Тропическая линейная алгебра

Никита Шапошник, Б05-024
научный руководитель: А. Э. Гутерман

August 10, 2021

1 Введение

Тропическая математика была придумана бразильским математиком Имре Симоном (Imre Simon) в конце XX века (название произошло от его места жительства). Матрицы над тропическим полукольцом имеют приложения в теории графов, отпимизации и биологии. В настоящей работе мы будем рассматривать матрицы над тропическим полукольцом, их связь с графами и некоторые их индексы: экспоненту, скрамблинг индекс, индекс цикличности.

2 Определения

1. Тропическое полукольцо ([1], [2]) — это множество $\mathbb{R}_{min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ с операциями сложения $\oplus$ и умножения $\odot$:

$$a \oplus b = min(a, b)$$
$$a \odot b = a + b$$

   или множество $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с другой операцией сложения и идентичным умножением:

$$a \oplus b = \max(a, b)$$
$$a \odot b = a + b$$

2. $\mathbb{B} = \{\mathbf{0{,}1}\}$ — множество с сложением, аналогичным дизъюнкции, и умножением, аналогичным конъюнкции: $\forall a \in \mathbb{B} \hookrightarrow$

$$a + \mathbf{0} = a$$
$$a + \mathbf{1} = \mathbf{1}$$
$$b \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$b \cdot \mathbf{1} = b$$

3. Граф (в рамках данной задачи) $\mathcal{G}(V, E)$ — совокупность двух множеств – непустого множества $V = V(\mathcal{G})$ и множества $E = E(\mathcal{G}) \subseteq V^2$.

Множество V называется множеством вершин, множество E называется множеством рёбер.
Если $\forall(u,v) \in E \Rightarrow (v,u) \in E$, то граф $\mathcal{G}$ называется неориентированным, в противном случае — ориентированным.
Путем из вершины u в вершину v в графе $\mathcal{G}$ называется последовательность вершин $u, w_1, w_2, \ldots, w_l, v \in V(\mathcal{G})$ и последовательность ребер (u, w_1), $(w_1, w_2), \ldots, (w_l, v) \in E(\mathcal{G})$, где вершины и ребра могут повторяться. Длиной пути называется количество ребер в нем. Обозначим через $\mathcal{W}^t(i \to j)$ множество всех путей из вершины i в вершину j длины t, а через $\mathcal{W}(i \to j)$ — множество всех путей из вершины i в вершину j.
Граф $\mathcal{G}(V, E)$ со введенной функцией $W : E \to \mathbb{R}$ называется взвешенным графом. Весом пути называется тропическое произведение (т.е. вещественная сумма) весов всех ребер в пути. Обозначим вес пути W через $p(W)$.
Ориентированный граф называется сильно связным, если для любых $u, v \in V(\mathcal{G})$ существует путь из u в v и из v в u.
Граф $\mathcal{G}'$ называется подграфом графа $\mathcal{G}$, если $\mathcal{G}'$ получен из $\mathcal{G}$ удалением некоторых ребер и, возможно, вершин. Иначе, $V(\mathcal{G}') \subseteq V(\mathcal{G})$ и $E(\mathcal{G}') \subseteq E(\mathcal{G})$.
Обхватом графа $\mathcal{G}$ называется наименьшая длина цикла в $\mathcal{G}$ и обозначается как $g(\mathcal{G})$. Через $\hat{g}(\mathcal{G})$ обозначается максимальный среди всех компонент сильной связности графа $\mathcal{G}$ обхват.

3 Примитивность вещественной неотрицательной матрицы

Определение 3.1. *Вещественная матрица A называется примитивной, если существует натуральное число m такое, что A^m положительна, то есть все числа в ней положительны. При этом наименьшее такое m называется экспонентой матрицы и обозначается через $exp(A)$.*

Теорема 3.2 (Критерий примитивности матрицы)**.** *Неотрицательная квадратная матрица порядка n над полем вещественных чисел примитивна тогда и только тогда, когда граф смежности этой матрицы сильно связен и НОК всех длин замкнутых путей (циклов) равно 1.*

