

# Тропическая линейная алгебра

Никита Шапошник, Б05-024

научный руководитель: А. Э. Гутерман

## 1 Введение

Тропическая математика была придумана бразильским математиком Имре Саймоном (Imre Simon, [1]) в конце XX века (название произошло от его места жительства). Матрицы над тропическим полукольцом имеют приложения в теории графов, оптимизации и биологии. В настоящей работе мы будем рассматривать матрицы над тропическим полукольцом, их связь с графами и некоторые их индексы: экспоненту, скрамблинг индекс, индекс цикличности и границы  $T$ .

## 2 Определения

**Определение 2.1.** Тропическая алгебра  $([2], [3])$  — это множество  $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  с операциями сложения  $\oplus$  и умножения  $\odot$ :

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

$$a \odot b = a + b$$

или множество  $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  с другой операцией сложения и идентичным умножением:

$$a \oplus b = \min(a, b)$$

$$a \odot b = a + b.$$

В дальнейшем мы будем работать с  $\mathbb{R}_{\max}$ .

**Лемма 2.2** (Свойства тропической алгебры, см. [2], [3], [4]). Тропическая алгебра обладает следующими свойствами: для любых  $a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}$  верно:

- Сложение и умножение ассоциативны.
- Сложение и умножение коммутативны.
- Дистрибутивность:  $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$ .
- $-\infty$  — нулевой элемент:  $a \odot -\infty = a$ .
- $0$  — единичный элемент:  $a \oplus 0 = a$ .
- Результат умножения на тропический ноль — это тропический ноль:  $a \odot -\infty = -\infty$ .
- Несуществование обратного по сложению: если  $a \neq -\infty$ , то  $a \oplus b \geq a > -\infty$ .

**Следствие 2.3.** Тропическая алгебра является полукольцом.

**Определение 2.4.** Граф (в рамках данной задачи)  $\mathcal{G}(V, E)$  — совокупность двух множеств — непустого множества  $V = V(\mathcal{G})$  и множества  $E = E(\mathcal{G}) \subseteq V^2$ . Множество  $V$  называется множеством вершин, множество  $E$  называется множеством рёбер.

Если для любого ребра  $(u, v) \in E(\mathcal{G})$  верно, что обратное ребро  $(v, u) \in E(\mathcal{G})$  — тоже лежит в графе, то граф  $\mathcal{G}$  называется неориентированным, в противном случае — ориентированным.

Путь из вершины  $u$  в вершину  $v$  в графе  $\mathcal{G}$  называется последовательность вершин  $u, w_1, w_2, \dots, w_l, v \in V(\mathcal{G})$  и последовательность ребер  $(u, w_1), (w_1, w_2), \dots, (w_l, v) \in E(\mathcal{G})$ , где вершины и ребра могут повторяться. Путь называется простым, если вершины в нём не повторяются. Длиной пути называется количество ребер в нём. Обозначим через  $\mathcal{W}^t(i \rightarrow j)$  множество всех путей из вершины  $i$  в вершину  $j$  длины  $t$ , а через  $\mathcal{W}(i \rightarrow j)$  — множество всех путей из вершины  $i$  в вершину  $j$ .

Граф  $\mathcal{G}(V, E)$  со введенной функцией  $P : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется взвешенным графом. Весом пути называется тропическое произведение (т.е. вещественная сумма) весов всех ребер в пути. Обозначим вес пути  $W$  через  $p(W)$ .

Ориентированный граф называется сильно связным, если для любых  $u, v \in V(\mathcal{G})$  существует путь из  $u$  в  $v$  и из  $v$  в  $u$ .

Граф  $\mathcal{G}'$  называется подграфом графа  $\mathcal{G}$ , если  $\mathcal{G}'$  получен из  $\mathcal{G}$  удалением некоторых ребер и, возможно, вершин. Иначе,  $V(\mathcal{G}') \subseteq V(\mathcal{G})$  и  $E(\mathcal{G}') \subseteq E(\mathcal{G})$ .

Обхватом графа  $\mathcal{G}$  называется наименьшая длина цикла в  $\mathcal{G}$  и обозначается как  $g(\mathcal{G})$ . Через  $\hat{g}(\mathcal{G})$  обозначается максимальный обхват среди всех компонент сильной связности графа  $\mathcal{G}$ .

Окружностью графа  $\mathcal{G}$  называется наибольшая длина цикла в  $\mathcal{G}$  и обозначается как  $cr(\mathcal{G})$ .

Максимальную длину простого пути в графе  $\mathcal{G}$  будем обозначать через  $cb(\mathcal{G})$ .

Граф  $\mathcal{H}(U, F)$  называется индуцированным подграфом графа  $\mathcal{G}(V, E)$ , порожденным подмножеством вершин  $U \subset V$ , если ребрами  $\mathcal{H}$  являются те и только те ребра множества  $E$ , оба конца которых принадлежат  $U$ .

### 3 Примитивность вещественной неотрицательной матрицы

**Определение 3.1.** Вещественная матрица  $A$  называется примитивной, если существует натуральное число  $m$  такое, что  $A^m$  положительна, то есть все числа в ней положительны. При этом наименьшее такое  $m$  называется экспонентой матрицы и обозначается через  $exp(A)$ .

**Теорема 3.2** (Критерий примитивности матрицы, см.[12]). Неотрицательная квадратная матрица порядка  $n$  над  $\mathbb{R}$  примитивна тогда и только тогда, когда граф смежности этой матрицы сильно связан и НОК всех длин замкнутых путей (циклов) равно 1.

**Теорема 3.3** (Виландта, [5]). Если неотрицательная квадратная матрица порядка  $n$  над полем вещественных чисел примитивна, то ее экспонента не превосходит число Виландта  $Wi(n) = n^2 - 2n + 2$ .

### 4 Примитивность тропических матриц

**Замечание 4.1.** Примитивность и экспонента тропической матрицы определяется так же, как и в вещественном случае, с отличием лишь в том, что в степени матрицы не должно быть нулей тропического полукольца, т.е.  $-\infty$ .

## 4.1 Матрицы $2 \times 2$

**Утверждение 4.2.** Матрица  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  над тропическим полукольцом примитивна тогда и только тогда, когда  $b \neq -\infty \wedge c \neq -\infty \wedge (a \neq -\infty \vee d \neq -\infty)$ ; причем ее экспонента равна 2.

**Доказательство.** Если перемножить матрицы, у которых в правом верхнем углу стоят  $-\infty$ , то у результата будет стоять  $-\infty$  в том же углу:

$$\begin{pmatrix} a & -\infty \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & -\infty \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & a \odot -\infty \oplus -\infty \odot d' \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & -\infty \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Аналогично с левым нижним углом. Значит, в правом верхнем и в левом нижнем углах не могут стоять  $-\infty$ .

Перемножим 2 матрицы, у которых на главной диагонали стоят  $-\infty$ :

$$\begin{pmatrix} -\infty & b \\ c & -\infty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\infty & b' \\ c' & -\infty \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \dots & -\infty \odot b' \oplus b \odot -\infty \\ c \odot -\infty \oplus -\infty \odot c' & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & -\infty \\ -\infty & \dots \end{pmatrix}$$

У результата стоят  $\infty$  на побочной диагонали. Перемножим такую матрицу с матрицей с  $\infty$  на главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} a & -\infty \\ -\infty & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\infty & b \\ c & -\infty \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a \odot -\infty \oplus -\infty \odot c & \dots \\ \dots & -\infty \odot b \oplus -\infty \odot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\infty & \dots \\ \dots & -\infty \end{pmatrix}$$

Снова получилась матрица с  $-\infty$  на главной диагонали. Значит, в любой степени матрицы с  $-\infty$  на главной диагонали будут  $-\infty$ . Значит, она не может быть примитивной.

Проверим, что матрица с описанными выше ограничениями будет примитивной:

$$A^{\odot 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\odot 2} = \begin{pmatrix} a \odot a \oplus b \odot c & a \odot b \oplus b \odot d \\ a \odot c \oplus c \odot d & b \odot c \oplus d \odot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(2a, b+c) & b + \max(a, d) \\ c + \max(a, d) & \max(b+c, 2d) \end{pmatrix}$$

Равным  $-\infty$  в этой матрице может быть или  $a$ , или  $d$ , или никто из них. В любом случае, в квадрате не будет  $-\infty$ . Значит,  $A$  является примитивной с показателем степени 2.  $\square$

## 4.2 Обобщение теоремы Виландта на тропические матрицы

**Определение 4.3.**  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$  — множество с сложением, аналогичным дизъюнкции, и умножением, аналогичным конъюнкции:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

**Замечание 4.4.** Примитивность и экспонента матрицы над  $\mathbb{B}$  определяется так же, как и в вещественном случае.

**Теорема 4.5** (Виландта для матриц над  $\mathbb{B}$ ). Если матрица  $A \in M_n(\mathbb{B})$  примитивна, то ее экспонента не превосходит  $n^2 - 2n + 2$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $\beta' : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{B}$  такую, что

$$\beta'(t) = \begin{cases} \mathbf{1}, t \neq 0 \\ \mathbf{0}, t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

и функцию  $B' : M_n(\mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow M_n(\mathbb{B})$ , действующая функцией  $\beta'$  поэлементно:

$$B' : A = (a_{ij}) \mapsto B'(A) = (\beta'(a_{ij})) \quad (2)$$

**Лемма 4.6.**  $B'$  — гомоморфизм.

**Доказательство леммы.** Необходимо доказать, что

$$B'(X) + B'(Y) = B'(X + Y) \text{ и } B'(X) \cdot B'(Y) = B'(X \cdot Y) \quad (3)$$

Первое верно, так как для любых  $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  верно, что  $\beta'(x) + \beta'(y) = \beta'(x + y)$ .

Докажем, что  $B'$  сохраняет умножение: рассмотрим элемент с индексами  $i, j$ :

$$\begin{aligned} (B'(X) \cdot B'(Y))_{ij} &= \sum_{s=1}^n B'(X)_{is} \cdot B'(Y)_{sj} = \sum_{s=1}^n \beta'(X_{is}) \cdot \beta'(Y_{sj}) = \\ &= \sum_{s=1}^n \beta'(X_{is} \cdot Y_{sj}) = \beta'(\sum_{s=1}^n X_{is} \cdot Y_{sj}) = \beta'((X \cdot Y)_{ij}) = (B'(X \cdot Y))_{ij} \end{aligned} \quad (4)$$

Значит,  $B'$  — гомоморфизм.  $\square$

Рассмотрим матрицу  $A'$ , лежащую в прообразе матрицы  $A$  при отображении  $B'$  (для этого достаточно взять матрицу  $A$  как матрицу над  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ).

Заметим, что для любого  $m$  положения нулей в матрице  $(A')^m$  и нулей в  $B'((A')^m) = (B'(A'))^m = A^m$  совпадают, в том числе и для  $m = \exp(A')$ . Из этого следует, что  $\exp(A) = \exp(A') \leq Wi(n)$  по теореме Виландта для матриц над  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Следовательно, теорема Виландта верна и для  $\mathbb{B}$ -матриц.  $\square$

**Теорема 4.7** (Виландта для тропических матриц). *Если матрица  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$  примитивна, то ее экспонента не превосходит  $Wi(n)$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $\beta : \mathbb{R}_{\max} \rightarrow \mathbb{B}$  такую, что

$$\beta(t) = \begin{cases} \mathbf{1}, t \neq -\infty \\ \mathbf{0}, t = -\infty \end{cases} \quad (5)$$

и функцию  $B : M_n(\mathbb{R}_{\max}) \rightarrow M_n(\mathbb{B})$ , действующая функцией  $\beta$  поэлементно:

$$B : A = (a_{ij}) \mapsto B(A) = (\beta(a_{ij})) \quad (6)$$

**Лемма 4.8.**  $B$  — гомоморфизм.

**Доказательство леммы.** Надо доказать, что

$$B(X) + B(Y) = B(X \oplus Y) \text{ и } B(X) \cdot B(Y) = B(X \odot Y) \quad (7)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 4.6, но с заменой  $\beta'$  на  $\beta$ ,  $B'$  на  $B$  и  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  на  $\mathbb{R}_{\max}$ .  $\square$

Рассмотрим  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$  и её образ при отображении  $B$ . Для любого  $m$  положения бесконечных элементов в матрице  $A^m$  и нулей в  $B(A^m) = (B(A))^m$  совпадают, в том числе и для  $m = \exp(B(A))$ .

Из этого следует, что  $\exp(A) = \exp(B(A)) \leq Wi(n)$  по теореме Виландта для матриц над  $\mathbb{B}$ , что доказывает теорему Виландта для тропических матриц.  $\square$

## 5 Примитивность тропических матриц и графы

**Определение 5.1.** Матрица  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$  называется матрицей смежности графа  $\mathcal{G}$ , если в  $\mathcal{G}$   $n$  вершин и в ячейке с индексами  $i$  и  $j$  матрицы  $A$  стоит:

- 1)  $-\infty$  тогда и только тогда, когда вершины с номерами  $i$  и  $j$  не соединены ребром;
- 2) число  $x \in \mathbb{R}$  тогда и только тогда, когда между вершинами с номерами  $i$  и  $j$  есть ребро веса  $x$ . Если граф не взвешенный, то в матрице стоит  $x = 0$ .

Заметим, что есть и обратное соответствие: по матрице смежности можно восстановить граф. Обозначим через  $\mathcal{G}(A)$  граф, соответствующий тропической матрице  $A$ .

Степени тропических матриц интересны по многим причинам, в том числе по следующей:

**Утверждение 5.2.** Рассмотрим  $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ ,  $i, j \in V(\mathcal{G}(A))$ ,  $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Тогда:

$$a_{ij}^t = \bigoplus \{p(W) : W \in \mathcal{W}^t(i \rightarrow j)\}$$

**Доказательство.** Докажем это по индукции. База, очевидно, верна для  $t = 0$ : в этом случае  $A^t = I$  — единичная тропическая матрица, на главной диагонали которой стоят тропические единицы, т.е. 0, а на остальных местах стоят тропические нули, т.е.  $-\infty$ .

Докажем переход: пусть утверждение верно для  $t$ , докажем для  $t + 1$ .

$$a_{ij}^{t+1} = \bigoplus_{k=1}^k a_{ik}^t \odot a_{kj} = \max_k a_{ik}^t + a_{kj}$$

Заметим, что любой путь из вершины  $i$  в вершину  $j$  длины  $t + 1$  есть конкатенация пути из вершины  $i$  в вершину  $k$  длины  $t$  и ребра из  $k$  в  $j$  для какой-то вершины  $k$ , а вес этого пути — это сумма веса первого пути и веса последнего ребра. Из всех возможных путей оптимальным будет путь с максимальным общим весом, что согласуется с определением тропического перемножения матриц.  $\square$

### 5.1 Матрицы $2 \times 2$

**Утверждение 5.3.** Матрица  $A \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$  примитивна тогда и только тогда, когда в графе  $\mathcal{G}(A)$  для любых двух вершин между ними есть путь длины ровно 2.

**Доказательство.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Если  $a_{12} = -\infty$ , то не будет существовать пути из первой вершины во вторую. Если  $a_{21} = -\infty$ , то не будет существовать пути из второй вершины в первую. Если предыдущие два условия не выполняются, но  $a_{11} = a_{22} = -\infty$ , то не будет существовать пути из первой вершины во вторую и из второй в первую. В этих случаях матрица  $A$  не будет примитивной.

