

Тропическая линейная алгебра

Никита Шапошник, Б05-024

научный руководитель: А. Э. Гутерман

1 Введение

Тропическая математика была придумана бразильским математиком Имре Саймоном (Imre Simon, [1]) в конце XX века (название произошло от его места жительства). Матрицы над тропическим полукольцом имеют приложения в теории графов, оптимизации и биологии. В настоящей работе мы будем рассматривать матрицы над тропическим полукольцом, их связь с графами и некоторые их индексы: экспоненту, скрамблинг индекс, индекс цикличности и границы T .

2 Определения

Определение 2.1. Тропическая алгебра $([2], [3])$ — это множество $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями сложения \oplus и умножения \odot :

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

$$a \odot b = a + b$$

или множество $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ с другой операцией сложения и идентичным умножением:

$$a \oplus b = \min(a, b)$$

$$a \odot b = a + b.$$

В дальнейшем мы будем работать с \mathbb{R}_{\max} .

Лемма 2.2 (Свойства тропической алгебры, см. [2], [3], [4]). Тропическая алгебра обладает следующими свойствами: для любых $a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}$ верно:

- Сложение и умножение ассоциативны.
- Сложение и умножение коммутативны.
- Дистрибутивность: $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$.
- $-\infty$ — нулевой элемент: $a \odot -\infty = a$.
- 0 — единичный элемент: $a \oplus 0 = a$.
- Результат умножения на тропический ноль — это тропический ноль: $a \odot -\infty = -\infty$.
- Несуществование обратного по сложению: если $a \neq -\infty$, то $a \oplus b \geq a > -\infty$.

Следствие 2.3. *Тропическая алгебра является полукольцом.*

Определение 2.4. *Граф (в рамках данной задачи) $\mathcal{G}(V, E)$ — совокупность двух множеств — непустого множества $V = V(\mathcal{G})$ и множества $E = E(\mathcal{G}) \subseteq V^2$. Множество V называется множеством вершин, множество E называется множеством рёбер.*

Если для любого ребра $(u, v) \in E(\mathcal{G})$ верно, что обратное ребро $(v, u) \in E(\mathcal{G})$ — тоже лежит в графе, то граф \mathcal{G} называется неориентированным, в противном случае — ориентированным.

Путь из вершины u в вершину v в графе \mathcal{G} называется последовательность вершин $u, w_1, w_2, \dots, w_l, v \in V(\mathcal{G})$ и последовательность ребер $(u, w_1), (w_1, w_2), \dots, (w_l, v) \in E(\mathcal{G})$, где вершины и ребра могут повторяться. Путь называется простым, если вершины в нём не повторяются. Длиной пути называется количество ребер в нём. Обозначим через $\mathcal{W}^t(i \rightarrow j)$ множество всех путей из вершины i в вершину j длины t , а через $\mathcal{W}(i \rightarrow j)$ — множество всех путей из вершины i в вершину j .

Граф $\mathcal{G}(V, E)$ со введенной функцией $P : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется взвешенным графом. Весом пути называется тропическое произведение (т.е. вещественная сумма) весов всех ребер в пути. Обозначим вес пути W через $p(W)$.

Ориентированный граф называется сильно связным, если для любых $u, v \in V(\mathcal{G})$ существует путь из u в v и из v в u .

Граф \mathcal{G}' называется подграфом графа \mathcal{G} , если \mathcal{G}' получен из \mathcal{G} удалением некоторых ребер и, возможно, вершин. Иначе, $V(\mathcal{G}') \subseteq V(\mathcal{G})$ и $E(\mathcal{G}') \subseteq E(\mathcal{G})$.

Обхватом графа \mathcal{G} называется наименьшая длина цикла в \mathcal{G} и обозначается как $g(\mathcal{G})$. Через $\hat{g}(\mathcal{G})$ обозначается максимальный обхват среди всех компонент сильной связности графа \mathcal{G} .

Окружностью графа \mathcal{G} называется наибольшая длина цикла в \mathcal{G} и обозначается как $cr(\mathcal{G})$.

Максимальную длину простого пути в графе \mathcal{G} будем обозначать через $cb(\mathcal{G})$.

Граф $\mathcal{H}(U, F)$ называется индуцированным подграфом графа $\mathcal{G}(V, E)$, порожденным подмножеством вершин $U \subset V$, если ребрами \mathcal{H} являются те и только те ребра множества E , оба конца которых принадлежат U .

3 Примитивность вещественной неотрицательной матрицы

Определение 3.1. *Вещественная матрица A называется примитивной, если существует натуральное число m такое, что A^m положительна, то есть все числа в ней положительны. При этом наименьшее такое m называется экспонентой матрицы и обозначается через $exp(A)$.*

Теорема 3.2 (Критерий примитивности матрицы, см.[12]). *Неотрицательная квадратная матрица порядка n над \mathbb{R} примитивна тогда и только тогда, когда граф смежности этой матрицы сильно связан и НОК всех длин замкнутых путей (циклов) равно 1.*

Теорема 3.3 (Виландта, [5]). *Если неотрицательная квадратная матрица порядка n над полем вещественных чисел примитивна, то ее экспонента не превосходит число Виландта $Wi(n) = n^2 - 2n + 2$.*

4 Примитивность тропических матриц

Замечание 4.1. *Примитивность и экспонента тропической матрицы определяется так же, как и в вещественном случае, с отличием лишь в том, что в степени матрицы не должно быть нулей тропического полукольца, т.е. $-\infty$.*

4.1 Матрицы 2×2

Утверждение 4.2. Матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ над тропическим полукольцом примитивна тогда и только тогда, когда $b \neq -\infty \wedge c \neq -\infty \wedge (a \neq -\infty \vee d \neq -\infty)$; причем ее экспонента равна 2.

Доказательство. Если перемножить матрицы, у которых в правом верхнем углу стоят $-\infty$, то у результата будет стоять $-\infty$ в том же углу:

$$\begin{pmatrix} a & -\infty \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & -\infty \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & a \odot -\infty \oplus -\infty \odot d' \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & -\infty \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Аналогично с левым нижним углом. Значит, в правом верхнем и в левом нижнем углах не могут стоять $-\infty$.

Перемножим 2 матрицы, у которых на главной диагонали стоят $-\infty$:

$$\begin{pmatrix} -\infty & b \\ c & -\infty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\infty & b' \\ c' & -\infty \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \dots & -\infty \odot b' \oplus b \odot -\infty \\ c \odot -\infty \oplus -\infty \odot c' & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & -\infty \\ -\infty & \dots \end{pmatrix}$$

У результата стоят ∞ на побочной диагонали. Перемножим такую матрицу с матрицей с ∞ на главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} a & -\infty \\ -\infty & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\infty & b \\ c & -\infty \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a \odot -\infty \oplus -\infty \odot c & \dots \\ \dots & -\infty \odot b \oplus -\infty \odot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\infty & \dots \\ \dots & -\infty \end{pmatrix}$$

Снова получилась матрица с $-\infty$ на главной диагонали. Значит, в любой степени матрицы с $-\infty$ на главной диагонали будут $-\infty$. Значит, она не может быть примитивной.

Проверим, что матрица с описанными выше ограничениями будет примитивной:

$$A^{\odot 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\odot 2} = \begin{pmatrix} a \odot a \oplus b \odot c & a \odot b \oplus b \odot d \\ a \odot c \oplus c \odot d & b \odot c \oplus d \odot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(2a, b+c) & b + \max(a, d) \\ c + \max(a, d) & \max(b+c, 2d) \end{pmatrix}$$

Равным $-\infty$ в этой матрице может быть или a , или d , или никто из них. В любом случае, в квадрате не будет $-\infty$. Значит, A является примитивной с показателем степени 2. \square

4.2 Обобщение теоремы Виландта на тропические матрицы

Определение 4.3. $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ — множество с сложением, аналогичным дизъюнкции, и умножением, аналогичным конъюнкции:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Замечание 4.4. Примитивность и экспонента матрицы над \mathbb{B} определяется так же, как и в вещественном случае.

Теорема 4.5 (Виландта для матриц над \mathbb{B}). Если матрица $A \in M_n(\mathbb{B})$ примитивна, то ее экспонента не превосходит $n^2 - 2n + 2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\beta' : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{B}$ такую, что

$$\beta'(t) = \begin{cases} \mathbf{1}, t \neq 0 \\ \mathbf{0}, t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

и функцию $B' : M_n(\mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow M_n(\mathbb{B})$, действующая функцией β' поэлементно:

$$B' : A = (a_{ij}) \mapsto B'(A) = (\beta'(a_{ij})) \quad (2)$$

Лемма 4.6. B' — гомоморфизм.

Доказательство леммы. Необходимо доказать, что

$$B'(X) + B'(Y) = B'(X + Y) \text{ и } B'(X) \cdot B'(Y) = B'(X \cdot Y) \quad (3)$$

Первое верно, так как для любых $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ верно, что $\beta'(x) + \beta'(y) = \beta'(x + y)$.

Докажем, что B' сохраняет умножение: рассмотрим элемент с индексами i, j :

$$\begin{aligned} (B'(X) \cdot B'(Y))_{ij} &= \sum_{s=1}^n B'(X)_{is} \cdot B'(Y)_{sj} = \sum_{s=1}^n \beta'(X_{is}) \cdot \beta'(Y_{sj}) = \\ &= \sum_{s=1}^n \beta'(X_{is} \cdot Y_{sj}) = \beta'(\sum_{s=1}^n X_{is} \cdot Y_{sj}) = \beta'((X \cdot Y)_{ij}) = (B'(X \cdot Y))_{ij} \end{aligned} \quad (4)$$

Значит, B' — гомоморфизм. \square

Рассмотрим матрицу A' , лежащую в прообразе матрицы A при отображении B' (для этого достаточно взять матрицу A как матрицу над $\mathbb{R}_{\geq 0}$).

Заметим, что для любого m положения нулей в матрице $(A')^m$ и нулей в $B'((A')^m) = (B'(A'))^m = A^m$ совпадают, в том числе и для $m = \exp(A')$. Из этого следует, что $\exp(A) = \exp(A') \leq Wi(n)$ по теореме Виландта для матриц над $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Следовательно, теорема Виландта верна и для \mathbb{B} -матриц. \square

Теорема 4.7 (Виландта для тропических матриц). *Если матрица $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ примитивна, то ее экспонента не превосходит $Wi(n)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\beta : \mathbb{R}_{\max} \rightarrow \mathbb{B}$ такую, что

$$\beta(t) = \begin{cases} \mathbf{1}, t \neq -\infty \\ \mathbf{0}, t = -\infty \end{cases} \quad (5)$$

и функцию $B : M_n(\mathbb{R}_{\max}) \rightarrow M_n(\mathbb{B})$, действующая функцией β поэлементно:

$$B : A = (a_{ij}) \mapsto B(A) = (\beta(a_{ij})) \quad (6)$$

Лемма 4.8. B — гомоморфизм.

Доказательство леммы. Надо доказать, что

$$B(X) + B(Y) = B(X \oplus Y) \text{ и } B(X) \cdot B(Y) = B(X \odot Y) \quad (7)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 4.6, но с заменой β' на β , B' на B и $\mathbb{R}_{\geq 0}$ на \mathbb{R}_{\max} . \square

Рассмотрим $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ и её образ при отображении B . Для любого m положения бесконечных элементов в матрице A^m и нулей в $B(A^m) = (B(A))^m$ совпадают, в том числе и для $m = \exp(B(A))$.