Теорема 3.3 (Виландта[3])**.** *Если неотрицательная квадратная матрица порядка n над полем вещественных чисел примитивна, то ее экспонента не превосходит число Виландта $Wi(n) = n^2 - 2n + 2$.*

4 Примитивность тропических матриц

Замечание 4.1. *Примитивность и экспонента тропической матрицы определяется так же, как и в вещественном случае, с отличием лишь в том, что в степени матрицы не должно быть нулей тропичкского полукольца, т.е. ∞.*

4.1 Матрицы 2×2

Утверждение 4.2. *Матрица* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *над тропическим полукольцом примитивна тогда и только тогда, когда* $b \neq \infty \wedge c \neq \infty \wedge (a \neq \infty \vee d \neq \infty)$*; причем ее экспонента равна 2.*

Доказательство. Если перемножить матрицы, у которых в правом верхнем углу стоят ∞, то у результата будет стоять ∞ в том же углу:
$\begin{pmatrix} a & \infty \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & \infty \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & a \odot \infty \oplus \infty \odot d' \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \infty \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

Аналогично с левым нижнем углом. Значит, в правом верхнем и в левом нижним углах не могут стоять ∞.

Перемножим 2 матрицы, у которых на главной диагонали стоят ∞:
$\begin{pmatrix} \infty & b \\ c & \infty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \infty & b' \\ c' & \infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \infty \odot \infty \oplus b \odot c' & \infty \odot b' \oplus b \odot \infty \\ c \odot \infty \oplus \infty \odot c' & c \odot b' \oplus \infty \odot \infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \infty \\ \infty & \dots \end{pmatrix}$

У результата стоят ∞ на побочной диагонали. Перемножим такую матрицу с матрицей с ∞ на главной диагонали:
$\begin{pmatrix} a & \infty \\ \infty & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \infty & b \\ c & \infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \odot \infty \oplus \infty \odot c & a \odot b \oplus \infty \odot \infty \\ \infty \odot \infty \oplus d \odot c & \infty \odot b \oplus \infty \odot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \infty & \dots \\ \dots & \infty \end{pmatrix}$
Снова получилась матрица с ∞ на главной диагонали. Значит, в любой степени матрицы с ∞ на главной диагонали будут ∞. Значит, она не может быть примитивной.

Проверим, что матрица с описанными выше ограничениями будет примитивной:
$A^{\odot 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\odot 2} = \begin{pmatrix} a \odot a \oplus b \odot c & a \odot b \oplus b \odot d \\ a \odot c \oplus c \odot d & b \odot c \oplus d \odot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} min(2a, b+c) & b + min(a,d) \\ c + min(a,d) & min(b+c, 2d) \end{pmatrix}$

Равным ∞ в этой матрице может быть или a, или d, или никто из них. В любом случае, в квадрате не будет ∞. Значит, является примитивной с показателем степени 2. □

4.2 Обобщение теоремы Виландта на тропические матрицы

Замечание 4.3. *Под умножением* $(0,1)$*-матриц будем понимать умножение двух матриц над* $\mathbb{B}$*.*

Замечание 4.4. *Примитивность и экспонента* $\mathbb{B}$*-матрицы определяется так же, как и в вещественном случае.*

Теорема 4.5 (Виландта для $\mathbb{B}$-матриц)**.** *Если* $\mathbb{B}$*-матрица размера* n *примитивна, то ее экспонента не превосходит* $n^2 - 2n + 2$*.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\beta' : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{B}$ такую, что

$$\beta'(t) = \begin{cases} \mathbf{1}, t \neq 0 \\ \mathbf{0}, t = 0 \end{cases} \tag{1}$$

