# Тропическая линейная алгебра

Никита Шапошник, Б05-024
научный руководитель: А. Э. Гутерман

## 1 Введение

Тропическая математика была придумана бразильским математиком Имре Саймоном (Imre Simon, [1]) в конце XX века (название произошло от его места жительства). Матрицы над тропическим полукольцом имеют приложения в теории графов, отпимизации и биологии. В настоящей работе мы будем рассматривать матрицы над тропическим полукольцом, их связь с графами и некоторые их индексы: экспоненту, скрамблинг индекс, индекс цикличности и границы $T$.

## 2 Определения

**Определение 2.1.** *Тропическая алгебра ([2], [3]) — это множество* $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *с операциями сложения* $\oplus$ *и умножения* $\odot$*:*

$$a \oplus b = \max(a, b)$$
$$a \odot b = a + b$$

*или множество* $\mathbb{R}_{min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *с другой операцией сложения и идентичным умножением:*

$$a \oplus b = min(a, b)$$
$$a \odot b = a + b.$$

В дальнейшем мы будем работать с $\mathbb{R}_{\max}$.

**Лемма 2.2** (Свойства тропической алгебры, см. [2], [3], [4])**.** *Тропическая алгебра обладает следующими свойствами: для любых* $a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}$ *верно:*

- *Сложение и умножение ассоциативны.*
- *Сложение и умножение коммутативны.*
- *Дистрибутивность:* $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$.
- $-\infty$ *— нулевой элемент:* $a \odot -\infty = a$.
- $0$ *— единичный элемент:* $a \oplus 0 = a$.
- *Результат умножения на тропический ноль — это тропический ноль:* $a \odot -\infty = -\infty$.
- *Несуществование обратного по сложению: если* $a \neq -\infty$, *то* $a \oplus b \geq a > -\infty$.

**Следствие 2.3.** *Тропическая алгебра является полукольцом.*

**Определение 2.4.** *Граф (в рамках данной задачи)* $\mathcal{G}(V, E)$ *— совокупность двух множеств – непустого множества* $V = V(\mathcal{G})$ *и множества* $E = E(\mathcal{G}) \subseteq V^2$*. Множество* $V$ *называется множеством вершин, множество* $E$ *называется множеством рёбер.*

*Если для любого ребра* $(u, v) \in E(\mathcal{G})$ *верно, что обратное ребро* $(v, u) \in E(\mathcal{G})$ *— тоже лежит в графе, то граф* $\mathcal{G}$ *называется неориентированным, в противном случае — ориентированным.*

*Путем из вершины* $u$ *в вершину* $v$ *в графе* $\mathcal{G}$ *называется последовательность вершин* $u, w_1, w_2, \dots, w_l, v \in V(\mathcal{G})$ *и последовательность ребер* $(u, w_1), (w_1, w_2), \dots, (w_l, v) \in E(\mathcal{G})$*, где вершины и ребра могут повторяться. Путь называется простым, если вершины в нём не повторяются. Длиной пути называется количество ребер в нем. Обозначим через* $\mathcal{W}^t(i \to j)$ *множество всех путей из вершины* $i$ *в вершину* $j$ *длины* $t$*, а через* $\mathcal{W}(i \to j)$ *— множество всех путей из вершины* $i$ *в вершину* $j$*.*

*Граф* $\mathcal{G}(V, E)$ *со введенной функцией* $P : E \to \mathbb{R}$ *называется взвешенным графом. Весом пути называется тропическое произведение (т.е. вещественная сумма) весов всех ребер в пути. Обозначим вес пути* $W$ *через* $p(W)$*.*

*Ориентированный граф называется сильно связным, если для любых* $u, v \in V(\mathcal{G})$ *существует путь из* $u$ *в* $v$ *и из* $v$ *в* $u$*.*

*Граф* $\mathcal{G}'$ *называется подграфом графа* $\mathcal{G}$*, если* $\mathcal{G}'$ *получен из* $\mathcal{G}$ *удалением некоторых ребер и, возможно, вершин. Иначе,* $V(\mathcal{G}') \subseteq V(\mathcal{G})$ *и* $E(\mathcal{G}') \subseteq E(\mathcal{G})$*.*

*Обхватом графа* $\mathcal{G}$ *называется наименьшая длина цикла в* $\mathcal{G}$ *и обозначается как* $g(\mathcal{G})$*. Через* $\hat{g}(\mathcal{G})$ *обозначается максимальный обхват среди всех компонент сильной связности графа* $\mathcal{G}$*.*

*Окружностью графа* $\mathcal{G}$ *называется наибольшая длина цикла в* $\mathcal{G}$ *и обозначается как* $cr(\mathcal{G})$*.*

*Максимальную длину простого пути в графе* $\mathcal{G}$ *будем обозначать через* $cb(\mathcal{G})$*.*

*Граф* $\mathcal{H}(U, F)$ *называется индуцированным подграфом графа* $\mathcal{G}(V, E)$*, порожденным подмножеством вершин* $U \subset V$*, если ребрами* $\mathcal{H}$ *являются те и только те ребра множества* $E$*, оба конца которых принадлежат* $U$*.*

# 3 Примитивность вещественной неотрицательной матрицы

**Определение 3.1.** *Вещественная матрица* $A$ *называется примитивной, если существует натуральное число* $m$ *такое, что* $A^m$ *положительна, то есть все числа в ней положительны. При этом наименьшее такое* $m$ *называется экспонентой матрицы и обозначается через* $exp(A)$*.*

**Теорема 3.2** (Критерий примитивности матрицы, см.[12])**.** *Неотрицательная квадратная матрица порядка* $n$ *над* $\mathbb{R}$ *примитивна тогда и только тогда, когда граф смежности этой матрицы сильно связен и НОК всех длин замкнутых путей (циклов) равно 1.*

**Теорема 3.3** (Виландта, [5])**.** *Если неотрицательная квадратная матрица порядка* $n$ *над полем вещественных чисел примитивна, то ее экспонента не превосходит число Виландта* $Wi(n) = n^2 - 2n + 2$*.*

# 4 Примитивность тропических матриц

**Замечание 4.1.** *Примитивность и экспонента тропической матрицы определяется так же, как и в вещественном случае, с отличием лишь в том, что в степени матрицы не должно быть нулей тропического полукольца, т.е.* $-\infty$*.*

## 4.1 Матрицы $2 \times 2$

**Утверждение 4.2.** *Матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ над тропическим полукольцом примитивна тогда и только тогда, когда $b \neq -\infty \wedge c \neq -\infty \wedge (a \neq -\infty \vee d \neq -\infty)$; причем ее экспонента равна 2.*

***Доказательство.*** Если перемножить матрицы, у которых в правом верхнем углу стоят $-\infty$, то у результата будет стоять $-\infty$ в том же углу:

$$\begin{pmatrix} a & -\infty \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & -\infty \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & a \odot -\infty \oplus -\infty \odot d' \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & -\infty \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Аналогично с левым нижнем углом. Значит, в правом верхнем и в левом нижним углах не могут стоять $-\infty$.

Перемножим 2 матрицы, у которых на главной диагонали стоят $-\infty$:

$$\begin{pmatrix} -\infty & b \\ c & -\infty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\infty & b' \\ c' & -\infty \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \dots & -\infty \odot b' \oplus b \odot -\infty \\ c \odot -\infty \oplus -\infty \odot c' & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & -\infty \\ -\infty & \dots \end{pmatrix}$$

У результата стоят $\infty$ на побочной диагонали. Перемножим такую матрицу с матрицей с $\infty$ на главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} a & -\infty \\ -\infty & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\infty & b \\ c & -\infty \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a \odot -\infty \oplus -\infty \odot c & \dots \\ \dots & -\infty \odot b \oplus -\infty \odot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\infty & \dots \\ \dots & -\infty \end{pmatrix}$$

Снова получилась матрица с $-\infty$ на главной диагонали. Значит, в любой степени матрицы с $-\infty$ на главной диагонали будут $-\infty$. Значит, она не может быть примитивной.

