \operatorname{Re} w \geq \operatorname{Re} z\}$, $\{w \in \mathbb{K} : \operatorname{Re} w \geq \operatorname{Re} z + \epsilon\}$ are never neighborhoods of z).

> Die Menge $A \subset \mathbb{K}$ ist eine Umgebung von z
>
> $\Leftrightarrow \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\epsilon(z) = \{w \in \mathbb{K} : |w - z| < \epsilon\}\ B_\epsilon \subset A$
>
> "Die Menge aller w die weniger als ϵ von x entfernt sind."

6.2 Definition der Beschränktheit reeller und komplexer Folgen (69)

The sequence $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ is called bounded if, and only if, the set $\{|z_n| : n \in \mathbb{N}\}$ is bounded in the sense of Def. 2.26(a).

6.3 Definition von Konvergenz und Grenzwert/Limes reeller und komplexer Folgen (67f)

Die reelle Zahl z heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Zahlenfolge $\langle z_n \rangle$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine positive Zahl N gibt, so dass für alle $n > N$ stets $|z_n - z| < \epsilon$ ist.

Eine Folge $\langle z_n \rangle$ heißt *konvergent*, wenn sie einen *Grenzwert* z besitzt $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Kurz gefasst: Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge.
z_n ist konvergent $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ |z_n - z| < \epsilon$

> Beispiel:
>
> - Es sei $z_n = \frac{1}{n}$ unsere Folge.
> - Berechne Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$
> - Schreibe: Sei $e \in \mathbb{R}^+$, wähle $N =?$, sei $n > N$

- Setze a_n und a ein: $|z_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| < \frac{1}{N} = \epsilon$
- $\Rightarrow N = \frac{1}{\epsilon}$

Let $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathbb{C}$. Then $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent in $\mathbb{C}$ if, and only if, both $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are convergent in $\mathbb{R}$. Moreover, in that case,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z \tag{18}$$

Let $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathbb{R}$ and $z \in \mathbb{C}$. Then

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z \quad \Rightarrow \quad z \in \mathbb{R} \tag{19}$$

6.4 Definition von Divergenz reeller und komplexer Folgen (67)

The sequence $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ is called divergent if, and only if, it is not convergent.

6.5 Satz: Konvergente Folgen sind beschränkt (69)

Let $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathbb{K}$. If $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent, then it is bounded.

6.6 Nullfolgen sind solche, die gegen Null konvergieren (70)

Let $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathbb{C}$ with $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

6.6.1 Satz: Eine durch eine Nullfolge beschränkte Folge ist selbst eine Nullfolge (70)

If $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequences in $\mathbb{C}$ such that there exists $C \in \mathbb{R}^+$ with $|b_n| \leq C|z_n|$ for almost all n, then $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

6.6.2 Satz: Das Produkt aus einer Nullfolge und einer beschränkten Folge ist eine Nullfolge (70)

If $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a bounded sequence in $\mathbb{C}$, then $\lim_{n\to\infty}(c_n z_n) = 0$.

6.7 Die Grenzwertsätze aus Th. 7.13 wissen und zur Bestimmung von Grenzwerten anwenden können (70f)

Siehe Skript

Seite 70-71

6.8 Einschachtelungssatz (Sandwich Theorem) (72)

Let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, and $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be sequences in $\mathbb{R}$. If $x_n \leq a_n \leq y_n$ holds for almost all $n \in \mathbb{N}$, then

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = x \tag{20}$$

Sei $(x_n)_{x\in\mathbb{N}}, (y_n)_{y\in\mathbb{N}}$ Folgen. Wenn $x_n \leq a_n \leq y_n$ für fast alle n.

Dann $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$

6.9 Definition der bestimmten Divergenz gegen plus oder minus Unendlich (72)

Let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathbb{R}$. The sequence is said to diverge to ∞ (resp. to $-\infty$), denoted $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ (resp. $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$) if, and only if, for each $K \in \mathbb{R}$, almost all x_n are bigger (resp. smaller) than K. Thus,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Leftrightarrow \underset{K\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ x_n > K \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \underset{K\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ x_n < K \tag{22}$$

6.10 Eine monoton steigende Folge konvergiert oder divergiert bestimmt gegen plus Unendlich; eine monoton fallende Folge konvergiert oder divergiert bestimmt gegen minus Unendlich (73)

Suppose $S := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a monotone sequence in $\mathbb{R}$ (increasing or decreasing). Defining $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, the following holds:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \sup A & \text{if } S \text{ is increasing and bounded,} \\ \infty & \text{if } S \text{ is increasing and not bounded,} \\ \inf A & \text{if } S \text{ is decreasing and bounded,} \\ -\infty & \text{if } S \text{ is decreasing and not bounded.} \end{cases} \tag{23}$$

6.11 Definition von Teilfolge und Umordnung einer Folge (73)

Let A be an arbitrary nonempty set. Consider a sequence $\sigma : \mathbb{N} \to A$. Given a function $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (that means $(\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ constitutes a sequence of indices), the new sequence $(\sigma \circ \phi) : \mathbb{N} \to A$ is called a subsequence of σ if, and only if, ϕ is strictly increasing (i.e. $1 \leq \phi(1) < \phi(2) < \dots$). Moreover, $\sigma \circ \phi$ is called a reordering of σ if, and only if, ϕ is bijective. One can write σ in the form $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ by setting $z_n := \sigma(n)$, and one can write $\sigma \circ \phi$ in the form $(w_n)\, n \in \mathbb{N}$ by setting $w_n := (\sigma \circ \phi)(n) = z_{\phi(n)}$. Especially for a subsequence of $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, it is also common to write $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. This notation corresponds to the one above if one lets $n_k := \phi(k)$. Analogous definitions work if the index set $\mathbb{N}$ of σ is replaced by a general countable nonempty index set I.

Example: Consider the sequence $(1, 2, 3, \dots)$. Then $(2, 4, 6, \dots)$ constitutes a subsequence and $(2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots)$ constitutes a reordering. Using the notation of Def. 7.21, the original sequence is given by $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sigma(n) := n$; the subsequence is selected via $\phi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\phi_1(n) := 2n$; and the reordering is accomplished via

$$\phi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \phi_2(n) := \begin{cases} n+1 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ n-1 & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \tag{24}$$

6.12 Satz: Jede Teilfolge und jede Umordnung einer konvergenten Folge ist konvergent mit dem selben Limes (73)

Let $(z_n)\, n \in \mathbb{N}$ be a sequence in $\mathbb{C}$. If $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, then every subsequence and every reordering of $(z_n)\, n \in \mathbb{N}$ is also convergent with limit z.

7 Stetigkeit plus Zubehör (76-95)

Definition der Stetigkeit von Funktionen, die auf Teilmengen der komplexen (oder reellen) Zahlen definiert sind und in die reellen oder komplexen Zahlen abbilden. Folgenkriterium für Stetigkeit. Sie sollten einfache Stetigkeitsbeweise sowohl mit dem Epsilon-Delta-Kriterium als auch mit dem Folgenkriterium durchföhren können. Satz: Sind zwei Funktionen stetig, so auch Vielfache, die Summe, das Produkt, der Quotient, falls der Nenner nicht Null ist, der Betrag der Funktion sowie der Realteil und der Imaginärteil der Funktion. Satz: Eine komplexwertige Funktion ist genau dann stetig, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil beide stetig sind. Satz: Betragsfunktion, Polynome und rationale Funktionen sind stetig, sofern der Nenner nicht Null ist. Satz: Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig. Definition von beschränkten, abgeschlossenen und kompakten Teilmengen der komplexen Zahlen. Beschränkte Intervalle sind beschränkt, abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen. Offene und halboffene Intervalle sind nicht abgeschlossen. Nur Intervalle der Form [a,b] sind kompakt. Epsilon-Umgebungen sind beschränkt, aber nicht abgeschlossen. Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte erhalten Beschränktheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit. Endliche Mengen sind kompakt. Urbilder von abgeschlossenen Mengen unter stetigen Abbildungen sind abgeschlossen. Abgeschlossene Kreisscheiben und Kreise sind kompakt. Halbräume in den komplexen Zahlen sind abgeschlossen. Satz: Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt. Definition globaler und lokaler Extrema ((strenge) Minima und Maxima). Satz: Stetige Abbildungen auf kompakten Mengen nehmen ihr (globales) Maximum und Minimum an. Nullstellensatz von Bolzano, Zwischenwertsatz, stetige Funktionen bilden Intervalle auf Intervalle ab. Definition der n.ten Wurzel einer nichtnegativen Zahl; die zugehörige Funktion ist stetig und streng monoton steigend. Nicht rationale Zahlen heißen irrational; die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar; die Menge der irrationalen Zahlen ist nicht abzählbar. Definition der Dichtheit einer Menge in den reellen Zahlen. Satz: Die rationalen Zahlen sind dicht in den reellen Zahlen; die irrationalen Zahlen sind ebenfalls dicht. Satz: Jede reelle Zahl ist der Grenzwert einer streng steigenden Folge rationaler Zahlen und einer streng fallenden Folge rationaler Zahlen. Definition von Potenzen mit nichtnegativer Basis und reellen Exponenten; es gelten die üblichen Potenzgesetze. Definition von allgemeinen Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen. Satz: Potenzfunktionen sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig, sowie streng steigend für positiven und streng fallend für negativen Exponenten. Satz: Exponentialfunktionen sind stetig sowie streng steigend für Basis a>1 und streng fallend für Basis 0 < a < 1. Definition des Logarithmus, speziell des natürlichen Logarithmus, Logarithmengesetze gemäß Th. 7.75.

