Граница T для букета циклов

Никита Шапошник, Б05-025
научный руководитель: А. Э. Гутерман

В настоящей статье обсуждается частный случай границы T, определённой в [4], для ориентированных невзвешенных графов и для примитивных графов. Получен алгоритм вычисления этой границы для букета из ориентированных циклов (для циклов, пересекающихся в одной вершине).

1 Введение

Тропическое полукольцо — это множество $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, наделённое операцией сложения $a \oplus b = \max(a, b)$ и умножения $a \otimes b = a + b$. В нём нейтральным элементом по сложению является $-\infty$, а по умножению — 0. В данной работе рассматриваются матрицы над $\mathbb{R}_{\max}$ — тропические матрицы.

По тропической матрице A можно построить ориентированный взвешенный граф $\mathcal{G}(A)$. В [4] доказывается следующая теорема: существует такое натуральное σ и целое неотрицательное T, что для любого $t \geq T$

$$A^{t+\sigma} = \lambda^{\otimes\gamma} \otimes A^t,$$

где $\lambda = \lambda(A)$ — наибольший средний вес цикла в $\mathcal{G}(A)$. Наименьшее такое T обозначается через $T(A)$ и называется границей T матрицы A. Граница Tбыла определена через CSR-разложение в [4], этим определением мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Эта граница является обобщением экспоненты на непримитивные графы. Основная цель работы — границы T для букетов циклов, то есть для циклов, пересекающихся только по одной вершине. Приводится алгоритм для вычисления этой границы. Для этого вводится вспомогательная функция $P(a_1, \ldots, a_n)$, которая, неформально, равна наименьшему числу, начиная с которого можно получать любые числа в виде линейной комбинации чисел $a_1, \ldots, a_n$ с неотрицательными коэффициентами.

В разделе 2 определяются основные понятия. В разделе 3 вводятся матрицы C, S, R и определяется граница T. В разделе 4 рассматривается случай с примитивным невзвешенным ориентированным графом. В разделе 5 определяется букет из циклов и доказывается формула для границы T такого графа через вспомогательную функцию P. В разделе 6 описывается алгоритм, считающий функцию P.

Ключевые слова: тропическая алгебра, ориентированные графы, степени матриц, периодичность, граница T.

2 Определения

Определение 2.1. *Тропическая полукольцо — это множество* $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *с операциями сложения* $\oplus$ *и умножения* $\otimes$*:*

$$a \oplus b = \max(a, b)$$
$$a \otimes b = a + b$$

или множество $\mathbb{R}_{min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *с другой операцией сложения и идентичным умножением:*

$$a \oplus b = min(a, b)$$
$$a \otimes b = a + b.$$

В обоих случаях 0 является нейтральным элементом по умножению, а бесконечные элементы — нейтральными элементами по сложению.

В дальнейшем мы в основном будем работать с $\mathbb{R}_{\max}$.

Множество матриц размера $n \times m$ над $\mathbb{R}_{\max}$ будем обозначать через $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$. Для тропической матрицы A будем писать $A > -\infty$, если в ней нет элементов, равных $-\infty$.

Рассмотрим тропическую матрицу $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$. По ней можно построить ориентированный взвешенный граф $\mathcal{G}(A) = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, а $E \subseteq V \times V$, где $(i, j) \in E$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq -\infty$. Веса рёбер определяются функцией $w : E \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto a_{ij}$. Говорят, что A является матрицей смежности графа $\mathcal{G}(A)$.

Наоборот, по взвешенному ориентированному графу аналогично можно построить матрицу смежности. Для этого нужно пронумеровать вершины и поставить в соответствующие ячейки матрицы веса рёбер.

Кодирование графа тропической матрицей очень удобно. Например, по определению умножения матриц, легко доказать следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *В ячейке матрицы* A^t *с индексами* u, v *лежит минимальный вес пути в графе* $\mathcal{G}(A)$ *от* u *до* v *длины ровно* t*.*

Заметим, что $A^0 = I$ — единичная тропическая матрица, на главной диагонали которой стоят 0, а на всех остальных местах — $-\infty$. Это согласуется с утверждением: за 0 шагов можно дойти только до стартовой вершины.

Определение 2.3. *Если существует целое неотрицательное* n *такое, что* $A^n > -\infty$*, то матрица* A *называется примитивной. В этом случае минимальное такое* n *называется экспонентой матрицы* A *и обозначается через* $exp(A)$*.*

Определение 2.4. *Ориентированный граф* $\mathcal{G}$ *называется примитивным, если существует целое неотрицательное* n *такое, что для любых двух вершин* u, v *графа* $\mathcal{G}$ *существует путь от* u *до* v *длины ровно* n*. В этом случае минимальное такое* n *называется экспонентой графа* $\mathcal{G}$ *и обозначается через* $exp(\mathcal{G})$*.*

Заметим, что, по утверждению 2.2, примитивность матрицы A эквивалентна примитивности графа $\mathcal{G}(A)$. Более того, $exp(A) = exp(\mathcal{G}(A))$.

Теперь можно легко доказать следующий факт: если $A^p > -\infty$ для некоего p, то $A^t > -\infty$ для любого $t \geq p$. Действительно, если в графе $\mathcal{G}(A)$ между произвольными двумя вершинами u, v есть путь длины p из u в v, то есть и путь длины t — достаточно взять вершину w, расстояние от которой до вершины v равно $t - p$. Тогда существует путь длины p от u до w, и путь длины $t - p$ от w до v. Взяв конкатенацию этих путей, получим искомый путь нужной длины.

Определение 2.5. *Индекс цикличности (см. [5]) (или просто цикличность) ориентированного графа $\mathcal{G}$ обозначается через $\sigma_{\mathcal{G}}$ и определяется следующим образом:*

1. *Если $\mathcal{G}$ сильно связен, и содержит хотя бы две вершины, то цикличность равна наибольшему общему делителю всех длин ориентированных циклов в $\mathcal{G}$.*

2. *Если в $\mathcal{G}$ есть только одна вершина (с петлей или без), то $\sigma_{\mathcal{G}} = 1$.*

3. *Если $\mathcal{G}$ не сильно связен, то его цикличность равна наименьшему общему кратному цикличностей всех максимальных его сильно связных подграфов.*

С помощью индекса цикличности можно сформулировать критерий примитивности ориентированного графа:

Теорема 2.6. *[6, теорема 3.4.4] Ориентированный граф $\mathcal{G}$ примитивен тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}$ сильно связен, и его индекс цикличности равен* 1.

