

Трансиент для букета циклов

Никита Шапошник, Б05-025

научный руководитель: А. Э. Гутерман

В настоящей статье обсуждается частный случай трансиента, определённой в [9], для ориентированных невзвешенных графов, для примитивных графов и для букетов из циклов. Получен алгоритм вычисления этой границы для букета из ориентированных циклов (для циклов, пересекающихся в одной вершине).

1 Введение

Тропическое полукольцо — это множество $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, наделённое операцией сложения $a \oplus b = \max(a, b)$ и умножения $a \otimes b = a + b$. В нём нейтральным элементом по сложению является $-\infty$, а по умножению — 0 . В данной работе рассматриваются матрицы над \mathbb{R}_{\max} — тропические матрицы.

В [9, теор. 3.9] доказывается теорема о цикличности: существует такое натуральное σ и целое неотрицательное T , что для любого $t \geq T$

$$A^{t+\sigma} = \lambda^{\otimes \sigma} \otimes A^t,$$

где $\lambda = \lambda(A)$ — наибольший средний вес цикла в $\mathcal{G}(A)$, и $\lambda^{\otimes \sigma} = \underbrace{\lambda \otimes \cdots \otimes \lambda}_{\sigma \text{ раз}}$. Наименьшее

такое T обозначается через $T(A)$ и называется трансиентом матрицы A .

В [4] теорема о цикличности переформулируется в терминах CSR -разложения, которое определяется там же: для любого $t \geq T(A)$

$$A^t = \lambda^{\otimes t} \otimes CS^t R.$$

Трансиент является обобщением экспоненты на непримитивные графы. Основная цель работы — получение трансиента для букетов циклов, то есть для циклов, пересекающихся только по одной вершине. Обозначим через $T(a_1, \dots, a_n; \sigma)$ трансиент для букета из циклов длины $a_1\sigma, \dots, a_n\sigma$. Приводится алгоритм для вычисления этого трансиента. Для этого вводится вспомогательная функция $P(a_1, \dots, a_n)$, которая, неформально, равна наименьшему числу, начиная с которого можно получать любые числа в виде линейной комбинации чисел a_1, \dots, a_n с неотрицательными коэффициентами.

В разделе 2 определяются основные понятия. В разделе 3 вводятся матрицы C , S , R и определяется граница T . В разделе 4 рассматривается случай с примитивным невзвешенным ориентированным графом. В разделе 5 определяется букет из циклов и доказывается формула для границы T такого графа через вспомогательную функцию P . В разделе 6 описывается алгоритм, считающий функцию P .

Ключевые слова: тропическая алгебра, ориентированные графы, степени матриц, периодичность, граница T .

2 Определения

Определение 2.1. *Тропическим полукольцом будем называть множество $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями сложения \oplus и умножения \otimes :*

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

$$a \otimes b = a + b.$$

Нетрудно проверить, что \mathbb{R}_{\max} , действительно, является полукольцом:

- операция сложения \oplus коммутативна и ассоциативна, существует нейтральный по сложению элемент $-\infty$,
- умножение \otimes ассоциативно. Более того, оно коммутативно.
- умножение дистрибутивно относительно сложения, то есть $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$ для любых $a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}$.
- умножение на $-\infty$ всегда даёт $-\infty$.

Множество матриц размера $n \times m$ над \mathbb{R}_{\max} будем обозначать через $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$. Для тропической матрицы A будем писать $A > -\infty$, если в ней нет элементов, равных $-\infty$. Для двух тропических матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ будем писать $A \geq B$, если $a_{ij} \geq b_{ij}$ для любых допустимых i, j .

Рассмотрим тропическую матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$. По ней можно построить ориентированный взвешенный граф $\mathcal{G}(A) = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, а $E \subseteq V \times V$, где $(i, j) \in E$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq -\infty$. Веса рёбер определяются функцией $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto a_{ij}$. Говорят, что A является матрицей смежности графа $\mathcal{G}(A)$.

Наоборот, по взвешенному ориентированному графу \mathcal{G} на n вершинах аналогично можно построить матрицу смежности $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$. Для этого пронумеруем вершины числами от 1 до n и запишем в a_{ij} вес ребра от i до j , если оно есть, и $-\infty$ иначе.

При работе со степенями тропических матриц помогает думать о них в терминах графов. Например, по определению умножения матриц, легко доказать следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *[1, уравнение 9] В ячейке матрицы A^t с индексами u, v лежит минимальный вес пути в графе $\mathcal{G}(A)$ от u до v длины ровно t .*

Заметим, что $A^0 = I$ — единичная тропическая матрица, где на главной диагонали стоят 0, а на всех остальных местах стоят $-\infty$. Это согласуется с утверждением 2.2: за 0 шагов можно дойти только до стартовой вершины.

Определение 2.3. *Если существует целое неотрицательное n такое, что $A^n > -\infty$, то матрица A называется примитивной. В этом случае минимальное такое n называется экспонентой матрицы A и обозначается через $\text{exp}(A)$.*

Определение 2.4. *Ориентированный граф \mathcal{G} называется примитивным, если существует целое неотрицательное n такое, что для любых двух вершин u, v графа \mathcal{G} существует путь от u до v длины ровно n . В этом случае минимальное такое n называется экспонентой графа \mathcal{G} и обозначается через $\text{exp}(\mathcal{G})$.*

Заметим, что, по утверждению 2.2, примитивность матрицы A эквивалентна примитивности графа $\mathcal{G}(A)$. Более того, $\text{exp}(A) = \text{exp}(\mathcal{G}(A))$.

Теперь можно легко доказать следующий факт: если $A^p > -\infty$ для некоего p , то $A^t > -\infty$ для любого $t \geq p$. Действительно, если в графе $\mathcal{G}(A)$ между произвольными

двумя вершинами u, v есть путь длины p из u в v , то есть и путь длины t — достаточно взять вершину w , расстояние от которой до вершины v равно $t - p$. Тогда существует путь длины p от u до w , и путь длины $t - p$ от w до v . Взяв конкатенацию этих путей, получим искомым путь нужной длины.