7.1 Definition der Stetigkeit von Funktionen, die auf Teilmengen der komplexen (oder reellen) Zahlen definiert sind und in die reellen oder komplexen Zahlen abbilden (76)

Let $M \subseteq \mathbb{C}$. If $\zeta \in M$, then a function $f : M \to \mathbb{K}$ is said to be continuous in ζ if, and only if, for each $\epsilon > 0$, there is $\delta > 0$ such that the distance between the values $f(z)$ and $f(\zeta)$ is less than ϵ, provided the distance between z and ζ is less than δ, i.e. if, and only if,

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall}\ \underset{\delta\in\mathbb{R}^+}{\exists}\ \underset{z\in M}{\forall}\big(|z-\zeta| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\zeta)| < \epsilon\big). \tag{25}$$

Moreover, f is called continuous if, and only if, f is continuous in every $\zeta \in M$. The set of all continuous functions from $f : M \to \mathbb{K}$ is denoted by $C(M, \mathbb{K})$, $C(M) := C(M, \mathbb{R})$.

7.2 Folgenkriterium für Stetigkeit (78)

Let $M \subseteq \mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{K}$. If $\zeta \in M$, then f is continuous in ζ if, and only if, for each sequence $(z_n)_{n\in N}$ in M with $\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta$, the sequence $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converges to $f(\zeta)$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\zeta). \tag{26}$$

7.3 Sie sollten einfache Stetigkeitsbeweise sowohl mit dem Epsilon-Delta-Kriterium als auch mit dem Folgenkriterium durchführen können

7.4 Satz: Sind zwei Funktionen stetig, so auch Vielfache, die Summe, das Produkt, der Quotient, falls der Nenner nicht Null ist, der Betrag der Funktion sowie der Realteil und der Imaginärteil der Funktion (79)

Let $M \subseteq \mathbb{C}$, $f, g : M \to \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\zeta \in M$. If f, g are both continuous in ζ, then λf, $f + g$, fg, f/g for $g \neq 0$, $|f|$, $\mathrm{Re}f$, and $\mathrm{Im}f$ are all continuous in ζ. If $K = R$, then $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, f^+ and f^-, are also all continuous in ζ.

7.5 Satz: Eine komplexwertige Funktion ist genau dann stetig, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil beide stetig sind (79)

A function $f : M \to \mathbb{C}$, $M \subseteq \mathbb{C}$, is continuous in $\zeta \in M$ if, and only if, both $\mathrm{Re}f$ and $\mathrm{Im}f$ are continuous in ζ.

7.6 Satz: Betragsfunktion, Polynome und rationale Funktionen sind stetig, sofern der Nenner nicht Null ist (79f)

(a) The continuity of the absolute value function $z \mapsto |z|$ on $\mathbb{K}$ can be concluded directly from (7.11e) and, alternatively, from combining the continuity of $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $f(z) = z$, according to Ex. 7.32(b), with the continuity of $|f|$ according to Th. 7.38.

(b) Every polynomial $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{K}$, is continuous: First note that every monomial $x \mapsto x^j$ is continuous on $\mathbb{K}$ by (7.11g). Then Th. 7.38 implies the continuity of $x \mapsto a_j x^j$ on $\mathbb{K}$. Now the continuity of P follows from (7.16a) or, alternatively, by an induction from the $f + g$ part of Th. 7.38.

(c) Let $P, Q : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, be polynomials and let $A := Q^{-1}\{0\}$ the set of all zeros of $\mathbb{Q}$ (if any). Then the rational function $(P/Q) : \mathbb{K}\ A \to \mathbb{K}$ is continuous as a consequence of (b) plus the f/g part of Th. 7.38.

7.7 Satz: Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig (80)

Let $D_f, D_g \subseteq \mathbb{C}$, $f : D_f \to \mathbb{C}$, $g : D_g \to \mathbb{K}$, $g : D_g \to \mathbb{K}$, $f(D_f) \subseteq D_g$. If f is continuous in $\zeta \in D_f$ and g is continuous in $f(\zeta) \in D_g$, then $g \circ f : D_f \to \mathbb{K}$ is continuous in ζ. In consequence, if f and g are both continuous, then the composition $g \circ f$ is also continuous.

7.8 Definition von beschränkten, abgeschlossenen und kompakten Teilmengen der komplexen Zahlen. (80)

Consider $A \subseteq \mathbb{C}$.

(a) A is called *bounded* if, and only if, $A = \emptyset$ or the set $\{|z| : z \in A\}$ is bounded in $\mathbb{R}$ in the sense of Def. 2.26(a), i.e. if, and only if,

$$\underset{M\in\mathbb{R}^+}{\exists} A \subseteq B_M(0) \tag{27}$$

(b) A is called *closed* if, and only if, every sequence in A that converges in $\mathbb{C}$ has its limit in A (note that $\emptyset$ is, thus, closed).

(c) A is called *compact* if, and only if, A is both closed and bounded.

7.9 Beschränkte Intervalle sind beschränkt, abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen. Offene und halboffene Intervalle sind nicht abgeschlossen. Nur Intervalle der Form [a,b] sind kompakt. (80f)

(a) Clearly, $\emptyset$ and sets containing single points $\{z\}$, $z \in \mathbb{C}$ are compact. The sets $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$ are simple examples of closed sets that are not bounded.

(b) Let $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Each bounded interval $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$, $[a,b]$ is, indeed, bounded (by $M := \max\{|a|,|b|\}$). If $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in $[a,b]$, converging to $x \in \mathbb{R}$, then Th. 7.13(c) shows $a \le x \le b$, i.e. $x \in [a,b]$ and $[a,b]$ is, indeed, closed. Analogously, one sees that the unbounded intervals $[a,\infty[$ and $]-\infty,a]$ are also closed. On the other hand, open and half-open intervals are not closed: For sufficiently large n, the convergent sequence $(b-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ is in $[a,b[$, but $\lim_{n\to\infty}(b-\frac{1}{n}) = b \notin [a,b[$, and the other cases are treated analogously. In particular, only intervals of the form $[a,b]$ (and trivial intervals) are compact.

7.10 Epsilon-Umgebungen sind beschränkt, aber nicht abgeschlossen. (81)

(c) For each $\epsilon > 0$ and each $z \in \mathbb{C}$, the set $B_\epsilon(z)$ is bounded (since $B_\epsilon(z) \subseteq B_{\epsilon+|z|}(0)$ by the triangle inequality), but not closed (since, for sufficiently large $n \in \mathbb{N}$, $(z+\epsilon-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence in $B_\epsilon(z)$, converging to $z+\epsilon \notin B_\epsilon(z)$). In particular, $B_\epsilon(z)$ is not compact.

7.11 Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte erhalten Beschränktheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit (81)

(a) Finite unions of bounded (resp. closed, resp. compact) sets are bounded (resp. closed, resp. compact), i.e. if $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{C}$, $n \in N$, are bounded (resp. closed, resp. compact), then $A := \bigcup_{j=1}^n A_j$ is also bounded (resp. closed, resp. compact).

(b) Arbitrary (i.e. finite or infinite) intersections of bounded (resp. closed, resp. compact) sets are bounded (resp. closed, resp. compact), i.e. if $I \neq \emptyset$ is an arbitrary index set and, for each $j \in I$, $A_j \subseteq \mathbb{C}$ is bounded (resp. closed, resp. compact), then $A := \bigcap_{j\in I} A_j$ is also bounded (resp. closed, resp. compact).

7.12 Endliche Mengen sind kompakt. (81)

According to Prop. 7.44(a), all finite subsets of $\mathbb{C}$ are compact.

