Тропические линейная алгебра

Никита Шапошник, Б05-025
научный руководитель: А. Э. Гутерман

1 Введение

Определение 1.1. *Тропическая алгебра ([2], [3]) — это множество* $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *с операциями сложения* $\oplus$ *и умножения* $\odot$*:*

$$a \oplus b = \max(a, b)$$
$$a \odot b = a + b$$

или множество $\mathbb{R}_{min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *с другой операцией сложения и идентичным умножением:*

$$a \oplus b = min(a, b)$$
$$a \odot b = a + b.$$

В обоих случаях 0 является нейтральным элементом по умножению, а бесконечные элементы — нейтральными элементами по сложению.

В дальнейшем мы в основном будем работать с $\mathbb{R}_{\max}$.

Тропическая алгебра является полукольцом.

Множество матриц размера $n \times m$ над $\mathbb{R}_{\max}$ будем обозначать через $\mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$. Для тропической матрицы A будем писать $A > -\infty$, если в ней нет элементов, равных $-\infty$.

Рассмотрим тропическую матрицу $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$. По ней можно построить ориентированный взвешенный граф $\mathcal{G}(A) = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, а $E \subseteq V \times V$, где $(i, j) \in E$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq -\infty$. Веса рёбер определяются функцией $w : E \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto a_{ij}$. Говорят, что A является матрицей смежности графа $\mathcal{G}(A)$.

Наоборот, по взвешенному ориентированному графу аналогично можно построить матрицу смежности. Для этого нужно пронумеровать вершины и поставить в соответствующие ячейки матрицы веса рёбер.

Кодирование графа тропической матрицей очень удобно. Например, по определению умножения матриц, легко доказать следующее утверждение. Зафиксируем квадратную тропическую матрицу A.

Утверждение 1.2. *В ячейке матрицы* A^t *с индексами* u, v *лежит минимальный вес пути в графе* $\mathcal{G}(A)$ *от* u *до* v *длины ровно* t*.*

Рассмотрим квадратную тропическую матрицу A.

Определение 1.3. *Если существует целое неотрицательное* n *такое, что* $A^n > -\infty$*, то матрица* A *называется примитивной. В этом случае минимальное такое* n *называется экспонентой матрицы* A *и обозначается через* $exp(A)$*.*

Определение 1.4. *Ориентированный граф* $\mathcal{G}$ *называется примитивным, если существует целое неотрицательное* n *такое, что для любых двух вершин* u, v *графа* $\mathcal{G}$ *существует путь от* u *до* v *длины ровно* n*. В этом случае минимальное такое* n *называется экспонентой графа* $\mathcal{G}$ *и обозначается через* $exp(\mathcal{G})$*.*

Заметим, что, по утверждению 1.2, примитивность матрицы A эквивалентна примитивности графа $\mathcal{G}(A)$. Более того, $exp(A) = exp(\mathcal{G}(A))$.

Обозначим для произвольного графа $\mathcal{G}$ множество его вершин через $V(\mathcal{G})$, а множество его рёбер — через $E(\mathcal{G})$.

Определение 1.5. *Индекс цикличности (см. [6]) (или просто цикличность) ориентированного графа $\mathcal{G}$ обозначается через $\sigma_{\mathcal{G}}$ и определяется следующим образом:*

1. *Если $\mathcal{G}$ сильно связен, и $|V(\mathcal{G})| \geq 2$, то цикличность равна наибольшему общему делителю всех длин ориентированных циклов в $\mathcal{G}$.*

2. *Если в $\mathcal{G}$ есть только одна вершина (с петлей или без), то $\sigma_{\mathcal{G}} = 1$.*

3. *Если $\mathcal{G}$ не сильно связен, то его цикличность равна наименьшему общему кратному цикличностей всех максимальных его сильно связных подграфов.*

С помощью индекса цикличности можно написать критерий примитивности ориентированного графа:

Теорема 1.6 ([10])**.** *Ориентированный граф $\mathcal{G}$ примитивен тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}$ сильно связен и его индекс цикличности равен* 1.

Заметим, что в сильно связном графе $\mathcal{G}$ с цикличностью σ любые два пути, соединяющие две фиксированные вершины, имеют одинаковые длины по модулю σ. Из этого следует, что на множестве $V(\mathcal{G})$ можно ввести отношение эквивалентности: две вершины лежат в одном классе эквивалентности тогда и только тогда, когда длина пути от одной к другой кратна σ. Эти классы эквивалентности называются циклическими классами.

Пусть $\mathcal{G} = (V, E)$ — взвешенный ориентированный граф с матрицей смежности $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\max}$. Пусть C — это ориентированный цикл в $\mathcal{G}$ с весами ребер $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_l}$. Средний вес ребра в C — это тропическое среднее геометрическое весов ребер в C:

$$w_a(C) = \sqrt[\odot l]{a_{i_1} \odot a_{i_2} \odot \cdots \odot a_{i_l}} = \frac{1}{l}(a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_l})$$

Определение 1.7. *Ориентированный цикл называется критическим, если у него максимальный средний вес. Критический подграф $\mathcal{G}^c$ графа $\mathcal{G}$ — это объединение всех критических циклов в $\mathcal{G}$.*

Обозначим максимальный средний вес цикла в $\mathcal{G}(A)$ через $\lambda(A)$, т.е.

$$\lambda(A) = \bigoplus_{k=1}^{d} \bigoplus_{i_1,\ldots,i_k} (a_{i_1 i_2} \odot \cdots \odot a_{i_{k-1} i_k})^{\odot 1/k} =$$
$$= \max_{k=1}^{d} \max_{i_1,\ldots,i_k} \frac{(a_{i_1 i_2} + \cdots + a_{i_{k-1} i_k})}{k}$$

Назовем тропическую матрицу A (или соответствующий ей граф) неразложимой, если граф $\mathcal{G}(A)$ сильно связен, иначе — разложимой.

Назовем тропическую матрицу A (или соответствующий ей граф) полностью разложимой, если в графе $\mathcal{G}(A)$ нет ребер между различными компонентами сильной связности.