Из этого следует, что $\exp(A) = \exp(B(A)) \leq Wi(n)$ по теореме Виландта для матриц над \mathbb{B} , что доказывает теорему Виландта для тропических матриц. \square

5 Примитивность тропических матриц и графы

Определение 5.1. Матрица $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ называется матрицей смежности графа \mathcal{G} , если в \mathcal{G} n вершин и в ячейке с индексами i и j матрицы A стоит:

- 1) $-\infty$ тогда и только тогда, когда вершины с номерами i и j не соединены ребром;
- 2) число $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда между вершинами с номерами i и j есть ребро веса x . Если граф не взвешенный, то в матрице стоит $x = 0$.

Заметим, что есть и обратное соответствие: по матрице смежности можно восстановить граф. Обозначим через $\mathcal{G}(A)$ граф, соответствующий тропической матрице A .

Степени тропических матриц интересны по многим причинам, в том числе по следующей:

Утверждение 5.2. Рассмотрим $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$, $i, j \in V(\mathcal{G}(A))$, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда:

$$a_{ij}^t = \bigoplus \{p(W) : W \in \mathcal{W}^t(i \rightarrow j)\}$$

Доказательство. Докажем это по индукции. База, очевидно, верна для $t = 0$: в этом случае $A^t = I$ — единичная тропическая матрица, на главной диагонали которой стоят тропические единицы, т.е. 0, а на остальных местах стоят тропические нули, т.е. $-\infty$.

Докажем переход: пусть утверждение верно для t , докажем для $t + 1$.

$$a_{ij}^{t+1} = \bigoplus_{k=1}^k a_{ik}^t \odot a_{kj} = \max_k a_{ik}^t + a_{kj}$$

Заметим, что любой путь из вершины i в вершину j длины $t + 1$ есть конкатенация пути из вершины i в вершину k длины t и ребра из k в j для какой-то вершины k , а вес этого пути — это сумма веса первого пути и веса последнего ребра. Из всех возможных путей оптимальным будет путь с максимальным общим весом, что согласуется с определением тропического перемножения матриц. \square

5.1 Матрицы 2×2

Утверждение 5.3. Матрица $A \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ примитивна тогда и только тогда, когда в графе $\mathcal{G}(A)$ для любых двух вершин между ними есть путь длины ровно 2.

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Если $a_{12} = -\infty$, то не будет существовать пути из первой вершины во вторую. Если $a_{21} = -\infty$, то не будет существовать пути из второй вершины в первую. Если предыдущие два условия не выполняются, но $a_{11} = a_{22} = -\infty$, то не будет существовать пути из первой вершины во вторую и из второй в первую. В этих случаях матрица A не будет примитивной.

Если все вышеперечисленные условия не выполняются, то матрица будет примитивной, что подтверждает доказанный ранее путем перемножения матриц факт. \square

5.2 Общий случай

Утверждение 5.4. Матрица $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ примитивна тогда и только тогда, когда в графе $\mathcal{G}(A)$ между любыми двумя вершинами найдётся путь длины ровно $Wi(n)$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ и соответствующий ей граф $\mathcal{G}(A)$. Примитивность A равносильна отсутствию в матрице $A^{Wi(n)}$ бесконечных элементов (так как по теореме Виландта $\exp(A) \leq Wi(n)$). Последнее утверждение равносильно тому, что в графе $\mathcal{G}(A)$ между любыми двумя вершинами найдётся путь длины ровно $\exp(A)$. \square

6 Индекс цикличности

Определение 6.1. Граф \mathcal{G}_1 гомоморфен графу \mathcal{G}_2 , если существует сюръективное отображение $f : V(\mathcal{G}_1) \rightarrow V(\mathcal{G}_2)$ такое, что для любого ребра $(u, v) \in E(\mathcal{G}_1)$ верно, что $(f(u), f(v)) \in E(\mathcal{G}_2)$.

Определение 6.2. Графы \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 изоморфны, если существует биекция $\rho : V(\mathcal{G}_1) \rightarrow V(\mathcal{G}_2)$ такая, что для любых $u, v \in V(\mathcal{G}_1)$ верно, что $(u, v) \in E(\mathcal{G}_1)$ выполняется тогда и только тогда, когда $(\rho(u), \rho(v)) \in E(\mathcal{G}_2)$.

Определение 6.3. Индекс цикличности (или просто цикличность) ориентированного графа \mathcal{G} обозначается через $\sigma_{\mathcal{G}}$ и определяется следующим образом:

1. Если \mathcal{G} сильно связан, и $|V(\mathcal{G})| \geq 2$, то цикличность равна НОД всех длин ориентированных циклов в \mathcal{G} .
2. Если в \mathcal{G} есть только одна вершина (с петлей или без), то $\sigma_{\mathcal{G}} = 1$.
3. Если \mathcal{G} не сильно связан, то его цикличность равна НОК цикличностей всех максимальных его сильно связных подграфов.

Замечание 6.4 (Переформулировка критерия примитивности, см.[12]). Тропическая матрица $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ примитивна тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}(A)$ сильно связан и его индекс цикличности равен 1.

Замечание 6.5. Цикличность сильно связанного графа \mathcal{G} — это наибольшее k такое, что \mathcal{G} гомоморфен ориентированному циклу из k вершин.

Заметим, что в сильно связанном графе \mathcal{G} с цикличностью γ любые 2 пути, соединяющий 2 фиксированные вершины, имеют одинаковые длины по модулю γ . Из этого следует, что на множестве $V(\mathcal{G})$ можно ввести отношение эквивалентности: 2 вершины лежат в одном классе эквивалентности тогда и только тогда, когда длина пути от одной к другой кратна γ .

Определение 6.6. Эти классы эквивалентности называются циклическими классами.

Пусть $\mathcal{G} = (V, E)$ — взвешенный ориентированный граф с матрицей смежности $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$. Пусть C — это ориентированный цикл в \mathcal{G} с весами ребер $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_l}$. Средний вес ребра в C — это тропическое среднее геометрическое весов ребер в C :

$$w_a(C) = \sqrt[l]{a_{i_1} \odot a_{i_2} \odot \dots \odot a_{i_l}} = \frac{1}{l}(a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_l})$$

Определение 6.7. Ориентированный цикл называется критическим, если у него максимальный средний вес. Критический подграф \mathcal{G}^c графа \mathcal{G} — это объединение всех критических циклов в \mathcal{G} .

Пусть $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ — матрица смежности графа $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$, который содержит хотя бы один ориентированный цикл.

Определение 6.8. Цикличностью A называется цикличность критического подграфа \mathcal{G}^c графа \mathcal{G} , то есть $\sigma(A) := \sigma_{\mathcal{G}^c}$. Если в $\mathcal{G}(A)$ нет ориентированных циклов, то $\sigma(A) = 1$.

7 Скрамблинг индекс

Определение 7.1. *Скрамблинг индекс ориентированного графа \mathcal{G} — это наименьшее натуральное число k такое, что для любых $u, v \in V(\mathcal{G})$ существует $w \in V(\mathcal{G})$ такая, что есть путь длины k из u в w и из v в w . Обозначим скрамблинг индекс через $k(\mathcal{G})$. Если не существует таких k , то $k(\mathcal{G}) = 0$.*

Определение 7.2. *Графом Виландта называется ориентированный граф на $n \geq 2$ вершинах со множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ и множеством ребер*

$$E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\} \cup \{(n-1, 1)\}$$

В этом графе есть два цикла длиной $n-1$ и n , следовательно, $\sigma_{W_n} = 1$, он сильно связан. Следовательно, он примитивен.

Теорема 7.3 ([8]). *Пусть \mathcal{G} — примитивный ориентированный граф порядка $n \geq 2$. Тогда*

$$\exp(\mathcal{G}) \leq n^2 - 2n + 1$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} \cong W_n$.

Замечание 7.4 ([8]). *Для примитивного ориентированного графа верно неравенство*

$$0 < k(\mathcal{G}) \leq \exp(\mathcal{G})$$

Это следует из определений скрамблинг индекса и экспоненты.

Определение 7.5. *Будем называть подграф \mathcal{H} графа \mathcal{G} достижимым, если для любой вершины v из \mathcal{G} существует путь из v в какую-либо вершину из \mathcal{H} .*

Теорема 7.6 ([8], критерий положительности скрамблинг-индекса). *Для произвольного ориентированного графа \mathcal{G} следующие условия эквивалентны:*

1. $k(\mathcal{G}) > 0$,
2. В \mathcal{G} есть примитивный достижимый подграф \mathcal{H} .

Теорема 7.7 ([8]). *Обозначим через $\lceil x \rceil$ наименьшее целое число, большее или равное x . Если \mathcal{G} — примитивный граф с $n \geq 2$ вершинами, то*

$$k(\mathcal{G}) \leq \left\lceil \frac{Wi(n)}{2} \right\rceil$$

При $n \geq 3$ равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} \cong W_n$. При $n = 2$ равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} \cong W_2$ или $\mathcal{G} \cong J_2$, где J_n — полный ориентированный граф на n вершинах, то есть $E(J_n) = V^2$.

8 CSR-декомпозиция и слабое CSR-расширение

8.1 Необходимые определения

Определение 8.1. *Назовем тропическую матрицу A (или соответствующий ей граф) неразложимой, если граф $\mathcal{G}(A)$ сильно связан, иначе — разложимой.*

Назовем тропическую матрицу A (или соответствующий ей граф) полностью разложимой, если в графе $\mathcal{G}(A)$ нет ребер между различными компонентами сильной связности.

Рассмотрим тропическую матрицу $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$. Обозначим максимальный средний вес цикла в $\mathcal{G}(A)$ через $\lambda(A)$, т.е.

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \bigoplus_{k=1}^d \bigoplus_{i_1, \dots, i_k} (a_{i_1 i_2} \odot \dots \odot a_{i_{k-1} i_k})^{\odot 1/k} = \\ &= \max_{k=1}^d \max_{i_1, \dots, i_k} \frac{(a_{i_1 i_2} + \dots + a_{i_{k-1} i_k})}{k}\end{aligned}\tag{8}$$

Необходимо сказать, что критический подграф $\mathcal{G}^c(A)$ является полностью разложимым и средний вес любого цикла в нём равен $\lambda(A)$.

Определение 8.2. Для $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ с $\lambda(A) \leq 0$ звездой Клини называется следующая матрица:

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i = \bigoplus_{i=0}^{d-1} A^i$$

В матрице A^* в ячейке под номером i и j лежит длина оптимального пути от вершины i к вершине j по всему графу, без ограничения на длину пути. Условие $\lambda(A) \leq 0$ необходимо, так как иначе этот ряд расходится: можно идти по циклу с положительным средним весом и улучшать ответ. Так как дважды проходить через одну и ту же вершину не имеет смысла, можно ограничиться первыми d матрицами.

