Ю.А. Альпин, И.В. Башкин

Неотрицательные цепные матрицы

§1. Введение

В работе рассматриваются неотрицательные цепные (chainable) матрицы.

Определение 1.1. Прямоугольная неотрицательная матрица $A = (a_{ik})$ без нулевых строк и столбцов называется *цепной*, если для каждой пары её положительных элементов a_{ik} и a_{pq} существует цепочка, имеющая концами эти элементы, то есть последовательность положительных элементов $a_{i_1k_1}, a_{i_2k_2}, \ldots, a_{i_sk_s}$ такая, что
a) $i_1 = i,\ k_1 = k$,
b) $i_s = p,\ k_s = q$,
c) $i_l = i_{l+1}$ или $k_l = k_{l+1},\ l = 1, 2, \ldots, s-1$.

Пара соседних элементов цепочки называется её звеном. Цепное свойство матрицы означает, что, двигаясь по звеньям цепочки, можно перейти от любого положительного элемента A к любому другому положительному элементу. Имея ввиду шахматные аналогии, переход по звену называют ходом ладьи.

Согласно определению 1.1 неотрицательная матрица без нулевых строк и столбцов, в которой есть положительная строка или положительный столбец, является цепной. Жорданова клетка с положительной диагональю тоже цепная матрица. Противоположный пример — блочно-диагональная неотрицательная матрица, она, очевидно, не цепная.

Важным примером цепных матриц являются скрамблинг-матрицы (scrambling matrices). Так называются неотрицательные матрицы, в которых для любых двух строк найдётся столбец, в котором эти строки имеют положительные элементы. Нетрудно видеть, что всякая скрамблинг-матрица — цепная, причём от любого её положительного элемента можно перейти к любому другому положительному элементу, сделав не более трёх ходов ладьи.

Первыми (и основными) работами, в которых исследовались цепные матрицы являются, по-видимому, статьи [1, 2]. Под названием T-матриц цепные матрицы были введены в [3] для исследования цепей Маркова. О связи цепных матриц с другими известными классами матриц известно следующее [1,4,5]: класс вполне неразложимых матриц есть пересечение класса цепных матриц и класса матриц с дважды стохастическим портретом (матрица принадлежит этому классу, если она имеет то же расположение ненулевых элементов, что и некоторая дважды стохастическая матрица.) Здесь мы дадим новое описание цепных матриц и укажем некоторые новые аспекты этого класса матриц.

Материал расположен следующим образом. В §2 предлагается характеристика цепных матриц, основанная на понятии пересекающихся строк, в отличие от принятого в литературе языка двудольных графов. В §3 вводится и изучается понятие цепного ранга неотрицательной матрицы. В §4 цепные матрицы описываются в терминах вполне неразложимых матриц. В §5 цепные матрицы применяются к исследованию матриц Сарымсакова — класса стохастических матриц, привлекшего внимание после относительного забвения. Наконец, в §6 рассматриваются потенциально цепные матрицы.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1478.

§2. Характеристика цепных матриц

Обозначим через $\mathbb{P}$ множество прямоугольных неотрицательных матриц без нулевых строк и столбцов. Пусть дана $(n \times m)$-матрица $A \in \mathbb{P}$. Говорят, что i-ая и j-ая строки A *пересекаются*, если они имеют положительные элементы в некотором общем столбце. Следовательно, скрамблинг-матрица это матрица, у которой пересекаются любые две строки.

Введём бинарное отношение $\pi(A)$ на множестве индексов $\mathbf{n} = \{1, \ldots, n\}$, положив, что $(i, p) \in \pi(A)$, если i-ая и p-ая строки матрицы A пересекаются. Ясно, что отношение $\pi(A)$ рефлексивно и симметрично, однако легко показать, что оно не всегда транзитивно. Обозначим через $\widehat{\pi}(A)$ транзитивное замыкание отношения $\pi(A)$. Оно определяется так: $(i, p) \in \widehat{\pi}(A)$, если существует последовательность индексов

$$i = i_1, i_2, \ldots, i_s = p, \tag{1}$$

в которой любые два соседних индекса находятся в отношении $\pi(A)$.

Лемма 2.1. Для любой $(n \times m)$-матрицы $A \in \mathbb{P}$ бинарное отношение $\widehat{\pi}(A)$ на множестве $\mathbf{n}$ является отношением эквивалентности.

Доказательство очевидно.

Прежде, чем приступить к доказательству первой теоремы о цепных матрицах, напомним два необходимых в дальнейшем понятия.

Матрицы A и B называются *перестановочно эквивалентными*, если существуют такие матрицы перестановок P и Q, что $PAQ = B$. Легко видеть, что отношение перестановочной эквивалентности $(n \times m)$-матриц рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности в терминологии теории бинарных отношений. Если матрица $A \in \mathbb{P}$ цепная, то все перестановочно эквивалентные ей матрицы тоже, очевидно, цепные.

Со всякой $(n \times m)$-матрицей $A = (a_{ij}) \in \mathbb{P}$ связан *ассоциированный оператор* (см., например, [5]), отображающий непустые подмножества $\alpha \subseteq \mathbf{n}$ в непустые подмножества множества $\mathbf{m} = \{1, \ldots, m\}$. Ассоциированный оператор определяется формулой

$$\alpha \mapsto \alpha A = \{j | a_{ij} > 0, i \in \alpha\}. \tag{2}$$

Таким образом, множество $\alpha A \subseteq \mathbf{m}$ состоит из номеров столбцов матрицы A, имеющих положительные элементы в строках с номерами из α. Как видно из (2), ассоциированный оператор определяется комбинаторными свойствами матрицы A, то есть расположением в A положительных элементов.