Рассмотрим тропическую матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\max}$. Тогда звездой Клини матрицы A называется следующая матрица:

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i = \bigoplus_{i=0}^{n-1} A^i$$

В матрице A^* в ячейке под номером i и j лежит длина оптимального пути от вершины i к вершине j в графе $\mathcal{G}(A)$ без ограничения на длину пути. Условие $\lambda(A) \le 0$ необходимо, так как иначе этот ряд расходится: можно идти по циклу с положительным средним весом и улучшать ответ. Так как дважды проходить через одну и ту же вершину не имеет смысла, можно ограничиться первыми n матрицами.

Обхватом графа $\mathcal{G}$ называется наименьшая длина цикла в $\mathcal{G}$ и обозначается как $g(\mathcal{G})$. Через $\hat{g}(\mathcal{G})$ обозначается максимальный обхват среди всех компонент сильной связности графа $\mathcal{G}$.

Окружностью графа $\mathcal{G}$ называется наибольшая длина цикла в $\mathcal{G}$ и обозначается как $cr(\mathcal{G})$ (от английского circumference).

Максимальную длину простого пути в графе $\mathcal{G}$ будем обозначать через $cd(\mathcal{G})$ (от английского cab-driver's diameter).

2 CSR-разложение

Рассмотрим неразложимую $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$. Введем обозначения: $\sigma = \sigma(\mathcal{G}^c(A))$ – индекс цикличности критического подграфа, $M = ((\lambda(A)^- \odot A^\sigma)^*$. Здесь и далее для $a \in \mathbb{R}_{\max}$, $a \ne -\infty$ через a^- будем обозначать обратное по умножению к a, т.е. $a^- = -a$.

Определим матрицы $C, S, R \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ если } j \in V(\mathcal{G}^c(A)) \\ -\infty, \text{ иначе,} \end{cases} \qquad r_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ если } i \in V(\mathcal{G}^c(A)) \\ -\infty, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$s_{ij} = \begin{cases} \lambda(A)^- \odot a_{ij}, \text{ если } (i,j) \in E(\mathcal{G}^c(A)) \\ -\infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Если матрицы C, S, R определены по матрице A, будем писать $CS^tR[A]$ для произвольного t.

Теорема 2.1 ([7], [8])**.** *Пусть $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ неразложима. Тогда существует неотрицательное целое $T(A)$ такое, что для любого $t \ge T(A)$:*

$$A^t = \lambda(A)^{\odot t} \odot CS^tR[A]. \tag{1}$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (1) записывается в виде:

$$A^t = CS^tR[A].$$

Утверждение 2.2 ([9])**.** *Для любого $t \ge 0$ верно, что $CS^{t+\sigma}R[A] = CS^tR[A]$, где σ — это цикличность $\mathcal{G}^c(A)$. Иначе говоря, последовательность матриц $\{CS^tR[A]\}_{t\ge0}$ периодична с периодом σ.*

Значит, в силу равенства $A^t = CS^tR$ при $t \ge T(A)$, последовательность матриц A^t при $t \ge T(A)$ является периодической с периодом σ.

Через $\mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}'} j)$ обозначим множество путей от вершины i к вершине j, имеющих длину t по модулю l, и проходящих хотя бы через одну вершину графа $\mathcal{G}'$. Для множества $\mathcal{W}$ через $p(\mathcal{W})$ обозначим максимальный вес пути из множества $\mathcal{W}$.

Утверждение 2.3 ([8])**.** *Если $\lambda(A) = 0$, то верно следующее равенство:*

$$(CS^tR[A])_{ij} = p(\mathcal{W}^{t,\sigma}(i \xrightarrow{\mathcal{G}^c(A)} j)), \tag{2}$$

где σ обозначает цикличность $\mathcal{G}^c(A)$.

Введём ещё одну функцию — $T_{1,N}(A)$. Для этого определим матрицу $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\infty, \text{ если } i \in V(\mathcal{G}^c) \text{ или } j \in V(\mathcal{G}^c), \\ a_{ij}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Теорема 2.4 ([7], [8])**.** *Пусть $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ неразложима. Тогда существует неотрицательное целое $T_1(A, B)$ такое, что для любого $t \geq T_1(A, B)$:*

$$A^t = (\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A]) \oplus B^t. \tag{3}$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (3) записывается в виде $A^t = CS^t R[A] \oplus B^t$, и если $B = -\infty$, то $T(A) = T_1(A, B)$.

Замечание 2.5 (Инвариантность относительно умножения на скаляр)**.** *Если $A' = A \odot \mu$, где $\mu \neq -\infty$, то*

- $\lambda(A') = \lambda(A) \odot \mu$, $B_N[A'] = B_N[A]$
- $CSR[A'] = CSR[A]$

Значит, $T(A)$ и $T_1(A, B)$ инвариантны относительно умножения матрицы на конечный скаляр, что позволяет нам без разграничения общности говорить, что $\lambda(A) = 0$.

Есть множество способов определить матрицу B, здесь мы рассматриваем лишь частный случай. Обозначим $T(A, B)$ для описанной матрицы B через $T_{1,N}(A)$.

Существуют несколько оценок для $T_{1,N}(A)$. В дальнейшем мы будем рассматривать только графы, в которых все рёбра имеют нулевой вес, поэтому $B = 0$. Следовательно, $T(A) = T_{1,N}(A)$, и оценки для $T_{1,N}(A)$ верны и для $T(A)$.

Теорема 2.6 (Верхние оценки $T_{1,N}(A)$, [8])**.** *Для любой $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ имеем:*

1. $T_{1,N}(A) \leq Wi(n)$;
2. $T_{1,N}(A) \leq \hat{g}(n-2) + n$;
3. $T_{1,N}(A) \leq (\hat{g}-1)(cr-1) + (\hat{g}+1)cd$,

где $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$, $cr = cr(\mathcal{G}(A))$, а $cd = cd(\mathcal{G}(A))$.

Следствие 2.7 (Верхние оценки $T(A)$)**.** *Для любой неразложимой $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ имеем:*

1. $T(A) \leq Wi(n)$;
2. $T(A) \leq \hat{g}(n-2) + n$;
3. $T(A) \leq (\hat{g}-1)(cr-1) + (\hat{g}+1)cd$,

где $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$, $cr = cr(\mathcal{G}(A))$, а $cd = cd(\mathcal{G}(A))$.