7.13 Urbilder von abgeschlossenen Mengen unter stetigen Abbildungen sind abgeschlossen. (81)

7.14 Abgeschlossene Kreisscheiben und Kreise sind kompakt. (81)

Example 7.47. **(a)** For each $z \in \mathbb{C}$ and each $r > 0$, the *closed disk* $\overline{B}_r(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z-w| \le r\}$ with radius r and center z is, indeed, closed by (7.38), since

$$\overline{B}_r(z) = f^{-1}[0,r], \tag{7.39}$$

where f is the continuous map $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(w) := |z-w|$. Since $\overline{B}_r(z)$ is clearly bounded, it is also compact.

(b) For each $z \in \mathbb{C}$ and each $r > 0$, the *circle* (also called a 1-*sphere*) $S_r(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| = r\}$ with radius r and center z is closed by (7.38), since $S_r(z) = f^{-1}\{r\}$, where f is the same map as in (7.39). Moreover, $S_r(z)$ is also clearly bounded, and, thus, compact.

7.15 Halbräume in den komplexen Zahlen sind abgeschlossen. (82)

(c) According to (7.38), for each $x \in \mathbb{R}$, the closed *half-spaces* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq x\} = \operatorname{Re}^{-1}[x, \infty[$ and $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq x\} = \operatorname{Im}^{-1}[x, \infty[$ are, indeed, closed.

7.16 Satz: Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt. (82)

Theorem 7.48. *A subset K of $\mathbb{C}$ is compact if, and only if, every sequence in K has a subsequence that converges to some limit $z \in K$.*

7.17 Definition globaler und lokaler Extrema ((strenge) Minima und Maxima). (82f)

Definition 7.50. Let $M \subseteq \mathbb{C}$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Given $z \in M$, f has a *(strict) global min* at z if, and only if, $f(z) \leq f(w)$ $(f(z) < f(w))$ for each $w \in M \setminus \{z\}$. Analogously, f has a *(strict) global max* at z if, and only if, $f(z) \geq f(w)$ $(f(z) > f(w))$ for each $w \in M \setminus \{z\}$. Moreover, f has a *(strict) global extreme value* at z if, and only if, f has a (strict) global min or a (strict) global max at z.

(b) Given $z \in M$, f has a *(strict) local min* at z if, and only if, there exists $\epsilon > 0$ such that $f(z) \leq f(w)$ $(f(z) < f(w))$ for each $w \in \{w \in M : |z - w| < \epsilon\} \setminus \{z\}$. Analogously, f has a *(strict) local max* at z if, and only if, there exists $\epsilon > 0$ such that $f(z) \geq f(w)$ $(f(z) > f(w))$ for each $w \in \{w \in M : |z - w| < \epsilon\} \setminus \{z\}$.

Moreover, f has a *(strict) local extreme value* at z if, and only if, f has a (strict) local min or a (strict) local max at z.

7.18 Satz: Stetige Abbildungen auf kompakten Mengen nehmen ihr (globales) Maximum und Minimum an.

Remark 7.51. In the context of Def. 7.50, it is immediate from the respective definitions that f has a (strict) global min at $z \in M$ if, and only if, $-f$ has a (strict) global max at z. Moreover, the same holds if "global" is replaced by "local". It is equally obvious that every (strict) global min/max is a (strict) local min/max.

7.19 Nullstellensatz von Bolzano, Zwischenwertsatz, stetige Funktionen bilden Intervalle auf Intervalle ab. (84f)

Theorem 7.56 (Bolzano's Theorem)**.** *Let $a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$. If $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ is continuous with $f(a) > 0$ and $f(b) < 0$, then f has at least one zero in $]a, b[$. More precisely, the set $A := f^{-1}\{0\}$ has a min ξ_1 and a max ξ_2, $a < \xi_1 \leq \xi_2 < b$, where $f > 0$ on $[a, \xi_1[$ and $f < 0$ on $]\xi_2, b]$.*

Theorem 7.57 (Intermediate Value Theorem)**.** *Let $a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$. If $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ is continuous, then f assumes every value between $f(a)$ and $f(b)$, i.e.*

$$\Big[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}\Big] \subseteq f\big([a, b]\big). \tag{7.40}$$

Theorem 7.58. *If $I \subseteq \mathbb{R}$ is an interval (of one of the 8 types listed in (4.11)) and $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ is continuous, then $f(I)$ is also an interval (it can degenerate to a single point if f is constant). More precisely, if $\emptyset \neq I = [a, b]$ is a compact interval, then $\emptyset \neq f(I) = [\min f(I), \max f(I)]$; if I is not a compact interval, then one of the following 9 cases occurs:*

$$f(I) = \mathbb{R}, \tag{7.41a}$$
$$f(I) =]-\infty, \sup f(I)], \tag{7.41b}$$
$$f(I) =]-\infty, \sup f(I)[, \tag{7.41c}$$
$$f(I) = [\inf f(I), \infty[\tag{7.41d}$$
$$f(I) = [\inf f(I), \sup f(I)], \tag{7.41e}$$

$$f(I) = [\inf f(I), \sup f(I)[, \tag{7.41f}$$
$$f(I) =]\inf f(I), \infty[, \tag{7.41g}$$
$$f(I) =]\inf f(I), \sup f(I)], \tag{7.41h}$$
$$f(I) =]\inf f(I), \sup f(I)[. \tag{7.41i}$$

7.20 Definition der n.ten Wurzel einer nichtnegativen Zahl; die zugehörige Funktion ist stetig und streng monoton steigend. (86)

Remark and Definition 7.61 (Roots)**.** We are now in a position to fulfill the promise made in Def. and Rem. 5.8, i.e. to prove the existence of unique roots for nonnegative real numbers: For each $n \in \mathbb{N}$, the function $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$, is continuous and strictly increasing with $J := f(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+$. Then Th. 7.60 implies the existence of a continuous and strictly increasing inverse function $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$. For each $x \in \mathbb{R}_0^+$, we call $f^{-1}(x)$ the nth *root* of x and write $\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}} := f^{-1}(x)$. Then $(\sqrt[n]{x})^n = (x^{\frac{1}{n}})^n = x$ is immediate from the definition. Caveat: By definition, roots are always *nonnegative* and they are only defined for *nonnegative* numbers (when studying complex numbers and $\mathbb{C}$-valued functions more deeply in the field of Complex Analysis, one typically extends the notion of root, but we will not pursue this route in this class). As anticipated in Def. and Rem. 5.8, one also writes $\sqrt{x}$ instead of $\sqrt[2]{x}$ and calls $\sqrt{x}$ the *square root* of x.

7.21 Nicht rationale Zahlen heißen irrational; die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar; die Menge der irrationalen Zahlen ist nicht abzählbar. (86)

Remark and Definition 7.62. It turns out that $\sqrt{2}$ (and many other roots) are not rational numbers, i.e. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. This is easily proved by contradiction: If $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, then there exist natural numbers $m, n \in \mathbb{N}$ such that $\sqrt{2} = m/n$. Moreover, by canceling possible factors of 2, we may assume at least one of the numbers m, n is odd. Now $\sqrt{2} = m/n$ implies $m^2 = 2n^2$, i.e. m^2 and, thus, m must be even. In consequence, there exists $p \in \mathbb{N}$ such that $m = 2p$, implying $2n^2 = m^2 = 4p^2$ and $n^2 = 2p^2$. Thus n^2 and n must also be even, in contradiction to m, n not both being even.

The elements of $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ are called *irrational* numbers. It turns out that most real numbers are irrational numbers – one can show that $\mathbb{Q}$ is countable, whereas $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ is not countable (actually, every interval contains countably many rational and uncountably many irrational numbers, see [Phi16, Sec. F], in particular, [Phi16, Th. F.1(c)] and [Phi16, Cor. F.4]).

