Степени тропических матриц и графы

Никита Шапошник, МФТИ
научный руководитель – А.Э. Гутерман

29 ноября 2021

Тропическое полукольцо

$\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями сложения $\oplus$ и умножения $\odot$:

$$a \oplus b = \max(a, b)$$
$$a \odot b = a + b$$

$\mathbb{R}_{\max}$ также называется max-plus алгеброй.
$\mathbb{R}_{min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ с операциями сложения $\oplus$ и умножения $\odot$:

$$a \oplus b = min(a, b)$$
$$a \odot b = a + b$$

Свойства тропического полукольца

Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}$ верно:

- Сложение и умножение ассоциативны.
- Сложение и умножение коммутативны.
- Дистрибутивность: $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$.
- $-\infty$ — нулевой элемент: $a \oplus -\infty = a$.
- 0 — единичный элемент: $a \odot 0 = a$.
- Результат умножения на тропический ноль — тропический ноль: $a \odot -\infty = -\infty$.
- Несуществование обратного по сложению: если $a \neq -\infty$, то $a \oplus b \geq a > -\infty$.

Определения теории графов

1. Ориентированный граф $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$. Петли разрешены, кратные рёбра – нет.
2. $\mathcal{W}^t(i \to j)$ — множество всех путей из вершины i в вершину j длины t;
   Длина пути — это количетсво ребер в нём;
   $\mathcal{W}(i \to j)$ — множество всех путей из вершины i в вершину j. Вершины и ребра в обоих случаях могут повторяться.
3. Граф $\mathcal{G}(V, E)$ со введенной функцией $p : E \to \mathbb{R}$ называется взвешенным графом.
   Весом пути $W = e_1 e_2 \dots e_k$ называется число

$$p(W) = \bigodot_{i=1}^{k} p(e_i).$$

Связь матриц и графов

$A \in M_d(\mathbb{R}_{max}) \longleftrightarrow \mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$, если

1. $|V| = d$;
2. $a_{ij} \neq -\infty \Leftrightarrow (i,j) \in E$ и $a_{ij} = p((i,j))$;
3. $a_{ij} = -\infty \Leftrightarrow (i,j) \notin E$.

Такая матрица A называется матрицей смежности графа $\mathcal{G}$.
Граф, построенный по матрице A, обозначим через $\mathcal{G}(A)$.

Степени тропических матриц и графы

Утверждение

Рассмотрим $A \in M_{d\times d}(\mathbb{R}_{\max})$, $i, j \in V(\mathcal{G}(A))$, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Тогда:*

$$a_{ij}^t = \bigoplus \{p(W) : W \in \mathcal{W}^t(i \to j)\}$$

Доказательство.

База: $t = 0$:

$$A^0 = I = diag(0, 0, ..., 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & 0 & \dots & -\infty \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\infty & -\infty & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Переход:

$$a_{ij}^{t+1} = \bigoplus_{k=1}^{d} a_{ik}^t \odot a_{kj} = \max_k (a_{ik}^t + a_{kj})$$

Максимальный средний вес цикла

Определение

Максимальный средний вес цикла в $\mathcal{G}$:

$$\lambda(A) = \bigoplus_{k=1}^{d} \bigoplus_{i_1,\dots,i_k} (a_{i_1 i_2} \odot \cdots \odot a_{i_k i_1})^{\odot 1/k} =$$

$$= \max_{k=1}^{d} \max_{i_1,\dots,i_k} \frac{(a_{i_1 i_2} + \cdots + a_{i_k i_1})}{k}$$

Звезда Клини

Определение

Для $A \in M_{d \times d}(\mathbb{R}_{\max})$ *с* $\lambda(A) \leq 0$ *определим звезду Клини:*

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i$$

Утверждение

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{d-1} A^i$$

$$(A^*)_{ij} = p(\mathcal{W}(i \to j))$$

Критические циклы и критический подграф

Определение

*Ориентированный цикл называется **критическим**, если у него максимальный средний вес.*

Определение

*Объединение всех критических циклов называется **критическим подграфом**.*

Примитивные матрицы

Определение

- *Матрица* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), A \geq 0$ *называется* *примитивной*, *если* $\exists k \in \mathbb{N} : A^k > 0$.
- *Матрица* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_{\max})$ *называется* *примитивной*, *если* $\exists k \in \mathbb{N} : A^k$ *не содержит* $-\infty$.
- *Наименьшее такое* k *называется* *экспонентой* A *и обозначается через* $exp(A)$.