Проверим, что матрица с описанными выше ограничениями будет примитивной:

$$A^{\odot 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\odot 2} = \begin{pmatrix} a \odot a \oplus b \odot c & a \odot b \oplus b \odot d \\ a \odot c \oplus c \odot d & b \odot c \oplus d \odot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(2a, b+c) & b + \max(a,d) \\ c + \max(a,d) & \max(b+c, 2d) \end{pmatrix}$$

Равным $-\infty$ в этой матрице может быть или $a$, или $d$, или никто из них. В любом случае, в квадрате не будет $-\infty$. Значит, $A$ является примитивной с показателем степени 2. □

## 4.2 Обобщение теоремы Виландта на тропические матрицы

**Определение 4.3.** $\mathbb{B} = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$ *— множество с сложением, аналогичным дизъюнкции, и умножением, аналогичным конъюнкции:*

| + | **0** | **1** |
|---|---|---|
| **0** | **0** | **1** |
| **1** | **1** | **1** |

| · | **0** | **1** |
|---|---|---|
| **0** | **0** | **0** |
| **1** | **0** | **1** |

**Замечание 4.4.** *Примитивность и экспонента матрицы над $\mathbb{B}$ определяется так же, как и в вещественном случае.*

**Теорема 4.5** (Виландта для матриц над $\mathbb{B}$)**.** *Если матрица $A \in M_n(\mathbb{B})$ примитивна, то ее экспонента не превосходит $n^2 - 2n + 2$.*

***Доказательство.*** Рассмотрим функцию $\beta' : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{B}$ такую, что

$$\beta'(t) = \begin{cases} \mathbf{1}, t \neq 0 \\ \mathbf{0}, t = 0 \end{cases} \tag{1}$$

и функцию $B' : M_n(\mathbb{R}_{\geq 0}) \to M_n(\mathbb{B})$, действующая функцией $\beta'$ поэлементно:

$$B' : A = (a_{ij}) \mapsto B'(A) = (\beta'(a_{ij})) \tag{2}$$

**Лемма 4.6.** *$B'$ — гомоморфизм.*

***Доказательство леммы.*** Необходимо доказать, что

$$B'(X) + B'(Y) = B'(X+Y) \text{ и } B'(X) \cdot B'(Y) = B'(X \cdot Y) \tag{3}$$

Первое верно, так как для любых $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ верно, что $\beta'(x) + \beta'(y) = \beta'(x+y)$.

Докажем, что $B'$ сохраняет умножение: рассмотрим элемент с индексами $i, j$:

$$(B'(X) \cdot B'(Y))_{ij} = \sum_{s=1}^{n} B'(X)_{is} \cdot B'(Y)_{sj} = \sum_{s=1}^{n} \beta'(X_{is}) \cdot \beta'(Y_{sj}) =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \beta'(X_{is} \cdot Y_{sj}) = \beta'(\sum_{s=1}^{n} X_{is} \cdot Y_{sj}) = \beta'((X \cdot Y)_{ij}) = (B'(X \cdot Y))_{ij} \tag{4}$$

Значит, $B'$ — гомоморфизм. □

Рассмотрим матрицу $A'$, лежащую в прообразе матрицы $A$ при отображении $B'$ (для этого достаточно взять матрицу $A$ как матрицу над $\mathbb{R}_{\geq 0}$).

Заметим, что для любого $m$ положения нулей в матрице $(A')^m$ и нулей в $B'((A')^m) = (B'(A'))^m = A^m$ совпадают, в том числе и для $m = exp(A')$. Из этого следует, что $exp(A) = exp(A') \leq Wi(n)$ по теореме Виландта для матриц над $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Следовательно, теорема Виландта верна и для $\mathbb{B}$-матриц. □

**Теорема 4.7** (Вилантда для тропических матриц)**.** *Если матрица $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ примитивна, то ее экспонента не превосходит $Wi(n)$.*

***Доказательство.*** Рассмотрим функцию $\beta : \mathbb{R}_{max} \to \mathbb{B}$ такую, что

$$\beta(t) = \begin{cases} \mathbf{1}, t \neq -\infty \\ \mathbf{0}, t = -\infty \end{cases} \tag{5}$$

и функцию $B : M_n(\mathbb{R}_{max}) \to M_n(\mathbb{B})$, действующая функцией $\beta$ поэлементно:

$$B : A = (a_{ij}) \mapsto B(A) = (\beta(a_{ij})) \tag{6}$$

**Лемма 4.8.** *$B$ — гомоморфизм.*

***Доказательство леммы.*** Надо доказать, что

$$B(X) + B(Y) = B(X \oplus Y) \text{ и } B(X) \cdot B(Y) = B(X \odot Y) \tag{7}$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 4.6, но с заменой $\beta'$ на $\beta$, $B'$ на $B$ и $\mathbb{R}_{\geq 0}$ на $\mathbb{R}_{max}$. □

Рассмотрим $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ и её образ при отображении $B$. Для любого $m$ положения бесконечных элементов в матрице $A^m$ и нулей в $B(A^m) = (B(A))^m$ совпадают, в том числе и для $m = exp(B(A))$.

Из этого следует, что $exp(A) = exp(B(A)) \leq Wi(n)$ по теореме Виландта для матриц над $\mathbb{B}$, что доказывает теорему Виладнта для тропических матриц. □

# 5 Примитивность тропических матриц и графы

**Определение 5.1.** *Матрица $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ называется матрицей смежности графа $\mathcal{G}$, если в $\mathcal{G}$ $n$ вершин и в ячейке с индексами $i$ и $j$ матрицы $A$ стоит:*
*1) $-\infty$ тогда и только тогда, когда вершины с номерами $i$ и $j$ не соединены ребром;*
*2) число $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда между вершинами с номерами $i$ и $j$ есть ребро веса $x$. Если граф не взвешенный, то в матрице стоит $x = 0$.*

Заметим, что есть и обратное соответствие: по матрице смежности можно восстановить граф. Обозначим через $\mathcal{G}(A)$ граф, соответствующий тропической матрице $A$.

Степени тропических матриц интересны по многим причинам, в том числе по следующей:

**Утверждение 5.2.** *Рассмотрим $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$, $i, j \in V(\mathcal{G}(A))$, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда:*

$$a_{ij}^t = \bigoplus \{p(W) : W \in \mathcal{W}^t(i \to j)\}$$

***Доказательство.*** Докажем это по индукции. База, очевидно, верна для $t = 0$: в этом случае $A^t = I$ — единичная тропическая матрица, на главной диагонали которой стоят тропические единицы, т.е. 0, а на остальных местах стоят тропические нули, т.е. $-\infty$.

Докажем переход: пусть утверждение верно для $t$, докажем для $t + 1$.

$$a_{ij}^{t+1} = \bigoplus_{k=1}^{k} a_{ik}^t \odot a_{kj} = \max_k a_{ik}^t + a_{kj}$$

Заметим, что любой путь из вершины $i$ в вершину $j$ длины $t + 1$ есть конкатенация пути из вершины $i$ в вершину $k$ длины $t$ и ребра из $k$ в $j$ для какой-то вершины $k$, а вес этого пути — это сумма веса первого пути и веса последнего ребра. Из всех возможных путей оптимальным будет путь с максимальным общим весом, что согласуется с определением тропического перемножения матриц. □

## 5.1 Матрицы $2 \times 2$

**Утверждение 5.3.** *Матрица $A \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ примитивна тогда и только тогда, когда в графе $\mathcal{G}(A)$ для любых двух вершин между ними есть путь длины ровно 2.*

***Доказательство.*** Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Если $a_{12} = -\infty$, то не будет существовать пути из первой вершины во вторую. Если $a_{21} = -\infty$, то не будет существовать пути из второй вершины в первую. Если предыдущие два условия не выполняются, но $a_{11} = a_{22} = -\infty$, то не будет существовать пути из первой вершины во вторую и из второй в первую. В этих случаях матрица $A$ не будет примитивной.

Если все вышеперечисленные условия не выполняются, то матрица будет примитивной, что подтверждает доказанный ранее путем перемножения матриц факт. □

## 5.2 Общий случай

**Утверждение 5.4.** *Матрица $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ примитивна тогда и только тогда, когда в графе $\mathcal{G}(A)$ между любыми двумя вершинами найдётся путь длины ровно $Wi(n)$.*

***Доказательство.*** Рассмотрим матрицу $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ и соответствующий ей граф $\mathcal{G}(A)$. Примитивность $A$ равносильна отсутствия в матрице $A^{Wi(n)}$ бесконечных элементов (так как по теореме Виландта $exp(A) \leq Wi(n)$). Последнее утверждение равносильно тому, что в графе $\mathcal{G}(A)$ между любыми двумя вершинами найдётся путь длины ровно $exp(A)$. □

# 6 Индекс цикличности

**Определение 6.1.** *Граф* $\mathcal{G}_1$ *гомоморфен графу* $\mathcal{G}_2$*, если существует сюръективное отображение* $f : V(\mathcal{G}_1) \to V(\mathcal{G}_2)$ *такое, что для любого ребра* $(u, v) \in E(\mathcal{G}_1)$ *верно, что* $(f(u), f(v)) \in E(\mathcal{G}_2)$.

**Определение 6.2.** *Графы* $\mathcal{G}_1$ *и* $\mathcal{G}_2$ *изоморфны, если существует биекция* $\rho : V(\mathcal{G}_1) \to V(\mathcal{G}_2)$ *такая, что для любых* $u, v \in V(\mathcal{G}_1)$ *верно, что* $(u, v) \in E(\mathcal{G}_1)$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $(\rho(u), \rho(v)) \in E(\mathcal{G}_2)$.

**Определение 6.3.** *Индекс цикличности (или просто цикличность) ориентированного графа* $\mathcal{G}$ *обозначается через* $\sigma_{\mathcal{G}}$ *и определяется следующим образом:*

1. *Если* $\mathcal{G}$ *сильно связен, и* $|V(\mathcal{G})| \geq 2$*, то цикличность равна НОД всех длин ориентированных циклов в* $\mathcal{G}$.