Теорема 2.1. *Пусть дана $(n \times m)$-матрица $A = (a_{ij})$ из $\mathbb{P}$. Следующие условия равносильны:*

1) *матрица A цепная,*

2) $(i,j) \in \widehat{\pi}(A)$ *для любых* $i,j \in \mathbf{n}$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Предположим противное: число классов отношения $\widehat{\pi} = \widehat{\pi}(A)$ равно $h \geq 2$. Обозначим классы эквивалентности через $\widehat{\pi}_1, \widehat{\pi}_2, \ldots, \widehat{\pi}_h$. Докажем, что подмножества

$$\widehat{\pi}_1 A, \widehat{\pi}_2 A, \ldots, \widehat{\pi}_h A \tag{3}$$

образуют разбиение множества $\mathbf{m}$. Вначале заметим, что подмножества (3) образуют покрытие $\mathbf{m}$. Действительно, ввиду отсутствия нулевых столбцов в A для любого $j \in \mathbf{m}$ существует $i \in \mathbf{n}$, такой, что $a_{ij} > 0$. Тогда $j \in \pi_s A$, где π_s — класс, содержащий i. Далее, если π_s и π_t — различные классы, то строки матрицы A с номерами $i \in \pi_s$, $k \in \pi_t$ не пересекаются. Это значит, что $\pi_s A \cap \pi_t A = \emptyset$.

Пусть матрица P переставляет строки A так, чтобы первые позиции заняли строки с номерами из π_1, затем следовали строки с номерами из π_2 и т. д. Обозначим через Q матрицу, переставляющую на первые места столбцы с номерами из $\pi_1 A$, на последующие места — столбцы с номерами из $\pi_2 A$ и т. д. Тогда получим блочную матрицу вида

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & A_h \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матрица (4), очевидно, не цепная, следовательно, перестановочно эквивалентная ей матрица A тоже не цепная, что противоречит условию 1).

$2 \Rightarrow 1$. Если положительные элементы расположены в одной строке, то от первого элемента до второго можно перейти не более, чем за один ход ладьи (ноль ходов, если элементы совпадают). Соответственно, если две строки матрицы пересекаются, то от любого положительного элемента первой строки можно перейти к любому положительному элементу второй строки не больше, чем за три хода. По условию 2) для любых положительных элементов элементов a_{ij} и a_{pq} существует такая последовательность (1), что строки с номерами i_l и i_{l+1} пересекаются ($l = 1, \ldots, s-1$). Следовательно, можно перейти от элемента a_{ij} к элементу a_{pq}, сделав не более, чем $3s$ ходов ладьи.

Из доказательства теоремы 2.1 непосредственно вытекают следующие известные утверждения, см. [1,5]:

Следствие 2.1 *Любая матрица* $A \in \mathbb{P}$ *либо является цепной, либо независимыми перестановками строк и столбцов приводится к виду* (4)*, где* $A_1, A_2, \ldots, A_h$ *— цепные матрицы.*

Следствие 2.2. *Матрица* $A \in \mathbb{P}$ *является цепной тогда и только тогда, когда не существует матриц перестановок* P *и* Q*, таких, что матрица* PAQ *имеет вид:*

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Итак, матрица A — не цепная, если она преобразуется к форме (5) посредством некоторых матриц перестановок P и Q. Нетрудно видеть, что указанное пребразование возможно в точности тогда, когда существует разбиение множества $\mathbf{n}$ на подмножества α и $\overline{\alpha}$, такие, что любые две строки матрицы A с номерами из разных подмножеств не пересекаются, т. е. не пересекаются подмножества $\alpha A \subset \mathbf{m}$ и $\overline{\alpha}A \subset \mathbf{m}$. Поскольку в A нет нулевых столбцов, то $\alpha A \cup \overline{\alpha}A = \mathbf{m}$, следовательно, подмножества αA и $\overline{\alpha}A$ образуют разбиение множества $\mathbf{m}$. Мы получили «внутреннее» описание цепной матрицы, не использующее перестановок строк и столбцов:

Предложение 2.1. *Матрица $A \in \mathbb{P}$ размера $n \times m$ не является цепной тогда и только тогда, когда существует такое разбиение $\{\alpha, \overline{\alpha}\}$ множества $\boldsymbol{n}$, что подмножества $\{\alpha A, \overline{\alpha}A\}$ образуют разбиение множества $\boldsymbol{m}$.*

Приведём описание цепных матриц на языке графов.

Определение 2.1. Графом пересечений $(n \times m)$-матрицы $A \in \mathbb{P}$ будем называть граф с множеством вершин $\mathbf{n}$, в котором i-ая и j-ая вершины соединены ребром, если i-я и j-я строки A пересекаются.

Как видно из определения 2.1, граф пересечений матрицы A есть граф бинарного отношения $\pi = \pi(A)$: вершины i и j смежны, если $(i, j) \in \pi$. Следовательно, теорему 2.1 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 2.2. *Для матрицы $A \in \mathbb{P}$ следующие условия равносильны:*
1) *матрица A цепная,*
2) *граф пересечений матрицы A связен,*

Замечание 2.1. Определение графа пересечений матрицы $A \in \mathbb{P}$ сходно с известным в теории графов понятием графа пересечений системы множеств. Напомним его. Пусть S — непустое множество, $F = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ — семейство различных непустых подмножеств, объединение которых равно S. Графом пересечений семейства F называется граф с множеством вершин $\mathbf{n}$, в котором i-ая и j-ая вершины соединены ребром, если $i \neq j$ и $S_i \cap S_j \neq \varnothing$. Граф пересечений, заметим, не имеет петель.

