Тропическая линейная алгебра

Никита Шапошник, Б05-024
научный руководитель: А. Э. Гутерман

May 11, 2021

1 Введение

Тропическая математика была придумана бразильским математиком Имре Симоном (Imre Simon) в конце XX века (название произошло от его места жительства). Матрицы над тропическим полукольцом имеют приложения в теории графов, отпимизации и биологии. В настоящей работе мы будем рассматривать матрицы над тропическим полукольцом, их связь с графами и некоторые их индексы: экспоненту, скрамблинг индекс, индекс цикличности.

2 Определения

1. Тропическое полукольцо ([1], [2]) — это множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ с операциями сложения $\oplus$ и умножения $\odot$:

$$a \oplus b = min(a, b)$$
$$a \odot b = a + b$$

2. $\mathbb{B} = \{\mathbf{0{,}1}\}$ — множество с сложением, аналогичным дизъюнкции, и умножением, аналогичным конъюнкции: $\forall a \in \mathbb{B} \hookrightarrow$

$$a + \mathbf{0} = a$$
$$a + \mathbf{1} = \mathbf{1}$$
$$b \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$b \cdot \mathbf{1} = b$$

3. Граф (в рамках данной задачи) $G(V, E)$ — совокупность двух множеств – непустого множества $V = V(G)$ и множества $E = E(G) \subseteq V^2$. Множество V называется множеством вершин, множество E называется множеством рёбер.
Если $\forall (u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \in E$, то граф G называется неориентированным, в противном случае — ориентированным.
Граф $G(V, E)$ со введенной функцией $W : E \to \mathbb{R}$ называется взвешенным

графом.
Путем из вершины u в вершину v в графе G называется последовательность вершин $u, w_1, w_2, \ldots, w_l, v \in V(G)$ и последовательность ребер (u, w_1), $(w_1, w_2), \ldots, (w_l, v) \in E(G)$, где вершины и ребра могут повторяться.
Длиной пути называется количество ребер в нем.
Ориентированный граф называется сильно связным, если для любых $u, v \in V(G)$ существует путь из u в v и из v в u.

3 Примитивность вещественной неотрицательной матрицы

Определение 3.1. *Вещественная матрица A называется примитивной, если существует натуральное число m такое, что A^m положительна, то есть все числа в ней положительны. При этом наименьшее такое m называется экспонентой матрицы и обозначается через $exp(A)$.*

Теорема 3.1 (Критерий примитивности матрицы)**.** *Неотрицательная квадратная матрица порядка n над полем вещественных чисел примитивна тогда и только тогда, когда граф смежности этой матрицы сильно связен и НОК всех длин замкнутых путей (циклов) равно 1.*

Теорема 3.2 (Виландта[3])**.** *Если неотрицательная квадратная матрица порядка n над полем вещественных чисел примитивна, то ее экспонента не превосходит $n^2 - 2n + 2$.*

4 Примитивность тропических матриц

Замечание 4.1. *Примитивность и экспонента тропической матрицы определяется так же, как и в вещественном случае, с отличием лишь в том, что в степени матрицы не должно быть ∞.*

4.1 Матрицы 2×2

Утверждение 4.1. *Матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ над тропическим полукольцом примитивна тогда и только тогда, когда $b \neq \infty \wedge c \neq \infty \wedge (a \neq \infty \vee d \neq \infty)$; причем ее экспонента равна 2.*

Доказательство. Если перемножить матрицы, у которых в правом верхнем углу стоят ∞, то у результата будет стоять ∞ в том же углу:
$$\begin{pmatrix} a & \infty \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & \infty \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & a \odot \infty \oplus \infty \odot d' \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \infty \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$
Аналогично с левым нижнем углом. Значит, в правом верхнем и в левом нижним углах не могут стоять ∞.