Если все вышеперечисленные условия не выполняются, то матрица будет примитивной, что подтверждает доказанный ранее путем перемножения матриц факт.  $\square$

### 5.2 Общий случай

**Утверждение 5.4.** Матрица  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$  примитивна тогда и только тогда, когда в графе  $\mathcal{G}(A)$  между любыми двумя вершинами найдётся путь длины ровно  $Wi(n)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим матрицу  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$  и соответствующий ей граф  $\mathcal{G}(A)$ . Примитивность  $A$  равносильна отсутствию в матрице  $A^{Wi(n)}$  бесконечных элементов (так как по теореме Виландта  $\exp(A) \leq Wi(n)$ ). Последнее утверждение равносильно тому, что в графе  $\mathcal{G}(A)$  между любыми двумя вершинами найдётся путь длины ровно  $\exp(A)$ .  $\square$

## 6 Индекс цикличности

**Определение 6.1.** Граф  $\mathcal{G}_1$  гомоморфен графу  $\mathcal{G}_2$ , если существует сюръективное отображение  $f : V(\mathcal{G}_1) \rightarrow V(\mathcal{G}_2)$  такое, что для любого ребра  $(u, v) \in E(\mathcal{G}_1)$  верно, что  $(f(u), f(v)) \in E(\mathcal{G}_2)$ .

**Определение 6.2.** Графы  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$  изоморфны, если существует биекция  $\rho : V(\mathcal{G}_1) \rightarrow V(\mathcal{G}_2)$  такая, что для любых  $u, v \in V(\mathcal{G}_1)$  верно, что  $(u, v) \in E(\mathcal{G}_1)$  выполняется тогда и только тогда, когда  $(\rho(u), \rho(v)) \in E(\mathcal{G}_2)$ .

**Определение 6.3.** Индекс цикличности (или просто цикличность) ориентированного графа  $\mathcal{G}$  обозначается через  $\sigma_{\mathcal{G}}$  и определяется следующим образом:

1. Если  $\mathcal{G}$  сильно связан, и  $|V(\mathcal{G})| \geq 2$ , то цикличность равна НОД всех длин ориентированных циклов в  $\mathcal{G}$ .
2. Если в  $\mathcal{G}$  есть только одна вершина (с петлей или без), то  $\sigma_{\mathcal{G}} = 1$ .
3. Если  $\mathcal{G}$  не сильно связан, то его цикличность равна НОК цикличностей всех максимальных его сильно связных подграфов.

**Замечание 6.4** (Переформулировка критерия примитивности, см.[12]). Тропическая матрица  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$  примитивна тогда и только тогда, когда  $\mathcal{G}(A)$  сильно связан и его индекс цикличности равен 1.

**Замечание 6.5.** Цикличность сильно связанного графа  $\mathcal{G}$  — это наибольшее  $k$  такое, что  $\mathcal{G}$  гомоморфен ориентированному циклу из  $k$  вершин.

Заметим, что в сильно связанном графе  $\mathcal{G}$  с цикличностью  $\gamma$  любые 2 пути, соединяющий 2 фиксированные вершины, имеют одинаковые длины по модулю  $\gamma$ . Из этого следует, что на множестве  $V(\mathcal{G})$  можно ввести отношение эквивалентности: 2 вершины лежат в одном классе эквивалентности тогда и только тогда, когда длина пути от одной к другой кратна  $\gamma$ .

**Определение 6.6.** Эти классы эквивалентности называются циклическими классами.

Пусть  $\mathcal{G} = (V, E)$  — взвешенный ориентированный граф с матрицей смежности  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ . Пусть  $C$  — это ориентированный цикл в  $\mathcal{G}$  с весами ребер  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_l}$ . Средний вес ребра в  $C$  — это тропическое среднее геометрическое весов ребер в  $C$ :

$$w_a(C) = \sqrt[l]{a_{i_1} \odot a_{i_2} \odot \dots \odot a_{i_l}} = \frac{1}{l}(a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_l})$$

**Определение 6.7.** Ориентированный цикл называется критическим, если у него максимальный средний вес. Критический подграф  $\mathcal{G}^c$  графа  $\mathcal{G}$  — это объединение всех критических циклов в  $\mathcal{G}$ .

Пусть  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$  — матрица смежности графа  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$ , который содержит хотя бы один ориентированный цикл.

**Определение 6.8.** Цикличностью  $A$  называется цикличность критического подграфа  $\mathcal{G}^c$  графа  $\mathcal{G}$ , то есть  $\sigma(A) := \sigma_{\mathcal{G}^c}$ . Если в  $\mathcal{G}(A)$  нет ориентированных циклов, то  $\sigma(A) = 1$ .

## 7 Скрамблинг индекс

**Определение 7.1.** Скрамблинг индекс ориентированного графа  $\mathcal{G}$  — это наименьшее натуральное число  $k$  такое, что для любых  $u, v \in V(\mathcal{G})$  существует  $w \in V(\mathcal{G})$  такая, что есть путь длины  $k$  из  $u$  в  $w$  и из  $v$  в  $w$ . Обозначим скрамблинг индекс через  $k(\mathcal{G})$ . Если не существует таких  $k$ , то  $k(\mathcal{G}) = 0$ .

**Определение 7.2.** Графом Виландта называется ориентированный граф на  $n \geq 2$  вершинах со множеством вершин  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  и множеством ребер

$$E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\} \cup \{(n-1, 1)\}$$

В этом графе есть два цикла длиной  $n-1$  и  $n$ , следовательно,  $\sigma_{W_n} = 1$ , он сильно связан. Следовательно, он примитивен.

**Теорема 7.3** ([8]). Пусть  $\mathcal{G}$  — примитивный ориентированный граф порядка  $n \geq 2$ . Тогда

$$\exp(\mathcal{G}) \leq n^2 - 2n + 1$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\mathcal{G} \cong W_n$ .

**Замечание 7.4** ([8]). Для примитивного ориентированного графа верно неравенство

$$0 < k(\mathcal{G}) \leq \exp(\mathcal{G})$$

Это следует из определений скрамблинг индекса и экспоненты.

**Определение 7.5.** Будем называть подграф  $\mathcal{H}$  графа  $\mathcal{G}$  достижимым, если для любой вершины  $v$  из  $\mathcal{G}$  существует путь из  $v$  в какую-либо вершину из  $\mathcal{H}$ .

**Теорема 7.6** ([8], критерий положительности скрамблинг-индекса). Рассмотрим произвольный ориентированный граф  $\mathcal{G}$ . Его скрамблинг-индекс положителен тогда и только тогда, когда в  $\mathcal{G}$  есть примитивный достижимый подграф.

**Теорема 7.7** ([8]). Обозначим через  $\lceil x \rceil$  наименьшее целое число, большее или равное  $x$ . Если  $\mathcal{G}$  — примитивный граф с  $n \geq 2$  вершинами, то

$$k(\mathcal{G}) \leq \left\lceil \frac{Wi(n)}{2} \right\rceil$$

При  $n \geq 3$  равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\mathcal{G} \cong W_n$ . При  $n = 2$  равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\mathcal{G} \cong W_2$  или  $\mathcal{G} \cong J_2$ , где  $J_n$  — полный ориентированный граф на  $n$  вершинах, то есть  $E(J_n) = V^2$ .

## 8 CSR-декомпозиция и слабое CSR-расширение

### 8.1 Необходимые определения

**Определение 8.1.** Назовем тропическую матрицу  $A$  (или соответствующий ей граф) неразложимой, если граф  $\mathcal{G}(A)$  сильно связан, иначе — разложимой.

Назовем тропическую матрицу  $A$  (или соответствующий ей граф) полностью разложимой, если в графе  $\mathcal{G}(A)$  нет ребер между различными компонентами сильной связности.

Рассмотрим тропическую матрицу  $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ . Обозначим максимальный средний вес цикла в  $\mathcal{G}(A)$  через  $\lambda(A)$ , т.е.

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \bigoplus_{k=1}^d \bigoplus_{i_1, \dots, i_k} (a_{i_1 i_2} \odot \dots \odot a_{i_{k-1} i_k})^{\odot 1/k} = \\ &= \max_{k=1}^d \max_{i_1, \dots, i_k} \frac{(a_{i_1 i_2} + \dots + a_{i_{k-1} i_k})}{k}\end{aligned}\tag{8}$$

Необходимо сказать, что критический подграф  $\mathcal{G}^c(A)$  является полностью разложимым и средний вес любого цикла в нём равен  $\lambda(A)$ .

**Определение 8.2.** Для  $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$  с  $\lambda(A) \leq 0$  звездой Клини называется следующая матрица:

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i = \bigoplus_{i=0}^{d-1} A^i$$

В матрице  $A^*$  в ячейке под номером  $i$  и  $j$  лежит длина оптимального пути от вершины  $i$  к вершине  $j$  по всему графу, без ограничения на длину пути. Условие  $\lambda(A) \leq 0$  необходимо, так как иначе этот ряд расходится: можно идти по циклу с положительным средним весом и улучшать ответ. Так как дважды проходить через одну и ту же вершину не имеет смысла, можно ограничиться первыми  $d$  матрицами.

## 8.2 Матрицы CSR

Рассмотрим неразложимую  $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$  и некоторый подграф  $\mathcal{G}$  критического подграфа  $\mathcal{G}^c(A)$  без тривиальных компонент сильной связности. Введем обозначения:  $\sigma = \sigma(\mathcal{G})$  – индекс цикличности  $\mathcal{G}$ ,  $M = ((\lambda(A)^- \odot A^\sigma)^*)$ . Здесь и далее для  $a \in \mathbb{R}_{\max}$ ,  $a \neq -\infty$  через  $a^-$  будем обозначать обратное по умножению к  $a$ , т.е.  $a^- = -a$ .

Определим матрицы  $C, S, R \in M_r(\mathbb{R}_{\max})$  следующим образом:

$$\begin{aligned}c_{ij} &= \begin{cases} m_{ij}, & \text{если } j \in V(\mathcal{G}) \\ -\infty, & \text{иначе,} \end{cases} & r_{ij} &= \begin{cases} m_{ij}, & \text{если } i \in V(\mathcal{G}) \\ -\infty, & \text{иначе,} \end{cases} \\ s_{ij} &= \begin{cases} \lambda(A)^- \odot a_{ij}, & \text{если } (i, j) \in E(\mathcal{G}) \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}\end{aligned}$$

Если матрицы  $C, S, R$  определены через матрицу  $A$ , будем писать  $CS^t R[A]$  для произвольного  $t$ .

**Теорема 8.3** ([9], [10]). Пусть  $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$  неразложима и CSR-матрицы определены через некоторый подграф  $\mathcal{G}$  графа  $\mathcal{G}(A)$ . Тогда существует неотрицательное целое  $T(A)$  такое, что для любого  $t \geq T(A)$ :

$$A^t = \lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A].\tag{9}$$

Заметим, что если  $\lambda(A) = 0$ , то (9) записывается в виде:

$$A^t = CS^t R[A].\tag{10}$$

В добавок к  $T(A)$ , введем ещё 2 функции:  $T_1(A, B)$  и  $T_2(A, B)$ . Для этого зафиксируем тот же подграф  $\mathcal{G}$  и введем новую матрицу  $B \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ :

$$b_{ij} = \begin{cases} -\infty, & \text{если } i \in V(\mathcal{G}) \text{ или } j \in V(\mathcal{G}), \\ a_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$$



**Теорема 8.4** ([9], [10]). Пусть  $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$  неразложима и  $CSR$ -матрицы определены через некоторый подграф  $\mathcal{G}$  графа  $\mathcal{G}(A)$ .

(Определение  $T_1(A, B)$ ): существует неотрицательное целое  $T_1(A, B)$  такое, что для любого  $t \geq T_1(A, B)$  верно следующее:

$$A^t = (\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A]) \oplus B^t. \quad (11)$$

(Определение  $T_2(A, B)$ ): существует неотрицательное целое  $T_2(A, B)$  такое, что для любого  $t \geq T_2(A, B)$  верно следующее:

$$\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A] \geq B^t. \quad (12)$$

Заметим, что если  $\lambda(A) = 0$ , то (11) записывается в виде:

$$A^t = CS^t R[A] \oplus B^t, \quad (13)$$

а 12 записывается в виде

$$CS^t R[A] \geq B^t. \quad (14)$$

Есть несколько способов выбрать подграф  $\mathcal{G}$ , но в этой работе мы будем работать со способом Нахтигалля, в котором этот подграф совпадает с критическим подграфом исходного графа:  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^c(A)$ . В дальнейшем, чтобы указать, что матрица была выбрана с помощью способа Нахтигалля, будем писать  $B_N$  вместо  $B$  и  $T_{1,N}(A)$  вместо  $T_1(A, B_N)$ .

**Утверждение 8.5.**  $T(A) \leq \max(T_1(A, B), T_2(A, B))$ .

*Доказательство.* Возьмем  $t \geq \max(T_1(A, B), T_2(A, B))$ , для него выполняются условия (11) и (12). Из (12) следует, что операция тропического сложения с  $B^t$  в (11) бессмысленна, откуда для данного  $t$  следует (9).  $\square$

**Замечание 8.6.** Заметим, что если  $B = -\infty$ , то  $T(A) = T_1(A, B)$ , а  $T_2(A, B) = 0$ .

**Замечание 8.7** (Инвариантность относительно умножения на скаляр). Если  $A' = A \odot \mu$ , где  $\mu \in \mathbb{R}$ , то

- $\lambda(A') = \lambda(A) \odot \mu$ ,  $B_N[A'] = B_N[A]$
- $CSR[A'] = CSR[A]$

Значит,  $T_1(A, B)$ ,  $T_2(A, B)$  инвариантны относительно умножения матрицы на скаляр, что позволяет нам без разграничения общности говорить, что  $\lambda(A) = 0$ .

**Утверждение 8.8** (см. [9]). Пусть  $\lambda(A) = 0$ . Тогда  $A^t \geq CS^t R[A]$  тогда и только тогда, когда  $t \geq T_{1,N}(A)$ .

Это утверждение позволяет искать  $T_{1,N}$ : достаточно найти наименьшее  $t$ , для которого верно  $A^t \geq CS^t R[A]$ . Тогда  $T_{1,N} = t$ . Если, вдобавок,  $B = -\infty$ , то  $T = t$  по замечанию 8.6.

**Утверждение 8.9** (Периодичность, см. [11]). Для любого  $t \geq 0$  верно, что  $CS^{t+\sigma} R[A] = CS^t R[A]$ , где  $\sigma$  — это цикличность  $\mathcal{G}^c(A)$ . Иначе говоря, последовательность матриц  $\{CS^t R[A]\}_{t \geq 0}$  периодична с периодом  $\sigma$ .

Значит, в силу равенства  $A^t = CS^t R$  при  $t \geq T(A)$ , последовательность матриц  $A^t$  при  $t \geq T(A)$  является периодической с периодом  $\sigma$ .

Введем несколько новых обозначений:

1. Через  $\mathcal{W}^{t,l}(i \rightarrow j)$  обозначим множество путей от вершины  $i$  к вершине  $j$ , имеющих длину  $t$  по модулю  $l$ ;
2. Через  $\mathcal{W}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$  обозначим множество путей от вершины  $i$  к вершине  $j$ , проходящих хотя бы через одну вершину из  $\mathcal{G}$ . Аналогично определяются  $\mathcal{W}^t(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ ,  $\mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$  — граф над стрелкой добавляет ограничение на пути в множестве.
3. Для множества  $\mathcal{W}$  через  $p(\mathcal{W})$  обозначим максимальный вес пути из множества  $\mathcal{W}$ .