Положим, что неотрицательная строка $x = (x_1, \dots, x_m)$ задаёт подмножество $\{x\} = \{i | x_i > 0\}$ множества $\mathbf{m}$. Тогда строки $(n \times m)$-матрицы $A \in \mathbb{P}$ определяют систему n непустых подмножеств множества $\mathbf{m}$, образующих покрытие множества $\mathbf{m}$. Далее, пересечение i-й и j-й строк матрицы A равносильно непустому пересечению соответствующих подмножеств. Сходство определения 2.1 с определением графа пересечений системы множеств очевидно, но при этом имеется два отличия. Во-первых, мы считаем, что всякая строка пересекается сама с собой, поэтому всякая вершина графа пересечений матрицы снабжена петлей. Во-вторых, строки матрицы необязательно различны, значит, семейство соответствующих подмножеств может содержать равные подмножества.

§3. Цепной ранг неотрицательной матрицы

Определение 3.1. Цепным рангом $(n \times m)$-матрицы $A \in \mathbb{P}$ называется число классов отношения эквивалентности $\hat{\pi}(A)$ на множестве $\mathbf{n}$. Обозначим цепной ранг символом $\mathrm{crk}(A)$.

Теорему 2.1 можно переформулировать в терминах цепного ранга:

Предложение 3.1. *Матрица $A \in \mathbb{P}$ цепная* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{crk}(A) = 1$.

Нетрудно видеть, что цепной ранг матрицы A есть не что иное, как число связных компонент графа пересечений матрицы A.

Из дальнейших утверждений этого параграфа видно, что свойства цепного ранга неотрицательной матрицы аналогичны свойствам классического ранга матрицы над полем. Например, транспонирование матрицы не меняет её ранга:

Предложение 3.2. *Для любой матрицы* $A \in \mathbb{P}$

$$\mathrm{crk}(A) = \mathrm{crk}(A^T).$$

Доказательство. Вначале предположим, что $\mathrm{crk}(A) = h \geq 2$ и матрица A приведена к виду (4). Транспонируя матрицу (4), получим:

$$Q^T A^T P^T = \begin{pmatrix} A_1^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^T & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & A_h^T \end{pmatrix}, \tag{6}$$

откуда видно, что $\mathrm{crk}(A) \leq \mathrm{crk}(A^T)$, т. е. транспонирование не уменьшает цепной ранг матрицы. Применяя это соображение к матрице A^T, получим обратное неравенство:

$$\mathrm{crk}(A^T) \leq \mathrm{crk}((A^T)^T) = \mathrm{crk}(A).$$

Теперь пусть $\mathrm{crk}(A) = 1$. Предположим, что $\mathrm{crk}(A^T) \geq 2$, тогда, согласно только что доказанному, получим $\mathrm{crk}((A^T)^T) = \mathrm{crk}(A) \geq 2$ в противоречии с данным условием.

Отметим очевидное следствие предложения 3.2:

Следствие 3.1. *Если A — цепная матрица, то транспонированная матрица A^T тоже цепная.*

Лемма 3.1. *Пусть для матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{kl})$ из $\mathbb{P}$ существует произведение AB. Если i-я и j-я строки A пересекаются, то строки с этими номерами пересекаются и в матрице AB, т. е.*

$$\pi(A) \subseteq \pi(AB). \tag{7}$$

Действительно,

$$a_{ik} > 0, a_{jk} > 0, b_{kl} > 0 \;\Rightarrow\; (AB)_{il} \geq a_{ik}b_{kl} > 0, (AB)_{jl} \geq a_{jk}b_{kl} > 0.$$

Лемма 3.2. *Пусть $A, B \in \mathbb{P}$ — матрицы с одинаковым числом строк. Тогда*

$$\pi(A) \subseteq \pi(B) \;\Rightarrow\; \mathrm{crk}(B) \leq \mathrm{crk}(A).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\pi(A) \subseteq \pi(B) \;\Rightarrow\; \hat{\pi}(A) \subseteq \hat{\pi}(B).$$

Из последнего вложения следует, что число классов отношения $\hat{\pi}(B)$ не больше, чем число классов $\hat{\pi}(A)$. Согласно определению 3.1 это значит, что $\mathrm{crk}(B) \leq \mathrm{crk}(A)$.

Теорема 3.1. *Если для матриц $A, B \in \mathbb{P}$ существует произведение AB, то*
$$\operatorname{crk}(AB) \le \min(\operatorname{crk}(A), \operatorname{crk}(B)).$$

Доказательство. По лемме 3.1 имеем вложение (7), откуда по лемме 3.2 следует неравенство
$$\operatorname{crk}(AB) \le \operatorname{crk}(A). \tag{8}$$
Мы доказали, что цепной ранг произведения двух матриц не больше, чем цепной ранг первого сомножителя. Согласно этому свойству
$$\operatorname{crk}((AB)^T) = \operatorname{crk}(B^T A^T) \le \operatorname{crk}(B^T).$$
Учитывая предложение 3.2, получаем: $\operatorname{crk}(AB) \le \operatorname{crk}(B)$. Отсюда и из (8) следует утверждение теоремы.