Теорема (Виландта)

Экспонента примитивной матрицы порядка n *не превосходит* $Wi(n) = n^2 - 2n + 2$.

Примитивность на языке графов

Матрица A примитивна тогда и только тогда, когда существует такое $k \in \mathbb{N}$, что в $\mathcal{G}(A)$ для любых вершин u и v есть путь из u в v длины k.

Сильная связность и неразложимость

Определение

Граф $\mathcal{G}$ зовётся сильно связным, если для любых $u, v \in V(\mathcal{G})$ есть путь из u в v.

Определение

Матрица $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ (или соответствующий ей граф) неразложима, если граф $\mathcal{G}(A)$ сильно связен, иначе разложима. Матрица $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ (или соответствующий ей граф) полностью разложима, если в графе $\mathcal{G}(A)$ нет рёбер между различными компонентами сильной связности.

Индекс цикличности

Определение

Индекс цикличности $\sigma_{\mathcal{G}}$ *графа* $\mathcal{G}$ *равен:*

- *1, если в* $\mathcal{G}$ *есть только одна вершина (с петлей или без).*
- *НОД всех длин ориентированных циклов в* $\mathcal{G}$*, если* $\mathcal{G}$ *сильно связен, и* $|V(\mathcal{G})| \geq 2$.
- *НОК цикличностей всех максимальных его сильно связных подграфов,если* $\mathcal{G}$ *не сильно связен.*

Теорема

Неразложимая матрица примитивна тогда и только тогда, когда ее индекс цикличности равен 1.

Матрицы CSR

Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$, $\mathcal{D}$ — подграф $\mathcal{G}^c(A)$ без тривиальных компонент сильной связности.

Введем обозначение: $M = ((\lambda(A)^- \odot A)^\sigma)^*$, где

- $\lambda(A)$ — максимальный средний вес цикла в $\mathcal{G}(A)$.
- $\lambda(A)^- = -\lambda(A)$ — обратный к $\lambda(A)$ по умножению элемент;
- σ — цикличность критического подграфа $\mathcal{G}^c(A)$.
- $A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i$ — звезда Клини матрицы A.

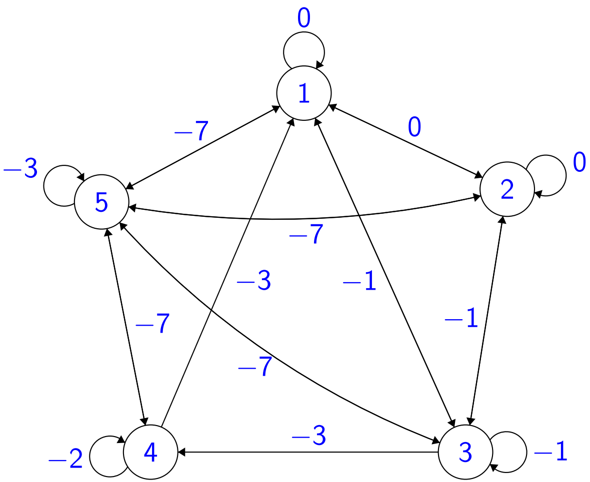
Определим матрицы $C, S, R \in M_r(\mathbb{R}_{\max})$:

$$c_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ если } j \in V(\mathcal{D}) \\ -\infty, \text{ иначе,} \end{cases} \qquad r_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ если } i \in V(\mathcal{D}) \\ -\infty, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$s_{ij} = \begin{cases} \lambda(A)^- \odot a_{ij}, \text{ если } (i,j) \in E(\mathcal{D}) \\ -\infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пример

Рассмотрим следующий граф $\mathcal{G}(A)$:



Пример

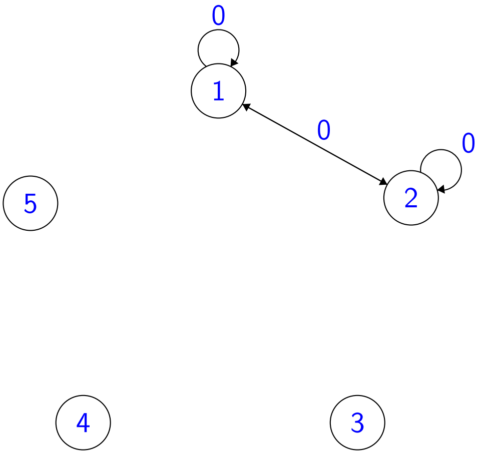
Ему соответствует матрица $A \in M_5(\mathbb{R}_{\max})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -\infty & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -\infty & -7 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -7 \\ -3 & -\infty & -\infty & -2 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$\lambda(A) = 0$.