**Утверждение 8.10** ([10]). Если  $\lambda(A) = 0$ , то верно следующее тождество:

$$(CS^tR[A])_{ij} = p(\mathcal{W}^{t,\sigma}(i \xrightarrow{\mathcal{G}^c(A)} j)), \quad (15)$$

где  $\sigma$  обозначает цикличность  $\mathcal{G}^c(A)$ .

**Теорема 8.11** (Некоторые оценки  $T_{1,N}(A)$ , см. [10]). Для любой  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$  имеем:

1.  $T_{1,N}(A) \leq Wi(n)$ ;
2.  $T_{1,N}(A) \leq \hat{g}(n-2) + n$ ;
3.  $T_{1,N}(A) \leq (\hat{g}-1)(cr-1) + (\hat{g}+1)cd$ ,

где  $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$ ,  $cr = cr(\mathcal{G}(A))$ , а  $cd = cd(\mathcal{G}(A))$ .

## 9 Примеры

Оценим  $T, T_1$  и  $T_2$  для некоторых графов.

### 9.1 Полный граф

Рассмотрим матрицу  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ ,  $a_{ij} = 0$  для любых индексов  $i, j$ . Граф  $\mathcal{G}(A)$  является полным, веса всех ребер в нём равны 0. Значит, критический подграф  $\mathcal{G}^c$  совпадает со всем графом  $\mathcal{G}$ . Из этого следует, что матрица  $B = -\infty$  и  $T_2 = 0$ .

Найдем матрицы  $C, S, R$ . Индекс цикличности полного графа  $\sigma = 1$  (т.к. в нём есть циклы длины 1), следовательно  $C = R = M = A^*$ ,  $S = A$ .

Так как для любого положительного  $t$  верно, что  $A^t = A$ , то  $A^* = A$  и равенство  $A^*A^tA^* = A^t$  выполняется для любого положительного  $t$ .

Следовательно,  $T = T_1 = 1$ .

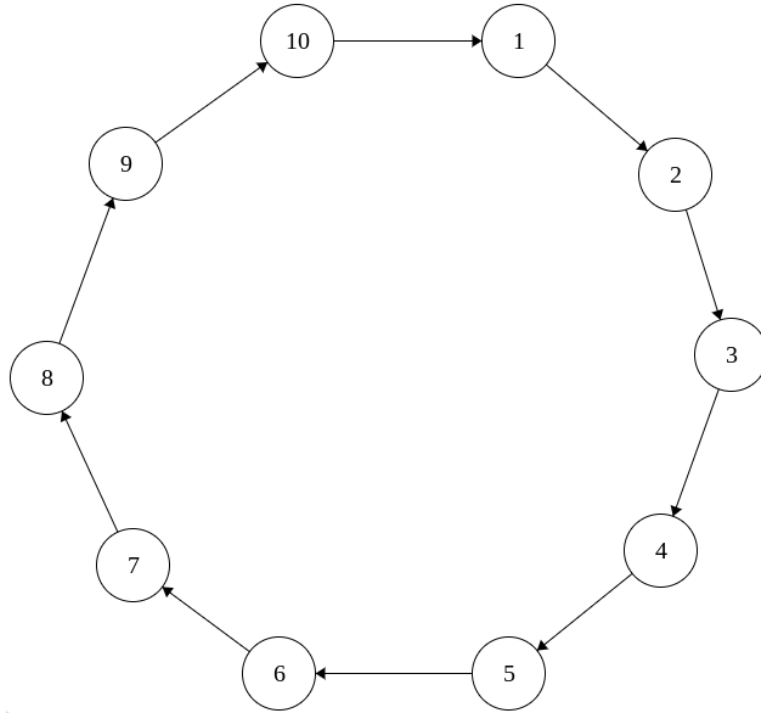
### 9.2 Односторонний цикл

Рассмотрим матрицу смежности  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$  одностороннего цикла на  $n$  вершинах.

В силу инвариантности границ относительно домножения на скаляр из  $\mathbb{R}$  (замечание 8.7), можно рассматривать только тот случай, в котором  $\lambda(A) = 0$ . Тогда  $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A)$ ,  $\sigma = n$ .

$$M = (A^n)^* = E^* = E = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & 0 & \dots & -\infty \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\infty & -\infty & \dots & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(0, 0, \dots, 0)$$

Значит,  $C = R = E$ ,  $S = A$ ,  $B = -\infty$ , и для любого неотрицательного  $t$  верно  $CS^tR[A] = A^t$ . Следовательно,  $T = T_1 = T_2 = 0$ .



### 9.3 Двусторонний цикл

Рассмотрим матрицу смежности  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$  двустороннего цикла на  $n$  вершинах. Пронумеруем вершины так, чтобы первый цикл состоял из вершин  $1, 2, \dots, n$  (в порядке обхода), а второй — из  $n, n-1, \dots, 1$  (в порядке обхода). Чтобы избежать кратных рёбер, будем работать с  $n \geq 3$ .

Будем считать, что  $\lambda(A) = 0$ . Рассмотрим случай, в котором циклы по часовой стрелке и против часовой стрелки имеют одинаковый средний вес, равный нулю. Значит, критический подграф  $\mathcal{G}^c(A)$  совпадает со всем графом  $\mathcal{G}(A)$ .

**Лемма 9.1.** *Все циклы в таком графе имеют средний вес 0.*

**Доказательство.** Пусть вес пути по часовой стрелке от вершины  $i$  до вершины  $j$  равен  $x$ , а против часовой стрелки —  $y$ . Эти два пути образуют цикл, значит  $x + y \leq 0$ . Докажем, что  $x + y = 0$ .

Дополнение к большому циклу по часовой стрелке первого пути весит  $-x$ , а дополнение к большому циклу против часовой стрелки весит  $-y$ . Так как можно сначала пойти по дополнению к первому пути, а потом — по дополнению ко второму пути, эти два дополнения тоже образуют цикл. Значит,  $(-x) + (-y) \leq 0$ . Значит,  $x + y \geq 0$ .

Следовательно,  $x + y = 0$ . □

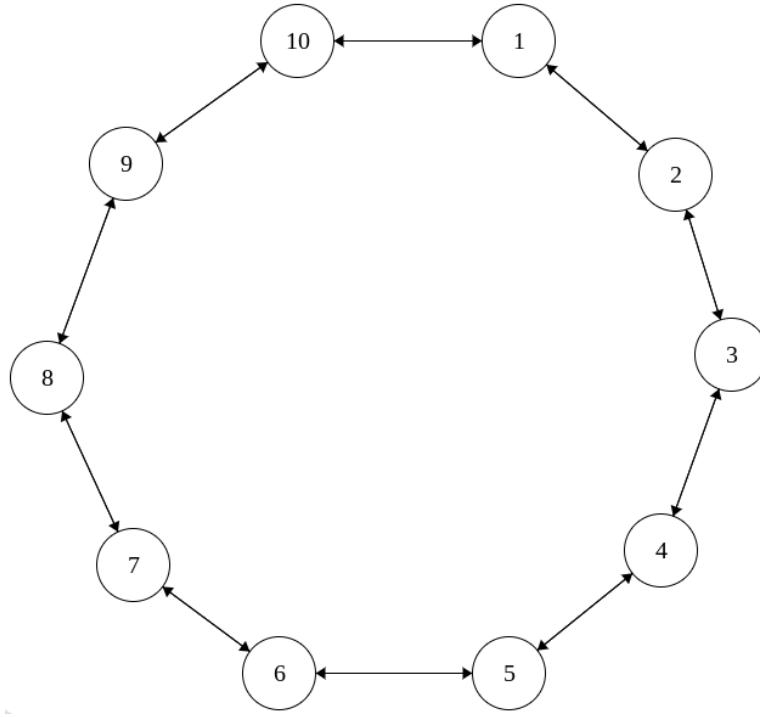
**Следствие 9.2.** *Для фиксированных вершины  $i$  и  $j$  все пути от  $i$  до  $j$  весят одинаково.*

Это верно, так как, в терминах леммы,  $x = -y$ . Не важно, какой путь выбрать от одной вершины к другой: по или против часовой стрелки — вес будет одинаковый. Если пройти по большому циклу, то вес не изменится, так как суммарный вес большого цикла равен 0.

Необходимо рассмотреть 2 случая: когда  $n$  нечётно и когда  $n$  чётно.

**$n$  нечётно.** В этом случае цикличность критического графа  $\sigma = 1$ .

Следовательно,  $C = R = M = A^*$ , а  $S = A$ . Заметим, что в матрице  $CS^tR[A]$  нет  $-\infty$  (так как  $CS^tR[A] = A^*A^tA^*$ , а в  $A^*$  нет  $-\infty$ ). Значит, по следствию из леммы,  $CS^tR[A] = A^*$ .



Значит, условие  $CS^tR[A] = A^t$  верно тогда и только тогда, когда  $A^t = A^*$ . Поэтому  $T = \exp(\mathcal{G})$ .

**Утверждение 9.3.** Экспонента данного графа равна  $n - 1$ .

*Доказательство.* Заметим, что в  $A^{n-2}$  на главной диагонали стоят  $-\infty$ :  $n - 2$  нечётно, поэтому, чтобы вернуться в исходную вершину за  $n - 2$  шага, надо сменить чётность — пройти весь круг, так как остальные циклы имеют чётную длину. Но цикл имеет длину  $n$ , поэтому его пройти не получится. Значит,  $\exp(\mathcal{G}) \geq n - 1$ .

Покажем, что  $A^{n-1} > -\infty$ .

Зафиксируем произвольную вершину  $v$  графа. Назовем вершину *четной*, если до нее можно дойти из  $v$  за чётное число шагов. Заметим, что тогда все вершины графа четные, так как  $n$  нечетно и идти можно как по, так и против часовой стрелки. Наибольшая длина такого пути равна  $n - 1$ . Значит,  $A^{n-1} > -\infty$ .  $\square$

**Следствие 9.4.**  $T_2 = 0$ , так как  $B = -\infty$ .  $T = T_1 = \exp(\mathcal{G}) = n - 1$ .

**Утверждение 9.5.** Скрамблинг-индекс этого графа равен  $\frac{n-1}{2}$ .

*Доказательство.* Пусть  $k = k(\mathcal{G})$  — скрамблинг-индекс данного графа, т. е. для любых двух вершин  $u$  и  $v$  существуют вершина  $w$  такая, что существуют пути из  $u$  в  $w$  и из  $v$  в  $w$  длины  $k$ . В силу неориентированности этого графа это условие равносильно следующему: для любых вершин  $u$  и  $v$  существует путь из  $u$  в  $v$  длины  $2k$ .

Заметим, что для соседних вершин минимальная четная длина пути, соединяющего их, равна  $n - 1$ , так как  $n$  нечетно. Значит,  $k \geq \frac{n-1}{2}$ .

Рассмотрим произвольные вершины  $i$  и  $j$ . Пусть два простых пути между ними имеют длину  $x$  и  $n - x$ . Так как  $x + (n - x) = n$  — нечетное число, то среди этих двух путей найдется ровно один с четной длиной. Его длина не превышает  $n - 1$  — наибольшее четное число, не превосходящее  $n$ . Значит,  $k \leq \frac{n-1}{2}$ .

Следовательно,  $k(\mathcal{G}) = \frac{n-1}{2}$ .  $\square$

**$n$  четно.** В этом случае  $\sigma = 2$  и граф не примитивен.  $C = R = M = (A^2)^*$ ,  $S = A$ .

Так как последовательность матриц  $CS^tR$  периодична с периодом  $\sigma = 2$  (см. [10]), то при  $t \geq T(A)$

$$A^t = CS^tR = \begin{cases} (A^2)^*, & \text{если } t \text{ четно.} \\ A \odot (A^2)^*, & \text{если } t \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В матрице  $(A^2)^*$  небесконечные элементы стоят в клетках  $(i, j)$ , если вершины  $i$  и  $j$  находятся на четном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с одинаковой четностью равно  $\frac{n}{2}$ . Значит, условие при четном  $t$  выполняется при  $t \geq \frac{n}{2}$ , а при прочих  $t$  не выполняется.

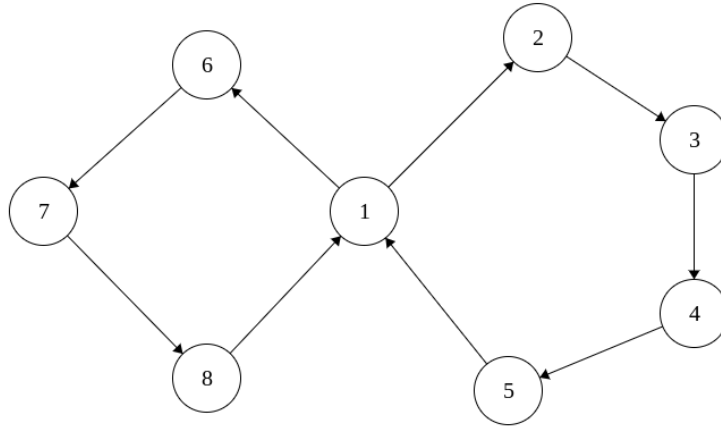
В матрице  $A \odot (A^2)^*$  небесконечные элементы стоят в клетках  $(i, j)$ , если вершины  $i$  и  $j$  находятся на нечетном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с разной четностью равно  $\frac{n}{2} - 1$ . Значит, условие при четном  $t$  выполняется при  $t \geq \frac{n}{2} - 1$ , а при прочих  $t$  — не выполняется.

Следовательно,  $T(A) = \frac{n}{2}$ . В силу того, что  $B = -\infty$ , границы  $T_1 = T = \frac{n}{2}$ , а  $T_2 = 0$ , так как  $B = -\infty$ .

## 9.4 Два цикла

**Определение 9.6.** Назовем ромашкой граф, состоящий из нескольких пересекающихся по одной вершине циклов.

Рассмотрим матрицу смежности  $A \in M_{2n}(\mathbb{R}_{\max})$  графа-ромашки, состоящего из двух циклов длины  $n$  и  $n+1$ . Будем называть  $n$ -циклом цикл длины  $n$  и  $(n+1)$ -циклом — цикл длины  $n+1$ .



Будем рассматривать те графы, в которых средний вес каждого цикла равен 0. Тогда критический подграф совпадает со всем графом:  $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A) = \mathcal{G}$ . Его цикличность  $\sigma = 1$ , значит,  $C = R = M = A^*$ , а  $S = A$ .

Следовательно, при  $t \geq T(A)$  верно  $CS^tR[A] = A^*A^tA^* = A^t$ . Так как для произвольных фиксированных вершин любые два пути между ними имеют равные веса, то  $T(A) = \exp(A)$  (так как в равенстве  $A^t = CS^tR[A]$  справа стоит матрица без  $-\infty$ , а значит и слева должна стоять матрица без  $-\infty$ ).

Это приводит нас к более общему утверждению.

**Утверждение 9.7.** Рассмотрим примитивную матрицу  $A$ , у которой  $\mathcal{G}(A)$  совпадает со своим критическим подграфом,  $\lambda(A) = 0$ . Если для двух произвольных фиксированных вершин  $u$  и  $v$  верно, что все пути из  $u$  в  $v$  имеют одинаковый вес, то  $T(A) = T_{1,N}(A) = \exp(A)$ , а  $T_{2,N}(A) = 0$ .