Заметим, что в сильно связном графе $\mathcal{G}$ с цикличностью σ любые два пути, соединяющие две фиксированные вершины, имеют одинаковые длины по модулю σ ([5, замечание 2.3]). Из этого следует, что на множестве вершин рассматриваемого графа можно ввести отношение эквивалентности: две вершины лежат в одном классе эквивалентности тогда и только тогда, когда длина пути от одной к другой кратна σ. Эти классы эквивалентности называются циклическими классами.

Пусть $\mathcal{G} = (V, E)$ — взвешенный ориентированный граф с матрицей смежности $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\max}$. Пусть C — это ориентированный цикл в $\mathcal{G}$ с весами ребер $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_l}$. Средний вес ребра в C — это тропическое среднее геометрическое весов ребер в C:

$$w_a(C) = \sqrt[\otimes l]{a_{i_1} \otimes a_{i_2} \otimes \cdots \otimes a_{i_l}} = \frac{1}{l}(a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_l})$$

Определение 2.7. *Ориентированный цикл называется критическим, если у него максимальный средний вес. Критический подграф $\mathcal{G}^c$ графа $\mathcal{G}$ — это объединение всех критических циклов в $\mathcal{G}$.*

Обозначим максимальный средний вес цикла в $\mathcal{G}(A)$ через $\lambda(A)$, т.е.

$$\lambda(A) = \bigoplus_{k=1}^{d} \bigoplus_{i_1,\dots,i_k} (a_{i_1i_2} \otimes \cdots \otimes a_{i_{k-1}i_k})^{\otimes 1/k} =$$
$$= \max_{k=1}^{d} \max_{i_1,\dots,i_k} \frac{(a_{i_1i_2} + \cdots + a_{i_{k-1}i_k})}{k}$$

Назовем тропическую матрицу A (или соответствующий ей граф) неразложимой, если граф $\mathcal{G}(A)$ сильно связен, иначе — разложимой.

Назовем тропическую матрицу A (или соответствующий ей граф) полностью разложимой, если в графе $\mathcal{G}(A)$ нет ребер между различными компонентами сильной связности.

Рассмотрим тропическую матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\max}$. Тогда звездой Клини матрицы A называется следующая матрица:

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i = \bigoplus_{i=0}^{n-1} A^i$$

В матрице A^* в ячейке под номером i и j лежит длина оптимального пути от вершины i к вершине j в графе $\mathcal{G}(A)$ без ограничения на длину пути (см. [2, стр. 167]). Условие $\lambda(A) \le 0$ необходимо, так как иначе этот ряд расходится: можно идти по циклу с положительным средним весом и улучшать ответ. Так как дважды проходить через одну и ту же вершину не имеет смысла, можно ограничиться первыми n матрицами.

Обхватом графа $\mathcal{G}$ называется наименьшая длина цикла в $\mathcal{G}$ и обозначается как $g(\mathcal{G})$.

Окружностью графа $\mathcal{G}$ называется наибольшая длина цикла в $\mathcal{G}$ и обозначается как $cr(\mathcal{G})$ (от английского circumference).

Диаметром графа $\mathcal{G}$ назовём максимальную длину простого пути в графе и обозначим её через $d(\mathcal{G})$.

3 CSR-разложение

Рассмотрим неразложимую $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$. Введем обозначения: $\sigma = \sigma(\mathcal{G}^c(A))$ — индекс цикличности критического подграфа, $M = ((\lambda(A)^- \otimes A^\sigma)^*$. Здесь и далее для $a \in \mathbb{R}_{\max}$, $a \neq -\infty$ через a^- будем обозначать обратное по умножению к a, т.е. $a^- = -a$.

Обозначим для произвольного графа $\mathcal{G}$ множество его вершин через $V(\mathcal{G})$, а множество его рёбер — через $E(\mathcal{G})$.

Определим матрицы $C, S, R \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ если } j \in V(\mathcal{G}^c(A)) \\ -\infty, \text{ иначе,} \end{cases} \qquad r_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ если } i \in V(\mathcal{G}^c(A)) \\ -\infty, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$s_{ij} = \begin{cases} \lambda(A)^- \otimes a_{ij}, \text{ если } (i,j) \in E(\mathcal{G}^c(A)) \\ -\infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Если матрицы C, S, R определены по матрице A, будем писать $CS^tR[A]$ для произвольного t.

Теорема 3.1 ([1], [2])**.** *Пусть $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ неразложима. Тогда существует неотрицательное целое $T(A)$ такое, что для любого $t \geq T(A)$:*

$$A^t = (\lambda(A))^{\otimes t} \otimes CS^tR[A]. \tag{1}$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (1) записывается в виде:

$$A^t = CS^tR[A].$$

Утверждение 3.2. *[3, утверждение 3.2] Для любого $t \geq 0$ верно, что $CS^{t+\sigma}R[A] = CS^tR[A]$, где σ — это цикличность $\mathcal{G}^c(A)$. Иначе говоря, последовательность матриц $\{CS^tR[A]\}_{t\geq 0}$ периодична с периодом σ.*

Значит, если $\lambda(A) = 0$, то в силу равенства $A^t = CS^tR$ при $t \geq T(A)$, последовательность матриц A^t при $t \geq T(A)$ является периодической с периодом σ.

Через $\mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}'} j)$ обозначим множество путей от вершины i к вершине j, имеющих длину t по модулю l, и проходящих хотя бы через одну вершину графа $\mathcal{G}'$. Для множества $\mathcal{W}$ через $p(\mathcal{W})$ обозначим максимальный вес пути из множества $\mathcal{W}$.

Утверждение 3.3. *[2, теор. 6.1] Если $\lambda(A) = 0$, то верно следующее равенство:*

$$(CS^tR[A])_{ij} = p(\mathcal{W}^{t,\sigma}(i \xrightarrow{\mathcal{G}^c(A)} j)), \tag{2}$$

где σ обозначает цикличность $\mathcal{G}^c(A)$.