и функцию $B' : M_n(\mathbb{R}_{\geq 0}) \to M_n(\mathbb{B})$ такую, что

$$B' : A = (a_{ij}) \mapsto B'(A) = (\beta'(a_{ij})) \tag{2}$$

Лемма 4.6. *B' — гомоморфизм.*

Доказательство леммы. Надо доказать, что

$$B'(X) + B'(Y) = B'(X+Y) \text{ и } B'(X)\cdot B'(Y) = B'(X\cdot Y) \tag{3}$$

Первое верно, так как $\forall x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow \beta'(x) + \beta'(y) = \beta'(x+y)$.
Рассмотрим элемент под номерами i, j:

$$(B'(X)\cdot B'(Y))_{ij} = \sum_{s=1}^{n} B'(X)_{is}\cdot B'(Y)_{sj} = \sum_{s=1}^{n} \beta'(X_{is})\cdot\beta'(Y_{sj}) =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \beta'(X_{is}\cdot Y_{sj}) = \beta'(\sum_{s=1}^{n} X_{is}\cdot Y_{sj}) = \beta'((X\cdot Y)_{ij}) = (B'(X\cdot Y))_{ij} \tag{4}$$

Значит, B' — гомоморфизм. □

Пусть A — $\mathbb{B}$-матрица. Рассмотрим матрицу A' над $\mathbb{R}_{\geq 0}$ такого же размера, что и A, в которой стоят 1 на тех же местах, что и в A, и 0 в тех же местах, что и в A. Значит, $B'(A') = A$, и, более того, $\forall m \hookrightarrow B'((A')^m) = A^m$. Следовательно, утверждение о том, что в A^m нет нулей, равносильно утверждению о том, что в $(A')^m$ нет нулей. Значит, экспонента $\mathbb{B}$-матрицы равна экспоненте соответствующей ей матрицы над $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Но к неотрицательным матрицам применима теорема Виландта. Следовательно, теорема Виландта верна и для $\mathbb{B}$-матриц.

□

Теорема 4.7 (Вилантда для тропических матриц)**.** *Если матрица $A \in M_n(\mathbb{R}_{min})$ примитивна, то ее экспонента не превосходит $Wi(n)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\beta : \mathbb{R}_{min} \to \mathbb{B}$ такую, что

$$\beta(t) = \begin{cases} 1, t \neq \infty \\ 0, t = \infty \end{cases} \tag{5}$$

и функцию $B : M_n(\mathbb{R}_{min}) \to M_n(\mathbb{B})$ такую, что

$$B : A = (a_{ij}) \mapsto B(A) = (\beta(a_{ij})) \tag{6}$$

Лемма 4.8. *B — гомоморфизм.*

Доказательство леммы. Надо доказать, что

$$B(X) + B(Y) = B(X \oplus Y) \text{ и } B(X)\cdot B(Y) = B(X \odot Y) \tag{7}$$

Заметим, что доказательство аналогично доказательству леммы 4.6, но с заменой β' на β, B' на B и $\mathbb{R}_{\geq 0}$ на $\mathbb{R}_{min}$. □

Вследствие этого, $\forall A \in M_n(\mathbb{T}) \hookrightarrow B(A^n) = (B(A))^n$.
В тропической матрице X нет бесконечностей, если в $B(X)$ нет нулей; поэтому тропическая матрица A примитивна, если примитивна матрица $B(A)$, состоящая из нулей и единиц, что покрывается условием теоремы Виландта.
В этом случае в $(B(A))^{n^2+2n+1}$ нет нулей, и, значит, в A^{n^2+2n+1} не будет ∞.
Значит, если $A \in M_n(\mathbb{T})$ примитивна, то в A^{n^2+2n+1} нет ∞. $\square$

5 Примитивность тропических матриц и графы

По графу можно построить соответствующую ему тропическую матрицу, и по тропической матрице можно построить соответствующий ей граф, такая матрица называется *матрицей смежности* данного графа. При этом в матрице в ячейке с индексами i и j стоит:
1) $-\infty$ для случая с $\mathbb{R}_{\max}$ (∞ для случая с $\mathbb{R}_{min}$) тогда и только тогда, когда вершины с номерами i и j не соединены ребром;
2) число $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда между вершинами с номерами i и j есть ребро веса x. Если граф не взвешенный, то в матрице стоит $x = 0$.
Обозначим через $\mathcal{G}(A)$ граф, соответствующий тропической матрице A.
Степени тропических матриц интересны по многим причинам, в том числе по следующей:

Утверждение 5.1. *Рассмотрим* $A \in M_{d\times d}(\mathbb{R}_{\max})$, $i, j \in V(\mathcal{G}(A))$, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Тогда:*

$$a_{ij}^t = \bigoplus \{p(W) : W \in \mathcal{W}^t(i \to j)\}$$

Доказательство. Докажем это по индукции. База, очевидно, верна для $t = 0$: в этом случае $A^t = I$ - единичная тропическая матрица, на главной диагонали которой стоят тропические единицы, т.е. 0, а на остальных местах стоят тропические нули, т.е. $-\infty$.
Докажем переход: пусть утверждение верно для t, докажем для $t + 1$.

$$a_{ij}^{t+1} = \bigoplus_{k=1}^{k} a_{ik}^t \odot a_{kj} = \max_k a_{ik}^t + a_{kj}$$

Заметим, что любой путь из вершины i в вершину j длины $t + 1$ есть конкатенация пути из вершины i в вершину k длины t и ребра из k в j для какой-то вершины k, а вес этого пути — это сумма веса первого пути и веса последнего ребра. Из всех возможных путей оптимальным будет путь с максимальным общим весом, что согласуется с определением тропического перемножения матриц. $\square$

5.1 Матрицы 2×2

Утверждение 5.2. *Рассмотрим граф смежности данной матрицы A. Матрица A примитивна, если для любых двух (в том числе одинаковых)* *вершин между ними есть путь длины ровно 2.*

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Если $a_{12} = \infty$, то не будет существовать пути из первой вершины во вторую. Если $a_{21} = \infty$, то не будет существовать пути из второй вершины в первую. Если предыдущие два условия не выполняются, но $a_{11} = a_{22} = \infty$, то не будет существовать пути из первой вершины во вторую и из второй в первую. В этих случаях матрица A не будет примитивной. Если все вышеперечисленные условия не выполняются, то матрица будет примитивной, что подтверждает доказанный ранее путем перемножения матриц факт. $\square$

5.2 Общий случай

По тропической матрице A порядка n можно построить ориентированный граф G на n вершинах. При этом A примитивна тогда и только тогда, когда между любыми двумя вершинами (быть может, одинаковыми), найдется путь длины $Wi(n) = n^2 - 2n + 2$ (по теореме Виландта).

6 Цепной ранг тропической матрицы

Определение 6.1. *Прямоугольная тропическая матрица $A = (a_{ik})$ без строк и столбцов, состоящих только из ∞, называется цепной, если для каждой пары ее небесконечных элементов a_{ik} и a_{pq} существует цепочка, имеющая концами эти элементы, то есть последовательность небесконечных элементов $a_{i_1k_1}, a_{i_2k_2}, \ldots, a_{i_sk_s}$ такая, что*
a) $i_1 = i, k_1 = k$
b) $i_s = p, k_s = q$
c) $i_l = i_{l+1}$ или $k_l = k_{l+1}, l = 1, 2, \ldots, s-1$.

Пусть дана $A \in \mathbb{PT}$ размера $n \times m$. Говорят, что i-ая и j-ая строки пересекаются, если они имеют небесконечные элементы в некотором общем столбце.
Введем бинарное отношение $\pi(A)$ на множестве индексов $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$, положив, что $(i, j) \in \pi(A)$, если i-я и j-я строки A пересекаются. Обозначим через $\hat{\pi}(A)$ транзитивное замыкание отношения $\pi(A)$; оно является отношением эквивалентности.

Определение 6.2. *Цепным рангом $(n \times m)$-матрицы $A \in \mathbb{PT}$ называется число классов эквивалентности $\hat{\pi}(A)$ на множестве $\mathbf{n}$. Обозначим цепной ранг матрицы A через $crk(A)$.*

Теорема 6.3. *Если для матриц $A, B \in \mathbb{PT}$ существует определение AB, то*

$$crk(AB) \leq min(crk(A), crk(B))$$

Определение 6.4. *По $(n \times m)$-матрице $A \in \mathbb{PT}$ можно построить граф на n вершинах, в котором i-я и j-я вершины соединены ребром, если i-я и j-я строки матрицы A пересекаются. Этот граф называется графом пересечения A.*

Утверждение 6.5. *Граф пересечения матрицы A связен $\Leftrightarrow$ матрица A — цепная.*

Доказательства этих утверждений и теорем есть в [4], но для неотрицательных вещественных матриц. Заметим, что доказательства этих же утверждений для тропических матриц аналогичны. Нужно учесть особенности тропического полукольца: например, по-другому будут выглядеть матрицы перестановок (из нулей и ∞ - нейтральных элементов по сложению и умножению). Также условия $\neq 0$ нужно заменить на условия $\neq \infty$, условие на неотрицательность нужно убрать. При приведении матрицы к блочному виду, по бокам будут стоять ∞, а не 0.