Перемножим 2 матрицы, у которых на главной диагонали стоят ∞:

$$\begin{pmatrix}\infty & b\\ c & \infty\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\infty & b'\\ c' & \infty\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\infty\odot\infty\oplus b\odot c' & \infty\odot b'\oplus b\odot\infty\\ c\odot\infty\oplus\infty\odot c' & c\odot b'\oplus\infty\odot\infty\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dots & \infty\\ \infty & \dots\end{pmatrix}$$

У результата стоят ∞ на побочной диагонали. Перемножим такую матрицу с матрицей с ∞ на главной диагонали:

$$\begin{pmatrix}a & \infty\\ \infty & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\infty & b\\ c & \infty\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\odot\infty\oplus\infty\odot c & a\odot b\oplus\infty\odot\infty\\ \infty\odot\infty\oplus d\odot c & \infty\odot b\oplus\infty\odot d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\infty & \dots\\ \dots & \infty\end{pmatrix}$$

Снова получилась матрица с ∞ на главной диагонали. Значит, в любой степени матрицы с ∞ на главной диагонали будут ∞. Значит, она не может быть примитивной.

Проверим, что матрица с описанными выше ограничениями будет примитивной:

$$A^{\odot 2}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{\odot 2}=\begin{pmatrix}a\odot a\oplus b\odot c & a\odot b\oplus b\odot d\\ a\odot c\oplus c\odot d & b\odot c\oplus d\odot d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}min(2a,b+c) & b+min(a,d)\\ c+min(a,d) & min(b+c,2d)\end{pmatrix}$$

Равным ∞ в этой матрице может быть или a, или d, или никто из них. В любом случае, в квадрате не будет ∞. Значит, является примитивной с показателем степени 2. □

4.2 Обобщение теоремы Виландта на тропические матрицы

Замечание 4.2. *Под умножением* $(0,1)$*-матриц будем понимать умножение двух матриц над* $\mathbb{B}$.

Замечание 4.3. *Примитивность и экспонента* $\mathbb{B}$*-матрицы определяется так же, как и в вещественном случае.*

Теорема 4.1 (Виландта для $\mathbb{B}$-матриц)**.** *Если* $\mathbb{B}$*-матрица размера* n *примитивна, то ее экспонента не превосходит* n^2-2n+2.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\beta':\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{B}$ такую, что

$$\beta'(t)=\begin{cases}\mathbf{1}, t\neq 0\\ \mathbf{0}, t=0\end{cases}\tag{1}$$

и функцию $B':M_n(\mathbb{R}_{\geq 0})\to M_n(\mathbb{B})$ такую, что

$$B':A=(a_{ij})\mapsto B'(A)=(\beta'(a_{ij}))\tag{2}$$

Лемма 4.1. B' *— гомоморфизм.*

Доказательство леммы. Надо доказать, что

$$B'(X)+B'(Y)=B'(X+Y)\text{ и }B'(X)\cdot B'(Y)=B'(X\cdot Y)\tag{3}$$

Первое верно, так как $\forall x,y\in\mathbb{R}_{\geq 0}\hookrightarrow\beta'(x)+\beta'(y)=\beta'(x+y)$.
Рассмотрим элемент под номерами i,j:

$$(B'(X)\cdot B'(Y))_{ij}=\sum_{s=1}^{n}B'(X)_{is}\cdot B'(Y)_{sj}=\sum_{s=1}^{n}\beta'(X_{is})\cdot\beta'(Y_{sj})=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\beta'(X_{is}\cdot Y_{sj})=\beta'(\sum_{s=1}^{n}X_{is}\cdot Y_{sj})=\beta'((X\cdot Y)_{ij})=(B'(X\cdot Y))_{ij}\tag{4}$$

Значит, B' — гомоморфизм. □

Пусть A — $\mathbb{B}$-матрица. Рассмотрим матрицу A' над $\mathbb{R}_{\geq 0}$ такого же размера, что и A, в которой стоят 1 на тех же местах, что и в A, и 0 в тех же местах, что и в A. Значит, $B'(A') = A$, и, более того, $\forall m \hookrightarrow B'((A')^m) = A^m$. Следовательно, утверждение о том, что в A^m нет нулей, равносильно утверждению о том, что в $(A')^m$ нет нулей. Значит, экспонента $\mathbb{B}$-матрицы равна экспоненте соответствующей ей матрицы над $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Но к неотрицательным матрицам применима теорема Виландта. Следовательно, теорема Виландта верна и для $\mathbb{B}$-матриц.