Определение 2.5. [5, опр. 2.1] Индекс цикличности ориентированного графа \mathcal{G} обозначается через $\sigma_{\mathcal{G}}$ и определяется следующим образом:

1. Если \mathcal{G} сильно связан, и содержит хотя бы две вершины, то цикличность равна наибольшему общему делителю всех длин ориентированных циклов в \mathcal{G} .
2. Если в \mathcal{G} есть только одна вершина (с петлей или без), то $\sigma_{\mathcal{G}} = 1$.
3. Если \mathcal{G} не сильно связан, то его цикличность равна наименьшему общему кратному цикличностей всех максимальных его сильно связанных подграфов.

С помощью индекса цикличности можно сформулировать критерий примитивности ориентированного графа:

Теорема 2.6. [6, теорема 3.4.4] Ориентированный граф \mathcal{G} примитивен тогда и только тогда, когда \mathcal{G} сильно связан, и его индекс цикличности равен 1.

Пусть $\mathcal{G} = (V, E)$ — взвешенный ориентированный граф с матрицей смежности $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$. Пусть C — это ориентированный цикл в \mathcal{G} с весами ребер $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_l}$. Средний вес ребра в C — это тропическое среднее геометрическое весов ребер в C :

$$w_a(C) = \sqrt[l]{a_{i_1} \otimes a_{i_2} \otimes \dots \otimes a_{i_l}} = \frac{1}{l}(a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_l})$$

Определение 2.7. Ориентированный цикл называется критическим, если у него максимальный средний вес. Критический подграф \mathcal{G}^c графа \mathcal{G} — это объединение всех критических циклов в \mathcal{G} .

Максимальный средний вес цикла в $\mathcal{G}(A)$ обозначается через $\lambda(A)$, т.е.

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \bigoplus_{k=1}^d \bigoplus_{i_1, \dots, i_k} (a_{i_1 i_2} \otimes \dots \otimes a_{i_{k-1} i_k})^{\otimes 1/k} = \\ &= \max_{k=1}^d \max_{i_1, \dots, i_k} \frac{(a_{i_1 i_2} + \dots + a_{i_{k-1} i_k})}{k} \end{aligned}$$

Определение 2.8. Назовём ориентированный граф сильно связным, если для любых вершин u, v существует путь из u в v .

Назовем тропическую матрицу A (или соответствующий ей граф) неразложимой, если граф $\mathcal{G}(A)$ сильно связан.

Определение 2.9. Звездой Клини тропической матрицы $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ называется следующая матрица:

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i = \bigoplus_{i=0}^{n-1} A^i.$$

Утверждение 2.10. [2, уравнение 8] В матрице A^* в ячейке под номером i и j лежит длина оптимального пути от вершины i к вершине j в графе $\mathcal{G}(A)$ без ограничения на длину пути.

Условие $\lambda(A) \leq 0$ необходимо, так как иначе этот ряд расходится: можно идти по циклу с положительным средним весом и улучшать ответ. Так как дважды проходить через одну и ту же вершину не имеет смысла, можно ограничиться первыми n матрицами.

Определение 2.11. *Обхватом графа \mathcal{G} называется наименьшая длина цикла в \mathcal{G} и обозначается через $g(\mathcal{G})$.*

*Окружностью графа \mathcal{G} называется наибольшая длина цикла в \mathcal{G} и обозначается через $cr(\mathcal{G})$ (от английского *circumference*).*

Диаметром графа \mathcal{G} называется максимальная длина простого пути в графе и обозначается через $d(\mathcal{G})$.

3 CSR-разложение

Во введении был определён транзиент $T(A)$. Переформулируем теорему о цикличности в терминах CSR -декомпозиции.

Рассмотрим неразложимую матрицу $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$. Введем обозначения: $\sigma = \sigma(\mathcal{G}^c(A))$ — индекс цикличности критического подграфа, $M = ((\lambda(A)^- \otimes A^\sigma)^*$. Здесь и далее для $a \in \mathbb{R}_{\max}$, $a \neq -\infty$ через a^- будем обозначать обратное по умножению к a , т.е. $a^- = -a$.

Обозначим для произвольного графа \mathcal{G} множество его вершин через $V(\mathcal{G})$, а множество его рёбер — через $E(\mathcal{G})$.

Определим матрицы $C, S, R \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \begin{cases} m_{ij}, & \text{если } j \in V(\mathcal{G}^c(A)) \\ -\infty, & \text{иначе,} \end{cases} & r_{ij} &= \begin{cases} m_{ij}, & \text{если } i \in V(\mathcal{G}^c(A)) \\ -\infty, & \text{иначе,} \end{cases} \\ s_{ij} &= \begin{cases} \lambda(A)^- \otimes a_{ij}, & \text{если } (i, j) \in E(\mathcal{G}^c(A)) \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим произведение матриц CS^tR , построенных по матрице A , через $CS^tR[A]$ для произвольного t .

Теорема 3.1 (Переформулировка теоремы о цикличности). [2, теор. 2.2] *Для любого $t \geq T(A)$:*

$$A^t = \lambda(A)^{\otimes t} \otimes CS^tR[A]. \quad (1)$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (1) записывается в виде:

$$A^t = CS^tR[A].$$

Таким образом, матрица C отвечает за пути, кончающиеся в критическом подграфе, и длины которых делятся на σ , матрица S^t отвечает за пути длины ровно t , целиком лежащие в критическом подграфе, а матрица R — за пути, начинающиеся в критическом подграфе, и длины которых делятся на σ . Значит, произведение CS^tR отвечает за конкатенацию трёх вышеописанных путей.

Утверждение 3.2. [3, утверждение 3.2] *Для любого $t \geq 0$ верно, что $CS^{t+\sigma}R[A] = CS^tR[A]$, где σ — это цикличность $\mathcal{G}^c(A)$. Иначе говоря, последовательность матриц $\{CS^tR[A]\}_{t \geq 0}$ периодична с периодом σ .*

Значит, если $\lambda(A) = 0$, то в силу равенства $A^t = CS^tR$ при $t \geq T(A)$, последовательность матриц A^t при $t \geq T(A)$ является периодической с периодом σ .

Через $\mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}'} j)$ обозначим множество путей от вершины i к вершине j , имеющих длину t по модулю l , и проходящих хотя бы через одну вершину графа \mathcal{G}' . Для множества \mathcal{W} через $p(\mathcal{W})$ обозначим максимальный вес пути из множества \mathcal{W} .