Введём ещё одну функцию — $T_1(A,B)$. Для этого определим матрицу $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\infty, \text{ если } i \in V(\mathcal{G}^c) \text{ или } j \in V(\mathcal{G}^c), \\ a_{ij}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Определение 3.4. *[2, стр. 165] $T_1(A,B)$ — наименьшее целое число такое, что для любого $t \geq T_1(A,B)$:*

$$A^t = \big((\lambda(A))^{\otimes t} \otimes CS^tR[A]\big) \oplus B^t. \quad (3)$$

Определение 3.4 корректно. Это следует из неравенства $B \leq A$. Из этого следует, что $B^t \leq A^t$, и тогда при $t = T(A)$ равенство 3 будет верно в силу определения $T(A)$.

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (3) записывается в виде $A^t = CS^tR[A] \oplus B^t$, и если $B = -\infty$, то $T(A) = T_1(A,B)$.

Замечание 3.5. *Инвариантность относительно умножения на скаляр, [1, стр. 287] Если $A' = A \otimes \mu$, где $\mu \neq -\infty$, то*

- $\lambda(A') = \lambda(A) \otimes \mu$, $B_N[A'] = B_N[A]$
- $CSR[A'] = CSR[A]$

Значит, $T(A)$ и $T_1(A,B)$ инвариантны относительно умножения матрицы на конечный скаляр, что позволяет нам без ограничения общности говорить, что $\lambda(A) = 0$.

Есть множество способов определить матрицу B, здесь мы рассматриваем лишь частный случай. Обозначим $T(A,B)$ для описанной матрицы B через $T_{1,N}(A)$.

Существуют несколько оценок для $T_{1,N}(A)$. В дальнейшем мы будем рассматривать только графы, в которых все рёбра имеют нулевой вес, поэтому $B = 0$. Следовательно, $T(A) = T_{1,N}(A)$, и оценки для $T_{1,N}(A)$ верны и для $T(A)$.

Теорема 3.6. *Верхние оценки $T_{1,N}(A)$, [2, теорема 4.1] Для любой $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ имеем:*

1. $T_{1,N}(A) \leq Wi(n)$;
2. $T_{1,N}(A) \leq g(n-2) + n$;
3. $T_{1,N}(A) \leq (g-1)(cr-1) + (g+1)d$,

где $Wi(n) = n^2 - 2n + 2$ — функция Виландта, $g = g(\mathcal{G}^c(A))$, $cr = cr(\mathcal{G}(A))$, а $d = d(\mathcal{G}(A))$.

Следствие 3.7. *Верхние оценки $T(A)$, [2, теорема 4.1] Для любой неразложимой $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ имеем:*

1. $T(A) \leq Wi(n)$;
2. $T(A) \leq g(n-2) + n$;
3. $T(A) \leq (g-1)(cr-1) + (g+1)d$,

где $Wi(n) = n^2 - 2n + 2$ — функция Виландта, $g = g(\mathcal{G}^c(A))$, $cr = cr(\mathcal{G}(A))$, а $d = d(\mathcal{G}(A))$.

Цель данной работы — поиск границы T для графов, все рёбра которых имеют нулевой вес. В них $T = T_{1,N}$, и для вычисления удобно использовать следующее утверждение.

Утверждение 3.8. *[1, лемма 2.3] Пусть $\lambda(A) = 0$. Тогда $A^t \geq CS^tR[A]$ тогда и только тогда, когда $t \geq T_{1,N}(A)$.*

Это утверждение позволяет искать границу T: достаточно найти наименьшее t, для которого верно $A^t \geq CS^tR[A]$. Тогда $T = t$.

Рассмотрим несколько примеров. Во всех них считаем, что все рёбра имеют нулевой вес. Значит, $\lambda(A) = 0$, критический подграф совпадает со всем графом, и $T(A) = T_{1,N}(A)$.

Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, где $a_{ij} = 0$ для любых индексов i, j. Граф $\mathcal{G}(A)$ является полным, то есть между любыми двумя вершинами проведено ребро.

Пример 3.9 (Полный граф). *Граница T для полного графа равна* 0.

Доказательство. Найдем матрицы C, S, R. Индекс цикличности полного графа $\sigma = 1$ (т.к. в нём есть циклы длины 1), следовательно $C = R = M = A^*$, $S = A$.

Так как для любого положительного t верно, что $A^t = A$, то $A^* = A$ и равенство $A^*A^tA^* = A^t$ выполняется тогда и только тогда, когда $t > 0$.

Следовательно, $T = 1$. $\square$

Пример 3.10 (Односторонний цикл). *Граница T для одностороннего цикла на n вершинах равна* 0.

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ — матрица смежности рассматриваемого графа. Тогда:

$$M = (A^n)^* = I^* = I = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & ... & -\infty \\ -\infty & 0 & ... & -\infty \\ ... & ... & ... & ... \\ -\infty & -\infty & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Значит, $C = R = I$, $S = A$, и для любого неотрицательного t верно $CS^tR[A] = A^t$. Следовательно, $T = 0$. $\square$

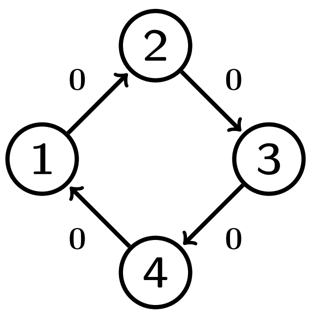

Рис. 1: односторонний цикл

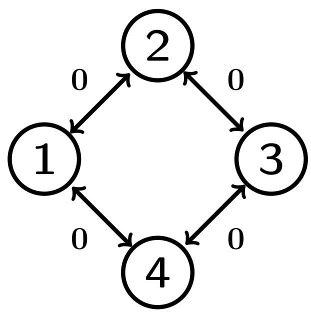

Рис. 2: двусторонний цикл

Рассмотрим матрицу смежности $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ двустороннего цикла на n вершинах. Пронумеруем вершины так, чтобы первый цикл состоял из вершин $1, 2, \ldots n$ (в порядке обхода), а второй — из $n, n-1, \ldots, 1$ (в порядке обхода). Чтобы избежать кратных рёбер, будем работать с $n \geq 3$.

Пример 3.11 (Двусторонний цикл).

$$T(A) = \begin{cases} n-1, \text{ если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{n}{2}, \text{ если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда n нечётно. В этом случае цикличность критического графа $\sigma = 1$, т.е. граф примитивен. Значит, $T(A) = exp(A)$. Покажем, что экспонента данного графа равна $n - 1$.