**Доказательство.** Доказательство аналогично предыдущему пункту.

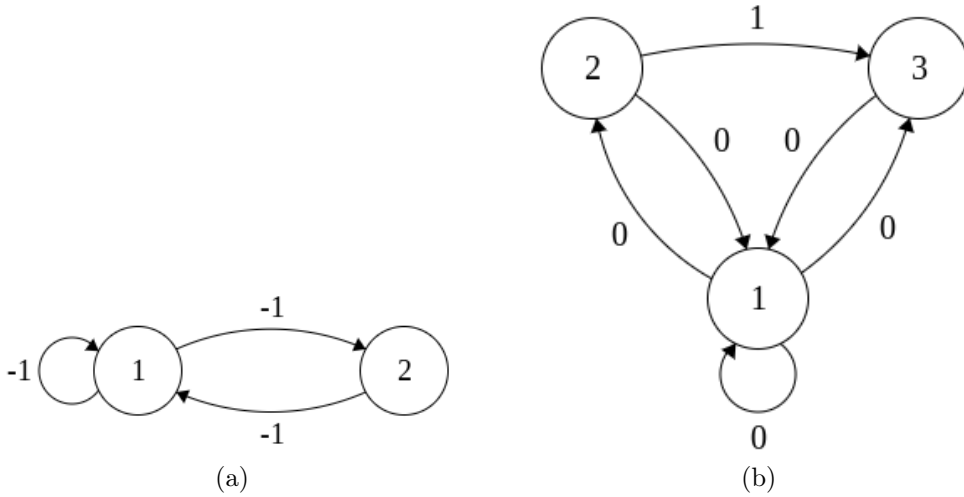
По определению,  $M = (A^\sigma)^* = A^*$ . Следовательно,  $C = R = M = A^*$ , а  $S = A$ .

Значит, при  $t \geq T(A)$  верно  $CS^tR[A] = A^*A^tA^* = A^t$ . В  $A^*$  нет  $-\infty$ , потому что  $\mathcal{G}(A)$  сильно связан. Значит, при домножении  $A^*$  на матрицу, у которой в каждом столбце есть небесконечный элемент (т.к. граф связан), в результате получится матрица без бесконечностей.

Значит, в левой части равенства нет  $-\infty$ , поэтому она совпадает с  $A^{\exp(A)}$ . Значит, при  $t \geq \exp(A)$  выполняется условие на  $T(A)$ , и  $T(A) = \exp(A)$ .

Так как  $B = -\infty$ , то  $T_{2,N}(A) = 0$ , и  $T_{1,N}(A) = T(A) = \exp(A)$ .  $\square$

Заметим, что обратное утверждение неверно. Рассмотрим следующие графы:



В обоих графах экспонента совпадает с  $T$  и  $T_1$ , а  $T_2 = 0$  (в обоих графах экспонента равна 2), но в графе (a) максимальный средний вес цикла равен  $-1$ , а в графе (b) критический подграф не совпадает со всем графом.

**Следствие 9.8.** Если  $\mathcal{G}$  — примитивный граф, все рёбра которого имеют вес 0, и  $A$  — его матрица смежности, то  $T(A) = T_{1,N}(A) = \exp(A)$ , а  $T_{2,N}(A) = 0$ .

**Доказательство.** Это утверждение верно, так как  $\mathcal{G}$  удовлетворяет всем условиям утверждения 9.7.  $\square$

**Утверждение 9.9.** Экспонента ромашки, состоящей из циклов длины  $n$  и  $n + 1$ , равна  $n(n + 1)$ .

**Доказательство.** Докажем, что в  $A^{n(n+1)-1}$  есть бесконечные элементы. Рассмотрим вершины  $i = 2$ ,  $j = n + 1$  и покажем, что в  $\mathcal{G}(A)$  не существует пути длины  $n(n + 1) - 1$  между  $i$  и  $j$ .

Любой путь из  $i$  в  $j$ , длина которого больше  $n - 1$ , состоит из трех частей: первая часть — путь из  $i$  в 1 длины  $n$ , вторая часть —  $a$  циклов длины  $n$ , и  $b$  циклов длины  $n + 1$ , идущих в любом порядке. Третья часть — путь из 1 в  $j$  длины  $n$ . Таким образом, суммарная длина пути равна  $an + b(n + 1) + 2n = (a + 2)n + b(n + 1)$ .

Покажем, что уравнение

$$n(n + 1) - 1 = (a + 2)n + b(n + 1) \quad (16)$$

не имеет решений в целых неотрицательных числах относительно  $a$  и  $b$ .

Предположим противное: пусть существуют целые неотрицательные  $a, b$ , являющиеся решениями 16. Заметим, что  $n(n+1) - 1 \equiv -1 \equiv b \pmod{n}$ . Значит,  $b \geq n - 1$ , и

$$n(n+1) - 1 = (a+2)n + b(n+1) \geq (a+2)n + n^2 - 1$$

Следовательно,  $n \geq (a+2)n$ , что невозможно в силу неотрицательности  $a$ .

Значит, уравнение не имеет решений, и в  $\mathcal{G}(A)$  нет искомого пути. Следовательно, в  $A^{n(n+1)-1}$  есть бесконечности и  $\exp(A) \geq n(n-1)$ .

Покажем, что в  $A^{n(n+1)}$  нет бесконечностей. Надо доказать, что для любых вершин  $i, j$  существует путь из  $i$  в  $j$  длины  $n(n-1)$ . Пусть расстояние от  $i$  до 1 равно  $x$ , а расстояние от 1 до  $j$  равно  $y$ .

Для доказательства утверждения надо показать, что для любых  $x, y$  существует решение уравнения  $n(n+1) = an + b(n+1) + x + y$ . Заметим, что  $x, y \leq n$ . Пусть  $z = x + y$ . Рассмотрим

$$(a, b) = \begin{cases} (z, n-z) & \text{при } 0 \leq z \leq n \\ (z-n-1, 2n-z) & \text{при } n+1 \leq z \leq 2n \end{cases}$$

Легко проверить, что  $a$  и  $b$ , определенные таким образом, неотрицательны и являются решениями данного уравнения.

Значит, искомый путь всегда найдется, и  $\exp(A) = n(n+1)$ .  $\square$

Посчитаем скрамблинг-индекс ромашки, состоящей из циклов длины  $n$  и  $n+1$ . Для этого введём следующее определение:

**Определение 9.10.** Для  $u, v \in V(\mathcal{G})$  введём обозначение:

$$k_{u,v}(\mathcal{G}) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{существует } w \in V(\mathcal{G}) : \mathcal{W}^k(u \rightarrow w) \neq \emptyset \\ \text{и } \mathcal{W}^k(v \rightarrow w) \neq \emptyset\}$$

Зная значения  $k_{u,v}$  для всех пар вершин  $u, v$ , легко можно вычислить скрамблинг-индекс всего графа:

**Лемма 9.11** ([8]).  $k(\mathcal{G}) = \max_{u,v \in V(\mathcal{G})} k_{u,v}$ .

Заметим, что скрамблинг-индекс ромашки положителен тогда и только тогда, когда она примитивна, т.е. когда НОД длин циклов в ней равен 1. Это следует из теоремы 7.6.

Рассмотрим произвольную примитивную ромашку и две её вершины  $u$  и  $v$ . Тогда существует вершина  $w$ , в которую ведут пути из  $u$  и из  $v$  длины  $k_{u,v}$ .

**Лемма 9.12.** Если  $u = v$ , то  $w = u = v$  и  $k_{u,v} = 0$ . Иначе  $w = 1$ .

Если  $u \neq v$ , то не существует цикла, по которому полностью прошла и вершина  $u$ , и вершина  $v$ .

**Доказательство.** Если  $u = v$ , то подходят пути длины ноль и  $w = u = v$ . Если  $u \neq v$  и  $w \neq 1$ , то у построенных путей есть общий суффикс, и их можно укоротить, что противоречит минимальности  $k_{u,v}$ .

Если существует цикл, по которому полностью прошла и вершина  $u$ , и вершина  $v$ , то оба пути можно было укоротить на этот цикл, что противоречит минимальности  $k_{u,v}$ .  $\square$

**Утверждение 9.13.** Скрамблинг-индекс ромашки, состоящей из циклов длины  $n$  и  $n+1$ , равен:

$$k(\mathcal{G}) = \begin{cases} \frac{n^2+2n}{2}, & n \text{ чётно} \\ \frac{n^2+2n-1}{2}, & n \text{ нечётно} \end{cases}$$

**Доказательство.** Так как граф в данной задаче фиксирован, обозначим  $k_{u,v} = k_{u,v}(\mathcal{G})$ .

Сначала найдем  $k_{u,v}$  при  $u = 1$ , т.е.  $k_{1,v}$ . Рассмотрим пути вершин 1 и  $v$ : путь вершины 1 состоит из нескольких циклов, а путь вершины  $v$  — это дуга длины  $x$  от  $v$  до 1, а затем — несколько циклов.

В силу леммы 9.12 есть 2 варианта:

1. путь вершины 1 содержит  $(n + 1)$ -циклы, а вершины  $v$  —  $n$ -циклы;
2. путь вершины 1 содержит  $n$ -циклы, а вершины  $v$  —  $(n + 1)$ -циклы.

Пусть вершина  $v$  прошла  $a$  циклов, а вершина 1 —  $b$  циклов ( $a, b \geq 0$ ). Решим для каждого случая уравнение, минимизировав длину пути каждой вершины:

1.  $x + an = b(n + 1)$  — слева стоит длина пути вершины  $v$ , а справа — вершины 1. Так как мы ищем минимальную длину пути, то необходимо минимизировать левую и правую части. Заметим, что  $b \equiv x \pmod{n}$ . Значит,  $b \geq x$ . Следовательно, решение  $a = n - x$ ,  $b = x$  дает минимальную длину путей, которая равна  $x(n + 1)$ .
2.  $x + a(n - 1) = bn$ . Заметим, что  $a \equiv -x \pmod{n}$ . Значит, решение  $a = n - x$ ,  $b = n - x + 1$  — оптимальное. Длины путей равны  $n(n - x + 1)$ .

Таким образом,  $k_{1,v} = \min\{x(n + 1), n(n - x + 1)\}$ .

Найдём  $k_{u,v}$  в общем случае. Пусть расстояние от  $u$  до 1 равно  $d_u$ , расстояние от  $v$  до 1 равно  $d_v$ , без ограничения общности  $d_u \leq d_v$ , и  $x = d_v - d_u$ .

Заметим, что первые  $d_u$  рёбер в путях вершин определены однозначно, так как в этом графе есть разветвления только в вершине 1. После  $d_u$  шагов вершина  $u$  придет в вершину 1, и задача сводится к предыдущему случаю.

Значит,  $k_{u,v} = d_u + \min\{x(n + 1), n(n - x + 1)\}$ .

Легко видеть, что максимальное значение  $d_u$  равно  $n - x$ . Оно достигается при  $u = ((x + 1) \bmod (n + 1)) + 1$ ,  $v = 2$ . Нельзя получить больше, так как вершина  $v$  должна оказаться в вершине 1 через  $x + d_u$  шагов, но не раньше. Значит,  $x + d_u \leq n$  и  $d_u \leq n - x$ .

Следовательно, по лемме 9.11:

$$\begin{aligned} k(\mathcal{G}) &= \max_{u,v \in V(\mathcal{G})} d_u + \min\{x(n + 1), n(n - x + 1)\} = \\ &= \max_{0 \leq x \leq n} n - x + \min\{x(n + 1), n(n - x + 1)\} = \max_{0 \leq x \leq n} \min\{n(x + 1), n^2 + 2n - x(n + 1)\} \end{aligned}$$

Требуется найти максимум минимумов двух линейных по  $x$  функций. Графики этих функций пересекаются в точке  $\hat{x} = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4(2n+1)}$ . Значит, максимум достигается в одной из целых точек по обе стороны от  $\hat{x}$ .

Рассмотрим два случая:

- $n$  чётно. Тогда две целые точки по обе стороны от  $\hat{x}$  — это  $x_1 = \frac{n}{2}$  и  $x_2 = \frac{n+2}{2}$ , при этом в  $x_1$  минимумом будет первая функция, а в  $x_2$  — вторая. Значит,

$$\begin{aligned} k(\mathcal{G}) &= \max\{n(x_1 + 1), n^2 + 2n - x_2(n + 1)\} = \\ &= \max\{n(\frac{n}{2} + 1), n^2 + 2n - \frac{n+2}{2}(n + 1)\} = \frac{n^2 + 2n}{2} \end{aligned}$$

- $n$  нечётно. Тогда две целые точки по обе стороны от  $\hat{x}$  — это  $x_1 = \frac{n-1}{2}$  и  $x_2 = \frac{n+1}{2}$ . Значит,

$$\begin{aligned} k(\mathcal{G}) &= \max\{n(x_1 + 1), n^2 + 2n - x_2(n + 1)\} = \\ &= \max\{n(\frac{n-1}{2} + 1), n^2 + 2n - \frac{n+1}{2}(n + 1)\} = \frac{n^2 + 2n - 1}{2} \end{aligned}$$



В итоге имеем

$$k(\mathcal{G}) = \begin{cases} \frac{n^2+2n}{2}, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ \frac{n^2+2n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

□

## 9.5 Ромашка из $p$ циклов длины $k$

Рассмотрим матрицу смежности  $A$  графа-ромашки  $\mathcal{G}(A)$  на  $p(k-1)+1$  вершине, состоящего из  $p > 1$  циклов длины  $k$ . Будем считать, что вершина, по которой пересекаются все циклы, имеет номер 1, и что все рёбра в этом графе имеют нулевой вес.

**Утверждение 9.14.** *Граница  $T$ , определенная для такого графа-ромашки, равна  $k - 1$ .*

**Доказательство.** Индекс цикличности этого графа  $\sigma = k$ . Следовательно,  $C = R = M = (A^k)^*$  и  $S = A$ . По утверждению 8.10 в ячейке с индексами  $i, j$  матрицы  $CS^tR$  стоит 0, если из вершины  $i$  можно добраться до вершины  $j$  за количество шагов, сравнимое с  $t$  по модулю  $k$ , и  $-\infty$  иначе.

Будем говорить, что вершина  $v$  имеет класс  $i$ , если минимальная длина пути между вершинами 1 и  $v$  дает остаток  $i$  при делении на  $k$ . Заметим, что т.к. цикличность графа равна  $k$ , то длина любого пути из вершины 1 в  $v$  дает остаток  $i$  при делении на  $k$ . Следует упомянуть, что любое ребро ведет из вершины класса  $i$  в вершину класса  $i + 1 \pmod{k}$ .

Покажем, что  $T > k - 2$ . Рассмотрим вершину  $v$  класса 1 и вершину  $u$  класса  $k - 1$ . Тогда элемент матрицы  $CS^{k-2}R$  с индексами  $v, u$  равен 0. Но в матрице  $A^{k-2}$  элемент с теми же индексами равен  $-\infty$ , т.к. минимальный путь, соединяющий эти вершины, имеет длину  $2k - 2$ . Следовательно,  $CS^{k-2}R \neq A^{k-2}$  и  $T \geq k - 1$ .

Покажем, что  $T = k - 1$ . Предположим противное: пусть  $T > k - 1$ . Рассмотрим  $t = T - 1 \geq k - 1$ . Заметим, что  $CS^{t+k}R = A^{t+k}$ , так как  $t + k \geq T$ .

В матрице  $A^{t+k}$  хранится информация о путях длины  $t + k$ . Но наибольший простой путь имеет длину  $2k - 2 < t + k$  — это путь между вершиной класса 1 и вершиной класса  $k - 1$  из другого цикла. Значит, каждый путь длины  $t + k$  можно укоротить на  $k$  и получить путь длины  $t$  с тем же весом. Значит,  $A^{t+k} = A^t$ .