8.2 Матрицы CSR

Рассмотрим неразложимую $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ и некоторый подграф \mathcal{G} критического подграфа $\mathcal{G}^c(A)$ без тривиальных компонент сильной связности. Введем обозначения: $\sigma = \sigma(\mathcal{G})$ – индекс цикличности \mathcal{G} , $M = ((\lambda(A)^- \odot A^\sigma)^*$.

Определим матрицы $C, S, R \in M_r(\mathbb{R}_{\max})$ следующим образом:

$$\begin{aligned}c_{ij} &= \begin{cases} m_{ij}, & \text{если } j \in V(\mathcal{G}) \\ -\infty, & \text{иначе,} \end{cases} & r_{ij} &= \begin{cases} m_{ij}, & \text{если } i \in V(\mathcal{G}) \\ -\infty, & \text{иначе,} \end{cases} \\ s_{ij} &= \begin{cases} \lambda(A)^- \odot a_{ij}, & \text{если } (i, j) \in E(\mathcal{G}) \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}\end{aligned}$$

Здесь и далее для $a \in \mathbb{R}_{\max}$, $a \neq -\infty$ через a^- будем обозначать обратное по умножению к a , т.е. $a^- = -a$.

Если матрицы C, S, R определены через матрицу A , будем писать $CS^tR[A]$ для произвольного t .

Теорема 8.3 ([9], [10]). Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ неразложима и CSR-матрицы определены через некоторый подграф \mathcal{G} графа $\mathcal{G}(A)$. Тогда существует неотрицательное целое $T(A)$ такое, что для любого $t \geq T(A)$:

$$A^t = \lambda(A)^{\odot t} \odot CS^tR[A].\tag{9}$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (9) записывается в виде:

$$A^t = CS^tR[A].\tag{10}$$

В добавок к $T(A)$, введем ещё 2 функции: $T_1(A, B)$ и $T_2(A, B)$. Для этого зафиксируем тот же подграф \mathcal{G} и введем новую матрицу $B \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\infty, & \text{если } i \in V(\mathcal{G}) \text{ или } j \in V(\mathcal{G}), \\ a_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 8.4 ([9], [10]). Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ неразложима и CSR -матрицы определены через некоторый подграф \mathcal{G} графа $\mathcal{G}(A)$.

(Определение $T_1(A, B)$.) существует неотрицательное целое $T_1(A, B)$ такое, что для любого $t \geq T_1(A, B)$ верно следующее:

$$A^t = (\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A]) \oplus B^t. \quad (11)$$

(Определение $T_2(A, B)$.) существует неотрицательное целое $T_2(A, B)$ такое, что для любого $t \geq T_2(A, B)$ верно следующее:

$$\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A] \geq B^t. \quad (12)$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (11) записывается в виде:

$$A^t = CS^t R[A] \oplus B^t, \quad (13)$$

а (12) записывается в виде

$$CS^t R[A] \geq B^t. \quad (14)$$

Есть несколько способов выбрать подграф \mathcal{G} , но в этой работе мы будем работать со способом Нахтигалля, в котором этот подграф совпадает с критическим подграфом исходного графа: $\mathcal{G} = \mathcal{G}^c(A)$. В дальнейшем, чтобы указать, что матрица была выбрана с помощью способа Нахтигалля, будем писать B_N вместо B и $T_{1,N}(A)$ вместо $T_1(A, B_N)$.

Утверждение 8.5. $T(A) \leq \max(T_1(A, B), T_2(A, B))$.

Доказательство. Возьмем $t \geq \max(T_1(A, B), T_2(A, B))$, для него выполняются условия (11) и (12). Из (12) следует, что операция тропического сложения с B^t в (11) бессмысленна, откуда для данного t следует (9). \square

Замечание 8.6. Заметим, что если $B = -\infty$, то $T(A) = T_1(A, B)$, а $T_2(A, B) = 0$.

Замечание 8.7 (Инвариантность относительно умножения на скаляр). Если $A' = A \odot \mu$, где $\mu \in \mathbb{R}$, то

- $\lambda(A') = \lambda(A) \odot \mu$, $B_N[A'] = B_N[A]$
- $CSR[A'] = CSR[A]$

Значит, $T_1(A, B)$, $T_2(A, B)$ инвариантны относительно умножения матрицы на скаляр, что позволяет нам без разграничения общности говорить, что $\lambda(A) = 0$.

Утверждение 8.8 (см. [9]). Пусть $\lambda(A) = 0$. Тогда $A^t \geq CS^t R[A]$ тогда и только тогда, когда $t \geq T_{1,N}(A)$.

Это утверждение позволяет искать $T_{1,N}$: достаточно найти наименьшее t , для которого верно $A^t \geq CS^t R[A]$. Тогда $T_{1,N} = t$. Если, вдобавок, $B = -\infty$, то $T = t$ по замечанию 8.6.

Утверждение 8.9 (Периодичность, см. [11]). Для любого $t \geq 0$ верно, что $CS^{t+\sigma} R[A] = CS^t R[A]$, где σ — это цикличность $\mathcal{G}^c(A)$. Иначе говоря, последовательность матриц $\{CS^t R[A]\}_{t \geq 0}$ периодична с периодом σ .

Введем несколько новых обозначений:

1. Через $\mathcal{W}^{t,l}(i \rightarrow j)$ обозначим множество путей от вершины i к вершине j , имеющих длину t по модулю l ;

2. Через $\mathcal{W}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ обозначим множество путей от вершины i к вершине j , проходящих хотя бы через одну вершину из \mathcal{G} . Аналогично определяются $\mathcal{W}^t(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$, $\mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ — граф над стрелкой добавляет ограничение на пути в множестве.
3. Для множества \mathcal{W} через $p(\mathcal{W})$ обозначим максимальный вес пути из множества \mathcal{W} .

Утверждение 8.10 ([10]). Если $\lambda(A) = 0$, то верно следующее тождество:

$$(CS^t R[A])_{ij} = p(\mathcal{W}^{t,\sigma}(i \xrightarrow{\mathcal{G}^c(A)} j)), \quad (15)$$

где σ обозначает цикличность $\mathcal{G}^c(A)$.

Теорема 8.11 (Некоторые оценки $T_{1,N}(A)$, см. [10]). Для любой $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ имеем:

1. $T_{1,N}(A) \leq Wi(n)$;
2. $T_{1,N}(A) \leq \hat{g}(n-2) + n$;
3. $T_{1,N}(A) \leq (\hat{g}-1)(cr-1) + (\hat{g}+1)cd$,

где $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$, $cr = cr(\mathcal{G}(A))$, а $cd = cd(\mathcal{G}(A))$.

9 Примеры

Оценим T, T_1 и T_2 для некоторых графов.

9.1 Полный граф

Рассмотрим матрицу $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$, $a_{ij} = 0$ для любых индексов i, j . Граф $\mathcal{G}(A)$ является полным, веса всех ребер в нём равны 0. Значит, критический подграф \mathcal{G}^c совпадает со всем графом \mathcal{G} . Из этого следует, что матрица $B = -\infty$ и $T_2 = 0$.

Найдем матрицы C, S, R . Индекс цикличности полного графа $\sigma = 1$ (т.к. в нём есть циклы длины 1), следовательно $C = R = M = A^*$, $S = A$.

Так как для любого положительного t верно, что $A^t = A$, то $A^* = A$ и равенство $A^* A^t A^* = A^t$ выполняется для любого положительного t .

Следовательно, $T = T_1 = 1$.

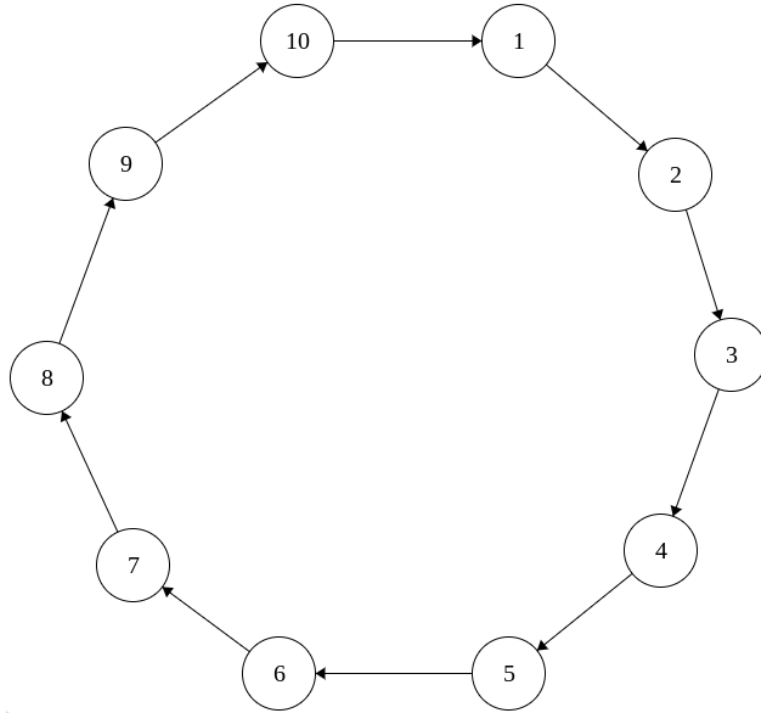
9.2 Односторонний цикл

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ одностороннего цикла на n вершинах.

В силу инвариантности границ относительно домножения на скаляр из \mathbb{R} (замечание 8.7), можно рассматривать только тот случай, в котором $\lambda(A) = 0$. Тогда $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A)$, $\sigma = n$.

$$M = (A^n)^* = E^* = E = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & 0 & \dots & -\infty \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\infty & -\infty & \dots & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(0, 0, \dots, 0)$$

Значит, $C = R = E$, $S = A$, $B = -\infty$, и для любого неотрицательного t верно $CS^t R[A] = A^t$. Следовательно, $T = T_1 = T_2 = 0$.



9.3 Двусторонний цикл

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ двустороннего цикла на n вершинах. Пронумеруем вершины так, чтобы первый цикл состоял из вершин $1, 2, \dots, n$ (в порядке обхода), а второй — из $n, n-1, \dots, 1$ (в порядке обхода). Чтобы избежать кратных рёбер, будем работать с $n \geq 3$.

Будем считать, что $\lambda(A) = 0$. Рассмотрим случай, в котором циклы по часовой стрелке и против часовой стрелки имеют одинаковый средний вес, равный нулю. Значит, критический подграф $\mathcal{G}^c(A)$ совпадает со всем графом $\mathcal{G}(A)$.

Лемма 9.1. *Все циклы в таком графе имеют средний вес 0.*

Доказательство. Пусть вес пути по часовой стрелке от вершины i до вершины j равен x , а против часовой стрелки — y . Эти два пути образуют цикл, значит $x + y \leq 0$. Докажем, что $x + y = 0$.

Дополнение к большому циклу по часовой стрелке первого пути весит $-x$, а дополнение к большому циклу против часовой стрелки весит $-y$. Так как можно сначала пойти по дополнению к первому пути, а потом — по дополнению ко второму пути, эти два дополнения тоже образуют цикл. Значит, $(-x) + (-y) \leq 0$. Значит, $x + y \geq 0$.