□

Теорема 4.2 (Виландта для тропических матриц)**.** *Если матрица $A \in M_n(\overline{\mathbb{R}})$ примитивна, то ее экспонента не превосходит $n^2 - 2n + 2$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\beta : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{B}$ такую, что

$$\beta(t) = \begin{cases} 1, t \neq \infty \\ 0, t = \infty \end{cases} \tag{5}$$

и функцию $B : M_n(\overline{\mathbb{R}}) \to M_n(\mathbb{B})$ такую, что

$$B : A = (a_{ij}) \mapsto B(A) = (\beta(a_{ij})) \tag{6}$$

Лемма 4.2. *B — гомоморфизм.*

Доказательство леммы. Надо доказать, что

$$B(X) + B(Y) = B(X \oplus Y) \text{ и } B(X) \cdot B(Y) = B(X \odot Y) \tag{7}$$

Заметим, что доказательство аналогично доказательству леммы 4.1, но с заменой β' на β, B' на B и $\mathbb{R}_{\geq 0}$ на $\overline{\mathbb{R}}$. □

Вследствие этого, $\forall A \in M_n(\mathbb{T}) \hookrightarrow B(A^n) = (B(A))^n$.
В тропической матрице X нет бесконечностей, если в $B(X)$ нет нулей; поэтому тропическая матрица A примитивна, если примитивна матрица $B(A)$, состоящая из нулей и единиц, что покрывается условием теоремы Виландта.
В этом случае в $(B(A))^{n^2+2n+1}$ нет нулей, и, значит, в A^{n^2+2n+1} не будет ∞.
Значит, если $A \in M_n(\mathbb{T})$ примитивна, то в A^{n^2+2n+1} нет ∞. □

5 Примитивность тропических матриц и графы

По графу можно построить соответствующую ему тропическую матрицу, и по тропической матрице можно построить соответствующий ей граф. При этом в матрице в ячейке с индексами i и j стоит:
1) ∞ тогда и только тогда, когда вершины с номерами i и j не соединены ребром;
2) число $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда между вершинами с номерами i и j есть ребро веса x. Если граф не взвешенный, то в матрице стоит $x = 0$.

5.1 Матрицы 2×2

Утверждение 5.1. *Рассмотрим граф смежности данной матрицы A. Матрица A примитивна, если для любых двух (может быть, одинаковых) вершин между ними есть путь длины ровно 2.*

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Если $a_{12} = \infty$, то не будет существовать пути из первой вершины во вторую. Если $a_{21} = \infty$, то не будет существовать пути из второй вершины в первую. Если предыдущие два условия не выполняются, но $a_{11} = a_{22} = \infty$, то не будет существовать пути из первой вершины во вторую и из второй в первую. В этих случаях матрица A не будет примитивной. Если все вышеперечисленные условия не выполняются, то матрица будет примитивной, что подтверждает доказанный ранее путем перемножения матриц факт. $\square$

5.2 Общий случай

По тропической матрице A порядка n можно построить ориентированный граф G на n вершинах. При этом A примитивна тогда и только тогда, когда между любыми двумя вершинами (быть может, одинаковыми), найдется путь длины $n^2 - 2n + 2$ (по теореме Виландта).

6 Цепной ранг тропической матрицы

Определение 6.1. *Прямоугольная тропическая матрица $A = (a_{ik})$ без строк и столбцов, состоящих только из ∞, называется цепной, если для каждой пары ее небесконечных элементов a_{ik} и a_{pq} существует цепочка, имеющая концами эти элементы, то есть последовательность небесконечных элементов $a_{i_1k_1}, a_{i_2k_2}, \dots, a_{i_sk_s}$ такая, что*
a) $i_1 = i, k_1 = k$
b) $i_s = p, k_s = q$
c) $i_l = i_{l+1}$ или $k_l = k_{l+1}, l = 1, 2, \dots, s-1$.