Следствие 3.1. ([2,5]) *Пусть для матриц $A, B \in \mathbb{P}$ существует произведение AB. Если A или B цепная матрица, то и AB цепная матрица.*

Теорема 3.2. *Для любой матрицы $A \in \mathbb{P}$*
$$\operatorname{crk}(AA^T) = \operatorname{crk}(A) = \operatorname{crk}(A^T A). \tag{9}$$

Доказательство. Докажем только первое из равенств (9), второе доказывается аналогично. Если $\operatorname{crk}(A) = 1$, то по теореме 3.1
$$\operatorname{crk}(AA^T) \le \operatorname{crk}(A) = 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{crk}(AA^T) = 1.$$
Пусть $\operatorname{crk}(A) = h \ge 2$. Из равенств (4) и (6) следует, что
$$PAA^T P^T = \begin{pmatrix} A_1A_1^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2A_2^T & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & A_hA_h^T \end{pmatrix}, \tag{10}$$
где P — матрица перестановки. По теореме 3.1 $\operatorname{crk}(AA^T) \le \operatorname{crk}(A)$, а из вида матрицы (10) следует, что $\operatorname{crk}(AA^T) \ge \operatorname{crk}(A)$, следовательно, $\operatorname{crk}(AA^T) = \operatorname{crk}(A)$.

Докажем, что перестановочно эквивалентные матрицы имеют одинаковый цепной ранг.

Предложение 3.4. *Пусть даны $A \in \mathbb{P}$ — матрица размера $n \times m$, P, Q — матрицы перестановок порядков n и m. Тогда*
$$\operatorname{crk}(PAQ) = \operatorname{crk}(A).$$

Доказательство. Из теоремы 3.1 легко выводится, что цепной ранг произведения любого количества матриц не больше, чем цепной ранг любого из сомножителей. Пользуясь этим фактом, получим, с одной стороны,
$$\operatorname{crk}(PAQ) \le \operatorname{crk}(A),$$
с другой стороны,
$$\operatorname{crk}(A) = \operatorname{crk}(P^T PAQQ^T) \le \operatorname{crk}(PAQ).$$
Сравнивая эти неравенства, получим доказательство предложения.

§4. Вполне неразложимые матрицы и цепные матрицы

В этом параграфе мы установим связь между цепными, неразложимыми и вполне неразложимыми матрицами. Напомним некоторые определения.

Определение 4.1. Неотрицательная матрица A порядка n называется разложимой, если существует матрица перестановки P, такая, что

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}, \text{ где } A_1, A_2 \text{ — квадратные матрицы.} \tag{11}$$

В терминах ассоциированного оператора разложимость матрицы определяется следующим образом: матрица A разложима, если существует собственное подмножество $\alpha \subseteq \mathbf{n}$, такое, что $\alpha A \subseteq \alpha$. Матрица, не являющаяся разложимой, называется неразложимой.

Определение 4.2. Неотрицательная матрица A порядка n называется частично разложимой, если существуют матрицы перестановок P и Q, преобразующие A к виду:

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}, \text{ где } A_1, A_2 \text{ — квадратные матрицы.} \tag{12}$$

Матрица, не являющаяся частично разложимой, называется вполне неразложимой.

Следующий критерий вполне неразложимости матриц хорошо известен (см., например, [5]). Приводим его, используя ассоциированный оператор:

Теорема 4.1. *Неотрицательная матрица A порядка n вполне неразложима тогда и только тогда, когда*

$$\alpha \subset \mathbf{n} \;\Rightarrow\; |\alpha| < |\alpha A|. \tag{13}$$

Неотрицательная матрица $A = (a_{ij})$ называется *комбинаторно симметричной*, если $a_{ij} > 0 \;\Rightarrow\; a_{ji} > 0$.

Лемма 4.1. *Цепная комбинаторно симметричная матрица A неразложима.*

Доказательство. Предположим, что A разложима, т. е. существует такая матрица перестановки P, что выполняется равенство (11). Матрица PAP^T тоже комбинаторно симметрична, следовательно, $A_{12} = 0$, что противоречит цепному свойству A.

Следующая лемма вытекает из теоремы о том, что вполне неразложимая матрица есть цепная матрица с дважды стохастическим портретом ([1,5]). Мы, однако, приведём независимое элементарное доказательство этой леммы.

Лемма 4.2. *Всякая вполне неразложимая матрица — цепная матрица.*

Доказательство. Предположим противное: некоторая вполне неразложимая матрица A порядка n, не является цепной, следовательно, приводится к виду (5). Обозначим через n_1, n_2 количества строк в первой и второй блочных строках, через k_1, k_2 — количества столбцов в первом и втором блочных столбцах матрицы (5). Из теоремы 4.1 следуют неравенства $n_1 < k_1$, $n_2 < k_2$, но это противоречит тому, что $n_1 + n_2 = k_1 + k_2 = n$.

Теорема 4.2. *Пусть* $A = (a_{ij})$ *— неотрицательная* $n \times m$*-матрица. Следующие условия равносильны:*

1) *матрица* A *цепная,*
2) *матрица* AA^T *неразложима,*
3) *матрица* AA^T *вполне неразложима,*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. По теореме 3.2 матрица AA^T цепная. Согласно лемме 4.1 цепная симметричная матрица AA^T неразложима.