7 Индекс цикличности

Определение 7.1. *Граф $\mathcal{G}_1$ гомоморфен графу $\mathcal{G}_2$, если существует сюръективное отображение $f : V(\mathcal{G}_1) \to V(\mathcal{G}_2)$ такое, что*

$$\forall (u, v) \in E(\mathcal{G}_1) \Rightarrow (f(u), f(v)) \in E(\mathcal{G}_2)$$

Определение 7.2. *Графы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ изоморфны, если существует биекция $\rho : V(\mathcal{G}_1) \to V(\mathcal{G}_2)$ такая, что*

$$\forall u, v \in \mathcal{G}(V_1) \hookrightarrow (u, v) \in E(\mathcal{G}_1) \Leftrightarrow (\rho(u), \rho(v)) \in E(\mathcal{G}_2)$$

Определение 7.3. *Индекс цикличности (или просто цикличность) ориентированного графа $\mathcal{G}$ обозначается через $\sigma_{\mathcal{G}}$ и определяется следующим образом:*

1. *Если $\mathcal{G}$ сильно связен, и $|V(\mathcal{G})| \geq 2$, то цикличность равна НОД всех длин ориентированных циклов в $\mathcal{G}$.*
2. *Если в $\mathcal{G}$ есть только одна вершина (с петлей или без), то $\sigma_{\mathcal{G}} = 1$.*
3. *Если $\mathcal{G}$ не сильно связен, то его цикличность равна НОК цикличностей всех максимальных его сильно связных подграфов.*

Замечание 7.4. *Цикличность сильно связного графа $\mathcal{G}$ - это наибольшее k такое, что $\mathcal{G}$ гомоморфен ориентированному циклу из k вершин.*

Заметим, что в сильно связном графе $\mathcal{G}$ с цикличностью γ любые 2 пути, соединяющий 2 фиксированные вершины, имеют одинаковые длины по модулю γ. Из этого следует, что на множестве $V(\mathcal{G})$ можно ввести отношение эквивалентности: 2 вершины лежат в одном классе эквивалентности тогда и только тогда, когда длина пути от одной к другой кратна γ.

Определение 7.5. *Эти классы эквивалентности называются циклическими классами.*

Пусть $\mathcal{G} = (V, E)$ — взвешенный ориентированный граф с матрицей смежности $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}_{min})$. Пусть C — это ориентированный цикл в $\mathcal{G}$ с весами ребер $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_l}$. Средний вес ребра в C - это тропическое среднее геометрическое весов ребер в C:

$$w_a(C) = \sqrt[\odot l]{a_{i_1} \odot a_{i_2} \odot \cdots \odot a_{i_l}} = \frac{1}{l}(a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_l})$$

Определение 7.6. *Ориентированный цикл называется критическим, если у него максимальный средний вес. Критический подграф $\mathcal{G}^c$ графа $\mathcal{G}$ — это объединение всех критических циклов в $\mathcal{G}$.*

Пусть $A \in M_n(\mathbb{R}_{min})$ — матрица смежности графа $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$, который содержит хотя бы один ориентированный цикл.