3 Примеры

3.1 Полный граф

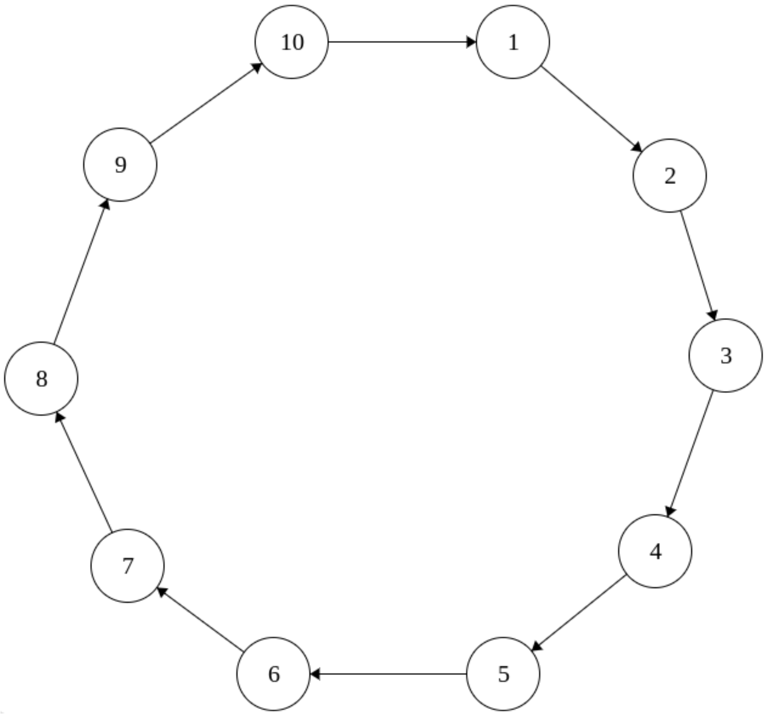
Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, где $a_{ij} = 0$ для любых индексов i, j. Граф $\mathcal{G}(A)$ является полным, веса всех ребер в нём равны 0. Значит, критический подграф $\mathcal{G}^c$ совпадает со всем графом $\mathcal{G}$.

Найдем матрицы C, S, R. Индекс цикличности полного графа $\sigma = 1$ (т.к. в нём есть циклы длины 1), следовательно $C = R = M = A^*$, $S = A$.

Так как для любого положительного t верно, что $A^t = A$, то $A^* = A$ и равенство $A^* A^t A^* = A^t$ выполняется для любого положительного t.

Следовательно, $T = 1$.

3.2 Односторонний цикл



Рассмотрим матрицу смежности $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\max}$ одностороннего цикла на n вершинах.

В силу инвариантности границ относительно домножения на скаляр из $\mathbb{R}$ (замечание 2.5), можно рассматривать только тот случай, в котором $\lambda(A) = 0$. Тогда $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A)$, $\sigma = n$.

$$M = (A^n)^* = E^* = E = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & ... & -\infty \\ -\infty & 0 & ... & -\infty \\ ... & ... & ... & ... \\ -\infty & -\infty & ... & 0 \end{pmatrix} = diag(0, 0, \dots, 0)$$

Значит, $C = R = E$, $S = A$, и для любого неотрицательного t верно $CS^tR[A] = A^t$. Следовательно, $T = 0$.

3.3 Двусторонний цикл

Рассмотрим матрицу смежности $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\max}$ двустороннего цикла на n вершинах, все рёбра в котором имеют нулевой вес, тогда $\lambda(A) = 0$ и $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A)$. Пронумеруем вершины так, чтобы первый цикл состоял из вершин $1, 2, \dots n$(в порядке обхода), а второй — из $n, n-1, \dots, 1$ (в порядке обхода). Чтобы избежать кратных рёбер, будем работать с $n \geq 3$.

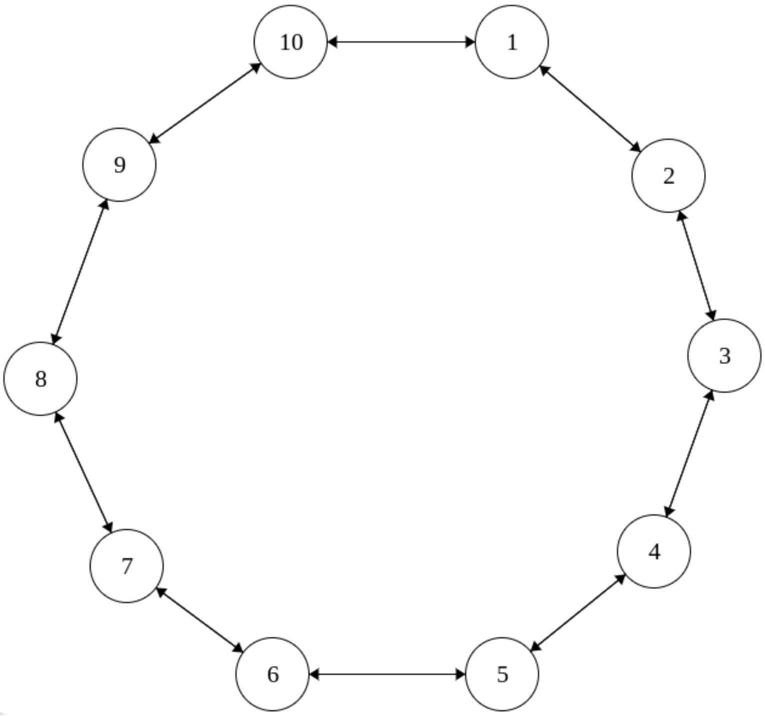
Необходимо рассмотреть два случая: когда n нечётно и когда n чётно.

n нечетно. В этом случае цикличность критического графа $\sigma = 1$, т.е. граф примитивен. Значит, $T(A) = exp(A)$.

Утверждение 3.1. *Экспонента данного графа равна $n - 1$.*

Доказательство. Заметим, что в A^{n-2} на главной диагонали стоят $-\infty$: $n-2$ нечётно, поэтому, чтобы вернуться в исходную вершину за $n - 2$ шага, надо сменить чётность — пройти весь круг, так как остальные циклы имеют чётную длину. Но цикл имеет длину n, поэтому его пройти не получится. Значит, $exp(\mathcal{G}) \geq n - 1$.

Покажем, что $A^{n-1} > -\infty$.