Заметим, что в A^{n-2} на главной диагонали стоят $-\infty$: $n-2$ нечётно, поэтому, чтобы вернуться в исходную вершину за $n-2$ шага, надо сменить чётность — пройти весь круг, так как остальные циклы имеют чётную длину. Но цикл имеет длину n, поэтому его пройти не получится. Значит, $exp(\mathcal{G}) \geq n-1$.

Покажем, что $A^{n-1} > -\infty$.

Зафиксируем произвольную вершину v графа. Назовем вершину *четной*, если до нее можно дойти из v за чётное число шагов. Заметим, что тогда все вершины графа четные, так как n нечетно и идти можно как по, так и против часовой стрелки. Наибольшая длина такого пути равна $n-1$. Значит, $A^{n-1} > -\infty$.

Теперь рассмотрим случай, когда n чётно. В этом случае $\sigma = 2$ и граф не примитивен. $C = R = M = (A^2)^*$, $S = A$.

Так как последовательность матриц CS^tR периодична с периодом $\sigma = 2$ (по утверждению 3.2), то при $t \geq T(A)$

$$A^t = CS^tR = \begin{cases} (A^2)^*, \text{ если } t \text{ четно.} \\ A \otimes (A^2)^*, \text{ если } t \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В матрице $(A^2)^*$ небесконечные элементы стоят в ячейках (i,j), если вершины i и j находятся на четном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с одинаковой четностью равно $\frac{n}{2}$. Значит, условие при четном t выполняется при $t \geq \frac{n}{2}$, а при прочих t не выполняется.

В матрице $A \otimes (A^2)^*$ небесконечные элементы стоят в ячейках (i,j), если вершины i и j находятся на нечетном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с разной четностью равно $\frac{n}{2}-1$. Значит, условие при четном t выполняется при $t \geq \frac{n}{2}-1$, а при прочих t — не выполняется.

Следовательно, $T(A) = \frac{n}{2}$. □

4 Примитивные графы с нулевыми рёбрами

Функция T является обобщением экспоненты на непримитивные графы.

Рассмотрим примитивный граф с матрицей смежности A, в котором вес каждого ребра равен 0. Тогда критический подграф совпадает со всем графом, и индекс цикличности примитивного графа $\sigma = 1$.

По утверждению 3.2 последовательность матриц $CS^tR[A]$ периодична с периодом $\sigma = 1$, то есть в этой последовательности все члены равны. Из утверждения 3.3 и примитивности A следует, что матрица $CS^tR[A]$ целиком состоит из 0 при любом t.

Заметим, что в любой степени матрицы A её элементы будут принимать только два значения: $-\infty$ и 0. Из определения $T(A)$ следует, что $A^t = CS^tR[A]$ тогда и только тогда, когда $t \geq T(A)$. Значит, матрица A^t не содержит $-\infty$ тогда и только тогда, когда $t \geq T(A)$. Значит, $T(A) = exp(A)$, если A примитивна.

Это приводит нас к более общему утверждению.

Утверждение 4.1. *Рассмотрим примитивную матрицу A, у которой $\mathcal{G}(A)$ совпадает со своим критическим подграфом, $\lambda(A) = 0$. Если для двух произвольных фиксированных вершин u и v верно, что все пути из u в v имеют одинаковый вес, то $T(A) = exp(A)$.*

Доказательство. В силу условия на одинаковый вес между любыми двумя вершинами, матрицы вида $CS^tR[A]$ принимают только одно значение (по утверждению 3.3), а значение конкретной ячейки матрицы A^t либо равно $-\infty$, либо совпадает с соответстующей ячейкой $CS^tR[A]$. Значит, условие $A^t = CS^tR[A]$ равносильно условию $A^t > -\infty$. Следовательно, $T(A) = exp(A)$. □

Заметим, что обратное утверждение неверно. Рассмотрим графы, имеющие следующие матрицы смежности:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -\infty \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\infty & 1 \\ 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

И в $\mathcal{G}(A)$, и в $\mathcal{G}(B)$ экспонента совпадает с T (в обоих графах экспонента равна 2), но в графе $\mathcal{G}(A)$ максимальный средний вес цикла равен -1, а в графе $\mathcal{G}(B)$ критический подграф не совпадает со всем графом.

5 Граница T для букетов циклов

Определение 5.1. *Назовем букетом циклов граф, состоящий из нескольких пересекающихся по одной вершине ориентированных циклов.*

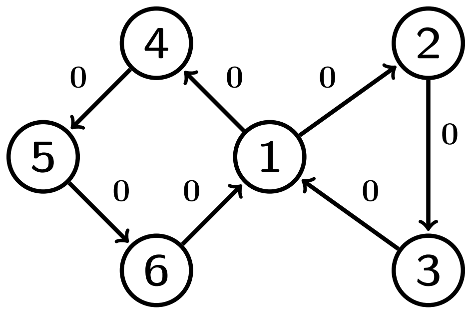

Рис. 3: букет из циклов длины 3 и 4

Здесь и далее будем рассматривать букеты циклов длины, кратной σ, все рёбра в которых имеют вес 0.

Определение 5.2. *Букет циклов длины $a_1\sigma, a_2\sigma, \dots, a_n\sigma$, где числа $a_1, \dots, a_n$ взаимно просты в совокупности, $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ назовем $(a_1, \dots, a_n; \sigma)$-букетом.*

Границу T, определенную для такого графа, будем обозначать через $T(a_1, \dots, a_n; \sigma)$.

Заметим, что индекс цикличности такого букета равен σ и всего в нём $N = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\sigma - n + 1$ вершин. Пусть вершина, в которой пересекаются все циклы, имеет номер 1. Пронумеруем вершины в порядке следующего обхода: начнем в вершине 1, далее пройдём по первому циклу, затем — по второму, и так далее до цикла с номером n (не изменяя номер у вершины 1).

Во всех примерах матрицу смежности рассматриваемого графа будем обозначать через $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, а через C, S, R будем обозначать матрицы C, S, R, построенные по матрице A.

Теорема 5.3. $T(a_1, \dots, a_n; \sigma) = (T(a_1, \dots, a_n; 1) + 1)\sigma - 1$.