Следовательно, $x + y = 0$. □

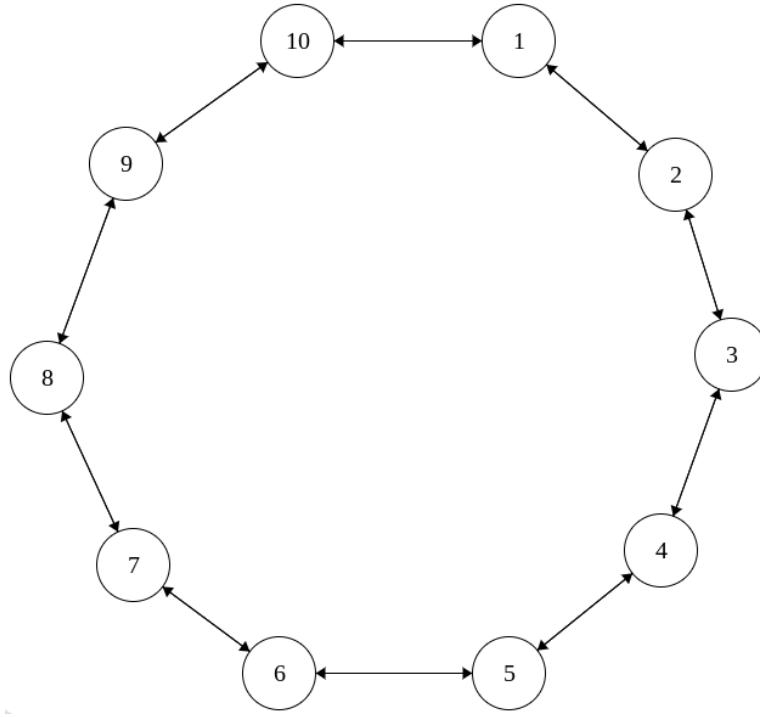
Следствие 9.2. *Для фиксированных вершины i и j все пути от i до j весят одинаково.*

Это верно, так как, в терминах леммы, $x = -y$. Не важно, какой путь выбрать от одной вершины к другой: по или против часовой стрелки — вес будет одинаковый. Если пройти по большому циклу, то вес не изменится, так как суммарный вес большого цикла равен 0.

Необходимо рассмотреть 2 случая: когда n нечётно и когда n чётно.

n нечётно. В этом случае цикличность критического графа $\sigma = 1$.

Следовательно, $C = R = M = A^*$, а $S = A$. Заметим, что в матрице $CS^tR[A]$ нет $-\infty$ (так как $CS^tR[A] = A^*A^tA^*$, а в A^* нет $-\infty$). Значит, по следствию из леммы, $CS^tR[A] = A^*$.



Значит, условие $CS^tR[A] = A^t$ верно тогда и только тогда, когда $A^t = A^*$. Поэтому $T = \exp(\mathcal{G})$.

Утверждение 9.3. Экспонента данного графа равна $n - 1$.

Доказательство. Заметим, что в A^{n-2} на главной диагонали стоят $-\infty$: $n - 2$ нечётно, поэтому, чтобы вернуться в исходную вершину за $n - 2$ шага, надо сменить чётность — пройти весь круг, так как остальные циклы имеют чётную длину. Но цикл имеет длину n , поэтому его пройти не получится. Значит, $\exp(\mathcal{G}) \geq n - 1$.

Покажем, что $A^{n-1} > -\infty$.

Зафиксируем произвольную вершину v графа. Назовем вершину *четной*, если до нее можно дойти из v за чётное число шагов. Заметим, что тогда все вершины графа четные, так как n нечетно и идти можно как по, так и против часовой стрелки. Наибольшая длина такого пути равна $n - 1$. Значит, $A^{n-1} > -\infty$. \square

Следствие 9.4. $T_2 = 0$, так как $B = -\infty$. $T = T_1 = \exp(\mathcal{G}) = n - 1$.

Утверждение 9.5. Скрамблинг-индекс этого графа равен $\frac{n-1}{2}$.

Доказательство. Пусть $k = k(\mathcal{G})$ — скрамблинг-индекс данного графа, т. е. для любых двух вершин u и v существуют вершина w такая, что существуют пути из u в w и из v в w длины k . В силу неориентированности этого графа это условие равносильно следующему: для любых вершин u и v существует путь из u в v длины $2k$.

Заметим, что для соседних вершин минимальная четная длина пути, соединяющего их, равна $n - 1$, так как n нечетно. Значит, $k \geq \frac{n-1}{2}$.

Рассмотрим произвольные вершины i и j . Пусть два простых пути между ними имеют длину x и $n - x$. Так как $x + (n - x) = n$ — нечетное число, то среди этих двух путей найдется ровно один с четной длиной. Его длина не превышает $n - 1$ — наибольшее четное число, не превосходящее n . Значит, $k \leq \frac{n-1}{2}$.

Следовательно, $k(\mathcal{G}) = \frac{n-1}{2}$. \square

n четно. В этом случае $\sigma = 2$ и граф не примитивен. $C = R = M = (A^2)^*$, $S = A$.

Так как последовательность матриц CS^tR периодична с периодом $\sigma = 2$ (см. [10]), то при $t \geq T(A)$

$$A^t = CS^tR = \begin{cases} (A^2)^*, & \text{если } t \text{ четно.} \\ A \odot (A^2)^*, & \text{если } t \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В матрице $(A^2)^*$ небесконечные элементы стоят в клетках (i, j) , если вершины i и j находятся на четном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с одинаковой четностью равно $\frac{n}{2}$. Значит, условие при четном t выполняется при $t \geq \frac{n}{2}$, а при прочих t не выполняется.

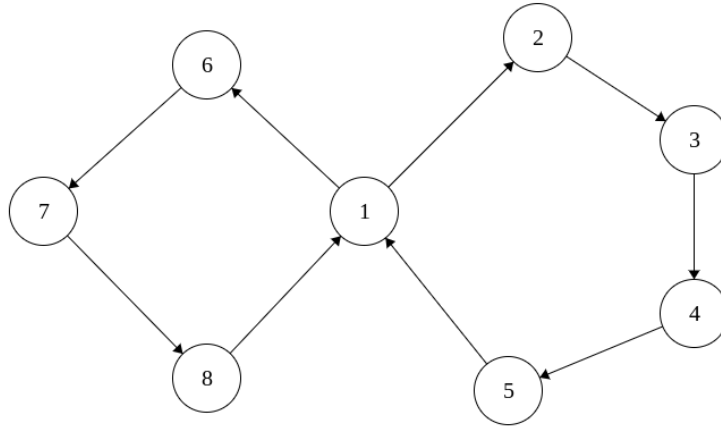
В матрице $A \odot (A^2)^*$ небесконечные элементы стоят в клетках (i, j) , если вершины i и j находятся на нечетном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с разной четностью равно $\frac{n}{2} - 1$. Значит, условие при четном t выполняется при $t \geq \frac{n}{2} - 1$, а при прочих t — не выполняется.

Следовательно, $T(A) = \frac{n}{2}$. В силу того, что $B = -\infty$, границы $T_1 = T = \frac{n}{2}$, а $T_2 = 0$, так как $B = -\infty$.

9.4 Два цикла

Определение 9.6. Назовем ромашкой граф, состоящий из нескольких пересекающихся по одной вершине циклов.

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_{2n}(\mathbb{R}_{\max})$ графа-ромашки, состоящего из двух циклов длины n и $n+1$. Будем называть n -циклом цикл длины n и $(n+1)$ -циклом — цикл длины $n+1$.



Будем рассматривать те графы, в которых средний вес каждого цикла равен 0. Тогда критический подграф совпадает со всем графом: $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A) = \mathcal{G}$. Его цикличность $\sigma = 1$, значит, $C = R = M = A^*$, а $S = A$.

Следовательно, при $t \geq T(A)$ верно $CS^tR[A] = A^*A^tA^* = A^t$. Так как для произвольных фиксированных вершин любые два пути между ними имеют равные веса, то $T(A) = \exp(A)$ (так как в равенстве $A^t = CS^tR[A]$ справа стоит матрица без $-\infty$, а значит и слева должна стоять матрица без $-\infty$).

Это приводит нас к более общему утверждению.

Утверждение 9.7. Если граф $\mathcal{G}(A)$ сильно связан, совпадает со своим критическим подграфом, $\lambda(A) = 0$, его цикличность $\sigma = 1$ и для произвольных двух вершин верно, что все пути между ними имеют одинаковый вес, то $T(A) = T_{1,N}(A) = \exp(A)$, а $T_{2,N}(A) = 0$.

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему пункту.

По определению, $M = (A^\sigma)^* = A^*$. Следовательно, $C = R = M = A^*$, а $S = A$.

Значит, при $t \geq T(A)$ верно $CS^tR[A] = A^*A^tA^* = A^t$. В A^* нет $-\infty$, потому что $\mathcal{G}(A)$ сильно связан. Значит, при домножении A^* на матрицу, у которой в каждом столбце есть небесконечный элемент (т.к. граф связан), в результате получится матрица без бесконечностей.

Значит, в левой части равенства нет $-\infty$, поэтому она совпадает с $A^{\exp(A)}$. Значит, при $t \geq \exp(A)$ выполняется условие на $T(A)$, и $T(A) = \exp(A)$.

Так как $B = -\infty$, то $T_{2,N}(A) = 0$, и $T_{1,N}(A) = T(A) = \exp(A)$. \square

Следствие 9.8. Утверждение 9.7 верно для многих графов, например, для ромашки из нескольких циклов, для последовательно соединённых циклов. Отметим, что во всех упомянутых графах циклы должны иметь средний вес 0 и взаимно простую в совокупности длину (граф должен иметь индекс цикличности, равный 1).

Утверждение 9.9. Экспонента данного графа равна $n(n+1)$.

Доказательство. Докажем, что в $A^{n(n+1)-1}$ есть бесконечные элементы. Рассмотрим вершины $i = 2$, $j = n+1$ и покажем, что в $\mathcal{G}(A)$ не существует пути длины $n(n+1) - 1$ между i и j .

Любой путь из i в j , длина которого больше $n-1$, состоит из трех частей: первая часть — путь из i в 1 длины n , вторая часть — a циклов длины n , и b циклов длины $n+1$, идущих в любом порядке. Третья часть — путь из 1 в j длины n . Таким образом, суммарная длина пути равна $an + b(n+1) + 2n = (a+2)n + b(n+1)$.

Покажем, что уравнение

$$n(n+1) - 1 = (a+2)n + b(n+1) \quad (16)$$

не имеет решений в целых неотрицательных числах относительно a и b .

Предположим противное: пусть существуют целые неотрицательные a, b , являющиеся решениями 16. Заметим, что $n(n+1) - 1 \equiv -1 \equiv b \pmod{n}$. Значит, $b \geq n-1$, и

$$n(n+1) - 1 = (a+2)n + b(n+1) \geq (a+2)n + n^2 - 1$$

Следовательно, $n \geq (a+2)n$, что невозможно в силу неотрицательности a .

Значит, уравнение не имеет решений, и в $\mathcal{G}(A)$ нет искомого пути. Следовательно, в $A^{n(n+1)-1}$ есть бесконечности и $\exp(A) \geq n(n+1)$.

Покажем, что в $A^{n(n+1)}$ нет бесконечностей. Надо доказать, что для любых вершин i, j существует путь из i в j длины $n(n+1)$. Пусть расстояние от i до 1 равно x , а расстояние от 1 до j равно y .