$2 \Rightarrow 3$. Диагональные элементы матрицы AA^T положительны, следовательно, для любого подмножества $\alpha \subset \mathbf{n}$ имеем вложение $\alpha \subseteq \alpha(AA^T)$. При этом равенство $\alpha = \alpha(AA^T)$ невозможно, т. к. по определению 4.1 это означало бы разложимость матрицы AA^T. Итак, $\alpha \subset \alpha(AA^T)$ для любого $\alpha \subset \mathbf{n}$, что, согласно теореме 4.1, означает вполне неразложимость матрицы AA^T.

$3 \Rightarrow 1$. По лемме 4.2 матрица AA^T цепная, следовательно, по теореме 3.2, A тоже цепная.

Замечание 4.1. Теорема 4.2 была доказана в дипломной работе Т.А. Хорьковой, выполненной в 2004 г. под руководством первого из авторов. Представленное здесь доказательство существенно проще.

Замечание 4.2. Теоремы 4.2 и 2.2 связаны следующим образом: заменив положительные элементы матрицы AA^T единицами, получим матрицу смежности графа пересечений матрицы A.

§5. Матрицы Сарымсакова

Стохастические матрицы, введённые Т.А. Сарымсаковым в работе [3], замечательны тем, что произведение любых $n-1$ матриц порядка n этого типа является скрамблинг-матрицей. Это свойство играет важную роль в теории неоднородных цепей Маркова и математической проблеме достижения консенсуса. Недавние результаты относительно матриц Сарымсакова см. в статьях [6,7] и указанной в них литературе. В этом параграфе матрицы Сарымсакова определяются и изучаются с помощью цепных матриц.

Вслед за работой [2] будем называть стохастической любую прямоугольную неотрицательную матрицу, в которой сумма элементов каждой строки равна единице и, что существенно для дальнейшего, не имеющую нулевых столбцов. Так определённые стохастические матрицы принадлежат, очевидно, классу $\mathbb{P}$. Класс матриц Сарымсакова, будем, когда удобно, обозначать через $\mathcal{S}$. В определении класса $\mathcal{S}$ центральное место занимает понятие T-матрицы. Стохастическая матрица $A = (a_{ij})$ согласно [2] называется T-матрицей, если существует разбиение всех строк на две непустые части α и $\overline{\alpha}$ и разбиение всех столбцов на две непустые части β и $\overline{\beta}$ такие, что:

1) $a_{ij} \geq 0$, когда $i \in \alpha$ и $j \in \beta$ или $i \in \overline{\alpha}$ и $j \in \overline{\beta}$,
2) $a_{ij} = 0$ во всех остальных случаях.

Определение T-матрицы фактически является определением нецепной (следовательно, и цепной) матрицы. Действительно, сравнивая это определение с предложением 2.2, можно видеть, что для стохастической $(n \times m)$-матрицы A свойства 1) и 2) разбиений $\alpha \cup \overline{\alpha} = \mathbf{n}$ и $\beta \cup \overline{\beta} = \mathbf{m}$ равносильны тому, что $\alpha A = \beta$, $\overline{\alpha} A = \overline{\beta}$.

На основе понятия T-матрицы в [2] вводится класс $\mathcal{S}$ прямоугольных стохастических матриц, как матриц, не представимых в виде

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где стохастическая подматрица A_1 является T-матрицей, в которой число столбцов не больше числа строк. Под представимостью матрицы A в виде (14) подразумевается существование таких матриц перестановок P и Q, что PAQ имеет вид (14). Вторая блочная строка и второй блочный столбец в (14) могут отсутствовать.

Таким образом, согласно определению автора статьи [2] матрица A входит в класс $\mathcal{S}$, если она не содержит нецепных стохастических подматриц, в которых столбцов не больше, чем строк. Определим матрицы Сарымсакова не через отрицание, а дадим «положительное» определение.

Определение 5.1. Стохастическая матрица A называется матрицей Сарымсакова, если любая стохастическая подматрица A является либо цепной матрицей, либо нецепной матрицей, в которой столбцов больше, чем строк.

Из определения 5.1 непосредственно следует

Предложение 5.1. Матрица Сарымсакова размера $n \times m$ при $n \geq m$ является цепной матрицей. В частности, любая квадратная матрица Сарымсакова — цепная.

Пусть дана стохастическая $(n \times m)$-матрица A. Стохастическую подматрицу, расположенную в строках с номерами из множества $\alpha \subseteq \mathbf{n}$, обозначим через A_α. Номера столбцов матрицы A_α составляют множество $\alpha A \subseteq \mathbf{m}$.

Предложение 5.2. Всякая вполне неразложимая стохастическая матрица является матрицей Сарымсакова.

Доказательство. Пусть дана вполне неразложимая стохастическая матрица A порядка n. По теореме 4.1 имеем $\alpha \subset \mathbf{n} \;\Rightarrow\; |\alpha| < |\alpha A|$. В случае $\alpha = \mathbf{n}$, т. е. когда $A_\alpha = A$, матрица A является цепной по лемме 4.2.

В [7] рассматривается класс $\mathcal{M}$ неотрицательных матриц, более широкий, чем класс $\mathcal{S}$.

Определение 5.2. Стохастическая $(n \times m)$-матрица A принадлежит классу $\mathcal{M}$, если любая стохастическая подматрица A является либо цепной матрицей, либо нецепной матрицей, в которой столбцов не меньше, чем строк.

Заметим следующее: пусть в матрице A n строк, тогда для любого подмножества $\alpha \subseteq \mathbf{n}$

$$(AB)_\alpha = A_\alpha B_\beta, \text{ где } \beta = \alpha A. \tag{15}$$

Предложение 5.3. Пусть матрицы A и B принадлежат классу $\mathcal{M}$. Если произведение AB существует, то $AB \in \mathcal{M}$. При этом, если $A \in \mathcal{S}$ или $B \in \mathcal{S}$, то $AB \in \mathcal{S}$.