Доказательство. Обозначим граф, соответствующий $(a_1, \dots, a_n; 1)$-букету через $\mathcal{G}$, а граф, соответствующий $(a_1, \dots, a_n; \sigma)$-букету — через $\mathcal{G}_\sigma$. Граф $\mathcal{G}_\sigma$ получается из графа $\mathcal{G}$ разделением каждого ребра на σ более мелких рёбер. Вершины $\mathcal{G}_\sigma$, лежащие в одном циклическом классе с вершиной 1, будем называть начальными. Для краткости будем обозначать $T(a_1, \dots, a_n; 1)$ через T^1, а $T(a_1, \dots, a_n; \sigma)$ — через T^σ.

Покажем, что $T^\sigma > (T^1 + 1)\sigma - 2$. В $\mathcal{G}$ есть 2 вершины, между которыми нет пути длины $T^1 - 1$. Значит, в $\mathcal{G}_\sigma$ между соответствующими начальными вершинами нет пути длины $(T^1 - 1)\sigma$. Обозначим эти вершины через u и v. Но тогда между вершинами $\hat{u}$ и $\hat{v}$

не будет пути длины $(T^1-1)\sigma+2(\sigma-1)=(T^1+1)\sigma-2$, где $\hat{u}$ получается, если отойти от u на $\sigma-1$ шаг вперёд, а $\hat{v}$ — от вершины v на $\sigma-1$ шаг назад (обе новые вершины существуют, так как любая вершина в $\mathcal{G}$ лежит в цикле). Значит, $T^\sigma \geq (T^1+1)\sigma-1$.

Покажем, что $T^\sigma \leq (T^1+1)\sigma-1$. Для этого нужно доказать, что между любыми двумя вершинами u и v графа $\mathcal{G}_\sigma$ есть путь длины $(T^1+1)\sigma-1$ от u до v. Путь длины $(T^1+1)\sigma-1$ от u до v состоит из трех частей: путь от u до ближайшей начальной вершины, путь между начальными вершинами, и путь от ближайшей начальной вершины до v. Суммарная длина первой и третьей частей не превосходит $2\sigma-2$, значит, длина второй части не меньше $(T^1-1)\sigma+1$. Но длина пути между двумя начальными вершинами должна быть кратна σ, поэтому длина второй части не меньше $T^1\cdot\sigma$. Но, по определению T^1, между любыми начальными вершинами есть путь длины $T^1\cdot\sigma$. Значит, $T^\sigma \geq (T^1+1)\sigma-1$, и утверждение доказано. □

Таким образом, при расчёте границы T для произвольного графа-букета достаточно посчитать искомую границу при $\sigma=1$, а затем получить ответ по формуле из утверждения 5.3.

Замечание 5.4. *При $\sigma=1$ $(a_1,\ldots,a_n;1)$-букет примитивен, все рёбра в ней имеют нулевой вес. Значит, граница T данного графа совпадает с его экспонентой.*

Введём вспомогательную функцию P:

Определение 5.5. *Для взаимно простых в совокупности натуральных чисел $a_1\leq\cdots\leq a_n$ обозначим через $P(a_1,\ldots,a_n)$ минимальное целое неотрицательное число, удовлетворяющее следующему свойству: любое $p\geq P(a_1,\ldots,a_n)$ выражается в виде линейной комбинации чисел $a_1,\ldots,a_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, то есть*

$$p=a_1\lambda_1+\ldots a_n\lambda_n. \tag{4}$$

Число, выражающееся в виде линейной комбинации чисел $a_1,\ldots,a_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами, назовём выразимым.

Здесь и далее под линейной комбинацией будем понимать линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами.

Утверждение 5.6 (Свойства функции P)**.**

1. *Если $a_1=1$, то $P(1,\ldots,a_n)=0$.*
2. *$P(a_1,\ldots,a_n)\leq P(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_k})$, где $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$ — возрастающая последовательность индексов.*
3. *$P(a_1,\ldots,a_n)=P(b_1,\ldots,b_m)$, где набор $b_1,\ldots,b_m$ получается из набора $a_1,\ldots,a_n$ удалением повторяющихся элементов.*
4. *Если a_j делится на a_i, то $P(a_1,\ldots,a_n)=P(a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_n)$.*
5. *Если a_j представляется в виде линейной комбинации меньших элементов, то $P(a_1,\ldots,a_n)=P(a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_n)$.*

Доказательство. 1) Действительно, если $a_1=1$, то любое неотрицательное число k выражается как $1\cdot k$. Следовательно, $P=0$.

2) Свойство следует из следующего факта: сумма $a_{i_1}\lambda_{i_1}+\cdots+a_{i_k}\lambda_{i_k}$ является частным случаем суммы $a_1\lambda_1+\cdots+a_n\lambda_n$.

3) При приведении подобных членов в сумме $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$ получается корректная сумма $b_1\mu_1 + \dots b_m\mu_m$. С другой стороны, сумма $b_1\mu_1 + \dots b_m\mu_m$ является корректной суммой вида $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$.

4) Очевидно, что любая сумма $a_1\lambda_1 + \dots + a_{j-1}\lambda_{j-1} + a_{j+1}\lambda_{j+1} + \dots + a_n\lambda_n$ является суммой вида $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$, где $\lambda_j = 0$. С другой стороны, заменив a_j на $a_i \cdot \frac{a_j}{a_i}$, можно избавиться от слагаемого $a_j\lambda_j$ в сумме $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$, что доказывает утверждение.

5) Доказетельство этого свойства аналогично предыдущему. □

Теорема 5.7. *Рассмотрим взаимно простые в совокупности числа $a_1, \dots, a_n$. Тогда:*

$$T(a_1, \dots, a_n; 1) = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2.$$

Доказательство. Разберём случай $a_n = 1$. Тогда $P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2 = 0$, что совпадает с экспонентой $(a_1, \dots, a_n; 1)$-букета.

Далее считаем, что $a_n > 1$.

Покажем, что при $t = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 3$ существуют две вершины, между которыми нет пути длины t. Пусть u — следующая за вершиной 1 в цикле длины a_n вершина, а v — идущая перед вершиной 1 в том же цикле.

Заметим, что путь длины t из u_0 в v_0 проходит через вершину 1, так как простой путь из u_0 в v_0 имеет длину $a_n - 2 < t$, так как $a_n > 1$. Значит, путь из u_0 в v_0 длины t состоит из трёх частей: первая — от u_0 до 1, вторая — конкатенация циклов, третья — от 1 до v_0. Длина первой и третьей частей равна $a_n - 1$, а длина второй части — выразима.