Для доказательства утверждения надо показать, что для любых x, y существует решение уравнения $n(n+1) = an + b(n+1) + x + y$. Заметим, что $x, y \leq n$. Пусть $z = x + y$. Рассмотрим

$$(a, b) = \begin{cases} (z, n-z) & \text{при } 0 \leq z \leq n \\ (z-n-1, 2n-z) & \text{при } n+1 \leq z \leq 2n \end{cases}$$

Легко проверить, что a и b , определенные таким образом, неотрицательны и являются решениями данного уравнения.

Значит, искомым путь всегда найдется, и $\exp(A) = n(n+1)$. \square

Утверждение 9.10. Скрамблинг-индекс этого графа равен:

$$k(\mathcal{G}) = \begin{cases} \frac{n^2+2n}{2}, & n \text{ чётно} \\ \frac{n^2+2n-1}{2}, & n \text{ нечётно} \end{cases}$$

Доказательство.

Определение 9.11. Для $u, v \in V(\mathcal{G})$ введём обозначение:

$$k_{u,v}(\mathcal{G}) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{существует } w \in V(\mathcal{G}) : \mathcal{W}^k(u \rightarrow w) \neq \emptyset \\ \text{и } \mathcal{W}^k(v \rightarrow w) \neq \emptyset\}$$

Лемма 9.12 ([8]). $k(\mathcal{G}) = \max_{u,v \in V(\mathcal{G})} k_{u,v}$.

Так как граф в данной задаче фиксирован, обозначим $k_{u,v} = k_{u,v}(\mathcal{G})$.

Найдём формулу для $k_{u,v}$. Для этого надо понять, какой вид имеют оптимальные пути из u в w и из v в w .

Заметим, что вершина w , определенная для вершин u и v , — это вершина 1, если $u \neq v$, и вершина $u = v$ иначе. Действительно, если $u = v$, то подходят пути длины ноль и $w = u = v$. Если $u \neq v$ и $w \neq 1$, то у построенных путей есть общий суффикс и их можно укоротить, что противоречит минимальности $k_{u,v}$.

Заметим также, что пути из u в w и из v в w не могут проходить по одному и тому же циклу, иначе оба пути можно было бы укоротить на этот цикл, что противоречило бы с минимальностью $k_{u,v}$.

Рассмотрим случай, когда, без ограничения общности, $u = 1$. Пусть v находится на расстоянии x от вершины 1 (тогда $0 \leq x \leq n$).

Путь $u = 1$ состоит из нескольких циклов, а путь v — это путь длины x от v до 1, а затем — несколько циклов.

В силу второго замечания есть 2 варианта:

1. путь вершины 1 содержит $(n + 1)$ -циклы, а вершины v — n -циклы;
2. путь вершины 1 содержит n -циклы, а вершины v — $(n + 1)$ -циклы.

Пусть вершина v прошла a циклов, а вершина 1 — b циклов ($a, b \geq 0$). Решим для каждого случая уравнение, минимизировав длину пути каждой вершины:

1. $x + an = b(n + 1)$ — слева стоит длина пути вершины v , а справа — вершины 1. Так как мы ищем минимальную длину пути, то необходимо минимизировать левую и правую части.
Заметим, что $b \equiv x \pmod{n}$. Значит, $b \geq x$. Следовательно, решение $a = n - x$, $b = x$ даёт минимальную длину путей, которая равна $x(n + 1)$.
2. $x + a(n - 1) = bn$. Заметим, что $a \equiv -x \pmod{n}$. Значит, решение $a = n - x$, $b = n - x + 1$ — оптимальное. Длины путей равны $n(n - x + 1)$.

Таким образом, $k_{1,v} = \min\{x(n + 1), n(n - x + 1)\}$.

Рассмотрим случай $u \neq 1$. Пусть расстояние от u до 1 равно d_u , расстояние от v до 1 равно d_v , без ограничения общности $d_u \leq d_v$, и $x = d_v - d_u$.

Заметим, что первые d_u рёбер в путях вершин определены однозначно, так как в этом графе есть разветвления только в вершине 1. После d_u шагов вершина u придет в вершину 1, и задача сводится к предыдущему случаю.

Значит, $k_{u,v} = d_u + \min\{x(n + 1), n(n - x + 1)\}$.

Легко видеть, что максимальное значение d_u равно $n - x$. Оно достигается при $u = ((x + 1) \bmod (n + 1)) + 1$, $v = 2$. Нельзя получить больше, так как вершина v должна оказаться в вершине 1 через $x + d_u$ шагов, но не раньше. Значит, $x + d_u \leq n$ и $d_u \leq n - x$.

Следовательно, по лемме 9.12:

$$\begin{aligned} k(\mathcal{G}) &= \max_{u,v \in V(\mathcal{G})} d_u + \min\{x(n+1), n(n-x+1)\} = \\ &= \max_{0 \leq x \leq n} n - x + \min\{x(n+1), n(n-x+1)\} = \max_{0 \leq x \leq n} \min\{n(x+1), n^2 + 2n - x(n+1)\} \end{aligned}$$

Требуется найти максимум минимумов двух линейных по x функций. Графики этих функций пересекаются в точке $\hat{x} = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4(2n+1)}$. Значит, максимум достигается в одной из целых точек по обе стороны от \hat{x} .

Рассмотрим два случая:

- n чётно. Тогда две целые точки по обе стороны от \hat{x} — это $x_1 = \frac{n}{2}$ и $x_2 = \frac{n+2}{2}$, при этом в x_1 минимумом будет первая функция, а в x_2 — вторая. Значит,

$$\begin{aligned} k(\mathcal{G}) &= \max\{n(x_1+1), n^2 + 2n - x_2(n+1)\} = \\ &= \max\{n(\frac{n}{2}+1), n^2 + 2n - \frac{n+2}{2}(n+1)\} = \frac{n^2 + 2n}{2} \end{aligned}$$

- n нечётно. Тогда две целые точки по обе стороны от \hat{x} — это $x_1 = \frac{n-1}{2}$ и $x_2 = \frac{n+1}{2}$. Значит,

$$\begin{aligned} k(\mathcal{G}) &= \max\{n(x_1+1), n^2 + 2n - x_2(n+1)\} = \\ &= \max\{n(\frac{n-1}{2}+1), n^2 + 2n - \frac{n+1}{2}(n+1)\} = \frac{n^2 + 2n - 1}{2} \end{aligned}$$

В итоге имеем

$$k(\mathcal{G}) = \begin{cases} \frac{n^2+2n}{2}, & n \text{ чётно} \\ \frac{n^2+2n-1}{2}, & n \text{ нечётно} \end{cases}$$

□

9.5 Ромашка из p циклов длины k

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_{p(k-1)+1}(\mathbb{R}_{\max})$ графа-ромашки $\mathcal{G}(A)$, состоящего из $p > 1$ циклов длины k (всего в графе будет $p(k-1) + 1$ вершин). Будем считать, что вершина, по которой пересекаются все циклы, имеет номер 1.

Пусть для простоты все ребра в этом графе имеют нулевой вес. Тогда $\mathcal{G}^c = \mathcal{G}(A)$ и $T_2 = 0$, так как $B = -\infty$.

Утверждение 9.13. Граница T , определенная для такого графа-ромашки, равна $k-1$.

Доказательство. Индекс цикличности этого графа $\sigma = k$. Следовательно, $C = R = M = (A^k)^*$ и $S = A$. По утверждению 8.10 в ячейке с индексами i, j матрицы CS^tR стоит 0, если из вершины i можно добраться до вершины j за количество шагов, сравнимое с t по модулю k , и $-\infty$ иначе.

Будем говорить, что вершина v имеет класс i , если минимальная длина пути между вершинами 1 и v дает остаток i при делении на k . Заметим, что т.к. цикличность графа равна k , то длина любого пути из вершины 1 в v дает остаток i при делении на k . Следует упомянуть, что любое ребро ведет из вершины класса i в вершину класса $i+1 \pmod{k}$.

Покажем, что $T > k-2$. Рассмотрим вершину v класса 1 и вершину u класса $k-1$. Тогда элемент матрицы $CS^{k-2}R$ с индексами v, u равен 0. Но в матрице A^{k-2} элемент с

теми же индексами равен $-\infty$, т.к. минимальный путь, соединяющий эти вершины, имеет длину $2k - 2$. Следовательно, $CS^{k-2}R \neq A^{k-2}$ и $T \geq k - 1$.

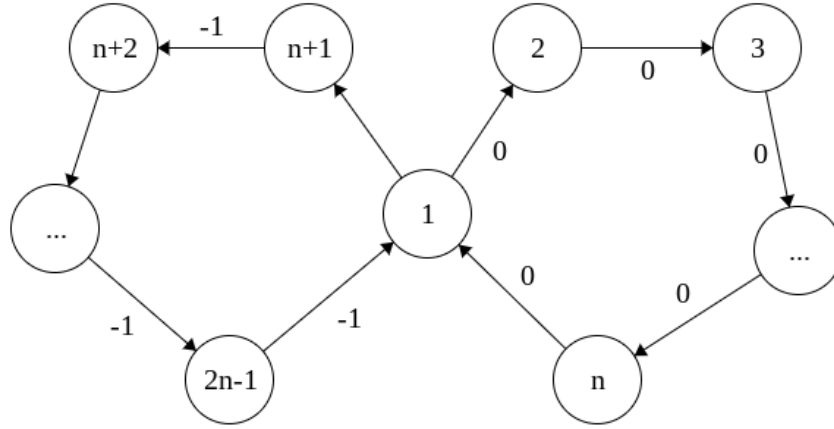
Покажем, что $T = k - 1$. Предположим противное: пусть $T > k - 1$. Рассмотрим $t = T - 1 \geq k - 1$. Заметим, что $CS^{t+k}R = A^{t+k}$, так как $t + k \geq T$.

В матрице A^{t+k} хранится информация о путях длины $t + k$. Но наибольший простой путь имеет длину $2k - 2 < t + k$ — это путь между вершиной класса 1 и вершиной класса $k - 1$ из другого цикла. Значит, каждый путь длины $t + k$ можно укоротить на k и получить путь длины t с тем же весом. Значит, $A^{t+k} = A^t$.

По утверждению 8.9 выполняется равенство $CS^{t+k}R = CS^tR$. Значит, $CS^tR = CS^{t+k}R = A^{t+k} = A^t$. Таким образом, мы получили противоречие с минимальностью T , т.к. $t = T - 1$ и $CS^tR = A^t$.

Следовательно, $T = k - 1$. □

9.6 Ромашка с отрицательными циклами



Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_{2n-1}(\mathbb{R}_{\max})$, графа-ромашки, состоящей из двух циклов: цикла длины n с нулевым средним весом (будем называть его нулевым циклом) и цикла длины n с отрицательным средним весом (будем называть его отрицательным циклом). Будем считать, что вершины первого цикла имеют номера от 1 до n в порядке обхода, а второго — $1, n + 1, \dots, 2n - 1$ в порядке обхода.

Утверждение 9.14. $T(A) = T_{1,N}(A) = T_{2,N}(A) = n - 1$.