Утверждение 3.3. [2, теор. 6.1] Если $\lambda(A) = 0$, то верно следующее равенство:

$$[CS^t R[A]]_{ij} = p(\mathcal{W}^{t,\sigma}(i \xrightarrow{\mathcal{G}^c(A)} j)), \quad (2)$$

где σ обозначает цикличность $\mathcal{G}^c(A)$, а через $[X]_{ij}$ обозначается элемент матрицы X , стоящий на пересечении строки i и столбца j .

Введём ещё одну функцию — $T_1(A, B)$. Для этого зафиксируем матрицу B такую, что $B \leq A$.

Определение 3.4. [2, стр. 165] $T_1(A, B)$ — наименьшее целое число такое, что для любого $t \geq T_1(A, B)$:

$$A^t = ((\lambda(A))^{\otimes t} \otimes CS^t R[A]) \oplus B^t. \quad (3)$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (3) записывается в виде $A^t = CS^t R[A] \oplus B^t$, и если $B = -\infty$, то $T(A) = T_1(A, B)$.

Утверждение 3.5 (Определённость $T_1(A, B)$). Если A неразложима и $B \leq A$, то функция $T_1(A, B)$ определена.

Доказательство. Заметим, что при любых t верно неравенство $B^t \leq A^t$, и при $t \geq T(A)$ по определению $T(A)$ будет верно равенство $A^t = CS^t R[A]$.

Значит, при $t \geq T(A)$ будет верно равенство 3.4. \square

Есть множество способов определить матрицу B , здесь мы рассматриваем один частный случай: способ Нахтигалля [2, страница 170]. Определим матрицу $B_N = B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\infty, & \text{если } i \in V(\mathcal{G}^c) \text{ или } j \in V(\mathcal{G}^c), \\ a_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим $T_1(A, B)$ для описанной матрицы B_N через $T_{1,N}(A)$.

Замечание 3.6. Инвариантность относительно умножения на скаляр, [1, стр. 287] Если $A' = A \otimes \mu$, где $\mu \neq -\infty$, то

- $\lambda(A') = \lambda(A) \otimes \mu$, $B_N[A'] = B_N[A]$
- $CSR[A'] = CSR[A]$

Значит, $T(A)$ и $T_{1,N}(A)$ инвариантны относительно умножения матрицы на конечный скаляр, что позволяет нам без ограничения общности говорить, что $\lambda(A) = 0$.

Существуют несколько оценок для $T_{1,N}(A)$. В дальнейшем мы будем рассматривать только графы, в которых все рёбра имеют нулевой вес, поэтому $B = 0$. Следовательно, $T(A) = T_{1,N}(A)$, и оценки для $T_{1,N}(A)$ верны и для $T(A)$.

Определение 3.7. Числом Виландта называется следующая функция:

$$\mathcal{W}(n) = \begin{cases} (n-1)^2 + 1, & \text{если } n > 1, \\ 0, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Теорема 3.8. Верхние оценки $T_{1,N}(A)$, [2, теорема 4.1] Для любой неразложимой $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ имеем:

1. $T_{1,N}(A) \leq \mathcal{W}(n)$;
2. $T_{1,N}(A) \leq g(n-2) + n$;
3. $T_{1,N}(A) \leq (g-1)(cr-1) + (g+1)d$,

где $g = g(\mathcal{G}(A))$, $cr = cr(\mathcal{G}(A))$, а $d = d(\mathcal{G}(A))$.

Следствие 3.9 (Верхние оценки $T(A)$). Для любой неразложимой $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ имеем:

1. $T(A) \leq \mathcal{W}(n)$;
2. $T(A) \leq g(n-2) + n$;
3. $T(A) \leq (g-1)(cr-1) + (g+1)d$,

где $g = g(\mathcal{G}^c(A))$, $cr = cr(\mathcal{G}(A))$, а $d = d(\mathcal{G}(A))$.

Цель данной работы — поиск границы T для графов, все рёбра которых имеют нулевой вес. В них $T = T_{1,N}$, и для вычисления удобно использовать следующее утверждение.

Утверждение 3.10. [1, лемма 2.3] Пусть $\lambda(A) = 0$. Тогда $A^t \geq CS^tR[A]$ тогда и только тогда, когда $t \geq T_{1,N}(A)$.

Это утверждение позволяет искать границу T : достаточно найти наименьшее t , для которого верно $A^t \geq CS^tR[A]$. Тогда $T = t$.

Рассмотрим несколько примеров. Во всех них считаем, что все рёбра имеют нулевой вес. Значит, $\lambda(A) = 0$, критический подграф совпадает со всем графом, и $T(A) = T_{1,N}(A)$.

Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, где $a_{ij} = 0$ для любых индексов i, j . Граф $\mathcal{G}(A)$ является полным, то есть между любыми двумя вершинами проведено ребро.

Пример 3.11 (Полный граф). Граница T для полного графа равна 0.

Доказательство. Найдем матрицы C, S, R . Индекс цикличности полного графа $\sigma = 1$ (т.к. в нём есть циклы длины 1), следовательно $C = R = M = A^*$, $S = A$.

Так как для любого положительного t верно, что $A^t = A$, то $A^* = A$ и равенство $A^*A^tA^* = A^t$ выполняется тогда и только тогда, когда $t > 0$.

Следовательно, $T = 1$. □

Пример 3.12 (Односторонний цикл). Граница T для одностороннего цикла на n вершинах равна 0.

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ — матрица смежности рассматриваемого графа. Тогда:

$$M = (A^n)^* = I^* = I = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & 0 & \dots & -\infty \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\infty & -\infty & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Значит, $C = R = I$, $S = A$, и для любого неотрицательного t верно $CS^tR[A] = A^t$. Следовательно, $T = 0$. □

Рассмотрим матрицу смежности $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ двустороннего цикла на n вершинах. Пронумеруем вершины так, чтобы первый цикл состоял из вершин $1, 2, \dots, n$ (в порядке обхода), а второй — из $n, n-1, \dots, 1$ (в порядке обхода). Чтобы избежать кратных рёбер, будем работать с $n \geq 3$.