Значит, длина второй части равна $t - 2a_n + 2 = P(a_1, \dots, a_n) - 1$ — невыразима по определению P. Следовательно, пути длины t от u_0 до v_0 не существует, и $T(a_1, \dots, a_n; 1) \geq P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$.

Покажем, что экспонента рассматриваемого графа равна $t = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$. Зафиксируем произвольные вершины u, v. Обозначим через $\hat{u}$ расстояние от u до вершины 1, а через $\hat{v}$ — расстояние от вершины 1 до v. Тогда для существования пути длины t из u в v необходима и достаточна выразимость $t - \hat{u} - \hat{v}$. Заметим, что максимальное значение $\hat{u} + \hat{v}$ равно $2a_n - 2$ и достигается на описанных выше вершинах u_0, v_0. Тогда $t - \hat{u} - \hat{v} \geq P(a_1, \dots, a_n)$, и, следовательно, $t - \hat{u} - \hat{v}$ всегда выразимо. Значит, между произвольными вершинами графа существует путь длины $P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$.

Следовательно, $T(a_1, \dots, a_n; 1) = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$. □

Следствие 5.8 (Корректность функции P)**.** *Функция P определена корректно: её значение существует для любых подходящих аргументов.*

Доказательство. Рассмотрим $(a_1, \dots, a_n; 1)$-букет. По замечанию 5.4 этот граф примитивен и, следовательно, имеет экспоненту, которая, в свою очередь, совпадает с границей T для данного графа-букета. По формуле из теоремы 5.7 имеем $P(a_1, \dots, a_n) = T(a_1, \dots, a_n; 1) - 2a_n + 2$. □

Оценим значение функции P с помощью верхних оценок, полученных для графа-букета.

Утверждение 5.9. *Рассмотрим взаимно простые в совокупности числа $a_1, \dots, a_n$. Тогда функция $P(a_1, \dots, a_n)$ оценивается сверху следующими функциями:*

1. $Wi(N) - 2a_n + 2$,
2. $(a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2$,
3. $(a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2)$,

где $N = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - n + 1$ *— количество вершин в* $(a_1, \ldots, a_n; 1)$*-букете.*

Доказательство. Обхват $(a_1, \ldots, a_n)$-букета равен a_1, его окружность равна a_n, а её диаметр не превосходит $2a_n - 2$.

Далее достаточно оценить границу T рассматриваемого графа по теореме 3.7 и применить теорему 5.7. $\square$

Рассмотрим несколько частных случаев аргументов функции P и найдём для них точную формулу для P.

Утверждение 5.10. *Если a и b взаимно просты, то $P(a, b) = (a-1)(b-1)$.*

Доказательство. Покажем, что $p = ab-a-b \neq ma+nb$ для любых целых неотрицательных m, n.

Предположим противное. Тогда:

$$ab - a - b = am + bn \quad \Longleftrightarrow \quad ab = (m+1)a + (n+1)b$$

В силу взаимной простоты a и b получим, что $n + 1 \,\vdots\, a$, и $m + 1 \,\vdots\, b$. Тогда, в силу того, что $m, n \geq 0$, имеем 2 случая:

$$\begin{cases} n+1 = a \\ m+1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n+1 = 0 \\ m+1 = b. \end{cases}$$

В обоих случаях получаем противоречие. Следовательно, $P(a, b) \geq (a-1)(b-1)$.

Теперь покажем, что $P(a, b) \leq ab + b - a - 1$. Для любого $p \geq ab - b - a + 1$ решим уравнение:

$$am + bn = p$$

Так как a и b взаимно просты, числа из набора $0, b, 2b, \ldots, (a-1)b$ дают все a остатков по модулю a. Значит, существует единственное $0 \leq n \leq a - 1$, что $bn \equiv p \pmod a$, причём $p - bn \geq 0$, так как $p - bn \,\vdots\, a$ и

$$p - bn \geq ab - b - a + 1 - (a-1)b = -a + 1 > -a \Longrightarrow p - bn \geq 0.$$

Значит, $m = \frac{p-bn}{a} \geq 0$.

Таким образом, нами были найдены целые $m \geq 0$, $n \geq 0$. Следовательно, $P(a, b) = (a-1)(b-1)$. $\square$

Утверждение 5.11. *Если числа $2, a, b$ взаимно просты в совокупности, то*

$$P(2, a, b) = \begin{cases} P(2, b) = b - 1, & \text{если } a \text{ чётно,} \\ P(2, a) = a - 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Первый случай следует из свойства 4 утверждения 5.6.

Разберём второй случай: a нечётно. Неравенство $P(2, a, b) \leq P(2, a)$ следует из свойства 2 утверждения 5.6. Докажем обратное неравенство: необходимо показать, что с помощью слагаемых $2, a, b$ невозможно получить сумму $a - 2$. Действительно, из трёх слагаемых можно использовать только одно: 2. Но $a - 2$ нечётно — противоречие. Следовательно, $P(2, a, b) = P(2, a)$. $\square$

Чтобы легче вычислять функцию P, определим вспомогательную функцию M, сопоствляющую каждому целому числу от 0 до a_1-1 целое неотрицательное число: $M[i]$ — это минимальное выразимое число, сравнимое с i по модулю a_1. Впоследствии, при описании алгоритма, вычисляющего P, удобно будет представлять M в качестве массива, поэтому значение функции M на элементе i будем обозначать с помощью квадратных скобок — через $M[i]$.

Заметим, что $M[0] = 0$ и что $M[i] \equiv i \pmod{a_1}$.

Утверждение 5.12. *Если $a_1, \ldots, a_n$ — взаимно простые в совокупности числа, то*

$$P(a_1, \ldots, a_n) = \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1.$$

Доказательство. Пусть $\max_{i=0}^{a_0-1} M[i] = M[k]$.

Выразимость $M[k] - a_1$ вела бы к противоречию с определением массива M, так как $M[k] - a_1 \equiv M[k] \pmod{a_1}$. Значит, $P(a_1, \ldots, a_n) \geq \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$.

Заметим, что если произвольное x выразимо, то и число $x + a_1$ выразимо. Из этого следует, что любое число, сравнимое с i по модулю a_1 и не меньшее $M[i]$, выразимо. Значит, все числа, начиная с $M[k]-a_1+1$ выразимы — иначе $M[k]$ было бы не максимальным числом в массиве M.