Зафиксируем произвольную вершину v графа. Назовем вершину *четной*, если до нее можно дойти из v за чётное число шагов. Заметим, что тогда все вершины графа четные, так как n нечетно и идти можно как по, так и против часовой стрелки. Наибольшая длина такого пути равна $n-1$. Значит, $A^{n-1} > -\infty$. □

n четно. В этом случае $\sigma = 2$ и граф не примитивен. $C = R = M = (A^2)^*$, $S = A$.

Так как последовательность матриц CS^tR периодична с периодом $\sigma = 2$ (см. [8]), то при $t \geq T(A)$

$$A^t = CS^tR = \begin{cases} (A^2)^*, \text{ если } t \text{ четно.} \\ A \odot (A^2)^*, \text{ если } t \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В матрице $(A^2)^*$ небесконечные элементы стоят в клетках (i,j), если вершины i и j находятся на четном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с одинаковой четностью равно $\frac{n}{2}$. Значит, условие при четном t выполняется при $t \geq \frac{n}{2}$, а при прочих t не выполняется.

В матрице $A \odot (A^2)^*$ небесконечные элементы стоят в клетках (i,j), если вершины i и j находятся на нечетном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с разной четностью равно $\frac{n}{2} - 1$. Значит, условие при четном t выполняется при $t \geq \frac{n}{2} - 1$, а при прочих t — не выполняется.

Следовательно, $T(A) = \frac{n}{2}$.

3.4 Примитивные графы с нулевыми рёбрами

Функция T является обобщением экспоненты на непримитивные графы.

Рассмотрим примитивный граф с матрицей смежности A, в котором вес каждого ребра равен 0. Тогда критический подграф совпадает со всем графом, и индекс цикличности примитивного графа $\sigma = 1$.

По утверждению 2.2 последовательность матриц $CS^tR[A]$ периодична с периодом $\sigma = 1$, то есть в этой последовательности все члены равны. Из утверждения 2.3 и примитивности A следует, что матрица $CS^tR[A]$ целиком состоит из 0 при любом t.

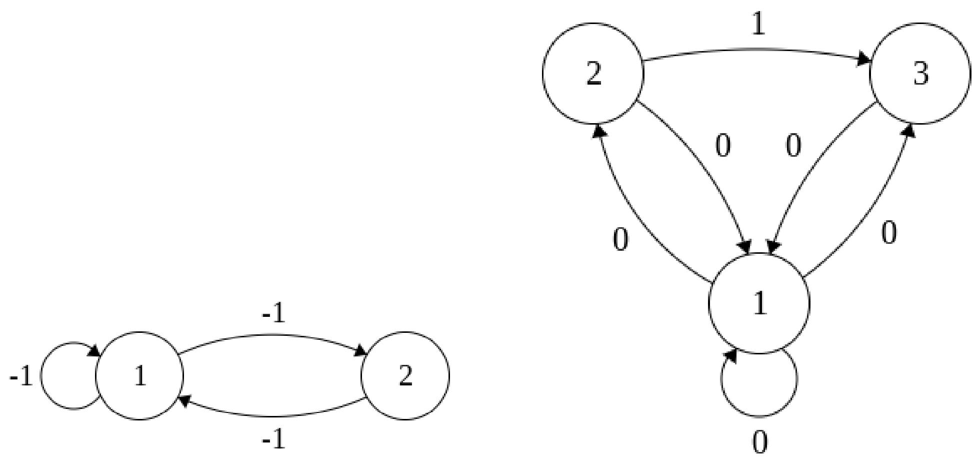
Заметим, что в любой степени матрицы A её элементы будут принимать только два значения: $-\infty$ и 0. Из определения $T(A)$ следует, что $A^t = CS^tR[A]$ тогда и только тогда, когда $t \geq T(A)$. Значит, матрица A^t не содержит $-\infty$ тогда и только тогда, когда $t \geq T(A)$. Значит, $T(A) = exp(A)$, если A примитивна.

Это приводит нас к более общему утверждению.

Утверждение 3.2. *Рассмотрим примитивную матрицу A, у которой $\mathcal{G}(A)$ совпадает со своим критическим подграфом, $\lambda(A) = 0$. Если для двух произвольных фиксированных вершин u и v верно, что все пути из u в v имеют одинаковый вес, то $T(A) = exp(A)$.*

Доказательство. В силу условия на одинаковый вес между любыми двумя вершинами матрицы вида $CS^tR[A]$ принимают только одно значение (по утверждению 2.3), а значение конкретной ячейки матрицы A^t либо равно $-\infty$, либо совпадает с соответстующей ячейкой $CS^tR[A]$. Значит, условие $A^t = CS^tR[A]$ равносильно условию $A^t > -\infty$. Следовательно, $T(A) = exp(A)$. □

Заметим, что обратное утверждение неверно. Рассмотрим следующие графы:



(a) (b)

В обоих графах экспонента совпадает с T (в обоих графах экспонента равна 2), но в графе (a) максимальный средний вес цикла равен -1, а в графе (b) критический подграф не совпадает со всем графом.

Рассмотрим неразложимую матрицу A такую, что в $\mathcal{G}(A)$ все рёбра имеют нулевой вес. Пусть его индекс цикличности равен σ.

4 Граница T для ромашек

Определение 4.1. *Назовем ромашкой граф, состоящий из нескольких пересекающихся по одной вершине циклов.*

Здесь и далее будем рассматривать графы-ромашки, состоящие из циклов длины, кратной σ, все рёбра в которых имеют вес 0.

Определение 4.2. *Ромашку, состоящую из циклов длины $a_1\sigma, a_2\sigma, \ldots, a_n\sigma$, где числа $a_1, \ldots, a_n$ взаимно просты в совокупности, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ назовем $(a_1, \ldots, a_n; \sigma)$-ромашкой.*

Границу T, определенную для такой ромашки, будем обозначать через $T(a_1, \ldots, a_n; \sigma)$.

Заметим, что индекс цикличности такой ромашки равен σ и всего в ней $N = \sum_{i=1}^{n} a_i\sigma - n + 1$ вершин. Пусть вершина, в которой пересекаются все циклы, имеет номер 1. Пронумеруем вершины в порядке следующего обхода: начнем в вершине 1, далее пройдём по первому циклу, затем — по второму, и так далее до цикла с номером n (не изменяя номер у вершины 1).

Во всех примерах матрицу смежности рассматриваемого графа будем обозначать через $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, а через C, S, R будем обозначать матрицы C, S, R, построенные по матрице A.