Определение 7.7. *Цикличностью A называется цикличность критического подграфа $\mathcal{G}^c$ графа $\mathcal{G}$, то есть $\sigma(A) := \sigma_{\mathcal{G}^c}$. Если в $\mathcal{G}(A)$ нет ориентированных циклов, то $\sigma(A) = 1$.*

8 Скрамблинг индекс

Определение 8.1. *Скрамблинг индекс ориентированного графа $\mathcal{G}$ — это наименьшее натуральное число k такое, что для любых $u, v \in V(\mathcal{G})$ существует $w \in V(\mathcal{G})$ такая, что есть путь длины k из u в w и из v в w. Обозначим скрамблинг индекс через $k(\mathcal{G})$. Если не существует таких k, то $k(\mathcal{G}) = 0$.*

Определение 8.2. *Графом Виландта называется ориентированный граф на $n \geq 2$ вершинах со множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ и множеством ребер*

$$E = \{(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n)\} \cup \{(n-1, 1)\}$$

В этом графе есть два цикла длиной $n-1$ и n, следовательно, $\sigma_{W_n} = 1$, он сильно связен. Следовательно, он примитивен.

Теорема 8.3 ([6])**.** *Пусть $\mathcal{G}$ — примитивный ориентированный граф порядка $n \geq 2$. Тогда*

$$exp(\mathcal{G}) \leq n^2 - 2n + 1$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} \cong W_n$.

Замечание 8.4. *Для примитивного ориентированного графа верно неравенство*

$$0 < k(\mathcal{G}) \leq exp(\mathcal{G})$$

Это следует из определений скрамблинг индекса и экспоненты.

Теорема 8.5 ([6]). *Обозначим через $\lceil x \rceil$ наименьшее целое число, большее или равное x.*
Если $\mathcal{G}$ — примитивный граф с $n \geq 2$ вершинами, то

$$k(\mathcal{G}) \leq \left\lceil \frac{Wi(n)}{2} \right\rceil$$

При $n \geq 3$ равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} \cong W_n$. При $n = 2$ равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} \cong W_2$ или $\mathcal{G} \cong J_2$, где J_n — полный ориентированный граф на n вершинах, то есть $E(J_n) = V^2$.

9 CSR-декомпозиция и слабое CSR-расширение

9.1 Необходимые определения

Определение 9.1. *Назовем матрицу $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ (или соответствующий ей граф) неприводимой, если граф $\mathcal{G}(A)$ сильно связен, иначе приводимой. Назовем матрицу $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ (или соответствующий ей граф) полностью приводимой, если граф $\mathcal{G}(A)$ состоит из нескольких сильно связных компонент, никак не соединенных между собой.*

Рассмотрим тропическую матрицу $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$. Обозначим максимальный средний вес цикла в $\mathcal{G}(A)$ через $\lambda(A)$, т.е.

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \bigoplus_{k=1}^{d} \bigoplus_{i_1,\dots,i_k} (a_{i_1 i_2} \odot \cdots \odot a_{i_{k-1} i_k})^{\odot 1/k} = \\ &= \max_{k=1}^{d} \max_{i_1,\dots,i_k} \frac{(a_{i_1 i_2} + \cdots + a_{i_{k-1} i_k})}{k} \end{aligned} \tag{8}$$

Необходимо сказать, что критический подграф $\mathcal{G}^c(A)$ является полностью приводимым и средний вес любого цикла в нём равен $\lambda(A)$.
Для $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ с $\lambda(A) \leq 0$ определим звезду Клини:

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i = \bigoplus_{i=0}^{d-1} A^i$$

В матрице A^* в ячейке под номером i и j лежит длина оптимального пути от вершины i к вершине j по всему графу, без ограничения на длину пути. Условие $\lambda(A) \leq 0$ необходимо, так как иначе этот ряд расходится: можно идти по циклу с положительным средним весом и улучшать ответ. Так как дважды проходить через одну и ту же вершину не имеет смысла, можно ограничиться первыми d матрицами.

9.2 Матрицы CSR

Рассмотрим $A \in M_d(\mathbb{R})$ и некоторый подграф $\mathcal{G}$ критического подграфа $\mathcal{G}^c(A)$ без тривиальных компонент сильной связности. Введем обозначение: $M = ((\lambda(A)^- \odot A^\sigma)^*$. Определим матрицы $C, S, R \in M_r(\mathbb{R}_{\max})$ следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ если } j \in V(\mathcal{G}) \\ -\infty, \text{ иначе,} \end{cases} \qquad r_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ если } i \in V(\mathcal{G}) \\ -\infty, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$s_{ij} = \begin{cases} \lambda(A)^- \odot a_{ij}, \text{ если } (i,j) \in E(\mathcal{G}) \\ -\infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Здесь и далее для $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ через A^- будем обозначать обратную тропическую матрицу для A, т.е. такую A^-, что $AA^- = A^-A = I$. В этом случае $\lambda(A)^- = -\lambda(A)$ в вещественном понимании.
Если матрицы C, S, R определены через матрицу A, будем писать $CS^tR[A]$ для произвольного t.