2. *Если в* $\mathcal{G}$ *есть только одна вершина (с петлей или без), то* $\sigma_{\mathcal{G}} = 1$.

3. *Если* $\mathcal{G}$ *не сильно связен, то его цикличность равна НОК цикличностей всех максимальных его сильно связных подграфов.*

**Замечание 6.4** (Переформулировка критерия примитивности, см.[12])**.** *Тропическая матрица* $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ *примитивна тогда и только тогда, когда* $\mathcal{G}(A)$ *сильно связен и его индекс цикличности равен* 1.

**Замечание 6.5.** *Цикличность сильно связного графа* $\mathcal{G}$ *— это наибольшее* $k$ *такое, что* $\mathcal{G}$ *гомоморфен ориентированному циклу из* $k$ *вершин.*

Заметим, что в сильно связном графе $\mathcal{G}$ с цикличностью $\gamma$ любые 2 пути, соединяющий 2 фиксированные вершины, имеют одинаковые длины по модулю $\gamma$. Из этого следует, что на множестве $V(\mathcal{G})$ можно ввести отношение эквивалентности: 2 вершины лежат в одном классе эквивалентности тогда и только тогда, когда длина пути от одной к другой кратна $\gamma$.

**Определение 6.6.** *Эти классы эквивалентности называются циклическими классами.*

Пусть $\mathcal{G} = (V, E)$ — взвешенный ориентированный граф с матрицей смежности $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$. Пусть $C$ — это ориентированный цикл в $\mathcal{G}$ с весами ребер $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_l}$. Средний вес ребра в $C$ — это тропическое среднее геометрическое весов ребер в $C$:

$$w_a(C) = \sqrt[\odot l]{a_{i_1} \odot a_{i_2} \odot \cdots \odot a_{i_l}} = \frac{1}{l}(a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_l})$$

**Определение 6.7.** *Ориентированный цикл называется критическим, если у него максимальный средний вес. Критический подграф* $\mathcal{G}^c$ *графа* $\mathcal{G}$ *— это объединение всех критических циклов в* $\mathcal{G}$.

Пусть $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ — матрица смежности графа $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$, который содержит хотя бы один ориентированный цикл.

**Определение 6.8.** *Цикличностью* $A$ *называется цикличность критического подграфа* $\mathcal{G}^c$ *графа* $\mathcal{G}$*, то есть* $\sigma(A) := \sigma_{\mathcal{G}^c}$*. Если в* $\mathcal{G}(A)$ *нет ориентированных циклов, то* $\sigma(A) = 1$.

# 7 Скрамблинг индекс

**Определение 7.1.** *Скрамблинг индекс ориентированного графа $\mathcal{G}$ — это наименьшее натуральное число $k$ такое, что для любых $u, v \in V(\mathcal{G})$ существует $w \in V(\mathcal{G})$ такая, что есть путь длины $k$ из $u$ в $w$ и из $v$ в $w$. Обозначим скрамблинг индекс через $k(\mathcal{G})$. Если не существует таких $k$, то $k(\mathcal{G}) = 0$.*

**Определение 7.2.** *Графом Виландта называется ориентированный граф на $n \geq 2$ вершинах со множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ и множеством ребер*

$$E = \{(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n)\} \cup \{(n-1, 1)\}$$

*В этом графе есть два цикла длиной $n-1$ и $n$, следовательно, $\sigma_{W_n} = 1$, он сильно связен. Следовательно, он примитивен.*

**Теорема 7.3** ([8])**.** *Пусть $\mathcal{G}$ — примитивный ориентированный граф порядка $n \geq 2$. Тогда*

$$exp(\mathcal{G}) \leq n^2 - 2n + 1$$

*Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} \cong W_n$.*

**Замечание 7.4** ([8])**.** *Для примитивного ориентированного графа верно неравенство*

$$0 < k(\mathcal{G}) \leq exp(\mathcal{G})$$

*Это следует из определений скрамблинг индекса и экспоненты.*

**Определение 7.5.** *Будем называть подграф $\mathcal{H}$ графа $\mathcal{G}$ достижимым, если для любой вершины $v$ из $\mathcal{G}$ существует путь из $v$ в какую-либо вершину из $\mathcal{H}$.*

**Теорема 7.6** ([8], критерий положительности скрамблинг-индекса)**.** *Рассмотрим произвольный ориентированный граф $\mathcal{G}$. Его скрамблинг-индекс положителен тогда и только тогда, когда в $\mathcal{G}$ есть примитивный достижимый подграф.*

**Теорема 7.7** ([8])**.** *Обозначим через $\lceil x \rceil$ наименьшее целое число, большее или равное $x$.*

*Если $\mathcal{G}$ — примитивный граф с $n \geq 2$ вершинами, то*

$$k(\mathcal{G}) \leq \left\lceil \frac{Wi(n)}{2} \right\rceil$$

*При $n \geq 3$ равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} \cong W_n$. При $n = 2$ равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} \cong W_2$ или $\mathcal{G} \cong J_2$, где $J_n$ — полный ориентированный граф на $n$ вершинах, то есть $E(J_n) = V^2$.*

# 8 CSR-декомпозиция и слабое CSR-расширение

## 8.1 Необходимые определения

**Определение 8.1.** *Назовем тропическую матрицу $A$ (или соответствующий ей граф) неразложимой, если граф $\mathcal{G}(A)$ сильно связен, иначе — разложимой.*

*Назовем тропическую матрицу $A$ (или соответствующий ей граф) полностью разложимой, если в графе $\mathcal{G}(A)$ нет ребер между различными компонентами сильной связности.*

Рассмотрим тропическую матрицу $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$. Обозначим максимальный средний вес цикла в $\mathcal{G}(A)$ через $\lambda(A)$, т.е.

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \bigoplus_{k=1}^{d} \bigoplus_{i_1,\ldots,i_k} (a_{i_1 i_2} \odot \cdots \odot a_{i_{k-1} i_k})^{\odot 1/k} = \\ &= \max_{k=1}^{d} \max_{i_1,\ldots,i_k} \frac{(a_{i_1 i_2} + \cdots + a_{i_{k-1} i_k})}{k}\end{aligned} \tag{8}$$

Необходимо сказать, что критический подграф $\mathcal{G}^c(A)$ является полностью разложимым и средний вес любого цикла в нём равен $\lambda(A)$.

**Определение 8.2.** *Для $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ с $\lambda(A) \leq 0$ звездой Клини называется следующая матрица:*

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i = \bigoplus_{i=0}^{d-1} A^i$$

В матрице $A^*$ в ячейке под номером $i$ и $j$ лежит длина оптимального пути от вершины $i$ к вершине $j$ по всему графу, без ограничения на длину пути. Условие $\lambda(A) \leq 0$ необходимо, так как иначе этот ряд расходится: можно идти по циклу с положительным средним весом и улучшать ответ. Так как дважды проходить через одну и ту же вершину не имеет смысла, можно ограничиться первыми $d$ матрицами.

## 8.2 Матрицы CSR

Рассмотрим неразложимую $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ и некоторый подграф $\mathcal{G}$ критического подграфа $\mathcal{G}^c(A)$ без тривиальных компонент сильной связности. Введем обозначения: $\sigma = \sigma(\mathcal{G})$ – индекс цикличности $\mathcal{G}$, $M = ((\lambda(A)^- \odot A^\sigma)^*$.

Определим матрицы $C, S, R \in M_r(\mathbb{R}_{\max})$ следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ если } j \in V(\mathcal{G}) \\ -\infty, \text{ иначе,} \end{cases} \qquad r_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ если } i \in V(\mathcal{G}) \\ -\infty, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$s_{ij} = \begin{cases} \lambda(A)^- \odot a_{ij}, \text{ если } (i,j) \in E(\mathcal{G}) \\ -\infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Здесь и далее для $a \in \mathbb{R}_{\max}$, $a \neq -\infty$ через $a^-$ будем обозначать обратное по умножению к $a$, т.е. $a^- = -a$.

Если матрицы $C, S, R$ определены через матрицу $A$, будем писать $CS^tR[A]$ для произвольного $t$.