Теорема 4.3. $T(a_1, \dots, a_n; \sigma) = (T(a_1, \dots, a_n; 1) + 1)\sigma - 1$.

Доказательство. Обозначим граф, соответствующий $(a_1, \dots, a_n; 1)$-ромашке через $\mathcal{G}$, а граф, соответствующий $(a_1, \dots, a_n; \sigma)$-ромашке — через $\mathcal{G}_\sigma$. Граф $\mathcal{G}_\sigma$ получается из графа $\mathcal{G}$ разделением каждого ребра на σ более мелких рёбер. Вершины $\mathcal{G}_\sigma$, лежащие в одном циклическом классе с вершиной 1, будем называть начальными. Для краткости будем обозначать $T(a_1, \dots, a_n; 1)$ через T^1, а $T(a_1, \dots, a_n; \sigma)$ — через T^σ.

Покажем, что $T^\sigma > (T^1 + 1)\sigma - 2$. В $\mathcal{G}$ есть 2 вершины, между которыми нет пути длины $T^1 - 1$. Значит, в $\mathcal{G}_\sigma$ между соответствующими начальными вершинами нет пути длины $(T^1 - 1)\sigma$. Обозначим эти вершины через u и v. Но тогда между вершинами $\hat{u}$ и $\hat{v}$ не будет пути длины $(T^1 - 1)\sigma + 2(\sigma - 1) = (T^1 + 1)\sigma - 2$, где $\hat{u}$ получается, если отойти от u на $\sigma - 1$ шаг вперёд, а $\hat{v}$ — от вершины v на $\sigma - 1$ шаг назад (обе новые вершины существуют, так как любая вершина в $\mathcal{G}$ лежит в цикле). Значит, $T^\sigma \geq (T^1 + 1)\sigma - 1$.

Покажем, что $T^\sigma \leq (T^1+1)\sigma-1$. Для этого нужно доказать, что между любыми двумя вершинами u и v графа $\mathcal{G}_\sigma$ есть путь длины $(T^1+1)\sigma-1$ от u до v. Путь длины $(T^1+1)\sigma-1$ от u до v состоит из трех частей: путь от u до ближайшей начальной вершины, путь между начальными вершинами, и путь от ближайшей начальной вершины до v. Суммарная длина первой и третьей частей не превосходит $2\sigma - 2$, значит, длина второй части не меньше $(T^1 - 1)\sigma + 1$. Но длина пути между двумя начальными вершинами должна быть кратна σ, поэтому длина второй части не меньше $T^1 \cdot \sigma$. Но, по определению T^1, между любыми начальными вершинами есть путь длины $T^1 \cdot \sigma$. Значит, $T^\sigma \geq (T^1 + 1)\sigma - 1$, и утверждение доказано. □

Таким образом, при расчёте границы T для произвольной ромашки достаточно посчитать искомую границу при $\sigma = 1$, а затем получить ответ по формуле из утверждения 4.3.

Замечание 4.4. *При $\sigma = 1$ $(a_1, \dots, a_n; 1)$-ромашка примитивна, все рёбра в ней имеют нулевой вес. Значит, граница T ромашки совпадает её экспонентой.*

Введём вспомогательную функцию P:

Определение 4.5. *Для взаимно простых в совокупности натуральных чисел $a_1 \leq \dots \leq a_n$ обозначим через $P(a_1, \dots, a_n)$ минимальное целое неотрицательное число, удовлетворяющее следующему свойству: любое $p \geq P(a_1, \dots, a_n)$ выражается в виде линейной комбинации чисел $a_1, \dots, a_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то есть*

$$p = a_1\lambda_1 + \dots a_n\lambda_n. \tag{4}$$

Число, выражающееся в виде линейной комбинации чисел $a_1, \dots, a_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами, назовём выразимым.

Здесь и далее под линейной комбинацией будем понимать линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами.

Теорема 4.6. $T(a_1, \dots, a_n; 1) = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$.

Доказательство. По определению границы T для любых двух вершин между ними существует путь длины t для любого $t \geq T(a_1, \dots, a_n; 1)$, и сущесвуют две вершины, между которыми нет пути длины $T(a_1, \dots, a_n; 1) - 1$.

Рассмотрим две произвольные вершины u и v. Любой путь длины хотя бы $a_n - 1$ проходит через вершину 1. Поэтому путь длины t от u до v состоит из трёх частей: пути от u до 1 (обозначим длину этой части через $\hat{u}$), λ_i циклов длины a_i для $i = 1 \dots n$, и пути от 1 до v (обозначим длину этой части через $\hat{v}$). Тогда имеет место равенство:

$$t = \hat{u} + a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n + \hat{v} \iff t - \hat{u} - \hat{v} = a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n.$$

Сумма $\hat{u} + \hat{v}$ принимает любые значения от 0 до $2a_n - 2$ (так как $0 \leq \hat{u}, \hat{v} \leq a_n - 1$). Следовательно, любое число p такое, что $t - 2a_n + 2 \leq p \leq t$, должно быть выразимо.

При $t < P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$ минимальное значение p не превосходит $P(a_1, \dots, a_n) - 1$, и, по определению $P(a_1, \dots, a_n)$, при наименьшем значении p уравнение **??** решений не имеет — противоречие с наличием пути между u и v.

Напротив, при $t \geq P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$ наименьшее значение p не меньше $P(a_1, \dots, a_n)$, и, в силу определения $P(a_1, \dots, a_n)$, коэффициенты λ_i найдутся для любого возможного значения p.

Значит, $T(a_1, \dots, a_n; 1) = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$. □

Следствие 4.7 (Корректность функции P)**.** *Функция P определена корректно: её значение существует для любых подходящих аргументов.*

Доказательство. Рассмотрим $(a_1, \dots, a_n; 1)$-ромашку. По замечанию 4.4 этот граф примитивен и, следовательно, имеет экспоненту, которая, в свою очередь, совпадает с границей T для данной ромашки. По формуле из теоремы 4.6 имеем $P(a_1, \dots, a_n) = T(a_1, \dots, a_n; 1) - 2a_n + 2$. □

Утверждение 4.8 (Свойства функции P)**.**

1. *Если $a_1 = 1$, то $P(1, \dots, a_n) = 0$.*
2. *$P(a_1, \dots, a_n) \leq P(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ — возрастающая последовательность индексов.*
3. *$P(a_1, \dots, a_n) = P(b_1, \dots, b_m)$, где набор $b_1, \dots, b_m$ получается из набора $a_1, \dots, a_n$ удалением повторяющихся элементов.*
4. *Если a_j делится на a_i, то $P(a_1, \dots, a_n) = P(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$.*
5. *Если a_j представляется в виде линейной комбинации меньших элементов, то $P(a_1, \dots, a_n) = P(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$.*

Доказательство. 1) Действительно, если $a_1 = 1$, то любое неотрицательное число k выражается как $1 \cdot k$. Следовательно, $P = 0$.