Теорема 9.2 ([7], [8])**.** *Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ неприводима и CSR-матрицы определены через некоторый подграф $\mathcal{G}$ графа $\mathcal{G}(A)$. Тогда $\exists T(A) \hookrightarrow \forall t \geq T(A)$:*

$$A^t = \lambda(A)^{\odot t} \odot CS^tR[A]. \tag{9}$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (9) записывается в виде:

$$A^t = CS^tR[A]. \tag{10}$$

В добавок к $T(A)$, введем ещё 2 функции: $T_1(A, B)$ и $T_2(A, B)$. Для этого зафиксируем тот же подграф $\mathcal{G}$ и введем новую матрицу $B \in M_r(\mathbb{R}_{\max})$:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\infty, \text{ если } i \text{ или } j \text{ лежат в } \mathcal{G}, \\ a_{ij}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Теорема 9.3 ([7], [8])**.** *Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ неприводима и CSR-матрицы определены через некоторый подграф $\mathcal{G}$ графа $\mathcal{G}(A)$.*
(Определение $T_1(A,B)$:) $\exists T_1(A, B) \hookrightarrow \forall t \geq T_1(A, B)$:

$$A^t = (\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^tR[A]) \oplus B^t. \tag{11}$$

(Определение $T_2(A,B)$:) $\exists T_2(A, B) \hookrightarrow \forall t \geq T_2(A, B)$:

$$\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^tR[A] \geq B^t. \tag{12}$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (11) записывается в виде:

$$A^t = CS^tR[A] \oplus B^t, \tag{13}$$

а 12 записывается в виде

$$CS^tR[A] \geq B^t. \tag{14}$$

Есть несколько способов выбрать подграф $\mathcal{G}$, но в этой работе мы будем работать со способом Нахтигалля, в котором этот подграф совпадает с критическим подграфом исходного графа: $\mathcal{G} = \mathcal{G}^c(A)$. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть, что матрица была выбрана с помощью способа Нахтигалля, будем писать B_N вместо B и $T_{1,N}(A)$ вместо $T_1(A, B_N)$.
Для лучшего понимания введем несколько новых обозначений:

1. Через $\mathcal{W}^{t,l}(i \to j)$ обозначим множество путей от вершины i к вершине j, имеющих длину t по модулю l;

2. Через $\mathcal{W}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ обозначим множество путей от вершины i к вершине j, проходящих хотя бы через одну вершину из $\mathcal{G}$. Аналогично определяются $\mathcal{W}^t(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$, $\mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ — граф над стрелкой добавляет ограничение на пути в множестве.

3. Для множества $\mathcal{W}$ через $p(\mathcal{W})$ обозначим максимальный вес пути из множества $\mathcal{W}$.

Заметим, что при тропическом умножении матрицы на скаляр $A' = A \odot \mu$, где $\mu \in \mathbb{R}$, мы имеем $\lambda(A') = \lambda(A)$, $B_N[A'] = B_N[A]$, а матрицы C, S, R, определенные через A' совпадают с матрицами, определенными через A. Значит, $T_1(A, B), T_2(A, B)$ инвариантны относительно умножении матрицы на скаляр, что позволяет нам без разграничения общности сказать, что $\lambda(A) = 0$.

Утверждение 9.4. $T(A) \leq \max(T_1(A, B), T_2(A, B))$.