Пример

Критический подграф: его цикличность равна: $\sigma = 1$.
Возьмем $\mathcal{D} = \mathcal{G}^c(A)$.



Пример

$$M = ((\lambda(A)^{-} \odot A^{\sigma})^{*} = A^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -7 \\ -3 & -3 & -4 & 0 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -1 & -1 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -3 & -3 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -7 & -7 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

Пример

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

Замечание

В дальнейшем матрицы C, S, R, определённые через матрицу A, будем обозначать через $CSR[A]$.

Граница T

Теорема (Sergeev, 2009)

Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ *неразложима и CSR-матрицы определены через некоторый подграф* $\mathcal{D}$ *графа* $\mathcal{G}^c(A)$*. Тогда*
$\exists T(A) \hookrightarrow \forall t \geq T(A):$

$$A^t = \lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A].$$

Замечание

Если $\lambda(A) = 0$, *то* $\forall t \geq T(A):$

$$A^t = CS^t R[A].$$

Вспомогательная матрица B

Введем новую матрицу $B \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\infty, \text{ если } i \text{ или } j \text{ лежат в } \mathcal{D}, \\ a_{ij}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -1 & -3 & -7 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -2 & -7 \\ -\infty & -\infty & -7 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Эта матрица нужна нам для определения следующих границ.

Границы T_1 и T_2

Теорема (Merlet, Nowak, Sergeev, 2014)

Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ *неразложима. Тогда*
$\exists T_1(A,B) \hookrightarrow \forall t \geq T_1(A,B)$:

$$A^t = (\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A]) \oplus B^t.$$

$\exists T_2(A,B) \hookrightarrow \forall t \geq T_2(A,B)$:

$$\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A] \geq B^t.$$

Если $\lambda(A) = 0$, то равенства из определения T_1 и T_2 записываются в виде:

$$A^t = CS^t R[A] \oplus B^t$$
$$CS^t R[A] \geq B^t$$

Как относятся между собой разные границы

Утверждение

$T(A) \leq \max(T_1(A,B), T_2(A,B))$.

Доказательство.

Возьмем $t \geq \max(T_1(A,B), T_2(A,B))$. Тогда:

$$A^t = (\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A]) \oplus B^t$$
$$\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A] \geq B^t$$

и,значит,

$$A^t = \lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A]$$

□

Пример

Для матрицы A *граница* $T(A) = 5$, $T_1(A,B) = 2$, *а* $T_2(A,B) = 5$

Как выбрать подграф $\mathcal{D}$?

$\mathcal{D} = \mathcal{G}^c(A)$ — способ Нахтигалля.

Обозначения

Обозначим через B_N матрицу B, выбранную способом Нахтигалля.
Будем писать $T_{1,N}(A)$ вместо $T_1(A, B_N)$ и $T_{2,N}(A)$ вместо $T_2(A, B_N)$.

Инвариантность относительно умножения на скаляр

Утверждение (Kennedy-Cochran-Patrick, Merlet, Nowak, Sergeev)

Если $A' = \mu \odot A$, *где* $\mu \in \mathbb{R}$, *то*

- $\lambda(A') = \mu \odot \lambda(A)$
- $B_N[A'] = B_N[A]$
- $CSR[A'] = CSR[A]$

Значит, $T_1(A, B)$, $T_2(A, B)$ *инвариантны относительно умножении матрицы на скаляр, что позволяет нам без разграничения общности говорить, что* $\lambda(A) = 0$.