**Теорема 8.3** ([9], [10])**.** *Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ неразложима и CSR-матрицы определены через некоторый подграф $\mathcal{G}$ графа $\mathcal{G}(A)$. Тогда существует неотрицательное целое $T(A)$ такое, что для любого $t \geq T(A)$ :*

$$A^t = \lambda(A)^{\odot t} \odot CS^tR[A]. \tag{9}$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (9) записывается в виде:

$$A^t = CS^tR[A]. \tag{10}$$

В добавок к $T(A)$, введем ещё 2 функции: $T_1(A, B)$ и $T_2(A, B)$. Для этого зафиксируем тот же подграф $\mathcal{G}$ и введем новую матрицу $B \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\infty, \text{ если } i \in V(\mathcal{G}) \text{ или } j \in V(\mathcal{G}), \\ a_{ij}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

**Теорема 8.4** ([9], [10]). *Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ неразложима и CSR-матрицы определены через некоторый подграф $\mathcal{G}$ графа $\mathcal{G}(A)$.*

*(Определение $T_1(A,B)$:) существует неотрицательное целое $T_1(A,B)$ такое, что для любого $t \geq T_1(A,B)$ верно следующее:*

$$A^t = (\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^tR[A]) \oplus B^t. \tag{11}$$

*(Определение $T_2(A,B)$:) существует неотрицательное целое $T_2(A,B)$ такое, что для любого $t \geq T_2(A,B)$ верно следующее:*

$$\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^tR[A] \geq B^t. \tag{12}$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (11) записывается в виде:

$$A^t = CS^tR[A] \oplus B^t, \tag{13}$$

а 12 записывается в виде

$$CS^tR[A] \geq B^t. \tag{14}$$

Есть несколько способов выбрать подграф $\mathcal{G}$, но в этой работе мы будем работать со способом Нахтигалля, в котором этот подграф совпадает с критическим подграфом исходного графа: $\mathcal{G} = \mathcal{G}^c(A)$. В дальнейшем, чтобы указать, что матрица была выбрана с помощью способа Нахтигалля, будем писать $B_N$ вместо $B$ и $T_{1,N}(A)$ вместо $T_1(A, B_N)$.

**Утверждение 8.5.** $T(A) \leq \max(T_1(A,B), T_2(A,B))$.

***Доказательство.*** Возьмем $t \geq \max(T_1(A,B), T_2(A,B))$, для него выполняются условия (11) и (12). Из (12) следует, что операция тропического сложения с $B^t$ в (11) бессмысленна, откуда для данного $t$ следует (9). □

**Замечание 8.6.** *Заметим, что если $B = -\infty$, то $T(A) = T_1(A,B)$, а $T_2(A,B) = 0$.*

**Замечание 8.7** (Инвариантность относительно умножения на скаляр)**.** *Если $A' = A \odot \mu$, где $\mu \in \mathbb{R}$, то*

- $\lambda(A') = \lambda(A) \odot \mu$, $B_N[A'] = B_N[A]$
- $CSR[A'] = CSR[A]$

*Значит, $T_1(A,B)$, $T_2(A,B)$ инвариантны относительно умножения матрицы на скаляр, что позволяет нам без разграничения общности говорить, что $\lambda(A) = 0$.*

**Утверждение 8.8** (см. [9])**.** *Пусть $\lambda(A) = 0$. Тогда $A^t \geq CS^tR[A]$ тогда и только тогда, когда $t \geq T_{1,N}(A)$.*

Это утверждение позволяет искать $T_{1,N}$: достаточно найти наименьшее $t$, для которого верно $A^t \geq CS^tR[A]$. Тогда $T_{1,N} = t$. Если, вдобавок, $B = -\infty$, то $T = t$ по замечанию 8.6.

**Утверждение 8.9** (Периодичность, см. [11])**.** *Для любого $t \geq 0$ верно, что $CS^{t+\sigma}R[A] = CS^tR[A]$, где $\sigma$ — это цикличность $\mathcal{G}^c(A)$. Иначе говоря, последовательность матриц $\{CS^tR[A]\}_{t\geq 0}$ периодична с периодом $\sigma$.*

Значит, в силу равенства $A^t = CS^tR$ при $t \geq T(A)$, последовательность матриц $A^t$ при $t \geq T(A)$ является периодической с периодом $\sigma$.

Введем несколько новых обозначений:

1. Через $\mathcal{W}^{t,l}(i \to j)$ обозначим множество путей от вершины $i$ к вершине $j$, имеющих длину $t$ по модулю $l$;

2. Через $\mathcal{W}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ обозначим множество путей от вершины $i$ к вершине $j$, проходящих хотя бы через одну вершину из $\mathcal{G}$. Аналогично определяются $\mathcal{W}^t(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$, $\mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ — граф над стрелкой добавляет ограничение на пути в множестве.

3. Для множества $\mathcal{W}$ через $p(\mathcal{W})$ обозначим максимальный вес пути из множества $\mathcal{W}$.

**Утверждение 8.10** ([10]). *Если $\lambda(A) = 0$, то верно следующее тождество:*

$$(CS^tR[A])_{ij} = p(\mathcal{W}^{t,\sigma}(i \xrightarrow{\mathcal{G}^c(A)} j)), \tag{15}$$

*где $\sigma$ обозначает цикличность $\mathcal{G}^c(A)$.*

**Теорема 8.11** (Некоторые оценки $T_{1,N}(A)$, см. [10]). *Для любой $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ имеем:*

1. $T_{1,N}(A) \leq Wi(n)$;

2. $T_{1,N}(A) \leq \hat{g}(n-2) + n$;

3. $T_{1,N}(A) \leq (\hat{g} - 1)(cr - 1) + (\hat{g} + 1)cd$,

*где $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$, $cr = cr(\mathcal{G}(A))$, а $cd = cd(\mathcal{G}(A))$.*

# 9 Примеры

Оценим $T, T_1$ и $T_2$ для некоторых графов.

## 9.1 Полный граф

Рассмотрим матрицу $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$, $a_{ij} = 0$ для любых индексов $i, j$. Граф $\mathcal{G}(A)$ является полным, веса всех ребер в нём равны 0. Значит, критический подграф $\mathcal{G}^c$ совпадает со всем графом $\mathcal{G}$. Из этого следует, что матрица $B = -\infty$ и $T_2 = 0$.

Найдем матрицы $C, S, R$. Индекс цикличности полного графа $\sigma = 1$ (т.к. в нём есть циклы длины 1), следовательно $C = R = M = A^*$, $S = A$.

Так как для любого положительного $t$ верно, что $A^t = A$, то $A^* = A$ и равенство $A^*A^tA^* = A^t$ выполняется для любого положительного $t$.

Следовательно, $T = T_1 = 1$.

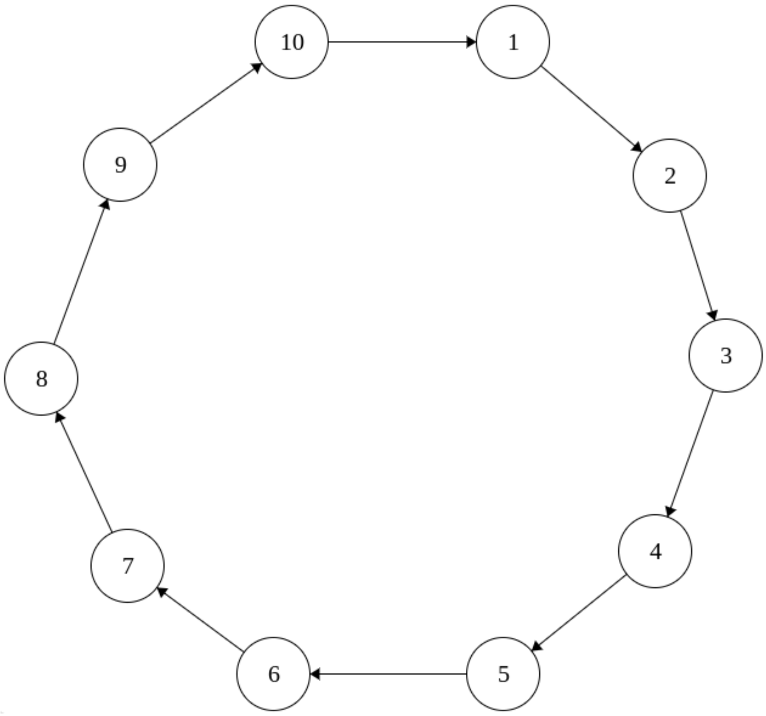
## 9.2 Односторонний цикл

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ одностороннего цикла на $n$ вершинах.

В силу инвариантности границ относительно домножения на скаляр из $\mathbb{R}$ (замечание 8.7), можно рассматривать только тот случай, в котором $\lambda(A) = 0$. Тогда $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A)$, $\sigma = n$.

$$M = (A^n)^* = E^* = E = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & ... & -\infty \\ -\infty & 0 & ... & -\infty \\ ... & ... & ... & ... \\ -\infty & -\infty & ... & 0 \end{pmatrix} = diag(0, 0, \ldots, 0)$$

Значит, $C = R = E$, $S = A$, $B = -\infty$, и для любого неотрицательного $t$ верно $CS^tR[A] = A^t$. Следовательно, $T = T_1 = T_2 = 0$.




## 9.3 Двусторонний цикл

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ двустороннего цикла на $n$ вершинах. Пронумеруем вершины так, чтобы первый цикл состоял из вершин $1, 2, \ldots n$(в порядке обхода), а второй — из $n, n-1, \ldots, 1$ (в порядке обхода). Чтобы избежать кратных рёбер, будем работать с $n \geq 3$.