Доказательство. В этом примере матрица B нетривиальна: она получается из A заменой первых n строк и столбцов на $-\infty$ и кодирует пути в отрицательном цикле. Заметим, что вершина n лежит в критическом подграфе, и, следовательно, инцидентные ей ребра не кодируются матрицей B , т.е. $\mathcal{G}(B)$ — это $n - 1$ последовательная соединенная вершина. Это значит, что B нильпотентна: $B^{n-1} = -\infty$, так как длиннейший путь в $\mathcal{G}(B)$ имеет длину $n - 2$.

Докажем, что $T_2(A, B) = n - 1$.

В силу нильпотентности $CS^{n-1}R \geq B^{n-1} = -\infty$. Значит, $T_2(A, B) \geq n - 1$.

Покажем, что неравенство $CS^tR \geq B^t$ не выполняется при $t = n - 2$.

Рассмотрим вершины $i = n + 1$ и $j = 2n - 1$. Путь, вес которого кодирует ячейка $[B^t]_{ij}$ — единственная небесконечная ячейка матрицы B^t — это дуга отрицательного цикла из вершины i в вершину j длины $n - 2$.

Рассмотрим путь, который кодирует ячейка с теми же индексами матрицы CS^tR . Он состоит из трех частей: части C , части S^t , и части R . После прохождения части C мы

попадем в вершину номер 1 (так как в матрице C мы делаем произвольное количество шагов длины n и после ее прохождения мы всегда оказываемся в критическом подграфе). Далее в части S^t делаем $n - 2$ шага по критическому подграфу и попадаем в вершину номер $n - 1$. И, наконец, после части R мы оказываемся в вершине $2n - 1$, пройдя еще n шагов.

Посчитаем вес этого пути. Мы целиком прошли нулевой цикл (что не влияет на вес пути, т.к. средний вес ребра в нем равен 0), целиком прошли отрицательный цикл и еще прошли по простой дуге от $n + 1$ -й до $2n - 1$ -й вершины. Значит, $[CS^tR + B^t]_{ij} = (\lambda')^{\odot n} \oplus [B^t]_{ij}$, где $\lambda' = \lambda(B) < 0$ — средний вес отрицательного цикла.

Следовательно, $[CS^tR]_{ij} < [B]_{ij}$, и неверно, что $CS^tR \geq B^t$. Значит, $T_2(A, B) = n - 1$.

Покажем, что $T_1(A, B) = n - 1$. Рассуждения аналогичны доказательству точной оценки для $T(A)$ в утверждении 9.13, но с некоторыми изменениями. Назовем путь подходящим, если его вес минимален среди всех путей с концами в тех же вершинах, имеющих ту же длину. Чтобы получить доказательство для графа с отрицательным циклом, надо заменить в доказательстве все слова "путь" на "подходящий путь" (в том графе все пути были подходящими, а в нашем графе — не все).

Для окончания доказательства надо показать, что любой подходящий путь длины $m > 2n - 2$ можно укоротить на n , при этом его вес останется прежним. Действительно, если $m > 2n - 2$, то путь не может быть простым. Значит, в нем есть цикл. Но в подходящем пути не может быть отрицательных циклов, иначе этот цикл можно поменять на нулевой и улучшить ответ. Значит, убрав этот нулевой цикл, можно получить путь между теми же вершинами того же веса, но длины $m - n$. Это завершает доказательство оценки $T_1(A, B)$ для данного графа. В итоге имеем $T(A) = T_1(A, B) = T_2(A, B) = n - 1$. \square

Утверждение 9.14 верно и для графов-ромашек с большим количеством циклов.

Следствие 9.15. *Если A — матрица смежности графа-ромашки, где каждый цикл имеет длину n и есть хотя бы один нулевой цикл и хотя бы один отрицательный цикл, то $T(A) = T_{1,N}(A) = T_{2,N}(A) = n - 1$.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения 9.14.

9.7 Заключение

Для некоторых примитивных графов была посчитана их экспонента, скрамблинг-индекс и границы T . В каждом примере $k(A(\mathcal{G})) < \exp(A) = T(A)$. Более того, в обоих примерах $k(A(\mathcal{G})) \sim \frac{\exp(A)}{2}$.

10 Разные ромашки

Здесь и далее будем рассматривать графы-ромашки, состоящие из циклов длины, кратной σ , все рёбра в которых имеют вес 0. Тогда сразу можно сказать, что у каждой такой ромашки $T_2 = 0$ и $T = T_1$. Для разных таких ромашек будем искать границу T .

Определение 10.1. *Ромашку, состоящую из циклов длины $a_1\sigma, a_2\sigma, \dots, a_n\sigma$, где числа a_1, \dots, a_n взаимно просты в совокупности, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ назовем $(a_1, \dots, a_n; \sigma)$ -ромашкой.*

Границу T , определенную для такой ромашки, будем обозначать через $T(a_1, \dots, a_n; \sigma)$.

Заметим, что индекс цикличности такой ромашки равен σ и всего в ней $N = \sum_{i=1}^n a_i\sigma - n + 1$ вершин. Пусть вершина, в которой пересекаются все циклы, имеет номер 1. Пронумеруем

вершины в порядке следующего обхода: начнем в вершине 1, далее пройдем по первому циклу, затем — по второму, и так далее до цикла с номером n (не изменяя номер у вершины 1).

Во всех примерах матрицу смежности рассматриваемого графа будем обозначать через $A \in M_N(\mathbb{R}_{\max})$, а через C, S, R будем обозначать матрицы C, S, R , построенные по матрице A .

10.1 Подсчет границы T вручную

Теорема 10.2. $T(a_1, \dots, a_n; \sigma) = (T(a_1, \dots, a_n; 1) + 1)\sigma - 1$.

Доказательство. Обозначим граф, соответствующий $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -ромашке через \mathcal{G} , а граф, соответствующий $(a_1, \dots, a_n; \sigma)$ -ромашке — через \mathcal{G}_σ . Граф \mathcal{G}_σ получается из графа \mathcal{G} разделением каждого ребра на σ более мелких рёбер. Вершины \mathcal{G}_σ , лежащие в одном циклическом классе с вершиной 1, будем называть начальными. Для краткости будем обозначать $T(a_1, \dots, a_n; 1)$ через $T(1)$, а $T(a_1, \dots, a_n; \sigma)$ — через $T(\sigma)$.

Покажем, что $T(\sigma) > (T(1) + 1)\sigma - 2$. В \mathcal{G} есть 2 вершины, между которыми нет пути длины $T(1) - 1$. Значит, в \mathcal{G}_σ между соответствующими начальными вершинами нет пути длины $(T(1) - 1)\sigma$. Обозначим эти вершины через u и v . Но тогда между вершинами \hat{u} и \hat{v} не будет пути длины $(T(1) - 1)\sigma + 2(\sigma - 1) = (T(1) + 1)\sigma - 2$, где \hat{u} получается, если отойти от u на $\sigma - 1$ шаг вперёд, а \hat{v} — от вершины v на $\sigma - 1$ шаг назад (обе новые вершины существуют, так как любая вершина в \mathcal{G} лежит в цикле). Значит, $T(\sigma) \geq (T(1) + 1)\sigma - 1$.

Покажем, что $T(\sigma) \geq (T(1) + 1)\sigma - 1$. Для этого нужно доказать, что между любыми двумя вершинами u и v графа \mathcal{G}_σ есть путь длины $(T(1) + 1)\sigma - 1$ от u до v . Путь длины $(T(1) + 1)\sigma - 1$ от u до v состоит из трех частей: путь от u до ближайшей начальной вершины, путь между начальными вершинами, и путь от ближайшей начальной вершины до v . Суммарная длина первой и третьей частей не превосходит $2\sigma - 2$, значит, длина второй части не меньше $(T(1) - 1)\sigma + 1$. Но длина пути между двумя начальными вершинами должна быть кратна σ , поэтому длина второй части не меньше $T(1) \cdot \sigma$. Но, по определению $T(1)$, между любыми начальными вершинами есть путь длины $T(1) \cdot \sigma$. Значит, $T(\sigma) \geq (T(1) + 1)\sigma - 1$, и утверждение доказано. \square

Таким образом, при расчёте границы T для произвольной ромашки достаточно посчитать искомую границу при $\sigma = 1$, а затем получить ответ по формуле 10.2.

Замечание 10.3. При $\sigma = 1$ $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -ромашка примитивна. Более того, выполняются условия следствия 9.8, и граница T данной ромашки совпадает с экспонентой.

Введём вспомогательную функцию P :

Определение 10.4. Для взаимно простых в совокупности натуральных чисел $a_1 \leq \dots \leq a_n$ обозначим через $P(a_1, \dots, a_n)$ минимальное целое неотрицательное число, удовлетворяющее следующему свойству: любое $p \geq P(a_1, \dots, a_n)$ выражается в виде линейной комбинации чисел a_1, \dots, a_n с целыми неотрицательными коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то есть $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n = p$.

Число, выражающееся в виде линейной комбинации чисел a_1, \dots, a_n с целыми неотрицательными коэффициентами, назовём выразимым. Здесь и далее под линейной комбинацией будем понимать линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами.

Теорема 10.5. $T(a_1, \dots, a_n; 1) = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$.

Доказательство. Предположим, что в $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -ромашке между любыми двумя вершинами существует путь длины t . Рассмотрим две произвольные вершины u и v .

Любой путь длины хотя бы $a_n - 1$ проходит через вершину 1, и $t \geq a_n - 1$. Поэтому путь длины t от u до v состоит из трёх частей: пути от u до 1 (обозначим длину этой части через \hat{u}), λ_i циклов длины a_i для $i = 1 \dots n$, и пути от 1 до v (обозначим длину этой части через \hat{v}). Тогда имеет место равенство:

$$t = \hat{u} + a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n + \hat{v} \iff t - \hat{u} - \hat{v} = a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n.$$

Сумма $\hat{u} + \hat{v}$ принимает любые значения от 0 до $2a_n - 2$ (так как $0 \leq \hat{u}, \hat{v} \leq a_n - 1$). Следовательно, для любого $t - 2a_n + 2 \leq p \leq t$ должны существовать коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, удовлетворяющие уравнению

$$p = a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n. \quad (17)$$

При $t < P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$ минимальное значение p не превосходит $P(a_1, \dots, a_n) - 1$, и, по определению $P(a_1, \dots, a_n)$, при наименьшем значении p уравнение 17 решений не имеет — противоречие с наличием пути между u и v .

Напротив, при $t \geq P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$ наименьшее значение p не меньше $P(a_1, \dots, a_n)$, и, в силу определения $P(a_1, \dots, a_n)$, коэффициенты λ_i найдутся для любого возможного значения p .

Значит, $T(a_1, \dots, a_n; 1) = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$. \square

Следствие 10.6 (Корректность функции P). *Функция P определена корректно: её значение существует для любых возможных аргументов.*

Доказательство. Рассмотрим $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -ромашку. По замечанию 10.3 этот граф примитивен и, следовательно, имеет экспоненту, которая, в свою очередь, совпадает с границей T для данной ромашки. По формуле из теоремы 10.5 имеем $P(a_1, \dots, a_n) = T(a_1, \dots, a_n; 1) - 2a_n + 2$. \square

Утверждение 10.7 (Свойства функции P).