По утверждению 8.9 выполняется равенство  $CS^{t+k}R = CS^tR$ . Значит,  $CS^tR = CS^{t+k}R = A^{t+k} = A^t$ . Таким образом, мы получили противоречие с минимальностью  $T$ , т.к.  $t = T - 1$  и  $CS^tR = A^t$ .

Следовательно,  $T = k - 1$ .

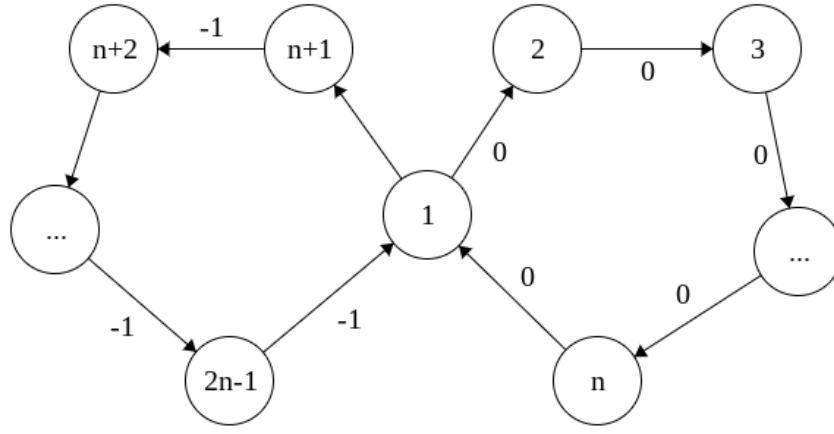
□

## 9.6 Ромашка с отрицательными циклами

Рассмотрим матрицу смежности  $A \in M_{2n-1}(\mathbb{R}_{\max})$ , графа-ромашки, состоящей из двух циклов: цикла длины  $n$  с нулевым средним весом (будем называть его нулевым циклом) и цикла длины  $n$  с отрицательным средним весом (будем называть его отрицательным циклом). Будем считать, что вершины первого цикла имеют номера от 1 до  $n$  в порядке обхода, а второго — 1,  $n + 1$ ,  $\dots$ ,  $2n - 1$  в порядке обхода.

**Утверждение 9.15.**  $T(A) = T_{1,N}(A) = T_{2,N}(A) = n - 1$ .

**Доказательство.** В этом примере матрица  $B$  нетривиальна: она получается из  $A$  заменой первых  $n$  строк и столбцов на  $-\infty$  и кодирует пути в отрицательном цикле. Заметим, что вершина  $n$  лежит в критическом подграфе, и, следовательно, инцидентные ей ребра не кодируются матрицей  $B$ , т.е.  $\mathcal{G}(B)$  — это  $n - 1$  последовательная соединенная вершина. Это значит, что  $B$  нильпотентна:  $B^{n-1} = -\infty$ , так как длиннейший путь в  $\mathcal{G}(B)$  имеет длину  $n - 2$ .



Докажем, что  $T_2(A, B) = n - 1$ .

В силу нильпотентности  $CS^{n-1}R \geq B^{n-1} = -\infty$ . Значит,  $T_2(A, B) \geq n - 1$ .

Покажем, что неравенство  $CS^tR \geq B^t$  не выполняется при  $t = n - 2$ .

Рассмотрим вершины  $i = n + 1$  и  $j = 2n - 1$ . Путь, вес которого кодирует ячейка  $[B^t]_{ij}$  — единственная небесконечная ячейка матрицы  $B^t$  — это дуга отрицательного цикла из вершины  $i$  в вершину  $j$  длины  $n - 2$ .

Рассмотрим путь, который кодирует ячейка с теми же индексами матрицы  $CS^tR$ . Он состоит из трех частей: части  $C$ , части  $S^t$ , и части  $R$ . После прохождения части  $C$  мы попадем в вершину номер 1 (так как в матрице  $C$  мы делаем произвольное количество шагов длины  $n$  и после ее прохождения мы всегда оказываемся в критическом подграфе). Далее в части  $S^t$  делаем  $n - 2$  шага по критическому подграфу и попадаем в вершину номер  $n - 1$ . И, наконец, после части  $R$  мы оказываемся в вершине  $2n - 1$ , пройдя еще  $n$  шагов.

Посчитаем вес этого пути. Мы целиком прошли нулевой цикл (что не влияет на вес пути, т.к. средний вес ребра в нем равен 0), целиком прошли отрицательный цикл и еще прошли по простой дуге от  $n + 1$ -й до  $2n - 1$ -й вершины. Значит,  $[CS^tR + B^t]_{ij} = (\lambda')^{\odot n} \oplus [B^t]_{ij}$ , где  $\lambda' = \lambda(B) < 0$  — средний вес отрицательного цикла.

Следовательно,  $[CS^tR]_{ij} < [B]_{ij}$ , и неверно, что  $CS^tR \geq B^t$ . Значит,  $T_2(A, B) = n - 1$ .

Покажем, что  $T_1(A, B) = n - 1$ . Рассуждения аналогичны доказательству точной оценки для  $T(A)$  в утверждении 9.14, но с некоторыми изменениями. Назовем путь подходящим, если его вес минимален среди всех имеющих ту же длину путей с концами в тех же вершинах. Чтобы получить доказательство для графа с отрицательным циклом, надо заменить в доказательстве все слова "путь" на "подходящий путь" (в том графе все пути были подходящими, а в нашем графе — не все).

Для окончания доказательства надо показать, что любой подходящий путь длины  $m > 2n - 2$  можно укоротить на  $n$ , при этом его вес останется прежним. Действительно, если  $m > 2n - 2$ , то путь не может быть простым. Значит, в нем есть цикл. Но в подходящем пути не может быть отрицательных циклов, иначе этот цикл можно поменять на нулевой и улучшить ответ. Значит, убрав этот нулевой цикл, можно получить путь между теми же вершинами того же веса, но длины  $m - n$ . Это завершает доказательство оценки  $T_1(A, B)$  для данного графа. В итоге имеем  $T(A) = T_1(A, B) = T_2(A, B) = n - 1$ .  $\square$

Утверждение 9.15 верно и для графов-ромашек с большим количеством циклов.

**Следствие 9.16.** Если  $A$  — матрица смежности графа-ромашки, где каждый цикл имеет длину  $n$  и есть хотя бы один нулевой цикл и хотя бы один отрицательный цикл, то  $T(A) = T_{1,N}(A) = T_{2,N}(A) = n - 1$ .

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения 9.15.

## 10 Разные ромашки

Здесь и далее будем рассматривать графы-ромашки, состоящие из циклов длины, кратной  $\sigma$ , все рёбра в которых имеют вес 0. Тогда сразу можно сказать, что у каждой такой ромашки  $T_2 = 0$  и  $T = T_1$ . Для разных таких ромашек будем искать границу  $T$ .

**Определение 10.1.** Ромашку, состоящую из циклов длины  $a_1\sigma, a_2\sigma, \dots, a_n\sigma$ , где числа  $a_1, \dots, a_n$  взаимно просты в совокупности,  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  назовем  $(a_1, \dots, a_n; \sigma)$ -ромашкой.

Границу  $T$ , определенную для такой ромашки, будем обозначать через  $T(a_1, \dots, a_n; \sigma)$ .

Заметим, что индекс цикличности такой ромашки равен  $\sigma$  и всего в ней  $N = \sum_{i=1}^n a_i\sigma - n + 1$  вершин. Пусть вершина, в которой пересекаются все циклы, имеет номер 1. Пронумеруем вершины в порядке следующего обхода: начнем в вершине 1, далее пройдем по первому циклу, затем — по второму, и так далее до цикла с номером  $n$  (не изменяя номер у вершины 1).

Во всех примерах матрицу смежности рассматриваемого графа будем обозначать через  $A \in M_N(\mathbb{R}_{\max})$ , а через  $C, S, R$  будем обозначать матрицы  $C, S, R$ , построенные по матрице  $A$ .

### 10.1 Подсчет границы $T$ вручную

**Теорема 10.2.**  $T(a_1, \dots, a_n; \sigma) = (T(a_1, \dots, a_n; 1) + 1)\sigma - 1$ .

*Доказательство.* Обозначим граф, соответствующий  $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -ромашке через  $\mathcal{G}$ , а граф, соответствующий  $(a_1, \dots, a_n; \sigma)$ -ромашке — через  $\mathcal{G}_\sigma$ . Граф  $\mathcal{G}_\sigma$  получается из графа  $\mathcal{G}$  разделением каждого ребра на  $\sigma$  более мелких рёбер. Вершины  $\mathcal{G}_\sigma$ , лежащие в одном циклическом классе с вершиной 1, будем называть начальными. Для краткости будем обозначать  $T(a_1, \dots, a_n; 1)$  через  $T(1)$ , а  $T(a_1, \dots, a_n; \sigma)$  — через  $T(\sigma)$ .

Покажем, что  $T(\sigma) > (T(1) + 1)\sigma - 2$ . В  $\mathcal{G}$  есть 2 вершины, между которыми нет пути длины  $T(1) - 1$ . Значит, в  $\mathcal{G}_\sigma$  между соответствующими начальными вершинами нет пути длины  $(T(1) - 1)\sigma$ . Обозначим эти вершины через  $u$  и  $v$ . Но тогда между вершинами  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$  не будет пути длины  $(T(1) - 1)\sigma + 2(\sigma - 1) = (T(1) + 1)\sigma - 2$ , где  $\hat{u}$  получается, если отойти от  $u$  на  $\sigma - 1$  шаг вперёд, а  $\hat{v}$  — от вершины  $v$  на  $\sigma - 1$  шаг назад (обе новые вершины существуют, так как любая вершина в  $\mathcal{G}$  лежит в цикле). Значит,  $T(\sigma) \geq (T(1) + 1)\sigma - 1$ .

Покажем, что  $T(\sigma) \geq (T(1) + 1)\sigma - 1$ . Для этого нужно доказать, что между любыми двумя вершинами  $u$  и  $v$  графа  $\mathcal{G}_\sigma$  есть путь длины  $(T(1) + 1)\sigma - 1$  от  $u$  до  $v$ . Путь длины  $(T(1) + 1)\sigma - 1$  от  $u$  до  $v$  состоит из трех частей: путь от  $u$  до ближайшей начальной вершины, путь между начальными вершинами, и путь от ближайшей начальной вершины до  $v$ . Суммарная длина первой и третьей частей не превосходит  $2\sigma - 2$ , значит, длина второй части не меньше  $(T(1) - 1)\sigma + 1$ . Но длина пути между двумя начальными вершинами должна быть кратна  $\sigma$ , поэтому длина второй части не меньше  $T(1) \cdot \sigma$ . Но, по определению  $T(1)$ , между любыми начальными вершинами есть путь длины  $T(1) \cdot \sigma$ . Значит,  $T(\sigma) \geq (T(1) + 1)\sigma - 1$ , и утверждение доказано.  $\square$

Таким образом, при расчёте границы  $T$  для произвольной ромашки достаточно посчитать искомую границу при  $\sigma = 1$ , а затем получить ответ по формуле из утверждения 10.2.

**Замечание 10.3.** При  $\sigma = 1$   $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -ромашка примитивна. Более того, выполняются условия следствия 9.8, и граница  $T$  данной ромашки совпадает с экспонентой.

Введём вспомогательную функцию  $P$ :

**Определение 10.4.** Для взаимно простых в совокупности натуральных чисел  $a_1 \leq \dots \leq a_n$  обозначим через  $P(a_1, \dots, a_n)$  минимальное целое неотрицательное число, удовлетворяющее следующему свойству: любое  $p \geq P(a_1, \dots, a_n)$  выражается в виде линейной комбинации чисел  $a_1, \dots, a_n$  с целыми неотрицательными коэффициентами  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , то есть

$$p = a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n \quad (17)$$

. Число, выражающееся в виде линейной комбинации чисел  $a_1, \dots, a_n$  с целыми неотрицательными коэффициентами, назовём *выразимым*.

Здесь и далее под линейной комбинацией будем понимать линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами.

**Теорема 10.5.**  $T(a_1, \dots, a_n; 1) = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$ .

**Доказательство.** Предположим, что в  $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -ромашке между любыми двумя вершинами существует путь длины  $t$ . Рассмотрим две произвольные вершины  $u$  и  $v$ . Любой путь длины хотя бы  $a_n - 1$  проходит через вершину 1, и  $t \geq a_n - 1$ . Поэтому путь длины  $t$  от  $u$  до  $v$  состоит из трёх частей: пути от  $u$  до 1 (обозначим длину этой части через  $\hat{u}$ ),  $\lambda_i$  циклов длины  $a_i$  для  $i = 1 \dots n$ , и пути от 1 до  $v$  (обозначим длину этой части через  $\hat{v}$ ). Тогда имеет место равенство:

$$t = \hat{u} + a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n + \hat{v} \iff t - \hat{u} - \hat{v} = a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n.$$

Сумма  $\hat{u} + \hat{v}$  принимает любые значения от 0 до  $2a_n - 2$  (так как  $0 \leq \hat{u}, \hat{v} \leq a_n - 1$ ). Следовательно, для любого  $t - 2a_n + 2 \leq p \leq t$  должны существовать коэффициенты  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , удовлетворяющие уравнению

$$p = a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n. \quad (18)$$

При  $t < P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$  минимальное значение  $p$  не превосходит  $P(a_1, \dots, a_n) - 1$ , и, по определению  $P(a_1, \dots, a_n)$ , при наименьшем значении  $p$  уравнение 18 решений не имеет — противоречие с наличием пути между  $u$  и  $v$ .

Напротив, при  $t \geq P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$  наименьшее значение  $p$  не меньше  $P(a_1, \dots, a_n)$ , и, в силу определения  $P(a_1, \dots, a_n)$ , коэффициенты  $\lambda_i$  найдутся для любого возможного значения  $p$ .

Значит,  $T(a_1, \dots, a_n; 1) = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$ . □

**Следствие 10.6** (Корректность функции  $P$ ). *Функция  $P$  определена корректно: её значение существует для любых возможных аргументов.*

**Доказательство.** Рассмотрим  $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -ромашку. По замечанию 10.3 этот граф примитивен и, следовательно, имеет экспоненту, которая, в свою очередь, совпадает с границей  $T$  для данной ромашки. По формуле из теоремы 10.5 имеем  $P(a_1, \dots, a_n) = T(a_1, \dots, a_n; 1) - 2a_n + 2$ . □

**Утверждение 10.7** (Свойства функции  $P$ ).

1. Если  $a_1 = 1$ , то  $P(1, \dots, a_n) = 0$ .
2.  $P(a_1, \dots, a_n) \leq P(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ , где  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  — возрастающая последовательность индексов.
3.  $P(a_1, \dots, a_n) = P(b_1, \dots, b_m)$ , где набор  $b_1, \dots, b_m$  получается из набора  $a_1, \dots, a_n$  удалением повторяющихся элементов.

4. Если  $a_j$  делится на  $a_i$ , то  $P(a_1, \dots, a_n) = P(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$ .

5. Если  $a_j$  представляется в виде линейной комбинации меньших элементов, то  $P(a_1, \dots, a_n) = P(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$ .

**Доказательство.** 1) Действительно, если  $a_1 = 1$ , то любое неотрицательное число  $k$  выражается как  $1 \cdot k$ . Следовательно,  $P = 0$ .

2) Свойство следует из следующего факта: сумма  $a_{i_1}\lambda_{i_1} + \dots + a_{i_k}\lambda_{i_k}$  является частным случаем суммы  $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$ .