Следовательно, $P(a_1, \ldots, a_n) = \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$. □

Используя массив M, можно легко посчитать $P(4, a, b)$ и $P(3, a, b)$. Здесь и далее через $x \ rem \ y$ будем обозначать остаток при делении x на y.

Утверждение 5.13 (Формула для $P(3, a, b)$). *Пусть числа $3, a, b$ взаимно просты в совокупности.*

1. *Если $a \vdots 3$, то $P(3, a, b) = P(3, b) = 2b - 2$.*

2. *Если $a \not\vdots 3$ и $a + b \not\vdots 3$, то $P(3, a, b) = P(3, a) = 2a - 2$.*

3. *Если $a \not\vdots 3$ и $a + b \vdots 3$, то $P(3, a, b) = \min(2a, b) - 2$.*

Доказательство. Первый случай следует из свойства 4 утверждения 5.6.

В остальных случаях $M[a \ rem \ 3] = a$, и весь ответ зависит от величины $M[3 - a \ rem \ 3]$.

Если $b \not\equiv 2a \pmod 3$, то $M[3 - a \ rem \ 3] = 2a$, и $P(3, a, b) = 2a - 2$.

Если $b \equiv 2a \pmod 3$, то $M[3 - a \ rem \ 3] = \min(2a, b)$, и $P(3, a, b) = min(2a, b) - 2$. □

Утверждение 5.14 (Формула для $P(4, a, b)$). *Пусть числа $4, a, b$ взаимно просты в совокупности.*

1. *Если $a \vdots 4, b \not\vdots 2$, то $P(4, a, b) = P(4, b)$.*

2. *Если $a \not\vdots 2, b \vdots 4$, или $0 \not\equiv a \equiv b \pmod 4$, или $a \not\vdots 2, b \geq P(4, a)$, то $P(4, a, b) = P(4, a)$.*

3. *Если $a \equiv 2 \pmod 4), b \not\vdots 2$, то $P(4, a, b) = a + b - 3$.*

4. *Если $a \not\vdots 2, b \equiv 2 \pmod 4$, то $P(4, a, b) = a + \min(2a, b) - 3$.*

5. *Если $a, b \not\vdots 2$, $a + b \vdots 4, b < P(4, a)$, то $P(4, a, b) = \max(2a, b) - 3$.*

Доказательство. Из свойства 4 утверждения 5.6 можно вывести случай $a \vdots 4, b \not\vdots 2$ и случай $a \not\vdots 2, b \vdots 4$, а из свойства 5 того же утверждения — случай $0 \not\equiv a \equiv b \pmod 4$.

Во всех остальных случаях посчитаем массив M, и по утверждению 5.12 найдём ответ.

Докажем случай $a \not\vdots 2, b \geq P(4, a)$. Тогда $M[a\ rem\ 4] = a$, $M[2] = 2a$, и $M[4 - a\ rem\ 4] = 3a$ — число b слишком большое, чтобы повлиять на этот массив. Таким образом, максимум этого массива равен $3a$, и ответом будет число $3a - 3 = P(4, a)$.

Разберём случай $a \equiv 2 \pmod 4, b \not\vdots 2$. Заметим, что $M[2] = a$, $M[b\ rem\ 4] = b$, $M[4 - b\ rem\ 4] = a + b$. Максимум этого массива — $a + b$, поэтому ответ равен $a + b - 3$.

Разберём случай $a \not\vdots 2, b \equiv 2 \pmod 4$. Тогда $M[a\ rem\ 4] = a$. На место $M[2]$ есть два кандидата: $2a$ и b. Если $b < 2a$, то $M[2] = b$, и иначе — $2a$. Далее, для $M[4 - a\ rem\ 4]$ имеем два варианта: $3a$ и $a + b$, и если $b < 2a$, то $M[4 - a\ rem\ 4] = a + b$, и иначе — $3a$. Таким образом, если $b < 2a$, то ответ равен $a + b - 3$, а иначе — $3a - 3 = P(4, a)$.

Разберём последний случай: $a, b \not\vdots 2, a + b \vdots 4, b < 3a - 3$. Тогда $M[a\ rem\ 4] = a$, $M[b\ rem\ 4] = b$ и $M[2] = 2a$. В зависимости от относительного расположения $2a$ и b имеем 2 различных возможных максимума массива M, откуда, по утверждению 6.2 находим ответ. $\square$

6 Алгоритм вычисления функции P

Приведём алгоритм, вычисляющий функцию P. На вход ему подаётся число n и числа $a_1, \ldots, a_n$.

Алгоритм вычисляет массив M, а затем, по формуле из леммы 5.12, вычисляет ответ на поставленную задачу. Массив M вычисляется постепенно: изначально в каждой ячейке $M[i]$ значения ∞ из $\mathbb{R}_{\min}$ — это значит, что пока не было найдено ни одного выразимого числа, сравнимого с i по модулю a_1. Если при последующем переборе было найдено некоторое p, сравнимое с i по модулю a_1 и меньшее $M[i]$, то необходимо перезаписать в ячейку $M[i]$ значение p.

Перебор начинается с рассмотрения всех линейных комбинаций с одним слагаемым (здесь и далее через количество слагаемых будем обозначать количество ненулевых коэффициентов λ_i в линейной комбинации вида 4). Затем будем перебирать линейные комбинации, на каждом шаге увеличивая максимальное количество слагаемых вдвое. Таким образом, необходимо сделать $\lceil log_2 n \rceil$ итераций, где $\lceil x \rceil$ — это округление числа x вверх.

Алгоритм 6.1.