1. Если $a_1 = 1$, то $P(1, \dots, a_n) = 0$.
2. $P(a_1, \dots, a_n) \leq P(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ — возрастающая последовательность индексов.
3. $P(a_1, \dots, a_n) = P(b_1, \dots, b_m)$, где набор b_1, \dots, b_m получается из набора a_1, \dots, a_n удалением повторяющихся элементов.
4. Если a_j делится на a_i , то $P(a_1, \dots, a_n) = P(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$.

Доказательство. 1) Действительно, если $a_1 = 1$, то любое неотрицательное число k выражается как $1 \cdot k$. Следовательно, $P = 0$.

2) Свойство следует из следующего факта: сумма $a_{i_1}\lambda_{i_1} + \dots + a_{i_k}\lambda_{i_k}$ является частным случаем суммы $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$.

3) При приведении подобных членов в сумме $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$ получается корректная сумма $b_1\mu_1 + \dots + b_m\mu_m$. С другой стороны, сумма $b_1\mu_1 + \dots + b_m\mu_m$ является корректной суммой вида $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$.

4) Очевидно, что любая сумма $a_1\lambda_1 + \dots + a_{j-1}\lambda_{j-1} + a_{j+1}\lambda_{j+1} + \dots + a_n\lambda_n$ является суммой вида $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$, где $\lambda_j = 0$. С другой стороны, заменив a_j на $a_i \cdot \frac{a_j}{a_i}$, можно избавиться от слагаемого $a_j\lambda_j$ в сумме $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$, что доказывает утверждение. \square

Утверждение 10.8. $P(a, b) = (a - 1)(b - 1)$.

Доказательство. Покажем, что при $p = ab - a - b \neq ma + nb$ для любых целых неотрицательных m, n .

Предположим противное. Тогда:

$$ab - a - b = am + bn \iff ab = (m + 1)a + (n + 1)b$$

В силу взаимной простоты a и b получим, что $n + 1 \vdots a$, и $m + 1 \vdots b$. Тогда, в силу того, что $m, n \geq 0$, имеем 2 случая:

$$\begin{cases} n + 1 = a \\ m + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n + 1 = 0 \\ m + 1 = b. \end{cases}$$

В обоих случаях получаем противоречие. Следовательно, $P(a, b) \geq (a - 1)(b - 1)$.

Теперь покажем, что $P(a, b) \leq ab + b - a - 1$. Для любого $p \geq ab - b - a + 1$ решим уравнение:

$$am + bn = p$$

Так как a и b взаимно просты, числа из набора $0, b, 2b, \dots, (a - 1)b$ дают все a остатков по модулю a . Значит, существует единственное $0 \leq n \leq a - 1$, что $bn \equiv p \pmod{a}$, причём $p - bn \geq 0$, так как

$$p - bn \geq ab - b - a + 1 - (a - 1)b = -a + 1 > -a \implies p - bn \geq 0.$$

Значит, $m = \frac{p - bn}{a} \geq 0$.

Таким образом, нами были найдены целые $m \geq 0, n \geq 0$. Следовательно, $P(a, b) = (a - 1)(b - 1)$. \square

Следствие 10.9. $T(a, b; \sigma) = (ab + b - a)\sigma - 1$.

Утверждение 10.10. $P(2, a, b) = \begin{cases} P(2, b) = b - 1, & \text{если } a \text{ чётно,} \\ P(2, a) = a - 1, & \text{иначе.} \end{cases}$

Доказательство. Первый случай следует из свойства 4 утверждения 10.7.

Разберём второй случай: a нечётно. Неравенство $P(2, a, b) \leq P(2, a)$ следует из свойства 2 утверждения 10.7. Докажем обратное неравенство: необходимо показать, что с помощью слагаемых $2, a, b$ невозможно получить сумму $a - 2$. Действительно, из трёх слагаемых можно использовать только одно: 2 . Но $a - 2$ нечётно — противоречие. Следовательно, $P(2, a, b) = P(2, a)$. \square

Следствие 10.11. $T(2, a, b; \sigma) = \begin{cases} T(2, b; \sigma) = (3b - 2)\sigma - 1, & \text{если } a \text{ нечётно,} \\ (2b + a - 2)\sigma - 1, & \text{иначе.} \end{cases}$

Утверждение 10.12. $P(3, a, b) = \begin{cases} P(3, b) = 2(b - 1), & \text{если } a \vdots 3, \\ b - 2, & \text{если } a \not\vdots 3, a + b \vdots 3 \text{ и } b < P(3, a) = 2a - 2, \\ P(3, a) = 2(a - 1), & \text{иначе.} \end{cases}$

Доказательство. Первый случай следует из свойства 4 утверждения 10.7.

Разберём второй случай. Покажем, что $P(3, a, b) \geq b - 2$. Предположим противное. Тогда число $b - 3$ должно выражаться в виде линейной комбинации $2, a$ и b :

$$b - 3 = 3\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

Тогда $\lambda_3 = 0$ и $\lambda_2 \leq 1$. При $\lambda_2 = 0$ имеем $b = 3\lambda_1 + 3 \div 3$. При $\lambda_2 = 1$ имеем $b - a = 3\lambda_1 + 3 \div 3$. В обоих случаях $a \div 3$, так как $a + b \div 3$, что противоречит условию второго случая. Следовательно, $P(3, a, b) \geq b - 2$.

Докажем обратное неравенство: для любого $p \geq b - 2$ решим уравнение:

$$p = 3\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

Так как в правой части есть слагаемое $3\lambda_1$, то достаточно решить уравнение для $p = b - 2$, $p = b - 1$ и $p = b$ — тогда линейные комбинации для больших p получатся увеличением λ_1 .

- $p = b - 2$. Если $b \equiv 2 \pmod{3}$, то $\lambda_1 = \frac{b-2}{3}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Если $b \equiv 1 \pmod{3}$, то $a \equiv 2 \pmod{3}$, $b - 2 = (b - a - 2) + a$ и $\lambda_1 = \frac{b-a-2}{3}$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$.
- $p = b - 1$. Если $b \equiv 1 \pmod{3}$, то $\lambda_1 = \frac{b-1}{3}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Если $b \equiv 2 \pmod{3}$, то $a \equiv 1 \pmod{3}$, $b - 1 = (b - a - 1) + a$ и $\lambda_1 = \frac{b-a-1}{3}$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$.
- $p = b$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

Таким образом, $P(3, a, b) = b - 2$.

Перейдём к третьему случаю: если $b \geq P(3, a)$, то наличие слагаемого $b\lambda_3$ не повлияет на значение функции P : если некое p выражается в виде линейной комбинации с участием b , то $p \geq P(3, a)$ и, следовательно, выражается и без участия b . Следовательно, $P(3, a, b) = P(a, b)$.

Рассмотрим последний случай: $a \not\div 3$, $a + b \not\div 3$, $b < P(3, a)$. Неравенство $P(3, a, b) \geq P(a, b)$ следует из свойства 2 утверждения 10.7. Докажем обратное неравенство. Для этого покажем, что следующее уравнение не имеет решений:

$$2a - 3 = 3\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

Заметим, что $\lambda_3 = 0$, так как $b < 2a - a$. Также, $\lambda_2 \leq 1$. Тогда $(2 - \lambda_2)a = 3\lambda_1 + 3 \div 3$ — противоречие с $a \not\div 3$. Значит, $P(3, a, b) = P(a, b)$. \square

$$\text{Следствие 10.13. } T(3, a, b; 1) = \begin{cases} T(3, b; 1) = 4b - 4, & \text{если } a \div 3, \\ 3b - 4, & \text{если } a \not\div 3, a + b \div 3 \text{ и } m < 2a - 2, \\ 2a + 2b - 4, & \text{иначе.} \end{cases}$$

10.2 Алгоритм вычисления функции P

Лемма 10.14. Число p выразимо тогда и только тогда, когда $p = 0$ или выразимо хотя бы одно из чисел $p - a_1, \dots, p - a_n$.

Доказательство. Докажем необходимость: пусть некоторое $p > 0$ выразимо: $p = a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$. Тогда хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ положительно: пусть $\lambda_i > 0$. Тогда выразимо число $p - a_i = a_1\lambda_1 + \dots + a_i \cdot (\lambda_i - 1) + \dots + a_n\lambda_n$.

Докажем достаточность. Очевидно, что $p = 0$ выразимо. Если $p > 0$ и выразимо число $p - a_i$, то выразимо и p : достаточно увеличить λ_i в линейной комбинации для $p - a_i$ на единицу. \square

Лемма 10.15. $P(a_1, \dots, a_n) = p$ тогда и только тогда, когда $p - 1$ не выразимо, а числа $p, p + 1, \dots, p + a_1 - 1$ выразимы.

Доказательство. Необходимость следует из определения функции P .

Докажем достаточность: пусть числа $p, p+1, \dots, p+a_1-1$ выразимы. Тогда выразимо любое число, не меньшее p : для любого $x \geq p$ существует единственное число k такое, что $p \leq x - k \cdot a_1 \leq p + a_1 - 1$, то есть $x - k \cdot a_1$ выразимо. Увеличив коэффициент λ_1 в линейной комбинации для $x - k \cdot a_1$ на k , получим линейную комбинацию для x . Значит, $P(a_1, \dots, a_n) \leq p$.

Так как $p-1$ невыразимо, имеем $P(a_1, \dots, a_n) \geq p$. Следовательно, $P(a_1, \dots, a_n) = p$. \square

Приведём алгоритм, позволяющий вычислять функцию P . Для этого предположим, что некая функция ANS оценивает сверху функцию P : $P(a_1, \dots, a_n) \leq ANS(a_1, \dots, a_n)$.

Алгоритм 10.16. 1. Создадим массив dp длины $ANS + a_1$, заполненный нулями. В $dp[p]$ будет лежать 0, если p невыразимо, и 1 — иначе.

2. Поместим в $dp[0]$ значение 1 — 0 выразим всегда.

3. Проверим каждое значение p от 1 до $ANS+a_1$ на выразимость. Для этого переберём числа $p - a_i$ для $1 \leq i \leq n$. Если хотя бы одно из значений $dp[p - a_i]$ равно 1, то p выразимо и $dp[p] = 1$, иначе $dp[p] = 0$.

4. Когда мы впервые обнаружим a_1 последовательно лежащих единиц (то есть $dp[p - a_1 + 1] = dp[p - a_1 + 2] = \dots = dp[p]$), то ответом будет $p - a_i + 1$.

Утверждение 10.17. Алгоритм 10.16 работает корректно; время его работы равно $O(n \cdot (ANS + a_1))$.

Доказательство. Докажем корректность. Шаг 3 верен по лемме 10.14. Шаг 4 — по лемме 10.15.

Докажем асимптотику. Всего будет проверено ровно $P(a_1, \dots, a_n) + 1$ значений p , что не превосходит $ANS + a_1$, и каждая проверка будет работать за $O(n)$. Итоговая асимптотика — $O(n \cdot (ANS + a_1))$. \square

10.3 Верхние оценки функции P

Оценим сверху значение функции P . Это поможет и в оценке сверху границы T для ромашек, и для уточнения времени работы алгоритма 10.16.