3) При приведении подобных членов в сумме  $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$  получается корректная сумма  $b_1\mu_1 + \dots + b_m\mu_m$ . С другой стороны, сумма  $b_1\mu_1 + \dots + b_m\mu_m$  является корректной суммой вида  $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$ .

4) Очевидно, что любая сумма  $a_1\lambda_1 + \dots + a_{j-1}\lambda_{j-1} + a_{j+1}\lambda_{j+1} + \dots + a_n\lambda_n$  является суммой вида  $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$ , где  $\lambda_j = 0$ . С другой стороны, заменив  $a_j$  на  $a_i \cdot \frac{a_j}{a_i}$ , можно избавиться от слагаемого  $a_j\lambda_j$  в сумме  $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$ , что доказывает утверждение.

5) Доказательство этого свойства аналогично предыдущему.  $\square$

**Утверждение 10.8.**  $P(a, b) = (a - 1)(b - 1)$ .

**Доказательство.** Покажем, что  $p = ab - a - b \neq ma + nb$  для любых целых неотрицательных  $m, n$ .

Предположим противное. Тогда:

$$ab - a - b = am + bn \iff ab = (m + 1)a + (n + 1)b$$

В силу взаимной простоты  $a$  и  $b$  получим, что  $n + 1 \vdots a$ , и  $m + 1 \vdots b$ . Тогда, в силу того, что  $m, n \geq 0$ , имеем 2 случая:

$$\begin{cases} n + 1 = a \\ m + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n + 1 = 0 \\ m + 1 = b. \end{cases}$$

В обоих случаях получаем противоречие. Следовательно,  $P(a, b) \geq (a - 1)(b - 1)$ .

Теперь покажем, что  $P(a, b) \leq ab + b - a - 1$ . Для любого  $p \geq ab - b - a + 1$  решим уравнение:

$$am + bn = p$$

Так как  $a$  и  $b$  взаимно просты, числа из набора  $0, b, 2b, \dots, (a - 1)b$  дают все  $a$  остатков по модулю  $a$ . Значит, существует единственное  $0 \leq n \leq a - 1$ , что  $bn \equiv p \pmod{a}$ , причём  $p - bn \geq 0$ , так как

$$p - bn \geq ab - b - a + 1 - (a - 1)b = -a + 1 > -a \implies p - bn \geq 0.$$

Значит,  $m = \frac{p - bn}{a} \geq 0$ .

Таким образом, нами были найдены целые  $m \geq 0$ ,  $n \geq 0$ . Следовательно,  $P(a, b) = (a - 1)(b - 1)$ .  $\square$

**Следствие 10.9.**  $T(a, b; \sigma) = (ab + b - a)\sigma - 1$ .

**Утверждение 10.10.**  $P(2, a, b) = \begin{cases} P(2, b) = b - 1, & \text{если } a \text{ чётно,} \\ P(2, a) = a - 1, & \text{иначе.} \end{cases}$

**Доказательство.** Первый случай следует из свойства 4 утверждения 10.7.

Разберём второй случай:  $a$  нечётно. Неравенство  $P(2, a, b) \leq P(2, a)$  следует из свойства 2 утверждения 10.7. Докажем обратное неравенство: необходимо показать, что с помощью слагаемых  $2, a, b$  невозможно получить сумму  $a - 2$ . Действительно, из трёх слагаемых можно использовать только одно:  $2$ . Но  $a - 2$  нечётно — противоречие. Следовательно,  $P(2, a, b) = P(2, a)$ .  $\square$

**Следствие 10.11.**  $T(2, a, b; \sigma) = \begin{cases} T(2, b; \sigma) = (3b - 2)\sigma - 1, & \text{если } a \text{ нечётно,} \\ (2b + a - 2)\sigma - 1, & \text{иначе.} \end{cases}$

**Утверждение 10.12.**  $P(3, a, b) = \begin{cases} P(3, b) = 2(b - 1), & \text{если } a \vdots 3, \\ b - 2, & \text{если } a \not\vdots 3, a + b \vdots 3 \text{ и } b < P(3, a) = 2a - 2, \\ P(3, a) = 2(a - 1), & \text{иначе.} \end{cases}$

*Доказательство.* Первый случай следует из свойства 4 утверждения 10.7.

Разберём второй случай. Покажем, что  $P(3, a, b) \geq b - 2$ . Предположим противное. Тогда число  $b - 3$  должно выражаться в виде линейной комбинации 2,  $a$  и  $b$ :

$$b - 3 = 3\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

Тогда  $\lambda_3 = 0$  и  $\lambda_2 \leq 1$ . При  $\lambda_2 = 0$  имеем  $b = 3\lambda_1 + 3 \vdots 3$ . При  $\lambda_2 = 1$  имеем  $b - a = 3\lambda_1 + 3 \vdots 3$ . В обоих случаях  $a \vdots 3$ , так как  $a + b \vdots 3$ , что противоречит условию второго случая. Следовательно,  $P(3, a, b) \geq b - 2$ .

Докажем обратное неравенство: для любого  $p \geq b - 2$  решим уравнение:

$$p = 3\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

Так как в правой части есть слагаемое  $3\lambda_1$ , то достаточно решить уравнение для  $p = b - 2$ ,  $p = b - 1$  и  $p = b$  — тогда линейные комбинации для больших  $p$  получатся увеличением  $\lambda_1$ .

- $p = b - 2$ . Если  $b \equiv 2 \pmod{3}$ , то  $\lambda_1 = \frac{b-2}{3}$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .  
Если  $b \equiv 1 \pmod{3}$ , то  $a \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $b - 2 = (b - a - 2) + a$  и  $\lambda_1 = \frac{b-a-2}{3}$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 0$ .
- $p = b - 1$ . Если  $b \equiv 1 \pmod{3}$ , то  $\lambda_1 = \frac{b-1}{3}$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .  
Если  $b \equiv 2 \pmod{3}$ , то  $a \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $b - 2 = (b - a - 1) + a$  и  $\lambda_1 = \frac{b-a-1}{3}$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 0$ .
- $p = b$ . Тогда  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 1$ .

Таким образом,  $P(3, a, b) = b - 2$ .

Перейдём к третьему случаю: если  $b \geq P(3, a)$ , то наличие слагаемого  $b\lambda_3$  не повлияет на значение функции  $P$ : если некое  $p$  выражается в виде линейной комбинации с участием  $b$ , то  $p \geq P(3, a)$  и, следовательно, выражается и без участия  $b$ . Следовательно,  $P(3, a, b) = P(a, b)$ .

Рассмотрим последний случай:  $a \not\vdots 3$ ,  $a + b \not\vdots 3$ ,  $b < P(3, a)$ . Неравенство  $P(3, a, b) \geq P(a, b)$  следует из свойства 2 утверждения 10.7. Докажем обратное неравенство. Для этого покажем, что следующее уравнение не имеет решений:

$$2a - 3 = 3\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

Заметим, что  $\lambda_3 = 0$ , так как  $b < 2a - a$ . Также,  $\lambda_2 \leq 1$ . Тогда  $(2 - \lambda_2)a = 3\lambda_1 + 3 \vdots 3$  — противоречие с  $a \not\vdots 3$ . Значит,  $P(3, a, b) = P(a, b)$ .  $\square$

**Следствие 10.13.**  $T(3, a, b; 1) = \begin{cases} T(3, b; 1) = 4b - 4, & \text{если } a \vdots 3, \\ 3b - 4, & \text{если } a \not\vdots 3, a + b \vdots 3 \text{ и } b < 2a - 2, \\ 2a + 2b - 4, & \text{иначе.} \end{cases}$

## 10.2 Алгоритм вычисления функции $P$

Рассмотрим массив  $M$  длины  $a_1$ , где в  $M[i]$  лежит минимальное выразимое число, сравнимое с  $i$  по модулю  $a_1$ . Заметим, что  $M[0] = 0$  и что  $M[i] \equiv i \pmod{a_1}$ .

**Утверждение 10.14.**  $P(a_1, \dots, a_n) = \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $\max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1 = M[k] - a_1 + 1$ .

Выразимость  $M[k] - a_1$  вела бы к противоречию с определением массива  $M$ , так как  $M[k] - a_1 \equiv M[k] \pmod{a_1}$ . Значит,  $P(a_1, \dots, a_n) \geq \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$ .

Заметим, что если произвольное  $x$  выразимо, то и число  $x + a_1$  выразимо. Из этого следует, что любое число, сравнимое с  $i$  по модулю  $a_1$  и не меньшее  $M[i]$  выразимо. Значит, все числа, начиная с  $M[k] - a_1 + 1$  выразимы — иначе  $M[k]$  было бы не максимальным числом в массиве  $M$ .

Следовательно,  $P(a_1, \dots, a_n) = \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$ .  $\square$

Используя массив  $M$ , можно легко посчитать  $P(4, a, b)$ . Здесь и далее через  $x \text{ rem } y$  будем обозначать остаток при делении  $x$  на  $y$ .

**Утверждение 10.15** (Формула для  $P(4, a, b)$ ).

1.  $a \div 4, b \nmid 2$ . Тогда  $P(4, a, b) = P(4, b)$ .
2.  $a \nmid 2, b \div 4$ , или  $0 \not\equiv a \equiv b \pmod{4}$ , или  $a \nmid 2, b \geq P(4, a)$ . Тогда  $P(4, a, b) = P(4, a)$ .
3.  $a \equiv 2 \pmod{4}, b \nmid 2$ . Тогда  $P(4, a, b) = a + b - 3$ .
4.  $a \nmid 2, b \equiv 2 \pmod{4}$ . Тогда

$$P(4, a, b) = \begin{cases} a + b - 3, & \text{если } b < 2a \\ 3a - 3, & \text{иначе.} \end{cases}$$

5.  $a, b \nmid 2, a + b \div 4, b < P(4, a)$ . Тогда

$$P(4, a, b) = \begin{cases} 2a - 3, & \text{если } b \leq 2a \\ b - 3, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Доказательство.** Из свойства 4 утверждения 10.7 можно вывести случай  $a \div 4, b \nmid 2$  и случай  $a \nmid 2, b \div 4$ , а из свойства 5 того же утверждения — случай  $0 \not\equiv a \equiv b \pmod{4}$ .

Во всех остальных случаях посчитаем массив  $M$ , и по утверждению 10.14 найдём ответ. Заметим,  $M[0]$  всегда равен 0.

Докажем случай  $a \nmid 2, b \geq P(4, a)$ . Тогда  $M[a \text{ rem } 4] = a$ ,  $M[2] = 2a$ , и  $M[4 - a \text{ rem } 4] = 3a$  — число  $b$  слишком большое, чтобы повлиять на этот массив. Таким образом, максимум этого массива равен  $3a$ , и ответом будет число  $3a - 3 = P(4, a)$ .

Разберём случай  $a \equiv 2 \pmod{4}, b \nmid 2$ . Заметим, что  $M[2] = a$ ,  $M[b \text{ rem } 4] = b$ ,  $M[4 - b \text{ rem } 4] = a + b$ . Максимум этого массива —  $a + b$ , поэтому ответ равен  $a + b - 3$ .

Разберём случай  $a \nmid 2, b \equiv 2 \pmod{4}$ . Тогда  $M[a \text{ rem } 4] = a$ . На место  $M[2]$  есть два кандидата:  $2a$  и  $b$ . Если  $b < 2a$ , то  $M[2] = b$ , и иначе —  $2a$ . Далее, для  $M[4 - a \text{ rem } 4]$

имеем два варианта:  $3a$  и  $a + b$ , и если  $b < 2a$ , то  $M[4 - a \bmod 4] = a + b$ , и иначе —  $3a$ . Таким образом, если  $b < 2a$ , то ответ равен  $a + b - 3$ , а иначе —  $3a - 3 = P(4, a)$ .

Разберём последний случай:  $a, b \nmid 2, a + b \vdots 4, b < 3a - 3$ . Тогда  $M[a \bmod 4] = a$ ,  $M[b \bmod 4] = b$  и  $M[2] = 2a$ . В зависимости от относительного расположения  $2a$  и  $b$  имеем 2 различных возможных максимума массива  $M$ , откуда, по утверждению 10.17 находим ответ.  $\square$

Приведём алгоритм, вычисляющий функцию  $P$ . На вход ему подаётся число  $n$  числа  $a_1, \dots, a_n$ .

Алгоритм вычисляет массив  $M$ , а затем, по формуле из леммы 10.14, вычисляет ответ на поставленную задачу. Массив  $M$  вычисляется постепенно: изначально в каждой ячейке  $M[i]$  значения  $\infty$  из  $\mathbb{R}_{\min}$  — это значит, что пока не было найдено ни одного выразимого числа, сравнимого с  $i$  по модулю  $a_1$ . Если при последующем переборе было найдено некоторое  $p$ , сравнимое с  $i$  по модулю  $a_1$  и меньшее  $M[i]$ , то необходимо перезаписать в ячейку  $M[i]$  значение  $p$ .

Перебор начинается с рассмотрения всех линейных комбинаций с одним слагаемым (здесь и далее через количество слагаемых будем обозначать количество ненулевых коэффициентов  $\lambda_i$  в линейной комбинации вида 17). Затем будем перебирать линейные комбинации, на каждом шаге увеличивая максимальное количество слагаемых вдвое. Таким образом, необходимо сделать  $\lceil \log_2 n \rceil$  итераций, где  $\lceil x \rceil$  — это округление числа  $x$  вверх.

#### Алгоритм 10.16.

1. Создадим массив  $M$  длины  $a_1$  содержащий числа из  $\mathbb{R}_{\min}$ . Запишем во все ячейки значения  $\infty$ .
2. На нулевой итерации переберём все линейные комбинации с одним слагаемым. Для этого для каждого  $a_i$  и для каждого множителя  $0 \leq k < a_1$  проверим, можем ли мы улучшить ответ: сравним  $a_i^{\odot k} = a_i \cdot k$  с  $M[a_i \cdot k \bmod a_1]$ , и если в массиве записано большее число, то улучшим ответ: запишем в ячейку  $a_i \cdot k \bmod a_1$  значение  $a_i^{\odot k} = a_i \cdot k$ .
3. На каждой следующей итерации будем перебирать все пары ячеек  $M[i]$  и  $M[j]$  и пытаться улучшить ответ: сравним  $M[(i + j) \bmod a_1]$  с  $M[i] \odot M[j]$  (т.е.  $M[i] + M[j]$ , если оба эти числа меньше  $\infty$ , и  $\infty$  иначе), и если в массиве записано большее число, то улучшим ответ: запишем в ячейку  $(i + j) \bmod a_1$  значение  $M[i] \odot M[j]$ .
4. Всего необходимо сделать  $\lceil \log_2(n) \rceil + 1$  итераций. После этого ответом будет 
$$\bigoplus_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1 = \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1.$$

Для доказательства корректности докажем следующее утверждение.

**Лемма 10.17.** После итерации с номером  $d$  в ячейке  $M[i]$  лежит минимальное число, сравнимое с  $i$  по модулю  $a_1$ , которое может быть представлено в виде линейной комбинации с не более чем  $2^d$  слагаемыми, или  $\infty$ , если такого числа не существует.