7.22 Definition der Dichtheit einer Menge in den reellen Zahlen. (88)

Definition 7.67. Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be a subset of the real numbers. Then A is called *dense* in $\mathbb{R}$ if, and only if, every ϵ-neighborhood of every real number contains a point from A, i.e. if, and only if,

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall}\ A \cap B_\epsilon(x) \neq \emptyset.$$

7.23 Satz: Die rationalen Zahlen sind dicht in den reellen Zahlen; die irrationalen Zahlen sind ebenfalls dicht. (88f)

Theorem 7.68. **(a)** *$\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$.*

(b) *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$.*

(c) *For each $x \in \mathbb{R}$, there exist sequences $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in the rational numbers $\mathbb{Q}$ such that $x = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is strictly increasing and $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is strictly decreasing.*

7.24 Satz: Jede reelle Zahl ist der Grenzwert einer streng steigenden Folge rationaler Zahlen und einer streng fallenden Folge rationaler Zahlen. (89)

(c) *For each $x \in \mathbb{R}$, there exist sequences $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in the rational numbers $\mathbb{Q}$ such that $x = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is strictly increasing and $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is strictly decreasing.*

7.25 Definition von Potenzen mit nichtnegativer Basis und reellen Exponenten; es gelten die üblichen Potenzgesetze. (89f)

Definition and Remark 7.69 (Exponentiation)**.** In Not. 5.6, we had defined a^x for $(a, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}_0$ and for $(a, x) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}$. We will now extend the definition to $(a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ (later, we will further extend the definition to $(a, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$). The present extension to $(a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ is accomplished in two steps – first, in (a), for rational x, then, in (b), for irrational x.

(a) For rational $x = k/n$ with $k \in \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{N}$, define

$$a^x := a^{\frac{k}{n}} := \sqrt[n]{a^k}. \tag{7.52}$$

For this definition to make sense, we have to check it does not depend on the special representation of x, i.e., we have to verify $x = \frac{k}{n} = \frac{km}{nm}$ with $k \in \mathbb{Z}$ and $m, n \in \mathbb{N}$ implies $a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{km}{nm}}$. To this end, observe, using Rem. and Def. 7.61,

$$(a^{\frac{k}{n}})^{nm} = (\sqrt[n]{a^k})^{nm} = a^{km} \quad \text{and} \quad (a^{\frac{km}{nm}})^{nm} = (\sqrt[nm]{a^{km}})^{nm} = a^{km}, \tag{7.53}$$

proving $a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{km}{nm}}$ (here, as in Rem. and Def. 7.61, we used that $\lambda \mapsto \lambda^N$ is one-to-one on $\mathbb{R}_0^+$ for each $N \in \mathbb{N}$). The exponentiation rules of Th. 5.7 now extend to rational exponents in a natural way, i.e., for each $a, b > 0$ and each $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$a^{x+y} = a^x\, a^y, \tag{7.54a}$$
$$a^x\, b^x = (ab)^x, \tag{7.54b}$$
$$(a^x)^y = a^{x\,y}. \tag{7.54c}$$

Moreover, we obtain the following monotonicity rules for each $a, b \in \mathbb{R}^+$ and each $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$\forall_{x>0} \Big(a < b \quad\Rightarrow\quad a^x < b^x\Big), \tag{7.55a}$$

$$\forall_{x<0} \Big(a < b \quad\Rightarrow\quad a^x > b^x\Big), \tag{7.55b}$$

$$\forall_{a>1} \Big(x < y \quad\Rightarrow\quad a^x < a^y\Big), \tag{7.55c}$$

$$\forall_{0<a<1} \Big(x < y \quad\Rightarrow\quad a^x > a^y\Big). \tag{7.55d}$$

If $x = k/n$ with $k, n \in \mathbb{N}$ and $a < b$, then $a^{1/n} < b^{1/n}$ according to Rem. and Def. 7.61, which, in turn, implies $a^x = (a^{1/n})^k < (b^{1/n})^k = b^x$, proving (7.55a); and $a^{-1} > b^{-1}$ implies $a^{-x} = (a^{-1})^x > (b^{-1})^x = b^{-x}$, proving (7.55b). If $x < y$, set $q := y - x > 0$. Then $1 < a$ and (7.55a) imply $1 = 1^q < a^q$, i.e. $a^x < a^x\, a^q = a^y$, proving (7.55c). Similarly, $0 < a < 1$ and (7.55a) imply $a^q < 1^q = 1$, i.e. $a^y = a^x\, a^q < a^x$, proving (7.55d).

The following estimates will also come in handy: For $a \in \mathbb{R}^+$ and $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$a > 1 \ \wedge\ x > 0 \quad\Rightarrow\quad a^x - 1 < x \cdot a^{x+1}, \tag{7.56}$$

$$\forall_{m\in\mathbb{N}} \Big(x, y \in [-m, m] \quad\Rightarrow\quad |a^x - a^y| \leq L\,|x - y|, \quad \text{where} \quad L := \max\{a^{m+1},\, (1/a)^{m+1}\}\Big). \tag{7.57}$$

Proposition 7.70. *The exponentiation rules* (7.54)*, the monotonicity rules* (7.55)*, and the estimates* (7.56) *and* (7.57) *remain valid if $x, y \in \mathbb{Q}$ is replaced by $x, y \in \mathbb{R}$. Moreover, for each $a > 0$ and each sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x. \tag{7.61}$$

7.26 Definition von allgemeinen Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen. (92)

Definition 7.71 (Exponential and Power Functions)**. (a)** Each function of the form

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7.62}$$

is called a *power function*. For $\alpha > 0$, the power function is extended to $x = 0$ by setting $0^\alpha := 0$; for $\alpha \in \mathbb{Z}$, it is defined on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; for $\alpha \in \mathbb{N}_0$ even on $\mathbb{R}$.

(b) Each function of the form

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) := a^x, \quad a > 0, \tag{7.63}$$

is called a *(general) exponential function*. The case where $a = e$ with e being Euler's number from (7.49) is of particular interest and importance. Most of the time, when referring to an exponential function, one actually means $x \mapsto e^x$. It is also common to write $\exp(x)$ instead of e^x.

7.27 Satz: Potenzfunktionen sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig, sowie streng steigend für positiven und streng fallend für negativen Exponenten. (93)

Theorem 7.72. (a) *Every power function as defined in Def.* 7.71(a) *is continuous on its respective domain. Moreover, for each $\alpha > 0$, it is strictly increasing on $[0, \infty[$; for each $\alpha < 0$, it is strictly decreasing on $]0, \infty[$.*

7.28 Satz: Exponentialfunktionen sind stetig sowie streng steigend für Basis a>1 und streng fallend für Basis 0 < a < 1. (93)

(b) *Every exponential function as defined in Def.* 7.71(b) *is continuous. Moreover, for each* $a > 1$, *it is strictly increasing; for each* $0 < a < 1$, *it is strictly decreasing.*

7.29 Definition des Logarithmus, speziell des natürlichen Logarithmus, Logarithmengesetze gemäß Th. 7.75. (93f)

Remark and Definition 7.73 (Logarithm)**.** According to Th. 7.72(b), for each $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, the exponential function $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) := a^x$, is continuous and strictly monotone with $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ (verify that the image is all of $\mathbb{R}^+$ as an exercise). Then Th. 7.60 implies the existence of a continuous and strictly monotone inverse function $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. For each $x \in \mathbb{R}^+$, we call $f^{-1}(x)$ the *logarithm* of x to *base* a and write $\log_a x := f^{-1}(x)$. The most important special case is where the base is Euler's number, $a = e$. This is called the *natural* logarithm. Bases $a = 2$ and $a = 10$ also carry special names, *binary* and *common* logarithm, respectively. The notation is

$$\ln x := \log_e x, \quad \operatorname{lb} x := \log_2 x, \quad \lg x := \log_{10} x, \tag{7.64}$$

however, the notation in the literature varies – one finds log used instead of ln, lb, and lg; one also finds lg instead of lb. So you always need to verify what precisely is meant by either notation.

Corollary 7.74. *For each* $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, *the logarithm function* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ *is continuous. For* $a > 1$, *it is strictly increasing; for* $0 < a < 1$, *it is strictly decreasing.* ■

Theorem 7.75. *One obtains the following* logarithm rules*:*

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad \log_a 1 = 0, \tag{7.65a}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad \log_a a = 1, \tag{7.65b}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x \in \mathbb{R}^+} \quad a^{\log_a x} = x, \tag{7.65c}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x \in \mathbb{R}} \quad \log_a a^x = x, \tag{7.65d}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x,y \in \mathbb{R}^+} \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \tag{7.65e}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x \in \mathbb{R}^+} \ \forall_{y \in \mathbb{R}} \quad \log_a(x^y) = y \log_a x, \tag{7.65f}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x,y \in \mathbb{R}^+} \quad \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y, \tag{7.65g}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x \in \mathbb{R}^+} \ \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x, \tag{7.65h}$$

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x \in \mathbb{R}^+} \quad \log_b x = (\log_b a) \log_a x. \tag{7.65i}$$

Example 7.76. (a) For each $\alpha \in \mathbb{R}$, the power function

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \tag{7.66}$$

is continuous, which follows from Th. 7.41, since $f = \exp \circ (\alpha \ln)$, ln is continuous by Cor. 7.74, and exp is continuous by Th. 7.72(b).