Будем считать, что $\lambda(A) = 0$. Рассмотрим случай, в котором циклы по часовой стрелке и против часовой стрелки имеют одинаковый средний вес, равный нулю. Значит, критический подграф $\mathcal{G}^c(A)$ совпадает со всем графом $\mathcal{G}(A)$.

**Лемма 9.1.** *Все циклы в таком графе имеют средний вес 0.*

***Доказательство.*** Пусть вес пути по часовой стрелке от вершины $i$ до вершины $j$ равен $x$, а против часовой стрелки — $y$. Эти два пути образуют цикл, значит $x+y \leq 0$. Докажем, что $x + y = 0$.

Дополнение к большому циклу по часовой стрелке первого пути весит $-x$, а дополнение к большому циклу против часовой стрелки весит $-y$. Так как можно сначала пойти по дополнению к первому пути, а потом — по дополнению ко второму пути, эти два дополнения тоже образуют цикл. Значит, $(-x) + (-y) \leq 0$. Значит, $x + y \geq 0$.

Следовательно, $x + y = 0$. □

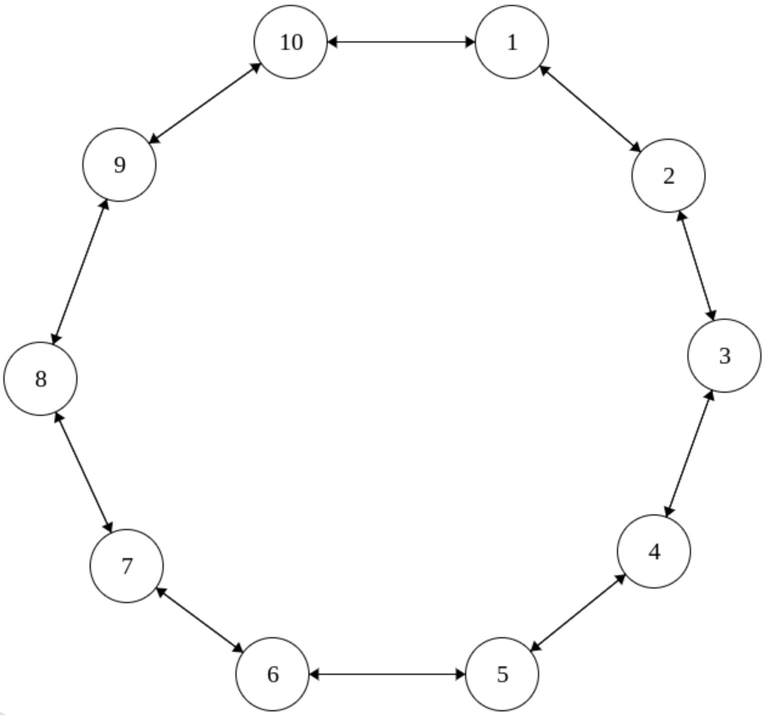
**Следствие 9.2.** *Для фиксированных вершины $i$ и $j$ все пути от $i$ до $j$ весят одинаково.*

Это верно, так как, в терминах леммы, $x = -y$. Не важно, какой путь выбрать от одной вершины к другой: по или против часовой стрелки — вес будет одинаковый. Если пройти по большому циклу, то вес не изменится, так как суммарный вес большого цикла равен 0.

Необходимо рассмотреть 2 случая: когда $n$ нечётно и когда $n$ чётно.

**n нечетно.** В этом случае цикличность критического графа $\sigma = 1$.

Следовательно, $C = R = M = A^*$, а $S = A$. Заметим, что в матрице $CS^tR[A]$ нет $-\infty$ (так как $CS^tR[A] = A^*A^tA^*$, а в $A^*$ нет $-\infty$). Значит, по следствию из леммы, $CS^tR[A] = A^*$.




Значит, условие $CS^tR[A] = A^t$ верно тогда и только тогда, когда $A^t = A^*$. Поэтому $T = exp(\mathcal{G})$.

**Утверждение 9.3.** *Экспонента данного графа равна* $n-1$.

***Доказательство.*** Заметим, что в $A^{n-2}$ на главной диагонали стоят $-\infty$: $n-2$ нечётно, поэтому, чтобы вернуться в исходную вершину за $n-2$ шага, надо сменить чётность — пройти весь круг, так как остальные циклы имеют чётную длину. Но цикл имеет длину $n$, поэтому его пройти не получится. Значит, $exp(\mathcal{G}) \geq n-1$.

Покажем, что $A^{n-1} > -\infty$.

Зафиксируем произвольную вершину $v$ графа. Назовем вершину *четной*, если до нее можно дойти из $v$ за чётное число шагов. Заметим, что тогда все вершины графа четные, так как $n$ нечетно и идти можно как по, так и против часовой стрелки. Наибольшая длина такого пути равна $n-1$. Значит, $A^{n-1} > -\infty$. □

**Следствие 9.4.** $T_2 = 0$, *так как* $B = -\infty$. $T = T_1 = exp(\mathcal{G}) = n-1$.

**Утверждение 9.5.** *Скрамблинг-индекс этого графа равен* $\frac{n-1}{2}$.

***Доказательство.*** Пусть $k = k(\mathcal{G})$ — скрамблинг-индекс данного графа, т. е. для любых двух вершин $u$ и $v$ существуют вершина $w$ такая, что существуют пути из $u$ в $w$ и из $v$ в $w$ длины $k$. В силу неориентированности этого графа это условие равносильно следующему: для любых вершин $u$ и $v$ существует путь из $u$ в $v$ длины $2k$.

Заметим, что для соседних вершин минимальная четная длина пути, соединяющего их, равна $n-1$, так как $n$ нечетно. Значит, $k \geq \frac{n-1}{2}$.

Рассмотрим произвольные вершины $i$ и $j$. Пусть два простых пути между ними имеют длину $x$ и $n-x$. Так как $x + (n-x) = n$ — нечетное число, то среди этих двух путей найдется ровно один с четной длиной. Его длина не превышает $n-1$ — наибольшее четное число, не превосходящее $n$. Значит, $k \leq \frac{n-1}{2}$.

Следовательно, $k(\mathcal{G}) = \frac{n-1}{2}$. □

**n четно.** В этом случае $\sigma = 2$ и граф не примитивен. $C = R = M = (A^2)^*$, $S = A$.

Так как последовательность матриц $CS^tR$ периодична с периодом $\sigma = 2$ (см. [10]), то при $t \geq T(A)$

$$A^t = CS^tR = \begin{cases} (A^2)^*, \text{ если } t \text{ четно.} \\ A \odot (A^2)^*, \text{ если } t \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В матрице $(A^2)^*$ небесконечные элементы стоят в клетках $(i, j)$, если вершины $i$ и $j$ находятся на четном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с одинаковой четностью равно $\frac{n}{2}$. Значит, условие при четном $t$ выполняется при $t \geq \frac{n}{2}$, а при прочих $t$ не выполняется.

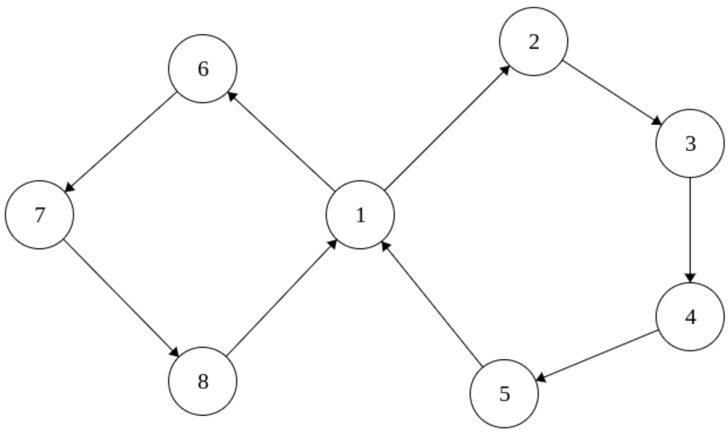
В матрице $A \odot (A^2)^*$ небесконечные элементы стоят в клетках $(i, j)$, если вершины $i$ и $j$ находятся на нечетном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с разной четностью равно $\frac{n}{2} - 1$. Значит, условие при четном $t$ выполняется при $t \geq \frac{n}{2} - 1$, а при прочих $t$ — не выполняется.

Следовательно, $T(A) = \frac{n}{2}$. В силу того, что $B = -\infty$, границы $T_1 = T = \frac{n}{2}$, а $T_2 = 0$, так как $B = -\infty$.

## 9.4 Два цикла

**Определение 9.6.** *Назовем ромашкой граф, состоящий из нескольких пересекающихся по одной вершине циклов.*

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_{2n}(\mathbb{R}_{\max})$ графа-ромашки, состоящего из двух циклов длины $n$ и $n+1$. Будем называть $n$-циклом цикл длины $n$ и $(n+1)$-циклом — цикл длины $n + 1$.