Доказательство. Пусть в A n строк. Предположим, что матрица $(AB)_\alpha$ не цепная и докажем, что столбцов в этой матрице не меньше, чем строк. Действительно, в формуле (15) матрицы A_α и B_β по следствию 3.1 тоже не цепные. Согласно определению 5.2 для этих матриц

$$|\alpha| \le |\alpha A| \le |\alpha(AB)|, \tag{16}$$

следовательно, $|\alpha| \le |\alpha(AB)|$.

Теперь пусть $A \in \mathcal{S}$ или $B \in \mathcal{S}$, тогда хотя бы одно из неравенств (16) строгое, следовательно, $|\alpha| < |\alpha(AB)|$. Этим доказано включение $AB \in \mathcal{S}$.

Замечание 5.1. Предложение 5.3 не сформулировано явно, но фактически доказано в [7]. То, что произведение матриц из $\mathcal{S}$ лежит в $\mathcal{S}$, доказано в [8].

Предложение 5.4. ([9,10]) Произведение любых $n-1$ матриц Сарымсакова

$$A_1 A_2 \cdots A_{n-1},$$

где n — число строк в A_1, является скрамблинг-матрицей.

Доказательство. Обобщая равенство (15), легко доказать: для любого $\alpha \subseteq \mathbf{n}$

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)_\alpha = (A_1)_{\alpha_1} (A_2)_{\alpha_2} \cdots (A_k)_{\alpha_k}, \tag{17}$$

где $\alpha = \alpha_1$, $\alpha_{l+1} = \alpha_l A_l$ $(l = 1, \ldots, k-1)$. Пусть множество α в формуле (17) состоит из двух элементов: $\alpha = \{i, j\}$, и предположим, что матрица (17) не является цепной. По следствию 3.1 ни один из сомножителей в произведении (17) тоже не является цепной матрицей, следовательно, $|\alpha_l| < |\alpha_{l+1}|$, $l = 1, \ldots, k-1$. Нетрудно вычислить, что в матрице (17) не меньше, чем $2+k$ столбцов. Поскольку $2+k \le n$, то $k \le n-2$. Значит, при $k = n-1$ матрица (17) цепная, т. е. i-я и j-я строки матрицы $A_1 A_2 \cdots A_{n-1}$ пересекаются. На выбор i и j не накладывалось никаких ограничений, следовательно, $A_1 A_2 \cdots A_{n-1}$ — скрамблинг-матрица.

Определение 5.3. Неотрицательная матрица A порядка n называется матрицей Холла, если $|\alpha| \le |\alpha A|$ для любого подмножества $\alpha \subseteq \mathbf{n}$.

Из теоремы 4.1 следует, что вполне неразложимые матрицы являются матрицами Холла. О свойствах матриц Холла см. [11].

Из определений 5.2 и 5.3 следует

Предложение 5.6. Матрицы Холла принадлежат классу $\mathcal{M}$.

Интересно было бы найти какие-нибудь естественные условия принадлежности матрицы классу S. В этом направлении в [7] доказаны предложения, для цитирования которых напомним используемые в них определения.

Стохастическая матрица A называется SIA-матрицей (stochastic indecomposable aperiodic), если $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ существует и является матрицей с одинаковыми строками. Заметим, что здесь неразложимость, в отличие от определения 4.1, понимается в том смысле, что не существует переставляющей матрицы P, приводящей A к виду $PAP^T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_3 \end{pmatrix}$ с квадратными диагональными блоками. Другое название для SIA-матрицы — регулярная матрица [12]. Комбинаторный признак регулярности матрицы A заключается в том, что при некотором показателе k матрица A^k содержит положительный столбец [12].

Неотрицательная матрица называется дважды стохастической, если сумма элементов каждой строки и каждого столбца равна единице.

Предложение 5.7.([7]) Пусть стохастическая матрица A является комбинаторно симметричной SIA-матрицей. Тогда

1) $A^2 \in \mathcal{S}$,

2) если, дополнительно, A симметрична, то $A \in \mathcal{S}$.

Предложение 5.8. ([7]) Пусть A комбинаторно симметричная дважды стохастическая матрица. Если A — SIA-матрица, то $A \in \mathcal{S}$.

Следующее утверждение уточняет и дополняет предложения 5.7 и 5.8.

Предложение 5.9. Пусть A — комбинаторно симметричная SIA-матрица. Тогда

1) матрица A примитивная,

2) матрица A^2 вполне неразложима,

3) если, дополнительно, матрица A симметрична или имеет дважды стохастический портрет, то A вполне неразложима.

Доказательство. 1) Свойство комбинаторной симметричности сохраняется при возведении матрицы в степень, т. е. если A — комбинаторно симметрична, то матрицы $A^k, k = 1, 2, \ldots,$ также комбинаторно симметричны. Существует показатель m, при котором матрица A^m имеет положительный столбец. Пусть j-й столбец положителен, тогда в силу комбинаторной симметричности j-я строка тоже положительная. Нетрудно убедиться, что матрица A^{2m} положительная.

2) Степень примитивной матрицы примитивна, поэтому A^2 примитивная, следовательно, неразложимая, матрица. В силу комбинаторной симметричности она имеет положительную диагональ, следовательно, по лемме 4.1 является вполне неразложимой матрицей.