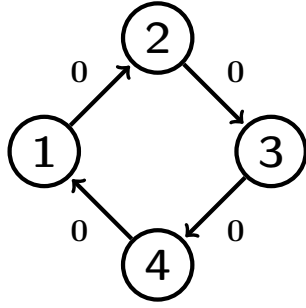


Рис. 1: Односторонний цикл

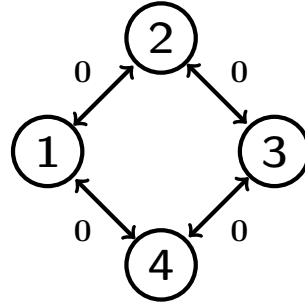


Рис. 2: Двусторонний цикл

Пример 3.13 (Двусторонний цикл).

$$T(A) = \begin{cases} n - 1, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда n нечётно. В этом случае цикличность критического графа $\sigma = 1$, и рассматриваемый граф примитивен. Значит, $T(A) = \exp(A)$. По [8, теор. 3.1] экспонента двустороннего цикла $\exp(A) = n - 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда n чётно. В этом случае $\sigma = 2$ и граф не примитивен. $C = R = M = (A^2)^*$, $S = A$.

Так как последовательность матриц CS^tR периодична с периодом $\sigma = 2$ (по утверждению 3.2), то при $t \geq T(A)$

$$A^t = CS^tR = \begin{cases} (A^2)^*, & \text{если } t \text{ четно.} \\ A \otimes (A^2)^*, & \text{если } t \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В матрице $(A^2)^*$ небесконечные элементы стоят в ячейках (i, j) , если вершины i и j находятся на четном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с одинаковой четностью равно $\frac{n}{2}$. Значит, условие при четном t выполняется при $t \geq \frac{n}{2}$, а при прочих t не выполняется.

В матрице $A \otimes (A^2)^*$ небесконечные элементы стоят в ячейках (i, j) , если вершины i и j находятся на нечетном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с разной четностью равно $\frac{n}{2} - 1$. Значит, условие при четном t выполняется при $t \geq \frac{n}{2} - 1$, а при прочих t — не выполняется.

Следовательно, $T(A) = \frac{n}{2}$. □

4 Примитивные графы с нулевыми рёбрами

Функция T является обобщением экспоненты на непримитивные графы.

Рассмотрим примитивный граф с матрицей смежности A , в котором вес каждого ребра равен 0. Тогда критический подграф совпадает со всем графом, и индекс цикличности примитивного графа $\sigma = 1$.

По утверждению 3.2 последовательность матриц $CS^tR[A]$ периодична с периодом $\sigma = 1$, то есть в этой последовательности все члены равны. Из утверждения 3.3 и примитивности A следует, что матрица $CS^tR[A]$ целиком состоит из 0 при любом t .

Заметим, что в любой степени матрицы A её элементы будут принимать только два значения: $-\infty$ и 0. Из определения $T(A)$ следует, что $A^t = CS^tR[A]$ тогда и только тогда, когда $t \geq T(A)$. Значит, матрица A^t не содержит $-\infty$ тогда и только тогда, когда $t \geq T(A)$. Значит, $T(A) = \exp(A)$, если A примитивна.

Это приводит нас к более общему утверждению.

Утверждение 4.1. Рассмотрим примитивную матрицу A , у которой $\mathcal{G}(A)$ совпадает со своим критическим подграфом, $\lambda(A) = 0$. Если для двух произвольных фиксированных вершин u и v верно, что все пути из u в v имеют одинаковый вес, то $T(A) = \exp(A)$.

Доказательство. В силу условия на одинаковый вес между любыми двумя вершинами, матрицы вида $CS^tR[A]$ принимают только одно значение (по утверждению 3.3), а значение конкретной ячейки матрицы A^t либо равно $-\infty$, либо совпадает с соответствующей ячейкой $CS^tR[A]$. Значит, условие $A^t = CS^tR[A]$ равносильно условию $A^t > -\infty$. Следовательно, $T(A) = \exp(A)$. \square

Заметим, что обратное утверждение неверно. Рассмотрим графы, имеющие следующие матрицы смежности:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -\infty \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\infty & 1 \\ 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

И в $\mathcal{G}(A)$, и в $\mathcal{G}(B)$ экспонента совпадает с T (в обоих графах экспонента равна 2), но в графе $\mathcal{G}(A)$ максимальный средний вес цикла равен -1 , а в графе $\mathcal{G}(B)$ критический подграф не совпадает со всем графом.

5 Граница T для букетов циклов

Определение 5.1. Назовем букетом циклов граф, состоящий из нескольких пересекающихся по одной вершине ориентированных циклов.

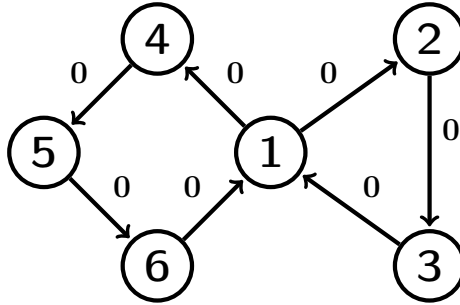


Рис. 3: Букет из циклов длины 3 и 4

Здесь и далее будем рассматривать букеты циклов длины, кратной σ , все рёбра в которых имеют вес 0.

Определение 5.2. Букет циклов длины $a_1\sigma, a_2\sigma, \dots, a_n\sigma$, где числа a_1, \dots, a_n взаимно просты в совокупности, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ назовем $(a_1, \dots, a_n; \sigma)$ -букетом.

Границу T , определенную для такого графа, будем обозначать через $T(a_1, \dots, a_n; \sigma)$.

Заметим, что индекс цикличности такого букета равен σ и всего в нём $N = \sum_{i=1}^n a_i\sigma - n + 1$ вершин. Пусть вершина, в которой пересекаются все циклы, имеет номер 1. Пронумеруем вершины в порядке следующего обхода: начнем в вершине 1, далее пройдем по первому циклу, затем — по второму, и так далее до цикла с номером n (не изменяя номер у вершины 1).

Во всех примерах матрицу смежности рассматриваемого графа будем обозначать через $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, а через C, S, R будем обозначать матрицы C, S, R , построенные по матрице A .

Теорема 5.3. $T(a_1, \dots, a_n; \sigma) = (T(a_1, \dots, a_n; 1) + 1)\sigma - 1$.

Доказательство. Обозначим граф, соответствующий $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -букету через \mathcal{G} , а граф, соответствующий $(a_1, \dots, a_n; \sigma)$ -букету — через \mathcal{G}_σ . Граф \mathcal{G}_σ получается из графа \mathcal{G} разделением каждого ребра на σ более мелких рёбер. Вершины \mathcal{G}_σ , лежащие в одном циклическом классе с вершиной 1, будем называть начальными. Для краткости будем обозначать $T(a_1, \dots, a_n; 1)$ через T^1 , а $T(a_1, \dots, a_n; \sigma)$ — через T^σ .