Будем рассматривать те графы, в которых средний вес каждого цикла равен 0. Тогда критический подграф совпадает со всем графом: $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A) = \mathcal{G}$. Его цикличность $\sigma = 1$, значит, $C = R = M = A^*$, а $S = A$.

Следовательно, при $t \geq T(A)$ верно $CS^tR[A] = A^*A^tA^* = A^t$. Так как для произвольных фиксированных вершин любые два пути между ними имеют равные веса, то $T(A) = exp(A)$ (так как в равенстве $A^t = CS^tR[A]$ справа стоит матрица без $-\infty$, а значит и слева должна стоять матрица без $-\infty$).

Это приводит нас к более общему утверждению.

**Утверждение 9.7.** *Рассмотрим примитивную матрицу $A$, у которой $\mathcal{G}(A)$ совпадает со своим критическим подграфом, $\lambda(A) = 0$. Если для двух произвольных фиксированных вершин $u$ и $v$ верно, что все пути из $u$ в $v$ имеют одинаковый вес, то $T(A) = T_{1,N}(A) = exp(A)$, а $T_{2,N}(A) = 0$.*

***Доказательство.*** Доказательство аналогично предыдущему пункту.

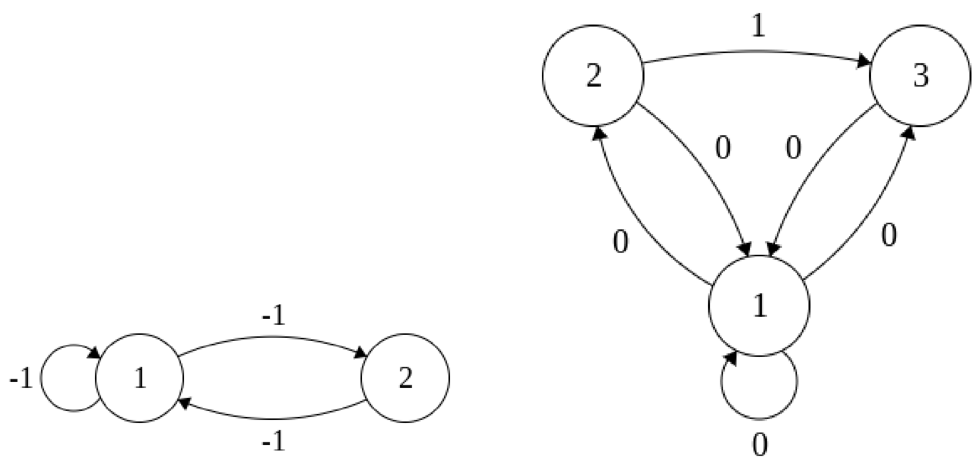
По определению, $M = (A^\sigma)^* = A^*$. Следовательно, $C = R = M = A^*$, а $S = A$.

Значит, при $t \geq T(A)$ верно $CS^tR[A] = A^*A^tA^* = A^t$. В $A^*$ нет $-\infty$, потому что $\mathcal{G}(A)$ сильно связен. Значит, при домножении $A^*$ на матрицу, у которой в каждом столбце есть небесконечный элемент (т.к. граф связен), в результате получится матрица без бесконечностей.

Значит, в левой части равенства нет $-\infty$, поэтому она совпадает с $A^{exp(A)}$. Значит, при $t \geq exp(A)$ выполняется условие на $T(A)$, и $T(A) = exp(A)$.

Так как $B = -\infty$, то $T_{2,N}(A) = 0$, и $T_{1,N}(A) = T(A) = exp(A)$. $\square$

Заметим, что обратное утверждение неверно. Рассмотрим следующие графы:




(a) (b)

В обоих графах экспонента совпадает с $T$ и $T_1$, а $T_2 = 0$ (в обоих графах экспонента равна 2), но в графе (a) максимальный средний вес цикла равен $-1$, а в графе (b) критический подграф не совпадает со всем графом.

**Следствие 9.8.** *Если $\mathcal{G}$ — примитивный граф, все рёбра которого имеют вес* 0*, и $A$ — его матрица смежности, то $T(A) = T_{1,N}(A) = exp(A)$, а $T_{2,N}(A) = 0$.*

***Доказательство.*** Это утверждение верно, так как $\mathcal{G}$ удовлетворяет всем условиям утверждения 9.7. $\square$

**Утверждение 9.9.** *Экспонента ромашки, состоящей из циклов длины $n$ и $n+1$, равна $n(n+1)$.*

***Доказательство.*** Докажем, что в $A^{n(n+1)-1}$ есть бесконечные элементы. Рассмотрим вершины $i = 2$, $j = n+1$ и покажем, что в $\mathcal{G}(A)$ не существует пути длины $n(n+1)-1$ между $i$ и $j$.

Любой путь из $i$ в $j$, длина которого больше $n-1$, состоит из трех частей: первая часть — путь из $i$ в 1 длины $n$, вторая часть — $a$ циклов длины $n$, и $b$ циклов длины $n+1$, идущих в любом порядке. Третья часть — путь из 1 в $j$ длины $n$. Таким образом, суммарная длина пути равна $an + b(n+1) + 2n = (a+2)n + b(n+1)$.

Покажем, что уравнение

$$n(n+1) - 1 = (a+2)n + b(n+1) \tag{16}$$

не имеет решений в целых неотрицательных числах относительно $a$ и $b$.

Предположим противное: пусть существуют целые неотрицательные $a, b$, являющиеся решениями 16. Заметим, что $n(n+1)-1 \equiv -1 \equiv b \pmod{n}$. Значит, $b \geq n-1$, и

$$n(n+1)-1 = (a+2)n + b(n+1) \geq (a+2)n + n^2 - 1$$

Следовательно, $n \geq (a+2)n$, что невозможно в силу неотрицательности $a$.

Значит, уравнение не имеет решений, и в $\mathcal{G}(A)$ нет искомого пути. Следовательно, в $A^{n(n+1)-1}$ есть бесконечности и $exp(A) \geq n(n-1)$.

Покажем, что в $A^{n(n+1)}$ нет бесконечностей. Надо доказать, что для любых вершин $i, j$ существует путь из $i$ в $j$ длины $n(n-1)$. Пусть расстояние от $i$ до 1 равно $x$, а расстояние от 1 до $j$ равно $y$.

Для доказательства утверждения надо показать, что для любых $x, y$ существует решение уравнения $n(n+1) = an + b(n+1) + x + y$. Заметим, что $x, y \leq n$. Пусть $z = x + y$. Рассмотрим

$$(a, b) = \begin{cases} (z, n-z) & \text{при } 0 \leq z \leq n \\ (z-n-1, 2n-z) & \text{при } n+1 \leq z \leq 2n \end{cases}$$

Легко проверить, что $a$ и $b$, определенные таким образом, неотрицательны и являются решениями данного уравнения.

Значит, искомый путь всегда найдется, и $exp(A) = n(n+1)$. □

Посчитаем скрамблинг-индекс ромашки, состоящей из циклов длины $n$ и $n+1$. Для этого введём следующее определение:

**Определение 9.10.** *Для $u, v \in V(\mathcal{G})$ введём обозначение:*

$$k_{u,v}(\mathcal{G}) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{существует } w \in V(\mathcal{G}) : \mathcal{W}^k(u \to w) \neq \varnothing \\ \text{и } \mathcal{W}^k(v \to w) \neq \varnothing\}$$

Зная значения $k_{u,v}$ для всех пар вершин $u, v$, легко можно вычислить скрамблинг-индекс всего графа:

**Лемма 9.11** ([8])**.** $k(\mathcal{G}) = \max_{u,v \in V(\mathcal{G})} k_{u,v}$.

Заметим, что скрамблинг-индекс ромашки положителен тогда и только тогда, когда она примитивна, т.е. когда НОД длин циклов в ней равен 1. Это следует из теоремы 7.6.

Рассмотрим произвольную примитивную ромашку и две её вершины $u$ и $v$. Тогда существует вершина $w$, в которую ведут пути из $u$ и из $v$ длины $k_{u,v}$.

**Лемма 9.12.** *Если $u = v$, то $w = u = v$ и $k_{u,v} = 0$. Иначе $w = 1$.*

*Если $u \neq v$, то не существует цикла, по которому полностью прошла и вершина $u$, и вершина $v$.*

***Доказательство.*** Если $u = v$, то подходят пути длины ноль и $w = u = v$. Если $u \neq v$ и $w \neq 1$, то у построенных путей есть общий суффикс, и их можно укоротить, что противоречит минимальности $k_{u,v}$.