**Доказательство.** Докажем утверждение по индукции.

База:  $d = 0$ . В шаге 1 перебираются все линейные комбинации вида  $a_j \cdot k$ , где  $0 \leq k < a_1$ . Рассмотрим линейную комбинацию, которую мы не перебрали:  $a_i \cdot t$ . Так как мы не перебрали эту комбинацию, то  $t \geq a_1$ . Но тогда  $a_i \cdot t \equiv a_i \cdot (t - a_1) \pmod{a_1}$  и  $a_i \cdot t > a_i \cdot (t - a_1) \geq 0$  — эта линейная комбинация не может улучшить ответ. Значит, база верна.



Докажем переход. Предположим, утверждение доказано для  $d - 1$ , докажем его для  $d$ . Обозначим массив  $M$  в состоянии до итерации с номером  $d$  через  $M'$ .

Рассмотрим произвольную ячейку  $M[i]$ , в которой записано число, меньшее  $\infty$ . Тогда существуют два индекса  $j$  и  $k$  такие, что  $i = (j + k) \bmod a_1$  и  $M[i] = M'[j] + M'[k]$ . По предположению индукции в каждой ячейке массива  $M'$  лежит число, которое может быть представлено в виде линейной комбинации с не более чем  $2^{d-1}$  слагаемыми. Значит, в  $M[i]$  лежит число, представимое в виде линейной комбинации с не более чем  $2^d$  слагаемыми. По предположению индукции  $M[i] = M'[j] + M'[k] \equiv j + k \equiv i \pmod{a_1}$ .

Осталось доказать минимальность  $M[i]$ . Предположим противное: пусть существует число  $x < M[i]$ , сравнимое с  $i$  по модулю  $a_1$  и представимое в виде линейной комбинации с не более чем  $2^d$  слагаемыми. Тогда эту комбинацию можно разбить на две меньших, в каждой из которых будет не более  $2^{d-1}$  слагаемых. Обозначим суммы этих линейных комбинаций через  $S_1$  и  $S_2$ . Пусть  $S_1 \equiv j \pmod{a_1}$ , а  $S_2 \equiv k \pmod{a_1}$ .

Тогда  $S_1 + S_2 = x < M[i] \leq M'[j] + M'[k]$  и или  $S_1 < M'[j]$ , или  $S_2 < M'[k]$ . В обоих случаях имеем противоречие с предположением индукции. Значит, предположение индукции верно и для  $d$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Утверждение 10.18.** Алгоритм 10.16 корректен. Время его работы —  $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot \log n)$ . Объем затраченной памяти —  $O(a_1)$ .

*Доказательство.* Докажем асимптотику. Первый шаг работает за  $O(a_1)$ , второй — за  $O(a_1 \cdot n)$  (надо перебрать все  $1 \leq j \leq n$  и все  $0 \leq k < a_1$ ). Третий работает за  $O(a_1^2 \cdot \log n)$ , так как всего  $O(\log n)$  итераций, в каждой из которых надо перебрать пары  $(i, j)$ , где  $0 \leq i, j \leq a_1$ . Четвертый — за  $O(a_1)$ . Итоговая сложность алгоритма:  $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot \log n)$ .

Память тратится только на массив  $M$  длины  $a_1$ . Значит, алгоритм требует  $O(a_1)$  памяти.

Докажем корректность. По лемме 10.17 после итерации с номером  $d$  в ячейках массива  $M$  лежит информация об оптимальных линейных комбинациях с не более чем  $2^d$  слагаемыми. Следовательно, после итерации с номером  $\lceil \log_2(n) \rceil$  в массиве  $M$  лежит информация об оптимальных линейных комбинациях из  $n$  слагаемых, то есть массив  $M$  будет наконец посчитан.

Во время работы алгоритма каждая ячейка массива  $M$  изменит своё значение хотя бы раз: это следует из корректности функции  $P$ . Значит, после последней итерации в массиве  $M$  не останется  $\infty$ .

Далее ответ может быть получен по лемме 10.14.  $\square$

На моём компьютере при  $n = 100, a_1 = 100$  алгоритм ни разу не показывал время, большее 0.2 с. При  $n = 1000, a_1 = 1000$  алгоритм работал не дольше 0.3 с. При  $n = 10000, a_1 = 10000$  алгоритм работает существенно медленнее: в районе 40 с.

### 10.3 Верхние оценки функции $P$

Оценим сверху значение функции  $P$ . Это поможет и в оценке сверху границы  $T$  для ромашек, и для уточнения времени работы алгоритма ??.

**Утверждение 10.19.** Функция  $P(a_1, \dots, a_n)$  оценивается сверху следующими функциями:

1.  $Wi(N) - 2a_n + 2$ ,
2.  $(a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2$ ,
3.  $(a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2)$ ,

где  $N = \sum_{i=1}^n a_i - n + 1$  — количество вершин в  $(a_1, \dots, a_n; 1)$ -ромашке.

**Доказательство.** По замечанию 10.3 граница  $T$  данной ромашки совпадает с её экспонентой, которая по теореме 8.11 оценивается сверху числом Виландта от количества вершин  $Wi(N)$ , функцией  $\hat{g}(N-2) + N$  и функцией  $(\hat{g}-1)(cr-1) + (\hat{g}+1)cd$ .

Обхват  $(a_1, \dots, a_n)$ -ромашки равен  $a_1$ , её окружность равна  $a_n$ , а длина наибольшего простого пути не превышает  $2a_n - 2$ .

Далее достаточно применить теорему 10.5.  $\square$

**Следствие 10.20.** *Время работы алгоритма ?? можно оценить следующими способами, убрав из асимптотики искомую величину:  $O(n \cdot a_1 \cdot a_n)$ . Объем затраченной памяти —  $O(a_1 \cdot a_n)$ .*

**Доказательство.** Так как ответ оценивается сверху функцией  $Wi(N) + 2a_2 - 2$ , то имеем время работы  $O(n \cdot (N^2 - 2N + 2 - 2a_n + 2)) = O(n \cdot N^2)$  и объем памяти  $O(N^2)$  (так как  $N = \sum_{i=1}^n a_i - n + 1$ ).

При подстановке  $(a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2$  вместо функции  $P$  имеем время работы  $O(n \cdot ((a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2)) = O(n \cdot a_1 \cdot N)$  и объем памяти  $O(a_1 \cdot N)$ .

При подстановке  $(a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2)$  вместо функции  $P$  имеем асимптотику  $O(n \cdot ((a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2))) = O(n \cdot a_1 \cdot a_n)$  и объем памяти  $O(a_1 \cdot a_n)$ .

Утверждение следует из неравенства  $a_1 \cdot a_n \leq a_1 \cdot N \leq N^2$ .  $\square$

## 11 Границы $T$ и скрамблинг-индекс

**Определение 11.1.** *Рассмотрим произвольную матрицу  $X \in M_{n+m}(\mathbb{R}_{\max})$  размера  $n + m$ . Назовем  $n$ - $m$ -декомпозицией матрицы  $X$  следующие четыре матрицы:*

$$\begin{aligned} X_{11} &\in M_{n \times n}(\mathbb{R}_{\max}) & X_{12} &\in M_{n \times m}(\mathbb{R}_{\max}) \\ X_{21} &\in M_{m \times n}(\mathbb{R}_{\max}) & X_{22} &\in M_{m \times m}(\mathbb{R}_{\max}), \end{aligned}$$

такие, что

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим граф  $\mathcal{G}$  на  $n + m$  вершинах, матрицей смежности  $A \in M_{n+m}(\mathbb{R}_{\max})$  и с положительным скрамблинг-индексом  $k(\mathcal{G})$ . По критерию положительности скрамблинг-индекса (7.6) в  $\mathcal{G}$  существует примитивный достижимый подграф  $\mathcal{G}_2$ . Обозначим через  $\mathcal{G}_1$  индуцированный подграф исходного графа  $\mathcal{G}$ , порожденный множеством вершин  $V(\mathcal{G}) \setminus V(\mathcal{G}_2)$ .

Для удобства перенумеруем вершины: пусть в графе  $\mathcal{G}_1$  лежат вершины с номерами от 1 до  $n$ , а в  $\mathcal{G}_2$  — от  $n + 1$  до  $n + m$ . Тогда в  $n$ - $m$ -декомпозиции матрицы  $A$  в матрице  $A_{ij}$  лежит информация о ребрах из  $\mathcal{G}_i$  в  $\mathcal{G}_j$ .

Будем рассматривать те графы, для которых  $\mathcal{G}^c = \mathcal{G}_2$  и  $\lambda(A) = 0$ . Так как граф  $\mathcal{G}_2$  примитивен, его цикличность равна 1. Значит,  $M = A^*$ .

Рассмотрим  $n$ - $m$ -декомпозицию матрицы  $M$ :

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}.$$

**Утверждение 11.2.** *Матрица  $M_{ij}$  имеет вид:*

$$M_{ij} = (A^*)_{ij} = \bigoplus_{t=0}^{n+m-1} \bigoplus_{\sigma}^{t-1} \bigodot_{k=0} A_{\sigma(k), \sigma(k+1)},$$

где  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $\sigma \in \{1, 2\}^{t+1}$ , причем  $\sigma(0) = i$ ,  $\sigma(t) = j$ .

**Доказательство.** Матрицы  $C, R, S, B$  имеют вид:

$$C = \begin{pmatrix} -\infty & M_{12} \\ -\infty & M_{22} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} A_{11} & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Для  $t \geq T(A)$  верно следующее равенство:

$$\begin{aligned} A^t = CS^tR &= \begin{pmatrix} -\infty & M_{12} \\ -\infty & M_{22} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & A_{22} \end{pmatrix}^t \odot \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} M_{12}A_{22}^tM_{21} & M_{12}A_{22}^tM_{22} \\ M_{22}A_{22}^tM_{21} & M_{22}A_{22}^tM_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

для  $t \geq T_1(A, B)$  — следующее:

$$A^t = CS^tR \oplus B^t = \begin{pmatrix} M_{12}A_{22}^tM_{21} \oplus A_{11}^t & M_{12}A_{22}^tM_{22} \\ M_{22}A_{22}^tM_{21} & M_{22}A_{22}^tM_{22} \end{pmatrix},$$

и для  $t \geq T_2(A, B)$  — следующее неравенство:

$$\begin{pmatrix} M_{12}A_{22}^tM_{21} & M_{12}A_{22}^tM_{22} \\ M_{22}A_{22}^tM_{21} & M_{22}A_{22}^tM_{22} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} A_{11}^t & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix},$$

т.е., что равносильно,  $M_{12}A_{22}^tM_{21} \geq A_{11}^t$ .

Выразим  $A^t$ :

$$(A^t)_{ij} = \bigoplus_{\sigma} \bigodot_{k=0}^{t-1} A_{\sigma(k), \sigma(k+1)},$$

где  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $\sigma \in \{1, 2\}^{t+1}$ , причем  $\sigma(0) = i, \sigma(t) = j$ . Здесь и далее считаем, что  $\sigma(k)$  — это  $k$ -й элемент кортежа  $\sigma$ , нумерация в котором идет с нуля.

Рассмотрим путь из произвольной вершины подграфа  $\mathcal{G}_i$  в произвольную вершину подграфа  $\mathcal{G}_j$ . Каждое ребро этого пути либо лежит внутри соответствующего подграфа, либо соединяет текущий подграф с другим. Переберем все возможные варианты расположения ребер в пути: если  $\sigma(k-1) = \sigma(k)$ , то  $k$ -е ребро пути лежит в графе  $\mathcal{G}_{\sigma(k-1)}$ . Иначе — ведёт из  $\mathcal{G}_{\sigma(k-1)}$  в  $\mathcal{G}_{\sigma(k)}$ . По всем таким вариантам возьмем максимум — это и будет оптимальным весом пути.

Зафиксируем  $i, j \in \{1, 2\}$ . Тогда матрица  $M_{ij}$  выражается следующим образом:

$$M_{ij} = (A^*)_{ij} = \bigoplus_{t=0}^{n+m-1} \bigoplus_{\sigma} \bigodot_{k=0}^{t-1} A_{\sigma(k), \sigma(k+1)},$$

где  $\sigma \in \{1, 2\}^{t+1}$ , причем  $\sigma(0) = i, \sigma(t) = j$ . □

## 12 Конусы

**Определение 12.1.** Пусть  $K$  — некоторое непустое подмножество  $\mathbb{R}^n$ . Назовём  $K$  конусом, если выполнены следующие условия:

1.  $\alpha x + \beta y \in K$  для любых  $x, y \in K$  и для любых  $\alpha, \beta \geq 0$ ,
2.  $K \cap -K = \{0\}$ ,
3.  $\text{int}K \neq \emptyset$  (здесь и далее через  $\text{int}X$  будем обозначать внутренность множества  $X$ ) или, что эквивалентно,  $K - K = \mathbb{R}^n$ .

Подмножество  $F$  конуса  $K$  называется *подконусом*, если само является конусом. Размерность конуса  $K$  — размерность линейной оболочки всех векторов из  $K$ .

Введём несколько отношений частичного порядка на  $K$ :

- $x \geq^K y$  тогда и только тогда, когда  $x - y \in K$ ,
- $x >^K y$  тогда и только тогда, когда  $x \geq^K y$  и  $x - y \neq 0$ ,
- $x \gg^K y$  тогда и только тогда, когда  $x - y \in \text{int}K$ .

**Определение 12.2.** Подконус  $F$  конуса  $K$  называется *гранью* конуса  $K$ , если для любых  $x \in F$ ,  $y \in K$  из  $x \geq^K y \geq^K 0$  следует  $y \in F$ . Обозначим множество всех граней конуса  $K$  через  $\mathcal{F}(K)$ .

Для любого подмножества  $S \subset K$  определим  $\Phi(S)$  — наименьшая по включению грань конуса  $K$ , содержащее  $S$ :

$$\Phi(S) = \cap \{F \mid F \text{ — грань } K \text{ и } F \supseteq S\} \quad (19)$$

Если  $S = \{x\}$ , то для удобства будем писать  $\Phi(x) = \Phi(\{x\})$

Заметим, что  $\{0\}$  и  $K$  являются гранями конуса  $K$ . Назовём эти грани тривиальными, а все остальные — нетривиальными. Обозначим множество всех нетривиальных граней конуса  $K$  через  $\mathcal{F}'(K)$ .

Иногда для описания некоторой грани  $F$  конуса  $K$  достаточно взять один вектор из  $F$ . Обозначим через  $\text{ri}F$  относительную внутренность множества  $F$ . (см. [13]).

**Утверждение 12.3** (Добавить ссылку).  $F = \Phi(K)$  тогда и только тогда, когда  $x \in \text{ri}F$ .

**Утверждение 12.4** (Добавить ссылку).  $\Phi(x) = \{y \in K \mid x \geq^K \alpha y \text{ для некоторого } \alpha > 0\}$ .

**Определение 12.5.**  $x \in K$  называется *экстремальным вектором*, если  $x = 0$  или  $x \neq 0$  и  $\Phi(x) = \{\lambda x \mid \lambda \geq 0\}$ . В последнем случае такое  $\Phi(x)$  называется *экстремальным лучом*. Обозначим множество экстремальных лучей через  $\mathcal{E}(K)$ .

Если конус содержит конечное число экстремальных лучей, то такой конус называется *полиэдральным*.

Если размерность конуса совпадает с количеством его экстремальных лучей, то такой конус называется *симплициальным*.

Множество  $n$ -мерных полиэдральных конусов с  $t$  экстремальными лучами будем обозначать через  $\mathcal{P}(n, t)$ .

Таким образом, экстремальные лучи — это одномерные грани конуса. Простейший пример полиэдрального конуса — это положительный октант  $\mathbb{R}_+^n = \{(\xi_1, \dots, \xi_n)^R \mid \xi_i \geq 0 \text{ для любого } 1 \leq i \leq n\}$ . Этот конус является симплициальным. Заметим, что любой симплициальный конус линейно изоморфен  $\mathbb{R}_+^n$  (см. [13]).