Пусть дана $A \in \mathbb{PT}$ размера $n \times m$. Говорят, что i-ая и j-ая строки пересекаются, если они имеют небесконечные элементы в некотором общем столбце.
Введем бинарное отношение $\pi(A)$ на множестве индексов $\mathbf{n} = \{1, 2, \dots, n\}$, положив, что $(i, j) \in \pi(A)$, если i-я и j-я строки A пересекаются. Обозначим через $\hat{\pi}(A)$ транзитивное замыкание отношения $\pi(A)$; оно является отношением эквивалентности.

Определение 6.2. *Цепным рангом $(n \times m)$-матрицы $A \in \mathbb{PT}$ называется число классов эквивалентности $\hat{\pi}(A)$ на множестве $\mathbf{n}$. Обозначим цепной ранг матрицы A через $crk(A)$.*

Теорема 6.1. *Если для матриц $A, B \in \mathbb{PT}$ существует определение AB, то*

$$crk(AB) \leq min(crk(A), crk(B))$$

Определение 6.3. *По $(n \times m)$-матрице $A \in \mathbb{PT}$ можно построить граф на n вершинах, в котором i-я и j-я вершины соединены ребром, если i-я и j-я строки матрицы A пересекаются. Этот граф называется графом пересечения A.*

Утверждение 6.1. *Граф пересечения матрицы A связен $\Leftrightarrow$ матрица A — цепная.*

Доказательства этих утверждений и теорем есть в [4], но для неотрицательных вещественных матриц. Заметим, что доказательства этих же утверждений для тропических матриц аналогичны. Нужно учесть особенности тропического полукольца: например, по-другому будут выглядеть матрицы перестановок (из нулей и ∞ - нейтральных элементов по сложению и умножению). Также условия $\neq 0$ нужно заменить на условия $\neq \infty$, условие на неотрицательность нужно убрать. При приведении матрицы к блочному виду, по бокам будут стоять ∞, а не 0.

7 Индекс цикличности

Определение 7.1. *Граф G_1 гомоморфен графу G_2, если существует сюръективное отображение $f : V(G_1) \to V(G_2)$ такое, что*

$$\forall (u, v) \in E(G_1) \Rightarrow (f(u), f(v)) \in E(G_2)$$

Определение 7.2. *Графы G_1 и G_2 изоморфны, если существует биекция $\rho : V(G_1) \to V(G_2)$ такая, что*

$$\forall u, v \in G(V_1) \hookrightarrow (u, v) \in E(G_1) \Leftrightarrow (\rho(u), \rho(v)) \in E(G_2)$$

Определение 7.3. *Индекс цикличности (или просто цикличность) ориентированного графа G обозначается через σ_G и определяется следующим образом:*

1. *Если G сильно связен, и $|V(G)| \geq 2$, то цикличность равна НОД всех длин ориентированных циклов в G.*
2. *Если в G есть только одна вершина (с петлей или без), то $\sigma_G = 1$.*
3. *Если G не сильно связен, то его цикличность равна НОК цикличностей всех максимальных его сильно связных подграфов.*

Замечание 7.1. *Цикличность сильно связного графа G - это наибольшее k такое, что G гомоморфен ориентированному циклу из k вершин.*

Определение 7.4. *Пусть $G = (V, E)$ — взвешенный ориентированный граф с матрицей смежности $A = (a_{ij}) \in M_n(\overline{\mathbb{R}})$. Пусть C — это ориентированный цикл в G с весами ребер $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_l}$. Средний вес ребра в C - это тропическое среднее геометрическое весов ребер в C:*

$$w_a(C) = \sqrt[\odot l]{a_{i_1} \odot a_{i_2} \odot \cdots \odot a_{i_l}} = \frac{1}{l}(a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_l})$$

Ориентированный цикл называется критическим, если у него максимальный средний вес. Критический подграф G_C графа G — это объединение всех критических циклов в G.