Смысл матриц CSR

Утверждение (Kennedy-Cochran-Patrick, Merlet, Nowak, Sergeev)

Если $\lambda(A) = 0$, то верно следующее тождество:

$$(CS^tR[A])_{ij} = p(\mathcal{W}^{t,\sigma}(i \xrightarrow{\mathcal{G}^c(A)} j)), \qquad (1)$$

где σ обозначает цикличность $\mathcal{G}^c(A)$, $p(\mathcal{W})$ — максимальный вес пути из множества $\mathcal{W}$,

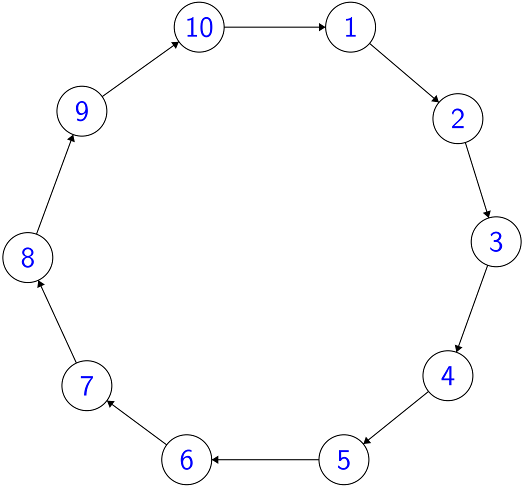
Некоторые оценки для $T_{1,N}(A)$

Теорема (Kennedy-Cochran-Patrick, Merlet, Nowak, Sergeev)

Для любой $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ *имеем:*

1. $T_{1,N}(A) \leq n^2 - 2n + 2$;
2. $T_{1,N}(A) \leq \hat{g}(n-2) + n$, где $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$ — *обхват критического подграфа, то есть наименьшая длина цикла.*

Границы T для цикла



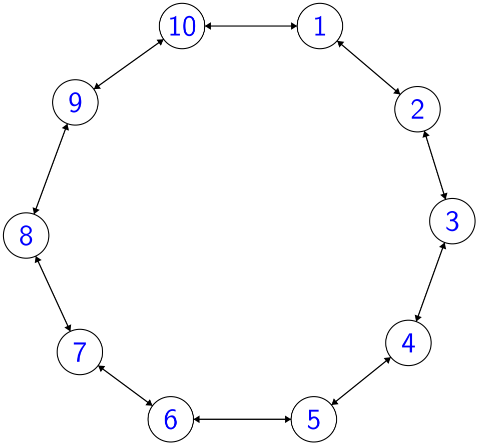
Будем считать, что $\lambda(A) = 0$.

Границы T для цикла

- $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A)$,
- $\sigma = n$,
- $M = (A^n)^* = E^* = E = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & 0 & \dots & -\infty \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\infty & -\infty & \dots & 0 \end{pmatrix}$,
- $C = R = E$, $S = A$, $B = -\infty$.

Значит, $CS^tR[A] = A^t$ для любого неотрицательного t.
Следовательно, $T = T_1 = T_2 = 0$.

Границы T для двустороннего цикла



- Оба цикла длины 2 в этом графе имеют средний вес 0.
- $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A)$.

Границы T для двустороннего цикла, n нечетно

- $\sigma = 1$
- $C = R = M = A^*$
- $S = A$
- $B = -\infty$
- В $CS^tR[A] = A^*A^tA^*$ нет $-\infty$. Значит, $CS^tR[A] = A^*$.
- Следовательно, $CS^tR[A] = A^t$ верно тогда и только тогда, когда $A^t = A^*$.
- $T = exp(A)$
- $exp(A) = n - 1$

Значит, $T = T_1 = n - 1$, $T_2 = 0$.

Границы T для двустороннего цикла, n четно

- $\sigma = 2$
- $C = R = M = (A^2)^*$
- $S = A^2$
- $B = -\infty$
- $A^t = CS^tR = \begin{cases} (A^2)^*, \text{ если } t \text{ четно,} \\ A \odot (A^2)^*, \text{ если } t \text{ нечетно.} \end{cases}$ при $t \geq T(A)$.

$T(A) = T_1(A) = \frac{n}{2}$, $T_2(A) = 0$.

Примеры границ T

Теорема

Если граф $\mathcal{G}(A)$

- *сильно связен*
- *совпадает со своим критическим подграфом*
- $\lambda(A) = 0$
- *его цикличность* $\sigma = 1$
- *для произвольных двух вершин верно, что все пути между ними имеют одинаковый вес*

то $T(A) = T_{1,N}(A) = exp(A)$, *а* $T_{2,N}(A) = 0$.

Спасибо за внимание!