Покажем, что $T^\sigma > (T^1 + 1)\sigma - 2$. В \mathcal{G} есть 2 вершины, между которыми нет пути длины $T^1 - 1$. Значит, в \mathcal{G}_σ между соответствующими начальными вершинами нет пути длины $(T^1 - 1)\sigma$. Обозначим эти вершины через u и v . Но тогда между вершинами \hat{u} и \hat{v} не будет пути длины $(T^1 - 1)\sigma + 2(\sigma - 1) = (T^1 + 1)\sigma - 2$, где \hat{u} получается, если отойти от u на $\sigma - 1$ шаг вперёд, а \hat{v} — от вершины v на $\sigma - 1$ шаг назад (обе новые вершины существуют, так как любая вершина в \mathcal{G} лежит в цикле). Значит, $T^\sigma \geq (T^1 + 1)\sigma - 1$.

Покажем, что $T^\sigma \leq (T^1 + 1)\sigma - 1$. Для этого нужно доказать, что между любыми двумя вершинами u и v графа \mathcal{G}_σ есть путь длины $(T^1 + 1)\sigma - 1$ от u до v . Путь длины $(T^1 + 1)\sigma - 1$ от u до v состоит из трех частей: путь от u до ближайшей начальной вершины, путь между начальными вершинами, и путь от ближайшей начальной вершины до v . Суммарная длина первой и третьей частей не превосходит $2\sigma - 2$, значит, длина второй части не меньше $(T^1 - 1)\sigma + 1$. Но длина пути между двумя начальными вершинами должна быть кратна σ , поэтому длина второй части не меньше $T^1 \cdot \sigma$. Но, по определению T^1 , между любыми начальными вершинами есть путь длины $T^1 \cdot \sigma$. Значит, $T^\sigma \geq (T^1 + 1)\sigma - 1$, и утверждение доказано. \square

Таким образом, при расчёте границы T для произвольного графа-букета достаточно посчитать искомую границу при $\sigma = 1$, а затем получить ответ по формуле из утверждения 5.3.

Замечание 5.4. При $\sigma = 1$ $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -букет примитивен, все рёбра в ней имеют нулевой вес. Значит, граница T данного графа совпадает с его экспонентой.

Введём вспомогательную функцию P :

Определение 5.5. Для взаимно простых в совокупности натуральных чисел $a_1 \leq \dots \leq a_n$ обозначим через $P(a_1, \dots, a_n)$ минимальное целое неотрицательное число, удовлетворяющее следующему свойству: любое $p \geq P(a_1, \dots, a_n)$ выражается в виде линейной комбинации чисел a_1, \dots, a_n с целыми неотрицательными коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то есть

$$p = a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n. \quad (4)$$

Число, выражающееся в виде линейной комбинации чисел a_1, \dots, a_n с целыми неотрицательными коэффициентами, назовём *выразимым*.

Здесь и далее под линейной комбинацией будем понимать линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами.

Утверждение 5.6 (Свойства функции P).

1. Если $a_1 = 1$, то $P(1, \dots, a_n) = 0$.
2. $P(a_1, \dots, a_n) \leq P(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ — возрастающая последовательность индексов.
3. $P(a_1, \dots, a_n) = P(b_1, \dots, b_m)$, где набор b_1, \dots, b_m получается из набора a_1, \dots, a_n удалением повторяющихся элементов.
4. Если a_j делится на a_i , то $P(a_1, \dots, a_n) = P(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$.

5. Если a_j представляется в виде линейной комбинации меньших элементов, то $P(a_1, \dots, a_n) = P(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$.

Доказательство. 1) Действительно, если $a_1 = 1$, то любое неотрицательное число k выражается как $1 \cdot k$. Следовательно, $P = 0$.

2) Свойство следует из следующего факта: сумма $a_{i_1}\lambda_{i_1} + \dots + a_{i_k}\lambda_{i_k}$ является частным случаем суммы $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$.

3) При приведении подобных членов в сумме $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$ получается корректная сумма $b_1\mu_1 + \dots + b_m\mu_m$. С другой стороны, сумма $b_1\mu_1 + \dots + b_m\mu_m$ является корректной суммой вида $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$.

4) Очевидно, что любая сумма $a_1\lambda_1 + \dots + a_{j-1}\lambda_{j-1} + a_{j+1}\lambda_{j+1} + \dots + a_n\lambda_n$ является суммой вида $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$, где $\lambda_j = 0$. С другой стороны, заменив a_j на $a_i \cdot \frac{a_j}{a_i}$, можно избавиться от слагаемого $a_j\lambda_j$ в сумме $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$, что доказывает утверждение.

5) Доказательство этого свойства аналогично предыдущему. \square

Для доказательства следующей теоремы введём циклические классы ([4, раздел 3.3]). В сильно связном графе \mathcal{G} с циклическостью σ любые два пути, соединяющие две фиксированные вершины, имеют одинаковые длины по модулю σ . Поэтому на множестве вершин рассматриваемого графа вводится отношение эквивалентности: две вершины лежат в одном классе эквивалентности тогда и только тогда, когда длина пути от одной к другой кратна σ . Эти классы эквивалентности называются циклическими классами.

Теорема 5.7. Рассмотрим взаимно простые в совокупности числа a_1, \dots, a_n . Тогда:

$$T(a_1, \dots, a_n; 1) = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2.$$

Доказательство. Разберём случай $a_n = 1$. Тогда $P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2 = 0$, что совпадает с экспонентой $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -букета.

Далее считаем, что $a_n > 1$.

Покажем, что при $t = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 3$ существуют две вершины, между которыми нет пути длины t . Пусть u_0 — следующая за вершиной 1 в цикле длины a_n вершина, а v_0 — идущая перед вершиной 1 в том же цикле.

Заметим, что путь длины t из u_0 в v_0 проходит через вершину 1, так как единственный простой путь из u_0 в v_0 имеет длину $a_n - 2 < t$, так как $a_n > 1$. Значит, путь длины t из u_0 в v_0 состоит из трёх частей: первая — от u_0 до 1, вторая — конкатенация циклов, третья — от 1 до v_0 . Длина первой и третьей частей равна $a_n - 1$, а длина второй части — выражима.