2) Свойство следует из следующего факта: сумма $a_{i_1}\lambda_{i_1} + \dots + a_{i_k}\lambda_{i_k}$ является частным случаем суммы $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$.

3) При приведении подобных членов в сумме $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$ получается корректная сумма $b_1\mu_1 + \dots b_m\mu_m$. С другой стороны, сумма $b_1\mu_1 + \dots b_m\mu_m$ является корректной суммой вида $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$.

4) Очевидно, что любая сумма $a_1\lambda_1 + \dots + a_{j-1}\lambda_{j-1} + a_{j+1}\lambda_{j+1} + \dots + a_n\lambda_n$ является суммой вида $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$, где $\lambda_j = 0$. С другой стороны, заменив a_j на $a_i \cdot \frac{a_j}{a_i}$, можно избавиться от слагаемого $a_j\lambda_j$ в сумме $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$, что доказывает утверждение.

5) Доказетельство этого свойства аналогично предыдущему. □

Утверждение 4.9. $P(a,b) = (a-1)(b-1)$.

Доказательство. Покажем, что $p = ab-a-b \neq ma+nb$ для любых целых неотрицательных m, n.

Предположим противное. Тогда:

$$ab - a - b = am + bn \iff ab = (m+1)a + (n+1)b$$

В силу взаимной простоты a и b получим, что $n+1 \vdots a$, и $m+1 \vdots b$. Тогда, в силу того, что $m, n \geq 0$, имеем 2 случая:

$$\begin{cases} n+1 = a \\ m+1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n+1 = 0 \\ m+1 = b. \end{cases}$$

В обоих случаях получаем противоречие. Следовательно, $P(a,b) \geq (a-1)(b-1)$.

Теперь покажем, что $P(a,b) \leq ab + b - a - 1$. Для любого $p \geq ab - b - a + 1$ решим уравнение:

$$am + bn = p$$

Так как a и b взаимно просты, числа из набора $0, b, 2b, \dots, (a-1)b$ дают все a остатков по модулю a. Значит, существует единственное $0 \leq n \leq a-1$, что $bn \equiv p \pmod{a}$, причём $p - bn \geq 0$, так как $p - bn \vdots a$ и

$$p - bn \geq ab - b - a + 1 - (a-1)b = -a + 1 > -a \Longrightarrow p - bn \geq 0.$$

Значит, $m = \frac{p-bn}{a} \geq 0$.

Таким образом, нами были найдены целые $m \geq 0$, $n \geq 0$. Следовательно, $P(a,b) = (a-1)(b-1)$. □

Следствие 4.10. $T(a,b;\sigma) = (ab + b - a)\sigma - 1$.

Утверждение 4.11. $P(2,a,b) = \begin{cases} P(2,b) = b-1, & \textit{если } a \textit{ чётно,} \\ P(2,a) = a-1, & \textit{иначе.} \end{cases}$

Доказательство. Первый случай следует из свойства 4 утверждения 4.8.

Разберём второй случай: a нечётно. Неравенство $P(2,a,b) \leq P(2,a)$ следует из свойства 2 утверждения 4.8. Докажем обратное неравенство: необходимо показать, что с помощью слагаемых $2, a, b$ невозможно получить сумму $a-2$. Действительно, из трёх слагаемых можно использовать только одно: 2. Но $a-2$ нечётно — противоречие. Следовательно, $P(2,a,b) = P(2,a)$. □

Следствие 4.12. $T(2,a,b;\sigma) = \begin{cases} T(2,b;\sigma) = (3b-2)\sigma - 1, & \textit{если } a \textit{ нечётно,} \\ (2b + a - 2)\sigma - 1, & \textit{иначе.} \end{cases}$

Чтобы легче вычислять функцию P, определим вспомогательную функцию M, сопоствляющую каждому целому числу от 0 до $a_1 - 1$ целое неотрицательное число: $M[i]$ — это минимальное выразимое число, сравнимое с i по модулю a_1. Впоследствии, при описании алгоритма, вычисляющего P, удобно будет представлять M в качестве массива, поэтому значение функции M на элементе i будем обозначать с помощью квадратных скобок — через $M[i]$.

Заметим, что $M[0] = 0$ и что $M[i] \equiv i \pmod{a_1}$.

Утверждение 4.13. $P(a_1, \dots, a_n) = \max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] = M[k]$.

Выразимость $M[k] - a_1$ вела бы к противоречию с определением массива M, так как $M[k] - a_1 \equiv M[k] \pmod{a_1}$. Значит, $P(a_1, \ldots, a_n) \geq \max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$.

Заметим, что если произвольное x выразимо, то и число $x + a_1$ выразимо. Из этого следует, что любое число, сравнимое с i по модулю a_1 и не меньшее $M[i]$, выразимо. Значит, все числа, начиная с $M[k]-a_1+1$ выразимы — иначе $M[k]$ было бы не максимальным числом в массиве M.

Следовательно, $P(a_1, \ldots, a_n) = \max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$. □

Используя массив M, можно легко посчитать $P(4, a, b)$ и $P(3, a, b)$. Здесь и далее через $x\ rem\ y$ будем обозначать остаток при делении x на y.

Утверждение 4.14 (Формула для $P(3, a, b)$)**.**

1. *Если* $a \vdots 3$*, то* $P(3, a, b) = P(3, b) = 2b - 2$.

2. *Если* $a \not\vdots 3$ *и* $a + b \not\vdots 3$*, то* $P(3, a, b) = P(3, a) = 2a - 2$.

3. *Если* $a \not\vdots 3$ *и* $a + b \vdots 3$*, то* $P(3, a, b) = \min(2a, b) - 2$.

Доказательство. Первый случай следует из свойства 4 утверждения 4.8.