Мы будем работать с линейными отображениями, сохраняющими конус. Обозначим это множество через  $\Pi(K)$ :

**Определение 12.6.**  $\Pi(K) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid AK \subseteq K\}$ . Все матрицы из  $\Pi(K)$  назовём  $K$ -неотрицательными.

При  $K = \mathbb{R}_+^n$  множество  $K$ -неотрицательных матриц целиком состоит из неотрицательных матриц.

Определим несколько классов матриц:

**Определение 12.7.** Рассмотрим  $A \in \Pi(K)$ .

$A$  называется  $K$ -неразложимой, если любая нетривиальная грань конуса  $K$  не инвариантна относительно  $K$ .

$A$  называется  $K$ -положительной, если  $A(K \setminus \{0\}) \subseteq \text{int}K$ .

$A$  называется  $K$ -примитивной, если существует целое положительное число  $p$  такое, что  $A^p$  является  $K$ -положительной. В этом случае минимальное такое  $p$  называется экспонентой матрицы  $A$  и обозначается через  $\gamma(A)$ .

Добавить утверждение, что если  $A^p$   $K$ -положительная, то и для любого  $q \geq p$  верно, что  $A^q$  —  $K$ -положительная.

По конусу  $K$  и матрицы  $A$ , его сохраняющей, можно определить несколько графов. Рассмотрим две грани  $F, G$  конуса  $K$ . Будем говорить, что от  $F$  до  $G$  идёт  $\mathcal{P}$ -ребро, если  $G \subseteq \Phi(AF)$ , и  $\mathcal{I}$ -ребро, если  $G \subseteq \Phi((I + A)F)$ , где  $I$  — единичная матрица подходящей размерности. Заметим, что если от  $F$  до  $G$  идёт  $\mathcal{P}$ -ребро, то идёт и  $\mathcal{I}$ -ребро (см. [13]).

**Определение 12.8.**  $(\mathcal{E}, \mathcal{P}(A, K))$  — граф, вершинами которого являются его экстремальные лучи, а рёбрами — все  $\mathcal{P}$ -рёбра.

Аналогично определяются  $(\mathcal{E}, \mathcal{I}(A, K))$ ,  $(\mathcal{F}, \mathcal{P}(A, K))$ ,  $(\mathcal{F}, \mathcal{I}(A, K))$ ,  $(\mathcal{F}', \mathcal{P}(A, K))$ ,  $(\mathcal{F}', \mathcal{I}(A, K))$ : на первом месте стоит множество вершин, а на втором — множество рёбер.

Далее иногда будем писать просто  $(\mathcal{E}, \mathcal{P})$ , если по контексту понятно, какой конус  $K$  и какая матрица  $A$  рассматриваются.

**Утверждение 12.9** ([13]). Если  $K = \mathbb{R}_+^n$ , то  $(\mathcal{E}, \mathcal{P}(A, K)) = \mathcal{G}(A^T)$ .

**Утверждение 12.10** ([13], [15]). Если в  $(\mathcal{E}, \mathcal{P}(A, K))$  есть путь длины  $k$  между вершинами  $\Phi(x)$  и  $\Phi(y)$ , то  $\Phi(A^k x) \supseteq \Phi(y)$ .

Пусть  $F, G$  — грани конуса  $K$ . Тогда в графе  $(\mathcal{F}, \mathcal{P}(A, K))$  (или  $(\mathcal{F}, \mathcal{I}(A, K))$ ) существует путь длины  $k$  между  $F$  и  $G$  тогда и только тогда, когда  $G \subseteq \Phi(A^k F)$  (соответственно,  $G \subseteq \Phi((I + A)^k F)$ ).

**Теорема 12.11** ([16]). Если для любой  $K$ -неразложимой матрицы  $A$  граф  $(\mathcal{E}, \mathcal{P}(A, K))$  сильно связан, то  $K$  симплиціален.

**Теорема 12.12** ([15]).  $A$  —  $K$ -неразложима тогда и только тогда, когда  $(\mathcal{F}', \mathcal{I})$  сильно связан.

**Теорема 12.13** ([15]). Пусть  $A \in \Pi(K)$  и размерность конуса  $n > 2$ . Тогда  $A$  —  $K$ -примитивна тогда и только тогда, когда  $(\mathcal{F}', \mathcal{P})$  сильно связан.

Докажем две вспомогательные леммы:

**Лемма 12.14.** Если некоторая грань  $F$  полиэдрального конуса  $K$  содержит все нетривиальные грани  $K$ , то  $F = K$ .

**Доказательство.** В [16] доказано, что у любого  $n$ -мерного несимплиціального конуса существуют линейные независимые экстремальные вектора  $x_1, \dots, x_r$ , где  $r < n$  такие, что  $x_1 + \dots + x_r \in \text{int}K$ .

Заметим, что если конус полиэдральный, то он линейно изоморфен  $\mathbb{R}_+^n$ , а в последнем конусе сумма всех базисных векторов лежит во внутренней  $\mathbb{R}_+^n$ .

Значит, в любом случае существуют экстремальные вектора  $x_1, \dots, x_r$ , сумма которых лежит во внутренней  $K$ . Заметим, что  $x_i \in \Phi(x_i) \subseteq F$  для любого  $1 \leq i \leq r$ . Значит,  $x_1 + \dots + x_r \in F$ . Но, так как сумма  $x_i$  лежит во внутренней  $K$ ,  $K \subseteq F$ . Следовательно,  $F = K$ .  $\square$

**Лемма 12.15.** Если  $x$  — экстремальный вектор, то  $\Phi(A^p\Phi(x)) = \Phi(A^px)$ .

**Доказательство.** По определению экстремального вектора  $\Phi(x) = \{\lambda x \mid \lambda \geq 0\}$ . Тогда  $\Phi(A^p\Phi(x)) = \Phi(A^p\{\lambda x \mid \lambda \geq 0\}) = \Phi(\{\lambda A^px \mid \lambda \geq 0\}) = \Phi(A^px)$ .  $\square$

**Теорема 12.16.** Пусть  $A$  —  $K$ -примитивна и размерность конуса  $n > 2$ . Тогда  $(\mathcal{F}', \mathcal{P})$  примитивен и  $\gamma(A) = \exp(\mathcal{F}', \mathcal{P})$ .

**Доказательство.** Пусть  $q = \gamma(A)$ . Тогда заметим, что для любой нетривиальной грани  $F$  конуса  $K$  верно равенство  $\Phi(A^qF) = K$ . Это следует из следующего: рассмотрим произвольный ненулевой вектор  $x \in F$ . Тогда, так как  $A$  примитивна,  $A^qx \gg 0$ . Значит,  $\Phi(A^qF) \supseteq \Phi(A^qx) = K$  и, следовательно,  $\Phi(A^qF) = K$ .

Значит, для любых нетривиальных граней  $F, G$  конуса  $K$  в  $(\mathcal{F}', \mathcal{P})$  существует путь между  $F$  и  $G$  длины  $p$  — это равносильно  $G \subseteq \Phi(A^qF) = K$ , а любая грань конуса в нём содержится. Значит, экспонента графа  $(\mathcal{F}', \mathcal{P})$  не превосходит экспоненты матрицы  $A$ , то есть  $\exp(\mathcal{F}', \mathcal{P}) \leq \gamma(A)$ .

Докажем обратное неравенство:  $\exp(\mathcal{F}', \mathcal{P}) \geq \gamma(A)$ . Пусть  $p = \exp(\mathcal{F}', \mathcal{P})$ . Необходимо показать, что  $A^p$  —  $K$ -положительная матрица. Для этого рассмотрим произвольный вектор  $x \in K$  и покажем, что  $A^px \in \text{int}K$ .

Покажем, что  $A^px \in \text{int}K$  для экстремальных векторов. Тогда в  $(\mathcal{F}', \mathcal{P})$  существует путь из  $\Phi(x)$  в любую другую вершину. Следовательно,  $\Phi(A^p\Phi(x))$  содержит в себе все нетривиальные грани конуса, а значит  $\Phi(A^p\Phi(x)) = K$ . (по лемме 12.14). Докажем следующую лемму:

Значит,  $K = \Phi(A^p\Phi(x)) = \Phi(A^px)$ . Следовательно,  $A^px \in \text{ri}K = \text{int}K$ .

Теперь пусть  $x$  — произвольный ненулевой вектор из  $K$ . Тогда  $x$  выражается в виде линейной комбинации экстремальных векторов с положительными коэффициентами (так как среди них можно выбрать  $n$  базисных):  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ . Без ограничения общности, пусть  $\lambda_1 > 0$ .

Заметим, что  $A^px \in \Phi(A^px)$ , а также что  $0 \leq^K \lambda_1 A^px_1 \leq^K A^px$ .

Значит,  $A^px_1 \in \Phi(A^px)$  и  $\Phi(A^px_1) \subseteq \Phi(A^px)$ . Но по лемме 12.15  $\Phi(A^px_1) = K$ . Следовательно,  $\Phi(A^px) = K$ . Таким образом,  $A^px \in \text{int}K$ .

В силу произвольности  $x$  экспонента  $\gamma(A) \leq p$ .

Значит,  $\gamma(A) = \exp(\mathcal{F}', \mathcal{P})$ .  $\square$

## 13 Обозначения

1.  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  — множество неотрицательных вещественных чисел.
2.  $\mathbb{R}_{\max}, \mathbb{R}_{\min}$  — тропические полукольца.
3.  $x \text{ ret } y$  — остаток при делении  $x$  на  $y$ .
4.  $\lceil x \rceil$  — округление числа  $x$  вверх.
5.  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$  — множество с сложением, аналогичным дизъюнкции, и умножением, аналогичным конъюнкции.
6.  $M_{n \times m}(\mathbb{F})$  — множество матриц  $n \times m$  с элементами из  $\mathbb{F}$ .  
 $M_n(\mathbb{F})$  — множество квадратных матриц  $n \times n$  с элементами из  $\mathbb{F}$ .
7.  $[M]_{ij}$  — элемент матрицы  $M$  с индексами  $i$  и  $j$ .
8.  $\mathcal{G}(V, E)$  — граф со множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E$ .

9.  $Wi(n) = (n - 1)^2 + 1$  — число Виландта.
10.  $DM(\hat{g}, n) = \hat{g}(n - 2) + n$ , где  $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$  — число Далмаджа-Мендельсона.
11.  $\sigma_{\mathcal{G}}$  — индекс цикличности графа  $G$ .
12.  $k(\mathcal{G})$  — скрамблинг индекс графа  $G$ .
13.  $g(\mathcal{G})$  — обхват графа  $\mathcal{G}$ , т.е. длина наименьшего цикла в  $\mathcal{G}$ .
14.  $\hat{g}(\mathcal{G})$  — максимальный обхват среди всех компонент сильной связности графа  $\mathcal{G}$ .
15.  $cr(\mathcal{G})$  — окружность графа  $\mathcal{G}$ , т.е. длина наибольшего цикла в  $\mathcal{G}$ .
16.  $cb(\mathcal{G})$  — максимальная длина простого пути в графе  $\mathcal{G}$ .
17.  $exp(\mathcal{G})$  — экспонента графа (а значит, и его матрицы смежности).
18.  $\lambda(A)$  — максимальный средний вес цикла в графе  $\mathcal{G}(A)$ .
19.  $\mathcal{G}^c$  — критический подграф графа  $\mathcal{G}$ .
20.  $A^*$  — звезда Клини матрицы  $A$ .
21.  $\mathcal{W}(i \rightarrow j)$  — множество путей из вершины  $i$  в вершину  $j$ .  
 $\mathcal{W}^t(i \rightarrow j)$  — множество путей из вершины  $i$  в вершину  $j$  длины  $t$ .  
 $\mathcal{W}^{t,l}(i \rightarrow j)$  — множество путей из вершины  $i$  в вершину  $j$  длины  $t$  по модулю  $l$ .
22.  $\mathcal{W}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ ,  $\mathcal{W}^t(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ ,  $\mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$  — аналогично предыдущему пункту, но с дополнительным условием на путь: он должен проходить хотя бы через одну вершину из  $\mathcal{G}$ .
23.  $T(A)$ ,  $T_1(A, B)$ ,  $T_2(A, B)$  — границы, определенные в подразделе 8.2.
24.  $\Pi(K)$  — множество матриц, сохраняющих конус  $K$ .
25.  $\gamma(A)$  — экспонента  $K$ -примитивной матрицы  $A$ .
26.  $\Phi(S)$  — грань конуса, порождённая множеством  $S$ .  
 $\Phi(x) = \Phi(\{x\})$  — грань конуса, порождённая одноэлементным множеством.
27.  $P(n, m)$  — множество  $n$ -мерных правильных конусов с  $m$  экстремальными лучами.
28.  $(\mathcal{E}, \mathcal{P}(A, K))$  — граф с вершинами из множества экстремальных лучей конуса  $K$  и с  $\mathcal{P}$ -рёбрами.  
Аналогично —  $(\mathcal{F}', \mathcal{I}(A, K))$ , и т. д.

## References

- [1] Imre Simon *On semigroups of matrices over the tropical semiring* Theoretical Informatics and Applications (Tome 28 (1994) no. 3-4, pp. 277-294)
- [2] Semere Tsehay Tesfay. *A Glance at Tropical Operations and Tropical Linear Algebra* Eastern Illinois University, 2015.

- [3] David Speyer, Bernd Sturmfels. *Tropical Mathematics* Mathematics Magazine, vol. 82, №3, June 2009.
- [4] Ю.М. Волченко *Max-plus алгебра и ее применение*, декабрь 2017
- [5] Hans Schneider. *Wielandt's proof of the exponent inequality for primitive nonnegative matrices* Department of Mathematics, University of Wisconsin at Madison, 2002.
- [6] Ю.А. Альпин, И.В. Башкин. *Неотрицательные целые матрицы* Казанский федеральный университет, 2020.
- [7] Alexander Guterman, Elena Kreines, and Carsten Thomassen. *Linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index* Special Matrices Volume 9, 2021.
- [8] A. E. Guterman, A. M. Makshev Upper bounds on scrambling index for non-primitive digraphs Linear and Multilinear Algebra, 2019
- [9] Arthur Kennedy-Cochran-Patrick, Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev. *New bounds on the periodicity transient of the powers of a tropical matrix: Using cyclicity and factor rank* Linear Algebra and its Applications, 2020
- [10] Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379514004777>
- [11] Sergei Sergeev, Hans Schneider. *CSR expansions of matrix powers in max algebra* Transactions of the American Mathematical Society, December 2009
- [12] Bruualdi RA, Ryser HJ. *Combinatorial matrix theory*. Cambridge: Cambridge University Press; 1991. (Encyclopedia of mathematics and its applications; 39).
- [13] Raphael Loewy, Bit-Shun Tam. *Maximal exponents of polyhedral cones (I)*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 365 (2010) 570–583
- [14] George Phillip Barker. *On matrices having an invariant cone*. Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972), No. 1, 49–68  
<https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/101076>
- [15] George Phillip Barker, Bit-Shun Tam. *Graphs for Cone Preserving Maps*. Linear Algebra and its Applications 37:199-204 (1981)
- [16] Bit-Shun Tam, George Phillip Barker. *Graphs and irreducible cone preserving maps*. Linear and Multilinear Algebra, 1992, Vol. 31, pp. 19-25  
<https://doi.org/10.1080/03081089208818118>