Утверждение 10.18. Функция $P(a_1, \dots, a_n)$ оценивается сверху следующими функциями:

1. $Wi(N) - 2a_n + 2$,
2. $(a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2$,
3. $(a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2)$,

где $N = \sum_{i=1}^n a_i - n + 1$ — количество вершин в $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -ромашке.

Доказательство. По замечанию 10.3 граница T данной ромашки совпадает с её экспонентой, которая по теореме 8.11 оценивается сверху числом Виландта от количества вершин $Wi(N)$, функцией $\hat{g}(N - 2) + N$ и функцией $(\hat{g} - 1)(cr - 1) + (\hat{g} + 1)cd$.

Обхват (a_1, \dots, a_n) -ромашки равен a_1 , её окружность равна a_n , а длина наибольшего простого пути не превышает $2a_n - 2$.

Далее достаточно применить теорему 10.5. \square

Следствие 10.19. Асимптотика алгоритма 10.16 — $O(n \cdot a_1 \cdot a_n)$.

Доказательство. При подстановке $Wi(N)+2a_2-2$ вместо функции ANS имеем асимптотику $O(n \cdot (N^2 - 2N + 2 - 2a_n + 2 + a_1)) = O(n \cdot N^2)$ (так как $N = \sum_{i=1}^n a_i - n + 1$).

При подстановке $(a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2$ вместо функции ANS имеем асимптотику $O(n \cdot ((a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2 + a_1)) = O(n \cdot a_1 \cdot N)$.

При подстановке $(a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2)$ вместо функции ANS имеем асимптотику $O(n \cdot ((a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2) + a_1)) = O(n \cdot a_1 \cdot a_n)$.

Утверждение следует из неравенства $a_1 \cdot a_n \leq a_1 \cdot N \leq N^2$. \square

11 Границы T и скрамблинг-индекс

Определение 11.1. Рассмотрим произвольную матрицу $X \in M_{n+m}(\mathbb{R}_{\max})$ размера $n + t$. Назовем n - t -декомпозицией матрицы X следующие четыре матрицы:

$$\begin{aligned} X_{11} &\in M_{n \times n}(\mathbb{R}_{\max}) & X_{12} &\in M_{n \times m}(\mathbb{R}_{\max}) \\ X_{21} &\in M_{m \times n}(\mathbb{R}_{\max}) & X_{22} &\in M_{m \times m}(\mathbb{R}_{\max}), \end{aligned}$$

такие, что

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим граф \mathcal{G} на $n + t$ вершинах, матрицей смежности $A \in M_{n+m}(\mathbb{R}_{\max})$ и с положительным скрамблинг-индексом $k(\mathcal{G})$. По критерию положительности скрамблинг-индекса (7.6) в \mathcal{G} существует примитивный достижимый подграф \mathcal{G}_2 . Обозначим через \mathcal{G}_1 индуцированный подграф исходного графа \mathcal{G} , порожденный множеством вершин $V(\mathcal{G}) \setminus V(\mathcal{G}_2)$.

Для удобства перенумеруем вершины: пусть в графе \mathcal{G}_1 лежат вершины с номерами от 1 до n , а в \mathcal{G}_2 — от $n + 1$ до $n + t$. Тогда в n - t -декомпозиции матрицы A в матрице A_{ij} лежит информация о ребрах из \mathcal{G}_i в \mathcal{G}_j .

Будем рассматривать те графы, для которых $\mathcal{G}^c = \mathcal{G}_2$ и $\lambda(A) = 0$. Так как граф \mathcal{G}_2 примитивен, его цикличность равна 1. Значит, $M = A^*$.

Рассмотрим n - t -декомпозицию матрицы M :

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 11.2. Матрица M_{ij} имеет вид:

$$M_{ij} = (A^*)_{ij} = \bigoplus_{t=0}^{n+m-1} \bigoplus_{\sigma} \bigodot_{k=0}^{t-1} A_{\sigma(k), \sigma(k+1)},$$

где $i, j \in \{1, 2\}$, $\sigma \in \{1, 2\}^{t+1}$, причем $\sigma(0) = i$, $\sigma(t) = j$.

Доказательство. Матрицы C, R, S, B имеют вид:

$$C = \begin{pmatrix} -\infty & M_{12} \\ -\infty & M_{22} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} A_{11} & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Для $t \geq T(A)$ верно следующее равенство:

$$\begin{aligned} A^t = CS^tR &= \begin{pmatrix} -\infty & M_{12} \\ -\infty & M_{22} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & A_{22} \end{pmatrix}^t \odot \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} M_{12}A_{22}^tM_{21} & M_{12}A_{22}^tM_{22} \\ M_{22}A_{22}^tM_{21} & M_{22}A_{22}^tM_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

для $t \geq T_1(A, B)$ — следующее:

$$A^t = CS^tR \oplus B^t = \begin{pmatrix} M_{12}A_{22}^tM_{21} \oplus A_{11}^t & M_{12}A_{22}^tM_{22} \\ M_{22}A_{22}^tM_{21} & M_{22}A_{22}^tM_{22} \end{pmatrix},$$

и для $t \geq T_2(A, B)$ — следующее неравенство:

$$\begin{pmatrix} M_{12}A_{22}^tM_{21} & M_{12}A_{22}^tM_{22} \\ M_{22}A_{22}^tM_{21} & M_{22}A_{22}^tM_{22} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} A_{11}^t & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix},$$

т.е., что равносильно, $M_{12}A_{22}^tM_{21} \geq A_{11}^t$.

Выразим A^t :

$$(A^t)_{ij} = \bigoplus_{\sigma} \bigodot_{k=0}^{t-1} A_{\sigma(k), \sigma(k+1)},$$

где $i, j \in \{1, 2\}$, $\sigma \in \{1, 2\}^{t+1}$, причем $\sigma(0) = i, \sigma(t) = j$. Здесь и далее считаем, что $\sigma(k)$ — это k -й элемент кортежа σ , нумерация в котором идет с нуля.

Рассмотрим путь из произвольной вершины подграфа \mathcal{G}_i в произвольную вершину подграфа \mathcal{G}_j . Каждое ребро этого пути либо лежит внутри соответствующего подграфа, либо соединяет текущий подграф с другим. Переберем все возможные варианты расположения ребер в пути: если $\sigma(k-1) = \sigma(k)$, то k -е ребро пути лежит в графе $\mathcal{G}_{\sigma(k-1)}$. Иначе — ведёт из $\mathcal{G}_{\sigma(k-1)}$ в $\mathcal{G}_{\sigma(k)}$. По всем таким вариантам возьмем максимум — это и будет оптимальным весом пути.

Зафиксируем $i, j \in \{1, 2\}$. Тогда матрица M_{ij} выражается следующим образом:

$$M_{ij} = (A^*)_{ij} = \bigoplus_{t=0}^{n+m-1} \bigoplus_{\sigma} \bigodot_{k=0}^{t-1} A_{\sigma(k), \sigma(k+1)},$$

где $\sigma \in \{1, 2\}^{t+1}$, причем $\sigma(0) = i, \sigma(t) = j$. □

12 Обозначения

1. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ — множество неотрицательных вещественных чисел.
2. $\mathbb{R}_{\max}, \mathbb{R}_{\min}$ — тропические полукольца.
3. $\mathbb{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ — множество с сложением, аналогичным дизъюнкции, и умножением, аналогичным конъюнкции.
4. $M_{n \times m}(\mathbb{F})$ — множество матриц $n \times m$ с элементами из \mathbb{F} .
 $M_n(\mathbb{F})$ — множество квадратных матриц $n \times n$ с элементами из \mathbb{F} .
5. $[M]_{ij}$ — элемент матрицы M с индексами i и j .
6. $\mathcal{G}(V, E)$ — граф со множеством вершин V и множеством ребер E .
7. $Wi(n) = (n-1)^2 + 1$ — число Виландта.
8. $DM(\hat{g}, n) = \hat{g}(n-2) + n$, где $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$ — число Далмаджа-Мендельсона.
9. $\sigma_{\mathcal{G}}$ — индекс цикличности графа G .
10. $k(\mathcal{G})$ — скрамблинг индекс графа G .

11. $g(\mathcal{G})$ — обхват графа \mathcal{G} , т.е. длина наименьшего цикла в \mathcal{G} .
12. $\hat{g}(\mathcal{G})$ — максимальный обхват среди всех компонент сильной связности графа \mathcal{G} .
13. $cr(\mathcal{G})$ — окружность графа \mathcal{G} , т.е. длина наибольшего цикла в \mathcal{G} .
14. $cb(\mathcal{G})$ — максимальная длина простого пути в графе \mathcal{G} .
15. $exp(\mathcal{G})$ — экспонента графа (а значит, и его матрицы смежности).
16. $\lambda(A)$ — максимальный средний вес цикла в графе $\mathcal{G}(A)$.
17. \mathcal{G}^c — критический подграф графа \mathcal{G} .
18. A^* — звезда Клини матрицы A .
19. $\mathcal{W}(i \rightarrow j)$ — множество путей из вершины i в вершину j .
 $\mathcal{W}^t(i \rightarrow j)$ — множество путей из вершины i в вершину j длины t .
 $\mathcal{W}^{t,l}(i \rightarrow j)$ — множество путей из вершины i в вершину j длины t по модулю l .
20. $\mathcal{W}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$, $\mathcal{W}^t(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$, $\mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ — аналогично предыдущему пункту, но с дополнительным условием на путь: он должен проходить хотя бы через одну вершину из \mathcal{G} .
21. $T(A)$, $T_1(A, B)$, $T_2(A, B)$ — границы, определенные в подразделе 8.2.

References

- [1] Imre Simon *On semigroups of matrices over the tropical semiring* Theoretical Informatics and Applications (Tome 28 (1994) no. 3-4, pp. 277-294)
- [2] Semere Tsehay Tesfay. *A Glance at Tropical Operations and Tropical Linear Algebra* Eastern Illinois University, 2015.
- [3] David Speyer, Bernd Sturmfels. *Tropical Mathematics* Mathematics Magazine, vol. 82, №3, June 2009.
- [4] Ю.М. Волченко *Max-plus алгебра и ее применение*, декабрь 2017
- [5] Hans Schneider. *Wielandt's proof of the exponent inequality for primitive nonnegative matrices* Department of Mathematics, University of Wisconsin at Madison, 2002.
- [6] Ю.А. Альпин, И.В. Башкин. *Неотрицательные цепные матрицы* Казанский федеральный университет, 2020.
- [7] Alexander Guterman, Elena Kreines, and Carsten Thomassen. *Linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index* Special Matrices Volume 9, 2021.
- [8] A. E. Guterman, A. M. Makshev Upper bounds on scrambling index for non-primitive digraphs Linear and Multilinear Algebra, 2019
- [9] Arthur Kennedy-Cochran-Patrick, Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev. *New bounds on the periodicity transient of the powers of a tropical matrix: Using cyclicity and factor rank* Linear Algebra and its Applications, 2020

- [10] Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379514004777>
- [11] Sergei Sergeev, Hans Schneider. *CSR expansions of matrix powers in max algebra* Transactions of the American Mathematical Society, December 2009
- [12] Brualdi RA, Ryser HJ. *Combinatorial matrix theory*. Cambridge: Cambridge University Press; 1991. (Encyclopedia of mathematics and its applications; 39).