8 Unendliche Reihen

Definition von unendlichen Reihen sowie von Summanden, Partialsummen und Resten von solchen Reihen. Definition von Konvergenz und Divergenz von Reihen. Geometrische Reihen mit Formel für den Grenzwert. Linearität, komplexe Konjugation und Monotonie bei der Reihenkonvergenz. Satz: Bei konvergenten Reihen konvergieren die Summanden gegen Null. Satz: Die Summe einer Reihe mit nichtnegativen Summanden ist das Supremum der Partialsummen, wenn diese beschränkt sind und andernfalls unendlich. Satz: Eine beliebige Reihe ist konvergent, wenn sich die Beträge ihrer Summanden nach oben durch die Summanden einer konvergenten Reihe abschätzen lassen; eine Reihe mit nichtnegativen Summanden ist divergent, wenn sich ihre Summanden nach unten durch die Summanden einer divergenten Reihe mit ebenfalls nichtnegativen Summanden abschätzen lassen. Definition der absoluten Konvergenz von Reihen. Satz: Absolut konvergente Reihen sind konvergent, und es gilt die Dreiecksungleichung für unendliche Reihen. Wurzelkriterium und Quotientenkriterium jeweils für absolute Konvergenz bzw. für Divergenz. Definition der punktweisen und der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen bestehend aus reell- oder komplexwertigen Funktionen. Satz: Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz, aber nicht umgekehrt. Satz: Konvergieren stetige Funktionen gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion ebenfalls stetig. Definition von Funktionenreihen, speziell Definition von Potenzreihen. Definition der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenreihen (man spricht von Reihenentwicklung bzw. Potenzreihenentwicklung der Grenzfunktion). Konvergiert eine Funktionenreihe stetiger Funktionen gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion stetig. Definition des Konvergenzradius und Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius von Potenzreihen. Satz: Potenzreihen sind auf auf dem offenen r-Kreis um Null stetig, wenn r der Konvergenzradius ist. Definition der komplexen Exponentialfunktion als Potenzreihe. Satz: Die komplexe Exponentialfunktion ist stetig und stimmt auf den reellen Zahlen mit der früher definierten Exponentialfunktion überein. Definition des Limes einer reell- oder komplexwertigen Funktion. Definition von Potenzen mit positiver Basis und komplexen Exponenten, dazu Potenzgesetze und Stetigkeit der nun allgemeineren Potenz- und Exponentialfunktionen.

8.1 Definition von unendlichen Reihen sowie von Summanden, Partialsummen und Resten von solchen Reihen. (95)

Definition 7.77. Given a sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ (or, more generally, in any set A, where an addition is defined), the sequence $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, where

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \; s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j, \tag{7.67}$$

is called an *(infinite) series* and is denoted by

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j := \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j := (s_n)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{7.68}$$

The a_n are called the *summands* of the series, the s_n its *partial sums*. Moreover, each series $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ with $k \in \mathbb{N}$ is called a *remainder (series)* of the series $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

The example of the remainder series already shows that it is useful to allow countable index sets other than $\mathbb{N}$. Thus, if $(a_j)_{j\in I}$, where I is a countable index set and $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow I$ a bijective map, then define

$$\sum_{j\in I} a_j := \sum_{j=1}^{\infty} a_{\phi(j)} \tag{7.69}$$

(compare the definition in (3.19c) for finite sums). Note that the definition depends on ϕ, which is suppressed in the notation $\sum_{j\in I} a_j$.

8.2 Definition von Konvergenz und Divergenz von Reihen. (96)

Definition 7.78. If $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a series with the s_n defined as in (7.67) and with summands $a_j \in \mathbb{K}$, then the series is called *convergent* with *limit* $s \in \mathbb{K}$ if, and only if, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ in the sense of (7.1). In that case, one writes

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = s \tag{7.70}$$

and calls s the *sum* of the series. The series is called *divergent* if, and only if, it is not convergent. We write $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$ (resp. $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = -\infty$) if, and only if, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverges to ∞ (resp. $-\infty$) in the sense of Def. 7.18.

8.3 Geometrische Reihen mit Formel für den Grenzwert. (96)

Example 7.80. (a) For each $q \in \mathbb{C}$ with $|q| < 1$, $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ is called a *geometric series*. From (3.22b) (the reader is asked to go back and check that (3.22b) and its proof, indeed, remain valid for each $q \in \mathbb{C}$), we obtain the partial sums $s_n = \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Since $|q| < 1$, we know $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ from Ex. 7.6. Thus, the series is convergent with

$$\forall_{|q|<1} \quad \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}. \tag{7.71}$$

(b) In Ex. 7.30, we obtained the divergence of the harmonic series:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty. \tag{7.72}$$

8.4 Linearität, komplexe Konjugation und Monotonie bei der Reihenkonvergenz. (96)

Corollary 7.81. *Let $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ and $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ be convergent series in $\mathbb{C}$.*

(a) *Linearity:*

$$\forall_{\lambda,\mu\in\mathbb{C}} \quad \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda a_j + \mu b_j) = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} a_j + \mu \sum_{j=1}^{\infty} b_j. \tag{7.73}$$

(b) *Complex Conjugation:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \overline{a_j} = \overline{\sum_{j=1}^{\infty} a_j}. \tag{7.74}$$

(c) *Monotonicity:*

$$\left(\forall_{j\in\mathbb{N}} \quad a_j, b_j \in \mathbb{R} \wedge a_j \leq b_j\right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} b_j. \tag{7.75}$$

8.5 Satz: Bei konvergenten Reihen konvergieren die Summanden gegen Null. (97)

(d) *Each remainder series $\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$, $n \in \mathbb{N}$, converges, and, letting $S := \sum_{j=1}^{\infty} a_j$, $s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$, $r_n := \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$, one has*

$$\left(\forall_{n\in\mathbb{N}} \; S = s_n + r_n\right), \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r_n = 0. \tag{7.76}$$

8.6 Satz: Die Summe einer Reihe mit nichtnegativen Summanden ist das Supremum der Partialsummen, wenn diese beschränkt sind und andernfalls unendlich. (97)

Corollary 7.82. *Let $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ be series such that all $a_j \in \mathbb{R}_0^+$. If $s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$ are the partial sums of $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, then*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} & \text{if } (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ is bounded,} \\ \infty & \text{if } (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ is not bounded.} \end{cases} \tag{7.77}$$

8.7 Satz: Eine beliebige Reihe ist konvergent, wenn sich die Beträge ihrer Summanden nach oben durch die Summanden einer konvergenten Reihe abschätzen lassen; eine Reihe mit nichtnegativen Summanden ist divergent, wenn sich ihre Summanden nach unten durch die Summanden einer divergenten Reihe mit ebenfalls nichtnegativen Summanden abschätzen lassen. (97)

Theorem 7.83. *Let $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ and $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ be series in $\mathbb{C}$ such that $|a_j| \leq |b_j|$ holds for each $j \geq k$ for some fixed $k \in \mathbb{N}$.*

(a) *If $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$ is convergent, then $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ is convergent as well, and, moreover,*

$$\left|\sum_{j=k}^{\infty} a_j\right| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |b_j|. \tag{7.78}$$

(b) *If $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ is divergent, then $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$ is divergent as well.*

8.8 Definition der absoluten Konvergenz von Reihen. (99)

Definition 7.87. The series $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ in $\mathbb{C}$ is said to be *absolutely convergent* if, and only if, $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ is convergent.

8.9 Satz: Absolut konvergente Reihen sind konvergent, und es gilt die Dreiecksungleichung für unendliche Reihen. (99)

Corollary 7.88. *Every absolutely convergent series $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ is also convergent and satisfies the* triangle inequality *for infinite series:*

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|. \tag{7.81}$$

8.10 Wurzelkriterium und Quotientenkriterium jeweils für absolute Konvergenz bzw. für Divergenz. (99f)

Theorem 7.89. *We consider the series $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ in $\mathbb{C}$.*

(a) *If $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ is a convergent series such that $c_j \in \mathbb{R}_0^+$ and $|a_j| \leq c_j$ for each $j \in \mathbb{N}$, then $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ is absolutely convergent.*

(b) Root Test:

$$\left(\underset{0<q<1}{\exists}\left(\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \textit{ for almost all } n \in \mathbb{N}\right)\right)$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j \textit{ is absolutely convergent,} \tag{7.82a}$$
$$\#\left\{n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1\right\} = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j \textit{ is divergent.} \tag{7.82b}$$

(c) Ratio Test: *If all* $a_n \neq 0$, *then*

$$\left(\underset{0<q<1}{\exists}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \textit{ for almost all } n \in \mathbb{N}\right)\right)$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j \textit{ is absolutely convergent,} \tag{7.83a}$$
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \textit{ for almost all } n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j \textit{ is divergent.} \tag{7.83b}$$

8.11 Definition der punktweisen und der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen bestehend aus reell- oder komplexwertigen Funktionen. (105)

Definition 8.1. Let $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of functions, $f_n : M \longrightarrow \mathbb{K}$, $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$.