Доказательство. Возьмем $t \geq \max(T_1(A, B), T_2(A, B))$, для него выполняются условия (11) и (12). Из (12) следует, что операция тропического сложения с B^t в (11) бессмысленна, откуда для данного t следует (9). □

Утверждение 9.5 ([8])**.** *Если $\lambda(A) = 0$, то верно следующее тождество:*

$$(CS^t R[A])_{ij} = p(\mathcal{W}^{t,\sigma}(i \xrightarrow{\mathcal{G}^c(A)} j)), \tag{15}$$

где σ обозначает цикличность $\mathcal{G}^c(A)$.

Теорема 9.6 (Некоторые оценки для $T_{1,N}(A)$, [8])**.** *Для любой $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ имеем:*

1. $T_{1,N}(A) \leq Wi(n)$;

2. $T_{1,N}(A) \leq DM(\hat{g}, n) = \hat{g}(n-2) + n$, *где* $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$.

Здесь и далее, $DM(\hat{g}, n)$ — число Далмаджа-Мендельсона, которое, как и число Виландта, оценивает сверху $T_{1,N}(A)$.

10 Обозначения

1. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ — множество неотрицательных вещественных чисел.
2. $\mathbb{R}_{\min}, \mathbb{R}_{\max}$ — тропические полукольца.
3. A^{-} — обратная тропическая матрица для тропической матрицы A.
4. $\mathbb{B} = \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ — множество с сложением, аналогичным дизъюнкции, и умножением, аналогичным конъюнкции.
5. $\mathcal{G}(V, E)$ — граф со множеством вершин V и множеством ребер E.
6. $Wi(n) = (n-1)^2 + 1$ — число Виландтда.
7. $\mathbb{PT}$ — множество прямоугольных тропических матриц без бесконечных строк и столбцов.
8. $\sigma_{\mathcal{G}}$ — индекс цикличности графа G.
9. $k(\mathcal{G})$ — скрамблинг индекс графа G.
10. $g(\mathcal{G})$ — обхват графа $\mathcal{G}$, т.е. длина наименьшего цикла в $\mathcal{G}$.
11. $\hat{g}(\mathcal{G})$ — максимальный обхват среди всех компонент сильной связности графа $\mathcal{G}$.
12. $exp(\mathcal{G})$ — экспонента графа (а значит, и его матрицы смежности).
13. $\lambda(A)$ — максимальный средний вес цикла в графе $\mathcal{G}(A)$.
14. $\mathcal{G}^c$ — критический подграф графа $\mathcal{G}$.
15. A^* — звезда Клини матрицы A.
16. $\mathcal{W}(i \to j)$ — множество путей из вершины i в вершину j.
    $\mathcal{W}^t(i \to j)$ — множество путей из вершины i в вершину j длины t.
    $\mathcal{W}^{t,l}(i \to j)$ — множество путей из вершины i в вершину j длины t по модулю l.
17. $\mathcal{W}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$, $\mathcal{W}^t(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$, $\mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ — аналогично предыдущему пункту, но с дополнительным условием на путь: он должен проходить хотя бы через одну вершину из $\mathcal{G}$.
18. $T_1(A, B), T_2(A, B)$ — границы, определенные в подразделе 9.2.

References

[1] Semere Tsehaye Tesfay. *A Glance at Tropical Operations and Tropical Linear Algebra* Eastern Illinois University, 2015.

[2] David Speyer, Bernd Sturmfels. *Tropical Mathematics* Mathematics Magazine, vol. 82, №3, June 2009.

[3] Hans Schneider. *Wielandt's proof of the exponent inequality for primitive nonnegative matrices* Department of Mathematics, University of Wisconsin at Madison, 2002.

[4] Ю.А. Альпин, И.В. Башкин. *Неотрицательные цепные матрицы* Казанский федеральный университет, 2020.

[5] Alexander Guterman, Elena Kreines, and Carsten Thomassen. *Linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index* Special Matrices Volume 9, 2021.

[6] A. E. Guterman, A. M. Maksaev *Upper bounds on scrambling index for non-primitive digraphs* Linear and Multilinear Algebra, 2019

[7] Arthur Kennedy-Cochran-Patrick, Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev. *New bounds on the periodicity transient of the powers of a tropical matrix: Using cyclicity and factor rank* Linear Algebra and its Applications, 2020

[8] Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev.
`https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379514004777`