В остальных случаях $M[a\ rem\ 3] = a$, и весь ответ зависит от величины $M[3 - a\ rem\ 3]$.

Если $b \not\equiv 2a \pmod 3$, то $M[3 - a\ rem\ 3] = 2a$, и $P(3, a, b) = 2a - 2$.

Если $b \equiv 2a \pmod 3$, то $M[3 - a\ rem\ 3] = \min(2a, b)$, и $P(3, a, b) = min(2a, b) - 2$. □

Утверждение 4.15 (Формула для $P(4, a, b)$)**.**

1. *Если* $a \vdots 4, b \not\vdots 2$*, то* $P(4, a, b) = P(4, b)$.

2. *Если* $a \not\vdots 2, b \vdots 4$*, или* $0 \not\equiv a \equiv b \pmod 4$*, или* $a \not\vdots 2, b \geq P(4, a)$*, то* $P(4, a, b) = P(4, a)$.

3. *Если* $a \equiv 2 \pmod 4), b \not\vdots 2$*, то* $P(4, a, b) = a + b - 3$.

4. *Если* $a \not\vdots 2, b \equiv 2 \pmod 4)$*, то* $P(4, a, b) = a + \min(2a, b) - 3$.

5. *Если* $a, b \not\vdots 2$*,* $a + b \vdots 4, b < P(4, a)$*, то* $P(4, a, b) = \max(2a, b) - 3$.

Доказательство. Из свойства 4 утверждения 4.8 можно вывести случай $a \vdots 4, b \not\vdots 2$ и случай $a \not\vdots 2, b \vdots 4$, а из свойства 5 того же утверждения — случай $0 \not\equiv a \equiv b \pmod 4$.

Во всех остальных случаях посчитаем массив M, и по утверждению 4.13 найдём ответ.

Докажем случай $a \not\vdots 2, b \geq P(4, a)$. Тогда $M[a\ rem\ 4] = a$, $M[2] = 2a$, и $M[4 - a\ rem\ 4] = 3a$ — число b слишком большое, чтобы повлиять на этот массив. Таким образом, максимум этого массива равен $3a$, и ответом будет число $3a - 3 = P(4, a)$.

Разберём случай $a \equiv 2 \pmod 4), b \not\vdots 2$. Заметим, что $M[2] = a$, $M[b\ rem\ 4] = b$, $M[4 - b\ rem\ 4] = a + b$. Максимум этого массива — $a + b$, поэтому ответ равен $a + b - 3$.

Разберём случай $a \not\vdots 2, b \equiv 2 \pmod 4)$. Тогда $M[a\ rem\ 4] = a$. На место $M[2]$ есть два кандидата: $2a$ и b. Если $b < 2a$, то $M[2] = b$, и иначе — $2a$. Далее, для $M[4 - a\ rem\ 4]$ имеем два варианта: $3a$ и $a + b$, и если $b < 2a$, то $M[4 - a\ rem\ 4] = a + b$, и иначе — $3a$. Таким образом, если $b < 2a$, то ответ равен $a + b - 3$, а иначе — $3a - 3 = P(4, a)$.

Разберём последний случай: $a, b \not\vdots\, 2, a + b \,\vdots\, 4, b < 3a - 3$. Тогда $M[a\ rem\ 4] = a$, $M[b\ rem\ 4] = b$ и $M[2] = 2a$. В зависимости от относительного расположения $2a$ и b имеем 2 различных возможных максимума массива M, откуда, по утверждению 4.17 находим ответ. $\square$

Алгоритм вычисления функции P

Приведём алгоритм, вычисляющий функцию P. На вход ему подаётся число n числа $a_1, \ldots, a_n$.

Алгоритм вычисляет массив M, а затем, по формуле из леммы 4.13, вычисляет ответ на поставленную задачу. Массив M вычисляется постепенно: изначально в каждой ячейке $M[i]$ значения ∞ из $\mathbb{R}_{\min}$ — это значит, что пока не было найдено ни одного выразимого числа, сравнимого с i по модулю a_1. Если при последующем переборе было найдено некоторое p, сравнимое с i по модулю a_1 и меньшее $M[i]$, то необходимо перезаписать в ячейку $M[i]$ значение p.

Перебор начинается с рассмотрения всех линейных комбинаций с одним слагаемым (здесь и далее через количество слагаемых будем обозначать количество ненулевых коэффициентов λ_i в линейной комбинации вида 4). Затем будем перебирать линейные комбинации, на каждом шаге увеличивая максимальное количество слагаемых вдвое. Таким образом, необходимо сделать $\lceil log_2 n \rceil$ итераций, где $\lceil x \rceil$ — это округление числа x вверх.

Алгоритм 4.16.

1. *Создадим массив M длины a_1, содержащий числа из $\mathbb{R}_{\min}$. Запишем во все ячейки значения ∞.*

2. *На нулевой итерации переберём все линейные комбинации с одним слагаемым. Для этого для каждого a_i и для каждого множителя $0 \leq k < a_1$ проверим, можем ли мы улучшить ответ: сравним $a_i^{\odot k} = a_i \cdot k$ с $M[a_i \cdot k\ rem\ a_1]$, и, если в массиве записано большее число, улучшим ответ: запишем в ячейку $a_i \cdot k\ rem\ a_1$ значение $a_i^{\odot k} = a_i \cdot k$.*

3. *На каждой следующей итерации будем перебирать все пары ячеек $M[i]$ и $M[j]$ и пытаться улучшить ответ: сравним $M[(i + j)\ rem\ a_1]$ с $M[i] \odot M[j]$ (т.е. $M[i] + M[j]$, если оба эти числа меньше ∞, и ∞ иначе), и, если в массиве записано большее число, улучшим ответ: запишем в ячейку $(i + j)\ rem\ a_1$ значение $M[i] \odot M[j]$.*

4. *Всего необходимо сделать $\lceil log_2(n) \rceil + 1$ итераций. После этого ответом будет $\bigoplus\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1 = \max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$.*

Для доказательства корректности докажем следующее утверждение.

Лемма 4.17. *После итерации с номером d в ячейке $M[i]$ лежит минимальное число, сравнимое с i по модулю a_1, которое может быть представлено в виде линейной комбинации с не более чем 2^d слагаемыми, или ∞, если такого числа не существует.*

Доказательство. Докажем утверждение по индукции.