Значит, длина второй части равна $t - 2a_n + 2 = P(a_1, \dots, a_n) - 1$ — невыразима по определению P . Следовательно, пути длины t от u_0 до v_0 не существует, и $T(a_1, \dots, a_n; 1) \geq P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$.

Покажем, что экспонента рассматриваемого графа равна $t = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$. Зафиксируем произвольные вершины u, v . Обозначим через \hat{u} расстояние от u до вершины 1, а через \hat{v} — расстояние от вершины 1 до v . Тогда для существования пути длины t из u в v необходима и достаточна выразимость $t - \hat{u} - \hat{v}$. Заметим, что максимальное значение $\hat{u} + \hat{v}$ равно $2a_n - 2$ и достигается на описанных выше вершинах u_0, v_0 . Тогда $t - \hat{u} - \hat{v} \geq P(a_1, \dots, a_n)$, и, следовательно, $t - \hat{u} - \hat{v}$ всегда выражимо. Значит, между произвольными вершинами графа существует путь длины $P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$.

Следовательно, $T(a_1, \dots, a_n; 1) = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$. \square

Следствие 5.8 (Определённость функции P). Функция $P(a_1, \dots, a_n)$ определена для любых взаимно простых в совокупности чисел a_1, \dots, a_n .

Доказательство. Рассмотрим $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -букет. По замечанию 5.4 этот граф примитивен и, следовательно, имеет экспоненту, которая, в свою очередь, совпадает с границей T для данного графа-букета. По формуле из теоремы 5.7 имеем $P(a_1, \dots, a_n) = T(a_1, \dots, a_n; 1) - 2a_n + 2$. \square

Оценим значение функции P с помощью верхних оценок, полученных для графа-букета.

Утверждение 5.9. Рассмотрим взаимно простые в совокупности числа a_1, \dots, a_n . Тогда функция $P(a_1, \dots, a_n)$ оценивается сверху следующими функциями:

1. $W(N) - 2a_n + 2$,
2. $(a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2$,
3. $(a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2)$,

где $N = \sum_{i=1}^n a_i - n + 1$ — количество вершин в $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -букете.

Доказательство. Обхват (a_1, \dots, a_n) -букета равен a_1 , его окружность равна a_n , а её диаметр не превосходит $2a_n - 2$.

Далее достаточно оценить границу T рассматриваемого графа по теореме 3.9 и применить теорему 5.7. \square

Рассмотрим несколько частных случаев аргументов функции P и найдём для них точную формулу для P .

Утверждение 5.10. Если a и b взаимно просты, то $P(a, b) = (a - 1)(b - 1)$.

Доказательство. Покажем, что $p = ab - a - b \neq ma + nb$ для любых целых неотрицательных m, n .

Предположим противное. Тогда:

$$ab - a - b = am + bn \iff ab = (m + 1)a + (n + 1)b$$

В силу взаимной простоты a и b получим, что $n + 1 \div a$, и $m + 1 \div b$. Тогда, в силу того, что $m, n \geq 0$, имеем 2 случая:

$$\begin{cases} n + 1 = a \\ m + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n + 1 = 0 \\ m + 1 = b. \end{cases}$$

В обоих случаях получаем противоречие. Следовательно, $P(a, b) \geq (a - 1)(b - 1)$.

Теперь покажем, что $P(a, b) \leq (a - 1)(b - 1)$. Для любого $p \geq (a - 1)(b - 1)$ решим уравнение:

$$am + bn = p$$

Так как a и b взаимно просты, числа из набора $0, b, 2b, \dots, (a - 1)b$ дают все a остатков по модулю a . Значит, существует единственное $0 \leq n \leq a - 1$, что $bn \equiv p \pmod{a}$, причём $p - bn \geq 0$, так как $p - bn \div a$ и

$$p - bn \geq (a - 1)(b - 1) - (a - 1)b = -a + 1 > -a \implies p - bn \geq 0.$$

Значит, $m = \frac{p - bn}{a} \geq 0$.

Таким образом, нами были найдены целые $m \geq 0, n \geq 0$. Следовательно, $P(a, b) = (a - 1)(b - 1)$. \square

Утверждение 5.11. Если числа $2, a, b$ взаимно просты в совокупности, то

$$P(2, a, b) = \begin{cases} P(2, b) = b - 1, & \text{если } a \text{ чётно,} \\ P(2, a) = a - 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Первый случай следует из свойства 4 утверждения 5.6.

Разберём второй случай: a нечётно. Неравенство $P(2, a, b) \leq P(2, a)$ следует из свойства 2 утверждения 5.6. Докажем обратное неравенство: необходимо показать, что с помощью слагаемых $2, a, b$ невозможно получить сумму $a - 2$. Действительно, из трёх слагаемых можно использовать только одно: 2 . Но $a - 2$ нечётно — противоречие. Следовательно, $P(2, a, b) = P(2, a)$. \square

Чтобы легче вычислять функцию P , определим вспомогательную функцию M , сопоставляющую каждому целому числу от 0 до $a_1 - 1$ целое неотрицательное число: $M[i]$ — это минимальное выразимое число, сравнимое с i по модулю a_1 . Впоследствии, при описании алгоритма, вычисляющего P , удобно будет представлять M в качестве массива, поэтому значение функции M на элементе i будем обозначать с помощью квадратных скобок — через $M[i]$.

Заметим, что $M[0] = 0$ и что $M[i] \equiv i \pmod{a_1}$.

Утверждение 5.12. Если a_1, \dots, a_n — взаимно простые в совокупности числа, то

$$P(a_1, \dots, a_n) = \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1.$$

Доказательство. Пусть $\max_{i=0}^{a_0-1} M[i] = M[k]$.

Выразимость $M[k] - a_1$ вела бы к противоречию с определением массива M , так как $M[k] - a_1 \equiv M[k] \pmod{a_1}$. Значит, $P(a_1, \dots, a_n) \geq \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$.

Заметим, что если произвольное x выразимо, то и число $x + a_1$ выразимо. Из этого следует, что любое число, сравнимое с i по модулю a_1 и не меньшее $M[i]$, выразимо. Значит, все числа, начиная с $M[k] - a_1 + 1$ выразимы — иначе $M[k]$ было бы не максимальным числом в массиве M .