Определение 7.5. *Пусть $a \in M_n(\overline{\mathbb{R}})$ — матрица смежности графа $G = G(A)$, который содержит хотя бы один ориентированный цикл. Тогда цикличностью A называется цикличность критического подграфа G_C графа G, то есть $\sigma(A) := \sigma_{G_C}$. Если в $G(A)$ нет ориентированных циклов, то $\sigma(A) = 1$.*

8 Скрамблинг индекс

Определение 8.1. *Скрамблинг индекс неориентированного графа G — это наименьшее натуральное число k такое, что для любых $u, w \in V(G)$ существует $w \in V(G)$ такая, что есть путь длины k из u в w и из v в w. Обозначим скрамблинг индекс через $k(G)$. Если не существует таких k, то $k(G) = 0$.*

Определение 8.2. *Графом Виландта называется ориентированный граф на $n \geq 2$ вершинах со множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ и множеством ребер*

$$E = \{(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)\} \cup \{(n-1, n)\}$$

В этом графе есть два цикла длиной $n-1$ и n, следовательно, $\sigma_{W_n} = 1$, он сильно связен. Следовательно, он примитивен.

Теорема 8.1 ([6]). *Пусть G — примитивный ориентированный граф порядка $n \geq 2$. Тогда*

$$exp(G) \leq n^2 - 2n + 1$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $G \cong W_n$.

Замечание 8.1. *Для примитивного ориентированного графа верно неравенство*

$$0 < k(G) \leq exp(G)$$

Это следует из определений скрамблинг индекса и экспоненты.

Теорема 8.2 ([6]). *Обозначим через $\lceil x \rceil$ наименьшее целое число, большее или равное x.*
Если G — примитивный граф с $n \geq 2$ вершинами, то

$$k(G) \leq \left\lceil \frac{(n-1)^2 + 1}{2} \right\rceil$$

При $n \geq 3$ равенство достигается тогда и только тогда, когда $G \cong W_n$. При $n = 2$ равенство достигается тогда и только тогда, когда $G \cong W_2$ или $G \cong J_2$, где J_n — полный ориентированный граф на n вершинах, то есть $E(J_n) = V^2$.

9 Заключение

Во время написания этой работы я ознакомился с основными определениями и понятиями, связанными с тропической алгеброй, матрицами над ней и, следовательно, графами. В дальнейшем я планирую улучшить некоторые оценки, приведенные в [7].

10 Обозначения

1. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ — множество неотрицательных вещественных чисел.
2. $\overline{\mathbb{R}}$ — тропическое полукольцо.
3. $\mathbb{B} = \{\mathbf{0,1}\}$ — множество с сложением, аналогичным дизъюнкции, и умножением, аналогичным конъюнкции.
4. $G(V, E)$ — граф G со множеством вершин V и множеством ребер E
5. $\mathbb{PT}$ — множество прямоугольных тропических матриц без бесконечных строк и столбцов.
6. σ_G — индекс цикличности графа G.
7. $k(G)$ — скрамблинг индекс графа G.
8. $exp(G)$ — экспонента графа (а значит, и его матрицы смежности).

References

[1] Semere Tsehaye Tesfay. *A Glance at Tropical Operations and Tropical Linear Algebra* Eastern Illinois University, 2015.

[2] David Speyer, Bernd Sturmfels. *Tropical Mathematics* Mathematics Magazine, vol. 82, №3, June 2009.

[3] Hans Schneider. *Wielandt's proof of the exponent inequality for primitive nonnegative matrices* Department of Mathematics, University of Wisconsin at Madison, 2002.

[4] Ю.А. Альпин, И.В. Башкин. *Неотрицательные цепные матрицы* Казанский федеральный университет, 2020.

[5] Alexander Guterman, Elena Kreines, and Carsten Thomassen. *Linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index* Special Matrices Volume 9, 2021.

[6] A. E. Guterman, A. M. Maksaev *Upper bounds on scrambling index for non-primitive digraphs* Linear and Multilinear Algebra, 2019

[7] Arthur Kennedy-Cochran-Patrick, Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev *New bounds on the periodicity transient of the powers of a tropical matrix: Using cyclicity and factor rank* Linear Algebra and its Applications, 2020