База: $d = 0$. В шаге 1 перебираются все линейные комбинации вида $a_j \cdot k$, где $0 \leq k < a_1$. Рассмотрим линейную комбинацию, которую мы не перебрали: $a_i \cdot m$. Так как мы не перебрали эту комбинацию, то $m \geq a_1$. Но тогда $a_i \cdot m \equiv a_i \cdot (m - a_1) \pmod{a_1}$ и $a_i \cdot m > a_i \cdot (m - a_1) \geq 0$ — эта линейная комбинация не может улучшить ответ. Значит, база верна.

Докажем переход. Предположим, утверждение доказано для $d-1$, докажем его для d. Обозначим массив M в состоянии до итерации с номером d через M'.

Рассмотрим произвольную ячейку $M[i]$, в которой записано число, меньшее ∞. Тогда существуют два индекса j и k такие, что $i = (j+k)\ rem\ a_1$ и $M[i] = M'[j] + M'[k]$. По предположению индукции в каждой ячейке массива M' лежит число, которое может быть представлено в виде линейной комбинации с не более чем 2^{d-1} слагаемыми. Значит, в $M[i]$ лежит число, представимое в виде линейной комбинации с не более чем 2^d слагаемыми. По предположению индукции $M[i] = M'[j] + M'[k] \equiv j + k \equiv i \pmod{a_1}$.

Осталось доказать минимальность $M[i]$. Предположим противное: пусть существует число $x < M[i]$, сравнимое с i по модулю a_1 и представимое в виде линейной комбинации с не более чем 2^d слагаемыми. Тогда эту комбинацию можно разбить на две меньших, в каждой из которых будет не более 2^{d-1} слагаемых. Обозначим суммы этих линейных комбинаций через S_1 и S_2. Пусть $S_1 \equiv j \pmod{a_1}$, а $S_2 \equiv k \pmod{a_1}$.

Тогда $S_1 + S_2 = x < M[i] \le M'[j] + M'[k]$ и или $S_1 < M'[j]$, или $S_2 < M'[k]$. В обоих случаях имеем противоречие с предположением индукции. Значит, предположение индукции верно и для d, что и требовалось доказать. □

Утверждение 4.18. *Алгоритм 4.16 корректен. Время его работы — $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot log\ n)$. Объем затраченной памяти — $O(a_1)$.*

Доказательство. Докажем асимптотики. Первый шаг работает за $O(a_1)$, второй — за $O(a_1 \cdot n)$ (надо перебрать все $1 \le j \le n$ и все $0 \le k < a_1$). Третий работает за $O(a_1^2 \cdot log\ n)$, так как всего $O(log\ n)$ итераций, в каждой из которых надо перебрать пары (i, j), где $0 \le i, j \le a_1$. Четвертый — за $O(a_1)$. Итоговая сложность алгоритма: $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot log\ n)$.

Память тратится только на массив M длины a_1. Значит, алгоритм требует $O(a_1)$ памяти.

Докажем корректность. По лемме 4.17 после итерации с номером d в ячейках массива M лежит информация об оптимальных линейных комбинациях с не более чем 2^d слагаемыми. Следовательно, после итерации с номером $\lceil log_2(n) \rceil$ в массиве M лежит информация об оптимальных линейных комбинациях из n слагаемых, то есть массив M будет наконец посчитан.

Во время работы алгоритма каждая ячейка массива M изменит своё значение хотя бы раз: это следует из корректности функции P. Значит, после последней итерации в массиве M не останется ∞.

Далее ответ может быть получен по лемме 4.13. □

На моём компьютере при $n = 100, a_1 = 100$ алгоритм ни разу не показывал время, большее 0.2 с. При $n = 1000, a_1 = 1000$ алгоритм работал не дольше 0.3 с. При $n = 10000, a_1 = 10000$ алгоритм работает существенно медленнее: в районе 40 с.

5 Верхние оценки функции P

Чтобы оценить значение функции P, оценим значение границы T для графа-ромашки. Для этого введём похожую на T характеристику.

Утверждение 5.1. *Функция $P(a_1, \ldots, a_n)$ оценивается сверху следующими функциями:*

1. $Wi(N) - 2a_n + 2$,
2. $(a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2$,
3. $(a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2)$,

где $N = \sum_{i=1}^{n} a_i - n + 1$ *— количество вершин в* $(a_1, \dots, a_n; 1)$*-ромашке.*

Доказательство. По замечанию 4.4 граница T данной ромашки совпадает с её экспонентой, которая по теореме 2.7 оценивается сверху числом Виландта от количества вершин $Wi(N)$, функцией $\hat{g}(N-2) + N$ и функцией $(\hat{g} - 1)(cr - 1) + (\hat{g} + 1)cd$.

Обхват $(a_1, \dots, a_n)$-ромашки равен a_1, её окружность равна a_n, а длина наибольшего простого пути не превышает $2a_n - 2$.

Далее достаточно применить теорему 4.6. □

References

[1] Imre Simon *On semigroups of matrices over the tropical semiring* Theoretical Informaties and Applications (Tome 28 (1994) no. 3-4, pp. 277-294)

[2] Semere Tsehaye Tesfay. *A Glance at Tropical Operations and Tropical Linear Algebra* Eastern Illinois University, 2015.

[3] David Speyer, Bernd Sturmfels. *Tropical Mathematics* Mathematics Magazine, vol. 82, №3, June 2009.

[4] Ю.М. Волченко *Max-plus алгебра и ее применение*, декабрь 2017

[5] Hans Schneider. *Wielandt's proof of the exponent inequality for primitive nonnegative matrices* Department of Mathematics, University of Wisconsin at Madison, 2002.

[6] Alexander Guterman, Elena Kreines, and Carsten Thomassen. *Linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index* Special Matrices Volume 9, 2021.

[7] Arthur Kennedy-Cochran-Patrick, Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev. *New bounds on the periodicity transient of the powers of a tropical matrix: Using cyclicity and factor rank* Linear Algebra and its Applications, 2020

[8] Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev.
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379514004777

[9] Sergei Sergeev, Hans Schneider. *CSR expansions of matrix powers in max algebra* Transactions of the American Mathematical Society, December 2009

[10] Brualdi RA, Ryser HJ. *Combinatorial matrix theory.* Cambridge: Cambridge University Press; 1991. (Encyclopedia of mathematics and its applications; 39).