3) Пусть, дополнительно, A — симметричная матрица. Предположим, что она частично разложима. Значит, существуют матрицы перестановок P и Q, такие, что

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{12} & A_2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Матрица A^2 примитивна, однако из равенств

$$PAQ(PAQ)^T = PAQQ^T A^T P^T = PAA^T P^T = PA^2 P^T = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ A_{12}^{(2)} & A_2^2 \end{pmatrix}$$

следует, что матрица A^2 разложима. Полученное противоречие доказывает вполне неразложимость матрицы A.

Теперь пусть, дополнительно, A — дважды стохастическая матрица. Снова предположим, что A частично разложима и имеет место преобразование (18). По свойству дважды стохастичности матрицы A имеем $A_{12} = 0$. Рассмотрим матрицу

$$PAQ(PAQ)^T = PAA^T P^T = \begin{pmatrix} A_1 A_1^T & 0 \\ 0 & A_2 A_2^T \end{pmatrix}. \tag{19}$$

По свойству комбинаторной симметричности матрицы A расположение положительных элементов в AA^T совпадает с их расположением в примитивной матрице A^2. Однако последнее равенство в (19) противоречит примитивности матрицы A^2.

Как видно из предложения 5.9, условия предложений 5.7 и 5.8 обеспечивают принадлежность матрицы известному классу вполне неразложимых матриц. Существуют ли сколько-нибудь общие условия принадлежности матрицы классу матриц Сарымсакова, но необязательно классу вполне неразложимых матриц? Этот вопрос остаётся открытым.

§6. Потенциально цепные матрицы

Из теоремы 3.1 следует, что для квадратной матрицы $A \in \mathbb{P}$ числа $\mathrm{crk}(A^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, образуют невозрастающую последовательность. Если при некотором показателе k имеем $\mathrm{crk}(A^k) = 1$, то назовём матрицу A *потенциально цепной*, а наименьший из таких показателей — *цепным индексом* матрицы A.

Структура потенциально цепных матриц неясна, но в некоторых случаях её можно описать в известных терминах:

Предложение 6.1 Неразложимая матрица A является потенциально цепной в точности тогда, когда она примитивна.

Действительно, если A примитивна, то существует показатель k, при котором матрица A^k положительная, следовательно, цепная. Если же A импримитивна с индексом импримитивности $r > 1$, то по теореме Фробениуса она перестановочно подобна матрице вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{r-1,r} \\ A_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

с квадратными нулевыми блоками. Матрица A^k содержит ровно r ненулевых блоков — по одному в каждой блочной строке и каждом блочном столбце, следовательно, $\mathrm{crk}(A^k) \geq r > 1$ при любом k.

Цепной индекс является характеристикой неотрицательной цепной матрицы, аналогичной экспоненту примитивной матрицы и скрамблинг-индексу матрицы, некоторая степень которой является скрамблинг-матрицей. Напомним, что экспонентом примитивной матрицы A называется наименьший показатель k, при котором A^k — положительная матрица. Классический результат Виландта утверждает, что для матриц порядка n экспонент не больше, чем $(n-1)^2 + 1$, причём эта оценка точная и достигается на матрице

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Скрамблинг-индекс первоначально был введён для примитивных матриц, а в наиболее общей постановке, для произвольной неотрицательной матрицы A определяется как наименьший показатель k, при котором A^k — скрамблинг-матрица ([13]). Если такого показателя не существует, то скрамблинг-индекс полагается равным нулю. В работе [13] на языке графов доказано, что скрамблинг-индекс неотрицательной матрицы порядка n не больше, чем $\lceil((n-1)^2+1)/2\rceil$ и равен этому числу для матрицы Виландта (21) при $n \geq 3$.

Предложение 6.2. Если матрица A или транспонированная матрица A^T имеет положительный скрамблинг-индекс, то A — потенциально цепная матрица.

Доказательство. Как отмечено в §1, скрамблинг-матрица является цепной матрицей. Следовательно, если A^k — скрамблинг-матрица при некотором k, то A потенциально цепная матрица. Может случиться (этому легко привести примеры), что матрица A имеет нулевой, а матрица A^T — положительный скрамблинг-индекс. Пусть $\mathrm{crk}((A^T)^k) = 1$. Тогда утверждение следует из равенств

$$1 = \mathrm{crk}((A^T)^k) = \mathrm{crk}((A^k)^T) = \mathrm{crk}(A^k)$$

и предложения 3.2.

Покажем, что существуют потенциально цепные матрицы, не удовлетворяющие ни условию предложения 6.1, ни условию предложения 6.2. Рассмотрим блочно-треугольную (следовательно, разложимую) матрицу порядка $n \geq 4$:

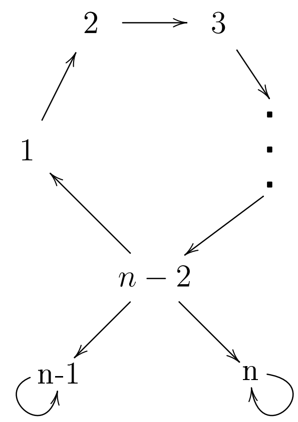
$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & I \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{22}$$

Поскольку диагональные блоки матрицы A являются матрицами перестановок, то матрицы

$$A^k = \begin{pmatrix} P^k & Q_k \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ и } (A^T)^k = \begin{pmatrix} (P^T)^k & 0 \\ (Q_k)^T & I \end{pmatrix}$$

при любом k содержат непересекающиеся строки. Таким образом, матрица A не удовлетворяет условиям предложения 6.1 и предложения 6.2.