(a) We say $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges *pointwise* to $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ if, and only if, $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ for each $z \in M$, i.e. if, and only if,

$$\underset{z\in M}{\forall}\ \underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ |f_n(z) - f(z)| < \epsilon. \tag{8.1}$$

So, in general, N in (8.1) depends on both z and ϵ.

(b) We say $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges *uniformly* to $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ if, and only if,

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ \underset{z\in M}{\forall}\ |f_n(z) - f(z)| < \epsilon. \tag{8.2}$$

In (8.2), N is still allowed to depend on ϵ, but, in contrast to the situation of (8.1), not on z – in that sense, the convergence is uniform in z.

8.12 Satz: Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz, aber nicht umgekehrt. (105)

Remark 8.2. It is immediate from Def. 8.1(a),(b) that uniform convergence implies pointwise convergence, but Ex. 8.3(b) below will show the converse is not true.

8.13 Satz: Konvergieren stetige Funktionen gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion ebenfalls stetig. (106)

Theorem 8.4. *Let* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *be a sequence of functions,* $f_n : M \longrightarrow \mathbb{K}$, $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$. *If* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converges uniformly to* $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ *and all* f_n *are continuous at* $\zeta \in M$, *then* f *is also continuous at* ζ. *In particular, if each* f_n *is continuous, then so is* f *(uniform limits of continuous functions are continuous).*

8.14 Definition von Funktionenreihen, speziell Definition von Potenzreihen. (106f)

Definition 8.5. **(a)** In Def. 7.77, it was mentioned that series can be formed from each sequence in a set A, where an addition is defined. Letting $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, we now consider $A := \mathcal{F}(M, \mathbb{K})$, i.e. the set of functions from M into $\mathbb{K}$. Then the addition on A is defined according to (6.1a) and, given a sequence of functions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, the series

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j := (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \tag{8.8}$$

is defined as the sequence of partial sums $s_n := \sum_{j=1}^{n} f_j$.

(b) Given a sequence of functions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, where $f_n : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $f_n(z) = a_n\, z^n$ with $a_n \in \mathbb{K}$, then

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j := \sum_{j=0}^{\infty} f_j \tag{8.9}$$

is called a *power series* and the a_j are called the *coefficients* of the power series.

8.15 Definition der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenreihen (man spricht von Reihenentwicklung bzw. Potenzreihenentwicklung der Grenzfunktion). (107)

Definition 8.6. Consider a series of $\mathbb{K}$-valued functions $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ as in Def. 8.5(a), in particular, $s_n := \sum_{j=1}^{n} f_j$ for each $n \in \mathbb{N}$.

(a) The series converges *pointwise* to $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ if, and only if, it (i.e. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$) converges pointwise in the sense of Def. 8.1(a). In that case, we use the notation

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j. \tag{8.10}$$

If (8.10) holds, then the series is sometimes called a *series expansion* of f, in particular, a *power series expansion* if the series happens to be a power series.

Analogous to the situation of series in $\mathbb{K}$, the notation $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ is also used with two different meanings – it can mean the sequence of partial sums as in (8.8) or, in the case of convergent series, the limit function as in (8.10) (cf. Caveat 7.79).

(b) The series converges *uniformly* to $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ if, and only if, it converges uniformly in the sense of Def. 8.1(b).

8.16 Konvergiert eine Funktionenreihe stetiger Funktionen gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion stetig. (107)

(c) *If each f_j is continuous in $\zeta \in M$ and the series converges uniformly to $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$, then f is continuous in ζ. In particular, if each f_j is continuous, then f is continuous.*

8.17 Definition des Konvergenzradius und Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius von Potenzreihen. (108)

Theorem 8.9. *For each power series $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, $a_j \in \mathbb{K}$, there exists a number $r \in [0,\infty] := \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, called the* radius of convergence *of the power series, such that*

$$\Big(z \in \mathbb{K} \ \wedge\ |z| < r\Big) \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \quad \text{converges absolutely in } \mathbb{K}, \tag{8.13a}$$

$$\Big(z \in \mathbb{K} \ \wedge\ |z| > r\Big) \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \quad \text{diverges in } \mathbb{K} \tag{8.13b}$$

(for $r = \infty$, (8.13a) claims absolute convergence for each $z \in \mathbb{K}$). In particular, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ converges pointwise in the sense of Def. 8.6(a) for each $z \in B_r(0)$ (cf. Def. 7.7(a)). Moreover,

$$\underset{0<r_0<r}{\forall} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \quad \begin{array}{l} \text{converges uniformly on } \overline{B}_{r_0}(0) \text{ (cf. Ex. 7.47(a))} \\ \text{in the sense of Def. 8.6(b)} \end{array} \right). \tag{8.14}$$

For the radius of convergence, one has the formula

$$r = \frac{1}{L}, \quad \text{where} \quad L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{8.15}$$

In (8.15), lim sup *denotes the so-called* limit superior*, which is defined as the largest cluster point of the sequence $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ if the sequence is bounded (cf. Th. 7.27) and ∞ if the sequence is unbounded. As the limit superior can be 0 or ∞, we also define $1/0 := \infty$ and $1/\infty := 0$ in (8.15).*

One has the simpler formula

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \tag{8.16}$$

provided all a_n are nonzero and provided the limit in (8.16) either exists in $\mathbb{R}_0^+$ or is ∞.

8.18 Satz: Potenzreihen sind auf auf dem offenen r-Kreis um Null stetig, wenn r der Konvergenzradius ist. (109)

Corollary 8.10. *If $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, $a_j \in \mathbb{K}$, is a power series with radius of convergence $r \in]0,\infty]$, then the function*

$$f : B_r(0) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad f(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \tag{8.17}$$

is continuous. In particular, if $r = \infty$, then f is continuous on $\mathbb{K}$.

8.19 Definition der komplexen Exponentialfunktion als Potenzreihe. (111)

Definition and Remark 8.14. We define the *exponential function*

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \tag{8.24}$$

From Ex. 8.11(b), we already know the radius of convergence of the power series in (8.24) is ∞, such that the function in (8.24) is well-defined.

For the time being, we also *redefine* Euler's number as $e := \exp(1) > 1 > 0$ and, for each $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln x := \log_{\exp(1)}(x)$. This, as well as calling the function of (8.24) exponential function, will be justified as soon as we will have proved

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \tag{8.25}$$

and

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{8.26}$$

in (8.36) of Th. 8.18 and in Th. 8.16(c) below, respectively.

8.20 Satz: Die komplexe Exponentialfunktion ist stetig und stimmt auf den reellen Zahlen mit der früher definierten Exponentialfunktion überein. (111)

Proposition 8.15. *If a continuous function $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfies*

$$a := E(1) > 0 \quad \textit{and} \tag{8.27a}$$

$$\underset{x,y\in\mathbb{R}}{\forall} \quad E(x+y) = E(x)E(y), \tag{8.27b}$$

then f is an exponential function – more precisely

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad E(x) = a^x. \tag{8.28}$$

8.21 Definition des Limes einer reell- oder komplexwertigen Funktion. (112)

Definition 8.17. Let $M \subseteq \mathbb{C}$. If $\zeta \in \mathbb{C}$ is a cluster point of M, then a function $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ is said to tend to $\eta \in \mathbb{K}$ (or to have the *limit* $\eta \in \mathbb{K}$) for $z \to \zeta$ (denoted by $\lim_{z\to\zeta} f(z) = \eta$) if, and only if, for each sequence $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $M \setminus \{\zeta\}$ with $\lim_{k\to\infty} z_k = \zeta$, the sequence $(f(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converges to $\eta \in \mathbb{K}$, i.e.

$$\lim_{z\to\zeta} f(z) = \eta \quad \Leftrightarrow \quad \underset{(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ in } M\setminus\{\zeta\}}{\forall} \quad \left(\lim_{k\to\infty} z_k = \zeta \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \eta\right). \tag{8.31}$$

8.22 Definition von Potenzen mit positiver Basis und komplexen Exponenten, dazu Potenzgesetze und Stetigkeit der nun allgemeineren Potenz- und Exponentialfunktionen. (113f)

Definition 8.19 (Exponentiation with Complex Exponents)**.** For each $(a, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$, we define

$$a^z := \exp(z \ln a), \tag{8.37}$$

where exp is the function defined in (8.24). For $a = e$, (8.37) yields $e^z = \exp(z)$, i.e. (8.37) is consistent with (8.26).