1. *Создадим массив M длины a_1, содержащий числа из $\mathbb{R}_{\min}$. Запишем во все ячейки значения ∞.*

2. *На нулевой итерации переберём все линейные комбинации с одним слагаемым. Для этого для каждого a_i и для каждого множителя $0 \leq k < a_1$ проверим, можем ли мы улучшить ответ: сравним $a_i^{\otimes k} = a_i \cdot k$ с $M[a_i \cdot k\ rem\ a_1]$, и, если в массиве записано большее число, улучшим ответ: запишем в ячейку $a_i \cdot k\ rem\ a_1$ значение $a_i^{\otimes k} = a_i \cdot k$.*

3. *На каждой следующей итерации будем перебирать все пары ячеек $M[i]$ и $M[j]$ и пытаться улучшить ответ: сравним $M[(i + j)\ rem\ a_1]$ с $M[i] \otimes M[j]$ (т.е. $M[i] + M[j]$, если оба эти числа меньше ∞, и ∞ иначе), и, если в массиве записано большее число, улучшим ответ: запишем в ячейку $(i + j)\ rem\ a_1$ значение $M[i] \otimes M[j]$.*

4. *Всего необходимо сделать $\lceil log_2(n) \rceil + 1$ итераций. После этого ответом будет* $\bigoplus_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1 = \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1.$

Для доказательства корректности докажем следующее утверждение.

Лемма 6.2. *После итерации с номером d в ячейке $M[i]$ лежит минимальное число, сравнимое с i по модулю a_1, которое может быть представлено в виде линейной комбинации с не более чем 2^d слагаемыми, или ∞, если такого числа не существует.*

Доказательство. Докажем утверждение по индукции.

База: $d = 0$. В шаге 1 перебираются все линейные комбинации вида $a_j \cdot k$, где $0 \leq k < a_1$. Рассмотрим линейную комбинацию, которую мы не перебрали: $a_i \cdot m$. Так как мы не перебрали эту комбинацию, то $m \geq a_1$. Но тогда $a_i \cdot m \equiv a_i \cdot (m - a_1) \pmod{a_1}$ и $a_i \cdot m > a_i \cdot (m - a_1) \geq 0$ — эта линейная комбинация не может улучшить ответ. Значит, база верна.

Докажем переход. Предположим, утверждение доказано для $d - 1$, докажем его для d. Обозначим массив M в состоянии до итерации с номером d через M'.

Рассмотрим произвольную ячейку $M[i]$, в которой записано число, меньшее ∞. Тогда существуют два индекса j и k такие, что $i = (j + k)\ rem\ a_1$ и $M[i] = M'[j] + M'[k]$. По предположению индукции в каждой ячейке массива M' лежит число, которое может быть представлено в виде линейной комбинации с не более чем 2^{d-1} слагаемыми. Значит, в $M[i]$ лежит число, представимое в виде линейной комбинации с не более чем 2^d слагаемыми. По предположению индукции $M[i] = M'[j] + M'[k] \equiv j + k \equiv i \pmod{a_1}$.

Осталось доказать минимальность $M[i]$. Предположим противное: пусть существует число $x < M[i]$, сравнимое с i по модулю a_1 и представимое в виде линейной комбинации с не более чем 2^d слагаемыми. Тогда эту комбинацию можно разбить на две меньших, в каждой из которых будет не более 2^{d-1} слагаемых. Обозначим суммы этих линейных комбинаций через S_1 и S_2. Пусть $S_1 \equiv j \pmod{a_1}$, а $S_2 \equiv k \pmod{a_1}$.

Тогда $S_1 + S_2 = x < M[i] \leq M'[j] + M'[k]$ и или $S_1 < M'[j]$, или $S_2 < M'[k]$. В обоих случаях имеем противоречие с предположением индукции. Значит, предположение индукции верно и для d, что и требовалось доказать. □

Утверждение 6.3. *Алгоритм 6.1 корректен. Время его работы — $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot log\ n)$. Объем затраченной памяти — $O(a_1)$.*

Доказательство. Докажем асимптотики. Первый шаг работает за $O(a_1)$, второй — за $O(a_1 \cdot n)$ (надо перебрать все $1 \leq j \leq n$ и все $0 \leq k < a_1$). Третий работает за $O(a_1^2 \cdot log\ n)$, так как всего $O(log\ n)$ итераций, в каждой из которых надо перебрать пары (i, j), где $0 \leq i, j \leq a_1$. Четвертый — за $O(a_1)$. Итоговая сложность алгоритма: $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot log\ n)$.

Память тратится только на массив M длины a_1. Значит, алгоритм требует $O(a_1)$ памяти.

Докажем корректность. По лемме 6.2 после итерации с номером d в ячейках массива M лежит информация об оптимальных линейных комбинациях с не более чем 2^d слагаемыми. Следовательно, после итерации с номером $\lceil log_2(n) \rceil$ в массиве M лежит информация об оптимальных линейных комбинациях из n слагаемых, то есть массив M будет наконец посчитан.

Во время работы алгоритма каждая ячейка массива M изменит своё значение хотя бы раз: это следует из корректности функции P. Значит, после последней итерации в массиве M не останется ∞.

Далее ответ может быть получен по лемме 5.12. □

На моём компьютере при $n = 100, a_1 = 100$ алгоритм ни разу не показывал время, большее 0.2 с. При $n = 1000, a_1 = 1000$ алгоритм работал не дольше 0.3 с. При $n = 10000, a_1 = 10000$ алгоритм работает существенно медленнее: в районе 40 с.

Список литературы

[1] A. Kennedy-Cochran-Patrick, G. Merlet, T. Nowak, S. Sergeev, *New bounds on the periodicity transient of the powers of a tropical matrix: Using cyclicity and factor rank.* Linear Algebra and its Applications. **611** (2021), 279-309.

[2] G. Merlet, T. Nowak, S. Sergeev, *Weak CSR expansions and transience bounds in max-plus algebra.* Linear Algebra and its Applications. **461** (2014). 163–199

[3] S. Sergeev, H. Schneider, *CSR expansions of matrix powers in max algebra.* Transactions of the American Mathematical Society. December 2009.

[4] S. Sergeev, *Max algebraic powers of irreducible matrices in the periodic regime: An application of cyclic classes.* Linear Algebra and its Applications. **431** (2009), 1325–1339

[5] A. Guterman, E. Kreines, C. Thomassen, *Linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index.* Special Matrices. **9** (2021), 112-118.

[6] R. Brualdi, H. Ryser, *Combinatorial matrix theory.* Cambridge: Cambridge University Press; 1991.

N. Shaposhnik. Transient for wedge sum of cycles.

In this paper we discuss a particular case of transient defined by Sergeev in [4] for unweighted digraphs and for primitive digraphs. An algorithm for calculating this transient for bouquet of directed cycles (for cycles intersecting at one vertex) is established.

Keywords: max-plus, digraphs, matrix powers, periodicity, transient, bouquets of cycles.