Теперь докажем, что A — потенциально цепная матрица. Матрица A является матрицей смежности следующего ориентированного графа:



Напомним известный факт: если A — матрица смежности орграфа, то (i,j)-элемент матрицы A^k равен количеству (i,j)-путей длины k в графе. В рассматриваемом примере из рисунка графа видно, что из вершины i при $1 \leq i \leq n-2$ выходят три пути длины $n-2$. Эти пути заканчиваются в вершинах i, $n-1$ и n. Из вершин $n-1$ и n выходит по одному замкнутому пути длины $n-2$. Следовательно,

$$A^{n-2} = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \tag{23}$$

Пользуясь определением 1.1 нетрудно убедиться, что матрица (23) цепная, т. е. $\mathrm{crk}(A^{n-2}) = 1$. Покажем, что $n-2$ — цепной индекс матрицы A. Снова пользуясь рисунком графа, можно видеть, что

$$A^{n-3} = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \tag{24}$$

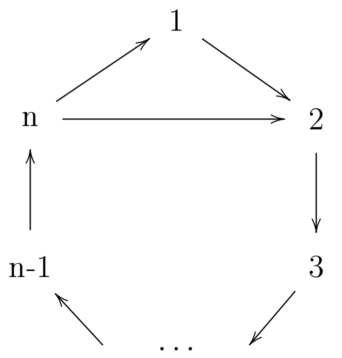
Первая строка матрицы A^{n-3} не пересекается с остальными $n-1$ строками, в то время как эти $n-1$ строк образуют цепную матрицу. Следовательно, $\mathrm{crk}(A^{n-3}) = 2$, этим доказано, что цепной индекс A равен $n-2$.

Каково максимальное значение цепного индекса для потенциально цепных матриц порядка n? Наше предположение состоит в том, что это значение равно $n-1$.

Докажем, что оно не меньше, чем $n-1$. Снова рассмотрим матрицу Виландта порядка $n \geq 3$ и покажем, что матрица W^{n-1} имеет указанный ниже вид.

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (25)$$

Матрица W есть матрица смежности орграфа



Из рисунка графа непосредственно видно, что из вершины 1 выходит единственный путь длины $n-1$ и входит он в вершину n; из вершины i при $2 \leq i \leq n$ выходят два пути длины $n-1$, один из них входит в вершину $i-1$, другой в вершину i. Это доказывает формулу для W^{n-1} из (25).

Пользуясь определением 1.1 легко убедиться, что матрица W^{n-1} цепная. Теперь докажем, что матрица W^{n-2} не цепная. Из вершины 2 исходит единственный путь длины $n-2$, он входит в вершину n, причём не существует других путей длины $n-2$ с концом в n. Это значит, что 2-я строка в матрице W^{n-2} имеет вид $(0, 0, \dots, 0, 1)$, а n-й столбец равен $(0, 1, \dots, 0, 0)^T$. Следовательно, 2-я строка не пересекается с другими строками, что и означает, что матрица W^{n-2} не цепная. Мы доказали, что цепной индекс матрицы Виландта порядка n равен $n-1$. Но вопрос о том, является ли это значение цепного индекса максимально возможным для матриц порядка n, остаётся открытым.

Авторы благодарят Д.Т. Тапкина за ценные замечания, способствовавшие исправлению рукописи.

Список использованной литературы

1. R. Sinkhorn, P. Knopp, *Problems involving diagonal products in nonnegative matrices.* Trans. Am. Math. Soc. **136** (1969) 67-75.

2. J. Hartfiel, J. Maxson, *The chainable matrix, a special combinatorial matrix.* — Discrete Mathematics, **12** (1975), 245-256.

3. Т.А. Сарымсаков, *О неоднородных цепях Маркова.* Доклады АН СССР. –**120** (1958), 465-467.

4. R.B. Bapat, T.E.S. Raghavan, *Nonnegative matrices and applications.* — Cambridge University Press, 1997.

5. В.Н. Сачков, В.Е. Тараканов, *Комбинаторика неотрицательных матриц.* Изд-во ТВП (2000).

6. P-Y. Chevalier, V.V. Gusev, R.M. Jungers, J.M. Hendrickx, *Sets of stochastic matrices with converging products: bounds and complexity.* – arXiv:1712.02614, December, 2017.

7. W. Xia, J. Liu, M. Cao, K.H. Johansson, T. Basar, *Generalized Sarymsakov matrices.* — IEEE-Transactions on Automatic Control, **64(8)** (2019), 3085-3100.

8. J. Hartfiel, E. Seneta, *A note on semigroups of regular stochastic matrices.* — Linear Algebra Appl. **141** (1990), 47-51.

9. Т.А. Сарымсаков, *Неоднородные цепи Маркова.* — Теория вероятн. и её прим. **6** (1961), 194-201.

10. E. Seneta, *Non-negative matrices and Markov chaines.* — Springer, 2006.

11. R.A. Brualdi, B. Shader, *Strong Hall matrices.* — SIAM J. Matrix Anal. Appl., **15** (1991), 359-365.

12. В.И. Романовский, *Дискретные цепи Маркова.* — Гостехиздат, 1949.

13. A.E. Guterman, A.M. Maksaev, *Upper bounds on scrambling index for non-primitive digraphs.* — Linear Multilinear Algebra. (2019).

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18,
420008 Казань, Россия
E-mail: Yuri.Alpin@kpfu.ru

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18,
420008 Казань, Россия
E-mail: IgVBashkin@stud.kpfu.ru