Theorem 8.20. **(a)** *The first two exponentiation rules of (7.54) still hold for each $a, b > 0$ and each $z, w \in \mathbb{C}$:*

$$a^{z+w} = a^z\, a^w, \tag{8.38a}$$
$$a^z\, b^z = (ab)^z. \tag{8.38b}$$

(b) *For each $a \in \mathbb{R}^+$, the exponential function*

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := a^z, \tag{8.39a}$$

is continuous, and, for each $\zeta \in \mathbb{C}$, the power function

$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(x) := x^\zeta, \tag{8.39b}$$

is continuous.

(c) *The limit in (8.36) extends to complex numbers:*

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{8.40}$$

9 Trigonometrische Funktionen (115-126)

Sie brauchen NICHT die Potenzreihendefinition von Sinus und Kosinus auswendig wissen, sondern nur jeweils den schon aus der Schule bekannten groben Verlauf des reellen Sinus und des reellen Kosinus (also im Wesentlichen die Grafen mit Lage der Nullstellen, Maxima, Minima und Monotoniebereichen sowie sin*sin+cos*cos=1 - das beeinhaltet die Eigenschaften aus Th. 8.22 außer den Additionstheoremen und den Grenzwerten). Sie sollten auch wissen, dass sin und cos auf den ganzen komplexen Zahlen definiert und stetig sind. Eulersche Formel (8.46a). Definition von Tangens und Cotangens, ebenfalls mit Nullstellen und Monotonieintervallen. Polarkoordinaten komplexer Zahlen (Betrag,Argument). Darstellung in der komplexen Ebene. Multiplikation komplexer Zahlen in Polarkoordinaten.

9.1 reeller Sinus, reeller Cosinus

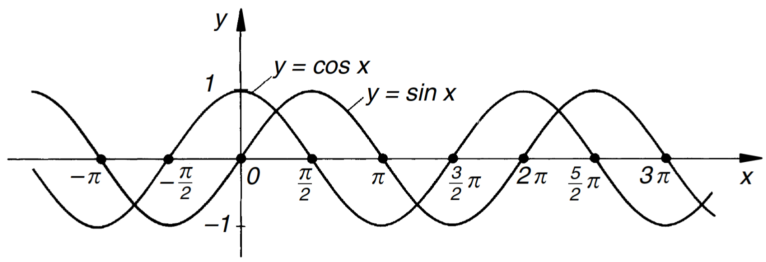


Abbildung 9.1: sin-cos

Eigenschaften ($k \in \mathbb{Z}$)	$y = sinx$	$y = cosx$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$-1 \leq y \leq 1$	$-1 \leq y \leq 1$
Periode (primitive)	2π	2π
Symmetrie	ungerade	gerade
Nullstellen	$x_k = k \cdot \pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Relative Maxima	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	$x_k = k \cdot 2\pi$
Relative Minima	$x_k = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$	$x_k = \pi + k \cdot 2\pi$

Tabelle 9.1: sin-cos-tab

Theorem 8.22

$$sin0 = 0, \qquad cos0 = 1 \tag{28}$$

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \qquad \sin z = -\sin(-z), \qquad \cos z = \cos(-z) \tag{29}$$

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \qquad (\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1 \tag{30}$$

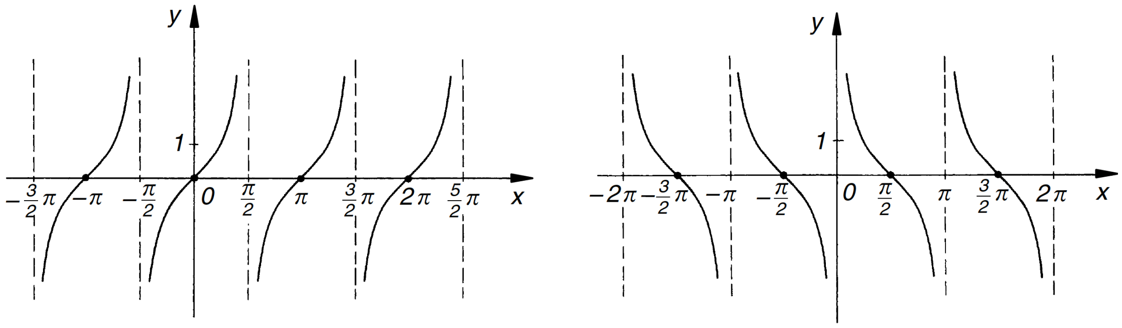
$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \forall_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \cos x > 0 \tag{31}$$

9.2 sin und cos sind auf den ganzen komplexen Zahlen definiert und stetig

9.3 Eulersche Formel (120)

$$\underset{z \in \mathbb{C}}{\forall} e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{32}$$

9.4 reeller Tangens, reeller Kotangens



a) Tangensfunktion b) Kotangensfunktion

Abbildung 9.2: tan-cotan

Eigenschaften ($k \in \mathbb{Z}$)	$y = tanx$	$y = cotx$
Definitionsbereich	$x \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme der Stellen $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme der Stellen $x_k = k \cdot \pi$
Wertebereich	$-\infty < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$
Periode (primitive)	π	π
Symmetrie	ungerade	ungerade
Nullstellen	$x_k = k \cdot \pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Pole	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x_k = k \cdot \pi$
Senkrechte Asymptoten	$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x = k \cdot \pi$

Tabelle 9.2: tan-cotan-tab

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x} \quad (33) \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \quad (34)$$

9.5 Polarkoordinaten komplexer Zahlen (Betrag, Argument) (123)

Theorem 8.28. *For each complex number $z \in \mathbb{C}$, there exist real numbers $r \geq 0$ and $\varphi \in \mathbb{R}$ such that*

$$z = r\,e^{i\varphi}. \tag{8.52}$$

Moreover, if (8.52) holds with $r \geq 0$ and $\varphi \in \mathbb{R}$, then r is the modulus of z and, for $z \neq 0$, φ is uniquely determined up to addition of an integer multiple of 2π, i.e.

$$\underset{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}{\forall} \Big(z = r\,e^{i\varphi_1} = r\,e^{i\varphi_2} \ \wedge\ r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad r = |z| \ \wedge \underset{k\in\mathbb{Z}}{\exists} \ \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k \Big). \tag{8.53}$$

9.6 Darstellung in der komplexen Ebene (124)

Definition and Remark 8.29. The representation of $z \in \mathbb{C}$ given by (8.52) is called its *polar form*, where (r, φ) are also called *polar coordinates* of z, φ is called an *argument* of z. For $z \neq 0$, one can fix the argument uniquely by the additional requirement $\varphi \in [0, 2\pi[$ (but one also finds other choices, for example $\varphi \in]-\pi, \pi]$, in the literature). The above terminology is consistent with the common use of calling (r, φ) *polar coordinates* of the vector $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 (= \mathbb{C})$ (in contrast to the *Cartesian coordiantes* (x, y)), where r constitutes the distance of the point $z = (x, y)$ from the origin $(0, 0)$ and φ is the angle between the vector $z = (x, y)$ and the x-axis (cf. the three introductory paragraphs of the previous Sec. 8.4). As promised, we can now better understand the geometric interpretation of complex multiplication already described in Rem. 5.12: If $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ and $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, then $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, i.e. complex multiplication, indeed, means multiplying absolute values and adding arguments.

Corollary 8.30. *If $z \in \mathbb{C}$, then $|z| = 1$ holds if, and only if, there exists $\varphi \in \mathbb{R}$ such that $z = e^{i\varphi}$ – in other words, the map*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad f(\varphi) := e^{i\varphi}, \tag{8.55}$$

is surjective. Moreover $f(\varphi_1) = f(\varphi_2)$ holds if, and only if, $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$ for some $k \in \mathbb{Z}$.

Corollary 8.31 (Roots of Unity)**.** *For each $n \in \mathbb{N}$, the equation $z^n = 1$ has precisely n distinct solutions $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$, where*

$$\underset{k=1,\dots,n}{\forall} \quad \zeta_k := e^{k2\pi i/n} \overset{(8.46a)}{=} \cos\frac{k2\pi}{n} + i \sin\frac{k2\pi}{n} = \zeta_1^k. \tag{8.56}$$

The numbers $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ defined in (8.56) *are called the n*th roots of unity.