Следовательно, $P(a_1, \dots, a_n) = \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$. \square

Используя массив M , можно легко посчитать $P(4, a, b)$ и $P(3, a, b)$. Здесь и далее через $x \bmod y$ будем обозначать остаток при делении x на y .

Утверждение 5.13 (Формула для $P(3, a, b)$). Пусть числа $3, a, b$ взаимно просты в совокупности.

1. Если $a \div 3$, то $P(3, a, b) = P(3, b) = 2b - 2$.
2. Если $a \not\div 3$ и $a + b \not\div 3$, то $P(3, a, b) = P(3, a) = 2a - 2$.
3. Если $a \not\div 3$ и $a + b \div 3$, то $P(3, a, b) = \min(2a, b) - 2$.

Доказательство. Первый случай следует из свойства 4 утверждения 5.6.

В остальных случаях $M[a \bmod 3] = a$, и весь ответ зависит от величины $M[3 - a \bmod 3]$.

Если $b \not\equiv 2a \pmod{3}$, то $M[3 - a \bmod 3] = 2a$, и $P(3, a, b) = 2a - 2$.

Если $b \equiv 2a \pmod{3}$, то $M[3 - a \bmod 3] = \min(2a, b)$, и $P(3, a, b) = \min(2a, b) - 2$. \square

Утверждение 5.14 (Формула для $P(4, a, b)$). Пусть числа $4, a, b$ взаимно просты в совокупности.

1. Если $a \div 4, b \nmid 2$, то $P(4, a, b) = P(4, b)$.
2. Если $a \nmid 2, b \div 4$, или $0 \not\equiv a \equiv b \pmod{4}$, или $a \nmid 2, b \geq P(4, a)$, то $P(4, a, b) = P(4, a)$.
3. Если $a \equiv 2 \pmod{4}, b \nmid 2$, то $P(4, a, b) = a + b - 3$.
4. Если $a \nmid 2, b \equiv 2 \pmod{4}$, то $P(4, a, b) = a + \min(2a, b) - 3$.
5. Если $a, b \nmid 2, a + b \div 4, b < P(4, a)$, то $P(4, a, b) = \max(2a, b) - 3$.

Доказательство. Из свойства 4 утверждения 5.6 можно вывести случай $a \div 4, b \nmid 2$ и случай $a \nmid 2, b \div 4$, а из свойства 5 того же утверждения — случай $0 \not\equiv a \equiv b \pmod{4}$.

Во всех остальных случаях посчитаем массив M , и по утверждению 5.12 найдём ответ.

Докажем случай $a \nmid 2, b \geq P(4, a)$. Тогда $M[a \bmod 4] = a$, $M[2] = 2a$, и $M[4 - a \bmod 4] = 3a$ — число b слишком большое, чтобы повлиять на этот массив. Таким образом, максимум этого массива равен $3a$, и ответом будет число $3a - 3 = P(4, a)$.

Разберём случай $a \equiv 2 \pmod{4}, b \nmid 2$. Заметим, что $M[2] = a$, $M[b \bmod 4] = b$, $M[4 - b \bmod 4] = a + b$. Максимум этого массива — $a + b$, поэтому ответ равен $a + b - 3$.

Разберём случай $a \nmid 2, b \equiv 2 \pmod{4}$. Тогда $M[a \bmod 4] = a$. На место $M[2]$ есть два кандидата: $2a$ и b . Если $b < 2a$, то $M[2] = b$, и иначе — $2a$. Далее, для $M[4 - a \bmod 4]$ имеем два варианта: $3a$ и $a + b$, и если $b < 2a$, то $M[4 - a \bmod 4] = a + b$, и иначе — $3a$. Таким образом, если $b < 2a$, то ответ равен $a + b - 3$, а иначе — $3a - 3 = P(4, a)$.

Разберём последний случай: $a, b \nmid 2, a + b \div 4, b < 3a - 3$. Тогда $M[a \bmod 4] = a$, $M[b \bmod 4] = b$ и $M[2] = 2a$. В зависимости от относительного расположения $2a$ и b имеем 2 различных возможных максимума массива M , откуда, по утверждению 6.3 находим ответ. \square

6 Алгоритм вычисления функции P

Приведём алгоритм, вычисляющий функцию P . На вход ему подаётся число n и числа a_1, \dots, a_n .

Алгоритм вычисляет массив M , а затем, по формуле из леммы 5.12, вычисляет ответ на поставленную задачу. Массив M вычисляется постепенно: изначально в каждой ячейке $M[i]$ значения ∞ из \mathbb{R}_{\min} — это значит, что пока не было найдено ни одного выразимого числа, сравнимого с i по модулю a_1 . Если при последующем переборе было найдено некоторое p , сравнимое с i по модулю a_1 и меньшее $M[i]$, то необходимо перезаписать в ячейку $M[i]$ значение p .

Перебор начинается с рассмотрения всех линейных комбинаций с одним слагаемым (здесь и далее через количество слагаемых будем обозначать количество ненулевых коэффициентов λ_i в линейной комбинации вида 4). Затем будем перебирать линейные комбинации, на каждом шаге увеличивая максимальное количество слагаемых вдвое. Таким образом, необходимо сделать $\lceil \log_2 n \rceil$ итераций, где $\lceil x \rceil$ — это округление числа x вверх.

При описании следующего алгоритма мы будем работать с другой версией тропического полукольца — с \mathbb{R}_{\min} .

Определение 6.1. $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ с операциями сложения \oplus и умножения \otimes :

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \min(a, b) \\ a \otimes b &= a + b. \end{aligned}$$

Алгоритм 6.2.

1. Создадим массив M длины a_1 , содержащий числа из \mathbb{R}_{\min} . Запишем во все ячейки значения ∞ .
2. На нулевой итерации переберём все линейные комбинации с одним слагаемым. Для этого для каждого a_i и для каждого множителя $0 \leq k < a_1$ проверим, можем ли мы улучшить ответ: сравним $a_i^{\otimes k} = a_i \cdot k$ с $M[a_i \cdot k \bmod a_1]$, и, если в массиве записано большее число, улучшим ответ: запишем в ячейку $a_i \cdot k \bmod a_1$ значение $a_i^{\otimes k} = a_i \cdot k$.
3. На каждой следующей итерации будем перебирать все пары ячеек $M[i]$ и $M[j]$ и пытаться улучшить ответ: сравним $M[(i+j) \bmod a_1]$ с $M[i] \otimes M[j]$ (т.е. $M[i] + M[j]$, если оба эти числа меньше ∞ , и ∞ иначе), и, если в массиве записано большее число, улучшим ответ: запишем в ячейку $(i+j) \bmod a_1$ значение $M[i] \otimes M[j]$.
4. Всего необходимо сделать $\lceil \log_2(n) \rceil + 1$ итераций. После этого ответом будет $\bigoplus_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1 = \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$.