Если существует цикл, по которому полностью прошла и вершина $u$, и вершина $v$, то оба пути можно было укоротить на этот цикл, что противоречит минимальности $k_{u,v}$. □

**Утверждение 9.13.** *Скрамблинг-индекс ромашки, состоящей из циклов длины $n$ и $n+1$, равен:*

$$k(\mathcal{G}) = \begin{cases} \frac{n^2+2n}{2}, & n \text{ чётно} \\ \frac{n^2+2n-1}{2}, & n \text{ нечётно} \end{cases}$$

***Доказательство.*** Так как граф в данной задаче фиксирован, обозначим $k_{u,v} = k_{u,v}(\mathcal{G})$.

Сначала найдем $k_{u,v}$ при $u = 1$, т.е. $k_{1,v}$. Рассмотрим пути вершин 1 и $v$: путь вершины 1 состоит из нескольких циклов, а путь вершины $v$ — это дуга длины $x$ от $v$ до 1, а затем — несколько циклов.

В силу леммы 9.12 есть 2 варианта:

1. путь вершины 1 содержит $(n+1)$-циклы, а вершины $v$ — $n$-циклы;
2. путь вершины 1 содержит $n$-циклы, а вершины $v$ — $(n+1)$-циклы.

Пусть вершина $v$ прошла $a$ циклов, а вершина 1 — $b$ циклов $(a, b \geq 0)$. Решим для каждого случая уравнение, минимизировав длину пути каждой вершины:

1. $x + an = b(n+1)$ — слева стоит длина пути вершины $v$, а справа — вершины 1. Так как мы ищем минимальную длину пути, то необходимо минимизировать левую и правую части.

   Заметим, что $b \equiv x \pmod{n}$. Значит, $b \geq x$. Следовательно, решение $a = n - x$, $b = x$ дает минимальную длину путей, которая равна $x(n+1)$.

2. $x + a(n-1) = bn$. Заметим, что $a \equiv -x \pmod{n}$. Значит, решение $a = n - x$, $b = n - x + 1$ — оптимальное. Длины путей равны $n(n - x + 1)$.

Таким образом, $k_{1,v} = \min\{x(n+1), n(n-x+1)\}$.

Найдём $k_{u,v}$ в общем случае. Пусть расстояние от $u$ до 1 равно $d_u$, расстояние от $v$ до 1 равно $d_v$, без ограничения общности $d_u \leq d_v$, и $x = d_v - d_u$.

Заметим, что первые $d_u$ рёбер в путях вершин определены однозначно, так как в этом графе есть разветвления только в вершине 1. После $d_u$ шагов вершина $u$ придет в вершину 1, и задача сводится к предыдущему случаю.

Значит, $k_{u,v} = d_u + \min\{x(n+1), n(n-x+1)\}$.

Легко видеть, что максимальное значение $d_u$ равно $n - x$. Оно достигается при $u = ((x+1) \mod (n+1)) + 1$, $v = 2$. Нельзя получить больше, так как вершина $v$ должна оказаться в вершине 1 через $x + d_u$ шагов, но не раньше. Значит, $x + d_u \leq n$ и $d_u \leq n - x$.

Следовательно, по лемме 9.11:

$$k(\mathcal{G}) = \max_{u,v \in V(\mathcal{G})} d_u + \min\{x(n+1),\ n(n-x+1)\} =$$
$$= \max_{0 \leq x \leq n} n - x + \min\{x(n+1),\ n(n-x+1)\} = \max_{0 \leq x \leq n} \min\{n(x+1),\ n^2 + 2n - x(n+1)\}$$

Требуется найти максимум минимумов двух линейных по $x$ функций. Графики этих функций пересекаются в точке $\hat{x} = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4(2n+1)}$. Значит, максимум достигается в одной из целых точек по обе стороны от $\hat{x}$.

Рассмотрим два случая:

- $n$ чётно. Тогда две целые точки по обе стороны от $\hat{x}$ — это $x_1 = \frac{n}{2}$ и $x_2 = \frac{n+2}{2}$, при этом в $x_1$ минимумом будет первая функция, а в $x_2$ — вторая. Значит,

$$k(\mathcal{G}) = \max\{n(x_1+1),\ n^2 + 2n - x_2(n+1)\} =$$
$$= \max\{n(\frac{n}{2}+1),\ n^2 + 2n - \frac{n+2}{2}(n+1)\} = \frac{n^2+2n}{2}$$

- $n$ нечётно. Тогда две целые точки по обе стороны от $\hat{x}$ — это $x_1 = \frac{n-1}{2}$ и $x_2 = \frac{n+1}{2}$. Значит,

$$k(\mathcal{G}) = \max\{n(x_1+1),\ n^2 + 2n - x_2(n+1)\} =$$
$$= \max\{n(\frac{n-1}{2}+1),\ n^2 + 2n - \frac{n+1}{2}(n+1)\} = \frac{n^2+2n-1}{2}$$

В итоге имеем

$$k(\mathcal{G}) = \begin{cases} \frac{n^2+2n}{2}, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ \frac{n^2+2n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

□

## 9.5 Ромашка из $p$ циклов длины $k$

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_{p(k-1)+1}(\mathbb{R}_{\max})$ графа-ромашки $\mathcal{G}(A)$, состоящего из $p > 1$ циклов длины $k$ (всего в графе будет $p(k-1)+1$ вершин). Будем считать, что вершина, по которой пересекаются все циклы, имеет номер 1.

Пусть для простоты все ребра в этом графе имеют нулевой вес. Тогда $\mathcal{G}^c = \mathcal{G}(A)$ и $T_2 = 0$, так как $B = -\infty$.

**Утверждение 9.14.** *Граница $T$, определенная для такого графа-ромашки, равна $k-1$.*

***Доказательство.*** Индекс цикличности этого графа $\sigma = k$. Следовательно, $C = R = M = (A^k)^*$ и $S = A$. По утверждению 8.10 в ячейке с индексами $i, j$ матрицы $CS^tR$ стоит 0, если из вершины $i$ можно добраться до вершины $j$ за количество шагов, сравнимое с $t$ по модулю $k$, и $-\infty$ иначе.

Будем говорить, что вершина $v$ имеет класс $i$, если минимальная длина пути между вершинами 1 и $v$ дает остаток $i$ при делении на $k$. Заметим, что т.к. цикличность графа равна $k$, то длина любого пути из вершины 1 в $v$ дает остаток $i$ при делении на $k$. Следует упомянуть, что любое ребро ведет из вершины класса $i$ в вершину класса $i+1 \pmod k$.

Покажем, что $T > k-2$. Рассмотрим вершину $v$ класса 1 и вершину $u$ класса $k-1$. Тогда элемент матрицы $CS^{k-2}R$ с индексами $v, u$ равен 0. Но в матрице $A^{k-2}$ элемент с теми же индексами равен $-\infty$, т.к. минимальный путь, соединяющий эти вершины, имеет длину $2k-2$. Следовательно, $CS^{k-2}R \neq A^{k-2}$ и $T \geq k-1$.

Покажем, что $T = k-1$. Предположим противное: пусть $T > k-1$. Рассмотрим $t = T-1 \geq k-1$. Заметим, что $CS^{t+k}R = A^{t+k}$, так как $t+k \geq T$.

В матрице $A^{t+k}$ хранится информация о путях длины $t+k$. Но наибольший простой путь имеет длину $2k-2 < t+k$ — это путь между вершиной класса 1 и вершиной класса $k-1$ из другого цикла. Значит, каждый путь длины $t+k$ можно укоротить на $k$ и получить путь длины $t$ с тем же весом. Значит, $A^{t+k} = A^t$.

По утверждению 8.9 выполняется равенство $CS^{t+k}R = CS^tR$. Значит, $CS^tR = CS^{t+k}R = A^{t+k} = A^t$. Таким образом, мы получили противоречие с минимальностью $T$, т.к. $t = T-1$ и $CS^tR = A^t$.

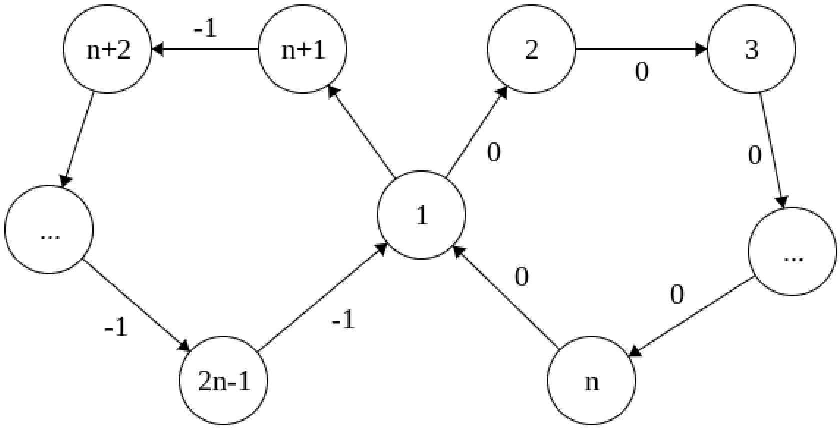
Следовательно, $T = k-1$. □

## 9.6 Ромашка с отрицательными циклами

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_{2n-1}(\mathbb{R}_{\max})$, графа-ромашки, состоящей из двух циклов: цикла длины $n$ с нулевым средним весом (будем называть его нулевым циклом) и цикла длины $n$ с отрицательным средним весом (будем называть его отрицательным циклом). Будем считать, что вершины первого цикла имеют номера от 1 до $n$ в порядке обхода, а второго — $1, n+1, \ldots, 2n-1$ в порядке обхода.