9.7 Multiplikation komplexer Zahlen in Polarkoordinaten (124)

See Unterabschnitt 9.6

10 Differentialrechnung (127-139)

Definition der Differenzierbarkeit und Ableitung für reell- und für komplexwertige Funktionen. Satz: Eine komplexwertige Funktion ist genau dann differenzierbar, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil differenzierbar sind. Satz: Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit. Ableitungsregeln: Ableiten ist linear, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel. Ableitungen von Polynomen, von der reellen Exponentialfunktion, vom natürlichen Logarithmus, vom reellen Sinus und vom reellen Kosinus. Ableitung von Potenzfunktionen mit reellen Exponenten. Definition von Ableitungen höherer Ordnung. Satz: Ist eine Funktion in einem lokalen Extremum differenzierbar, so verschwindet dort die Ableitung, Satz über den Zusammenhang des Vorzeichens der Ableitung mit der Monotonie einer differenzierbaren Funktion. Hinreichende Bedingungen für die Existenz von Maxima und Minima bei differenzierbaren Funktionen.

10.1 Differenzierbarkeit und Ableitung für reell- und für komplexwertige Funktionen (127)

Let $a < b, f :]a,b[\to \mathbb{K}(a = -\infty, b = \infty$ is admissible), and $\xi \in]a,b[$. Then f is said to be *differentiable* at ξ if, and only if, the following limit exists. The limit is then called the *derivative* of f in ξ.

$$f'(\xi) := \partial_x f(\xi) := \frac{df(\xi)}{dx} := \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \tag{35}$$

f is called *differentiable* if, and only if, it is differentiable at each $\xi \in [a,b]$. In that case, one calls the function

$$f' :]a,b[\to \mathbb{K}, \quad x \mapsto f'(x) \tag{36}$$

the *derivative* of f.

> Ansatz: Sei $(h_k)_{k\in}$ beliebige Nullfolge mit $h_k \neq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$
>
> Schreibe: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_k)-f(x_0)}{h_k}$. Setze ein. Forme um, bis Limes bestimmbar

10.2 Satz: Eine komplexwertige Funktion ist genau dann differenzierbar, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil differenzierbar sind (127f)

$$f'(\xi) = (\operatorname{Re} f)'(\xi) + i(\operatorname{Im} f)'(\xi) \tag{37}$$

10.3 Satz: Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit (128)

If $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ as is differentiable at $\xi \in [a,b]$ then it is continuous at ξ. In particular, if f is everywhere differentiable, then it is everywhere continuous.

10.4 Ableitungsregeln (129, 132)

Let $a < b, f, g :]a,b[\to \mathbb{K}(a = -\infty, b = \infty$ is admissible), and $\xi \in]a,b[$. Assume f and g are differentiable at ξ.

10.4.1 Ableiten ist linear (129)

For each $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda f$ is differentiable at ξ and $(\lambda f)'(\xi) = \lambda f'(\xi)$.

$f + g$ is differentiable at ξ and $(f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$.

10.4.2 Produktregel (129)

fg is differentiable at ξ and $(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)$.

10.4.3 Quotientenregel (129)

If $g(\xi) \neq 0$, then f/g is differentiable at ξ and $(f/g)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}$, in particular $(1/g)'(\xi) = -\frac{g'(\xi)}{(g(\xi))^2}$.

10.4.4 Kettenregel (132)

Let $a < b$, $c < d$, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $g :]c,d[\to \mathbb{R}$, $f(]a,b[) \subseteq]c,d[$ ($a, c = -\infty; b, d = \infty$ is admissible). If f is differentiable in $\xi \in [a,b]$ and g is differentiable in $f(\xi) \in]c,d[$, then $g \circ f :]a,b[\to \mathbb{K}$ is differentiable in ξ and

$$(g \circ f)'(\xi) = f'(\xi)g'(f(\xi)). \tag{38}$$

10.5 Ableitungen von Polynomen (130), von der reellen Exponentialfunktion (131, 133), vom natürlichen Logarithmus (131), vom reellen Sinus (133) und vom reellen Kosinus

!!!

10.6 Ableitung von Potenzfunktionen mit reellen Exponenten

!!!

10.7 Ableitungen höherer Ordnung

!!!

10.8 Satz: Ist eine Funktion in einem lokalen Extremum differenzierbar, so verschwindet dort die Ableitung

!!!

10.9 Satz über den Zusammenhang des Vorzeichens der Ableitung mit der Monotonie einer differenzierbaren Funktion

!!!

10.10 Hinreichende Bedingungen für die Existenz von Maxima und Minima bei differenzierbaren Funktionen.

!!!

11 Riemannintegral auf kompakten Intervallen (139-162)

Satz: Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sind integrierbar. Linearität des Riemannintegrals. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Definition der Stammfunktion. Partielle Integration. Substitutionsformel. Aufgaben vom Typ wie in den Beispielen 10.21, 10.23 und 10.25 lösen können.

11.1 Linearität des Riemannintegrals (144)

Let $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b, I := [a, b]$.

The integral is linear: More precicely if $f, g \in \mathcal{R}(I, \mathbb{K})$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{K},$ then $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}(I, \mathbb{K})$ and

$$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g \tag{39}$$

11.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (152)

If $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b, I := [a, b], f : I \to \mathbb{C}$, then denote

$$\begin{aligned} \int_a^b f &:= \int_I f, \\ [f(t)]_a^b &:= [f]_a^b := f(b) - f(a) \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \int_b^a f &:= -\int_a^b f, \\ [f(t)]_b^a &:= [f]_b^a := f(a) - f(b) \end{aligned} \tag{41}$$

where $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$.

Let $a, b \in \mathbb{R}, a < b, I := [a, b]$.

1. If $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{K})$ is continuous in $\xi \in I$, then, for each $c \in I$, the function

$$F_c : I \to \mathbb{K}, \quad F_c(x) := \int_c^x f(t) dt, \tag{42}$$

   is **differentiable** in ξ with $F_c'(\xi) = f(\xi)$. In particular, if $f \in C(I, \mathbb{K})$, then $F_c \in C^1(I, \mathbb{K})$ and $F_c'(x) = f(x)$ for each $x \in I$.

2. If $F \in C^1(I, \mathbb{K})$ or, alternatively, $F : I \to \mathbb{K}$ is differentiable with integrable derivative $F' \in \mathcal{R}(I, \mathbb{K})$, then

$$F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b = \int_a^b F'(t) \mathrm{d}t, \tag{43}$$

   and

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t) dt \quad \text{for each } c, x \in I. \tag{44}$$

11.3 Definition der Stammfunktion (153)

If $I \subseteq \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{K}$, and $F : I \to \mathbb{R}$ is a differentiable function with $F' = f$, then F is called a *primitive* or *antiderivative* of f.

11.4 Partielle Integration (154)

Let $a, b \in \mathbb{R}, a < b, I := [a, b]$. If $f, g \in C^1(I, \mathbb{C})$, then the following integration by parts formula holds:

$$\int_a^b f g' = [fg]_a^b - \int_a^b f' g \tag{45}$$

11.5 Substitutionsformel (154)

Let $I, J \subseteq \mathbb{R}$ be intervals, $\phi \in C^1(I)$ and $f \in C(J, \mathbb{C})$. If $\phi(I) \subseteq J$, then the following change of variables formula holds for each $a, b \in I$:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b (f \circ \phi)\phi' \tag{46}$$

11.6 Aufgaben vom Typ wie in den Beispielen 10.21, 10.23 und 10.25

- **Example 10.21** Due to the fundamental theorem, if we know a function's antiderivative, we can easily compute its integral over a given interval. Here are three simple examples:

$$\int_0^1 \left(x^5 - 3x\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{6} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3} \tag{47}$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} \mathrm{d}x = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 \tag{48}$$

$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 2 \tag{49}$$

- **Example 10.23** We compute the integral $\int_0^{2\pi} \sin^2 t \mathrm{d}t$:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \mathrm{d}t = [-\sin t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \mathrm{d}t \tag{50}$$

  Adding$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \mathrm{d}t$ on both sides and using $\sin^2 + \cos^2 \equiv 1$ yields

$$2\int_0^{2\pi} \sin^2 t \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \mathrm{d}t = 2\pi \tag{51}$$

  i.e. $\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi$.

- **Example 10.25** We compute the integral $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\mathrm{d}t$ using the change of variables $x := \phi(t) := 1 - t, \phi'(t) = -1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\mathrm{d}t &= -\int_1^0 (1-x)^2\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\right]_0^1 = \frac{16}{105}\end{aligned} \tag{52}$$