Для доказательства корректности докажем следующее утверждение.

Лемма 6.3. После итерации с номером d в ячейке $M[i]$ лежит минимальное число, сравнимое с i по модулю a_1 , которое может быть представлено в виде линейной комбинации с не более чем 2^d слагаемыми, или ∞ , если такого числа не существует.

Доказательство. Докажем утверждение по индукции.

База: $d = 0$. В шаге 1 перебираются все линейные комбинации вида $a_j \cdot k$, где $0 \leq k < a_1$. Рассмотрим линейную комбинацию, которую мы не перебрали: $a_i \cdot t$. Так как мы не перебрали эту комбинацию, то $t \geq a_1$. Но тогда $a_i \cdot t \equiv a_i \cdot (t - a_1) \pmod{a_1}$ и $a_i \cdot t > a_i \cdot (t - a_1) \geq 0$ — эта линейная комбинация не может улучшить ответ. Значит, база верна.

Докажем переход. Предположим, утверждение доказано для $d - 1$, докажем его для d . Обозначим массив M в состоянии до итерации с номером d через M' .

Рассмотрим произвольную ячейку $M[i]$, в которой записано число, меньшее ∞ . Тогда существуют два индекса j и k такие, что $i = (j + k) \bmod a_1$ и $M[i] = M'[j] + M'[k]$. По предположению индукции в каждой ячейке массива M' лежит число, которое может быть представлено в виде линейной комбинации с не более чем 2^{d-1} слагаемыми. Значит, в $M[i]$ лежит число, представимое в виде линейной комбинации с не более чем 2^d слагаемыми. По предположению индукции $M[i] = M'[j] + M'[k] \equiv j + k \equiv i \pmod{a_1}$.

Осталось доказать минимальность $M[i]$. Предположим противное: пусть существует число $x < M[i]$, сравнимое с i по модулю a_1 и представимое в виде линейной комбинации с не более чем 2^d слагаемыми. Тогда эту комбинацию можно разбить на две меньших, в каждой из которых будет не более 2^{d-1} слагаемых. Обозначим суммы этих линейных комбинаций через S_1 и S_2 . Пусть $S_1 \equiv j \pmod{a_1}$, а $S_2 \equiv k \pmod{a_1}$.

Тогда $S_1 + S_2 = x < M[i] \leq M'[j] + M'[k]$ и или $S_1 < M'[j]$, или $S_2 < M'[k]$. В обоих случаях имеем противоречие с предположением индукции. Значит, предположение индукции верно и для d , что и требовалось доказать. \square

Утверждение 6.4. Алгоритм 6.2 корректен. Время его работы — $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot \log n)$. Объем затраченной памяти — $O(a_1)$.

Доказательство. Докажем асимптотики. Первый шаг работает за $O(a_1)$, второй — за $O(a_1 \cdot n)$ (надо перебрать все $1 \leq j \leq n$ и все $0 \leq k < a_1$). Третий работает за $O(a_1^2 \cdot \log n)$, так как всего $O(\log n)$ итераций, в каждой из которых надо перебрать пары (i, j) , где $0 \leq i, j \leq a_1$. Четвертый — за $O(a_1)$. Итоговая сложность алгоритма: $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot \log n)$.

Память тратится только на массив M длины a_1 . Значит, алгоритм требует $O(a_1)$ памяти.

Докажем корректность. По лемме 6.3 после итерации с номером d в ячейках массива M лежит информация об оптимальных линейных комбинациях с не более чем 2^d слагаемыми. Следовательно, после итерации с номером $\lceil \log_2(n) \rceil$ в массиве M лежит информация об оптимальных линейных комбинациях из n слагаемых, то есть массив M будет наконец посчитан.

Во время работы алгоритма каждая ячейка массива M изменит своё значение хотя бы раз: это следует из корректности функции P . Значит, после последней итерации в массиве M не останется ∞ .

Далее ответ может быть получен по лемме 5.12. □

На моём компьютере при $n = 100, a_1 = 100$ алгоритм ни разу не показывал время, большее 0.2 с. При $n = 1000, a_1 = 1000$ алгоритм работал не дольше 0.3 с. При $n = 10000, a_1 = 10000$ алгоритм работает существенно медленнее: в районе 40 с.

Список литературы

- [1] A. Kennedy-Cochran-Patrick, G. Merlet, T. Nowak, S. Sergeev, *New bounds on the periodicity transient of the powers of a tropical matrix: Using cyclicity and factor rank*. Linear Algebra and its Applications. **611** (2021), 279-309.
- [2] G. Merlet, T. Nowak, S. Sergeev, *Weak CSR expansions and transience bounds in max-plus algebra*. Linear Algebra and its Applications. **461** (2014). 163–199
- [3] S. Sergeev, H. Schneider, *CSR expansions of matrix powers in max algebra*. Transactions of the American Mathematical Society. December 2009.
- [4] S. Sergeev, *Max algebraic powers of irreducible matrices in the periodic regime: An application of cyclic classes*. Linear Algebra and its Applications. **431** (2009), 1325–1339
- [5] A. Guterman, E. Kreines, C. Thomassen, *Linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index*. Special Matrices. **9** (2021), 112-118.
- [6] R. Brualdi, H. Ryser, *Combinatorial matrix theory*. Cambridge: Cambridge University Press; 1991.
- [7]
- [8] S. Chen, B. Liu, *The k th local exponent of doubly symmetric primitive matrices*. Applied Mathematics Letters. **19** (2006), 392–397.
- [9] B. Heidergott, G.J. Olsder, J. van der Woude, *Max Plus at Work*, Princeton University Press (2006).

N. Shaposhnik. Transient for wedge sum of cycles.

In this paper we discuss a particular case of transient defined by Sergeev in [4] for unweighted digraphs and for primitive digraphs. An algorithm for calculating this transient for bouquet of directed cycles (for cycles intersecting at one vertex) is established.

Keywords: max-plus, digraphs, matrix powers, periodicity, transient, bouquets of cycles.