**Утверждение 9.15.** $T(A) = T_{1,N}(A) = T_{2,N}(A) = n-1$.

***Доказательство.*** В этом примере матрица $B$ нетривиальна: она получается из $A$ заменой первых $n$ строк и столбцов на $-\infty$ и кодирует пути в отрицательном цикле. Заметим, что вершина $n$ лежит в критическом подграфе, и, следовательно, инцидентные ей ребра не




кодируются матрицей $B$, т.е. $\mathcal{G}(B)$ — это $n-1$ последовательная соединенная вершина. Это значит, что $B$ нильпотентна: $B^{n-1} = -\infty$, так как длиннейший путь в $\mathcal{G}(B)$ имеет длину $n-2$.

Докажем, что $T_2(A, B) = n - 1$.

В силу нильпотентности $CS^{n-1}R \geq B^{n-1} = -\infty$. Значит, $T_2(A, B) \geq n - 1$.

Покажем, что неравенство $CS^tR \geq B^t$ не выполняется при $t = n - 2$.

Рассмотрим вершины $i = n+1$ и $j = 2n-1$. Путь, вес которого кодирует ячейка $[B^t]_{ij}$ — единственная небесконечная ячейка матрицы $B^t$ — это дуга отрицательного цикла из вершины $i$ в вершину $j$ длины $n-2$.

Рассмотрим путь, который кодирует ячейка с теми же индексами матрицы $CS^tR$. Он состоит из трех частей: части $C$, части $S^t$, и части $R$. После прохождения части $C$ мы попадем в вершину номер 1 (так как в матрице $C$ мы делаем произвольное количество шагов длины $n$ и после ее прохождения мы всегда оказываемся в критическом подграфе). Далее в части $S^t$ делаем $n-2$ шага по критическому подграфу и попадаем в вершину номер $n-1$. И, наконец, после части $R$ мы оказываемся в вершине $2n-1$, пройдя еще $n$ шагов.

Посчитаем вес этого пути. Мы целиком прошли нулевой цикл (что не влияет на вес пути, т.к. средний вес ребра в нем равен 0), целиком прошли отрицательный цикл и еще прошли по простой дуге от $n+1$-й до $2n-1$-й вершины. Значит, $[CS^tR + B^t]_{ij} = (\lambda')^{\odot n} \oplus [B^t]_{ij}$, где $\lambda' = \lambda(B) < 0$ — средний вес отрицательного цикла.

Следовательно, $[CS^tR]_{ij} < [B]_{ij}$, и неверно, что $CS^tR \geq B^t$. Значит, $T_2(A, B) = n - 1$.

Покажем, что $T_1(A, B) = n - 1$. Рассуждения аналогичны доказательству точной оценки для $T(A)$ в утверждении 9.14, но с некоторыми изменениями. Назовем путь подходящим, если его вес минимален среди всех путей с концами в тех же вершинах, имеющих ту же длину. Чтобы получить доказательство для графа с отрицательным циклом, надо заменить в доказательстве все слова "путь" на "подходящий путь" (в том графе все пути были подходящими, а в нашем графе — не все).

Для окончания доказательства надо показать, что любой подходящий путь длины $m > 2n-2$ можно укоротить на $n$, при этом его вес останется прежним. Действительно, если $m > 2n-2$, то путь не может быть простым. Значит, в нем есть цикл. Но в подходящем пути не может быть отрицательных циклов, иначе этот цикл можно поменять на нулевой и улучшить ответ. Значит, убрав этот нулевой цикл, можно получить путь между теми же вершинами того же веса, но длины $m - n$. Это завершает доказательство оценки $T_1(A, B)$ для данного графа. В итоге имеем $T(A) = T_1(A, B) = T_2(A, B) = n - 1$. □

Утверждение 9.15 верно и для графов-ромашек с большим количеством циклов.

**Следствие 9.16.** *Если $A$ — матрица смежности графа-ромашки, где каждый цикл* *имеет длину $n$ и есть хотя бы один нулевой цикл и хотя бы один отрицательный цикл, то $T(A) = T_{1,N}(A) = T_{2,N}(A) = n - 1$.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения 9.15.

# 10 Разные ромашки

Здесь и далее будем рассматривать графы-ромашки, состоящие из циклов длины, кратной $\sigma$, все рёбра в которых имеют вес 0. Тогда сразу можно сказать, что у каждой такой ромашки $T_2 = 0$ и $T = T_1$. Для разных таких ромашек будем искать границу $T$.

**Определение 10.1.** *Ромашку, состоящую из циклов длины $a_1\sigma, a_2\sigma, \ldots, a_n\sigma$, где числа $a_1, \ldots, a_n$ взаимно просты в совокупности, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ назовем $(a_1, \ldots, a_n; \sigma)$-ромашкой.*

*Границу $T$, определенную для такой ромашки, будем обозначать через $T(a_1, \ldots, a_n; \sigma)$.*

Заметим, что индекс цикличности такой ромашки равен $\sigma$ и всего в ней $N = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\sigma - n + 1$ вершин. Пусть вершина, в которой пересекаются все циклы, имеет номер 1. Пронумеруем вершины в порядке следующего обхода: начнем в вершине 1, далее пройдём по первому циклу, затем — по второму, и так далее до цикла с номером $n$ (не изменяя номер у вершины 1).

Во всех примерах матрицу смежности рассматриваемого графа будем обозначать через $A \in M_N(\mathbb{R}_{\max})$, а через $C, S, R$ будем обозначать матрицы $C, S, R$, построенные по матрице $A$.

## 10.1 Подсчет границы $T$ вручную

**Теорема 10.2.** $T(a_1, \ldots, a_n; \sigma) = (T(a_1, \ldots, a_n; 1) + 1)\sigma - 1$.

***Доказательство.*** Обозначим граф, соответствующий $(a_1, \ldots, a_n; 1)$-ромашке через $\mathcal{G}$, а граф, соответствующий $(a_1, \ldots, a_n; \sigma)$-ромашке — через $\mathcal{G}_\sigma$. Граф $\mathcal{G}_\sigma$ получается из графа $\mathcal{G}$ разделением каждого ребра на $\sigma$ более мелких рёбер. Вершины $\mathcal{G}_\sigma$, лежащие в одном циклическом классе с вершиной 1, будем называть начальными. Для краткости будем обозначать $T(a_1, \ldots, a_n; 1)$ через $T(1)$, а $T(a_1, \ldots, a_n; \sigma)$ — через $T(\sigma)$.

Покажем, что $T(\sigma) > (T(1) + 1)\sigma - 2$. В $\mathcal{G}$ есть 2 вершины, между которыми нет пути длины $T(1) - 1$. Значит, в $\mathcal{G}_\sigma$ между соответствующими начальными вершинами нет пути длины $(T(1) - 1)\sigma$. Обозначим эти вершины через $u$ и $v$. Но тогда между вершинами $\hat{u}$ и $\hat{v}$ не будет пути длины $(T(1) - 1)\sigma + 2(\sigma - 1) = (T(1) + 1)\sigma - 2$, где $\hat{u}$ получается, если отойти от $u$ на $\sigma - 1$ шаг вперёд, а $\hat{v}$ — от вершины $v$ на $\sigma - 1$ шаг назад (обе новые вершины существуют, так как любая вершина в $\mathcal{G}$ лежит в цикле). Значит, $T(\sigma) \geq (T(1) + 1)\sigma - 1$.

Покажем, что $T(\sigma) \geq (T(1) + 1)\sigma - 1$. Для этого нужно доказать, что между любыми двумя вершинами $u$ и $v$ графа $\mathcal{G}_\sigma$ есть путь длины $(T(1) + 1)\sigma - 1$ от $u$ до $v$. Путь длины $(T(1) + 1)\sigma - 1$ от $u$ до $v$ состоит из трех частей: путь от $u$ до ближайшей начальной вершины, путь между начальными вершинами, и путь от ближайшей начальной вершины до $v$. Суммарная длина первой и третьей частей не превосходит $2\sigma - 2$, значит, длина второй части не меньше $(T(1) - 1)\sigma + 1$. Но длина пути между двумя начальными вершинами должна быть кратна $\sigma$, поэтому длина второй части не меньше $T(1) \cdot \sigma$. Но, по определению $T(1)$, между любыми начальными вершинами есть путь длины $T(1) \cdot \sigma$. Значит, $T(\sigma) \geq (T(1) + 1)\sigma - 1$, и утверждение доказано. □

Таким образом, при расчёте границы $T$ для произвольной ромашки достаточно посчитать искомую границу при $\sigma = 1$, а затем получить ответ по формуле из утверждения 10.2.

**Замечание 10.3.** *При $\sigma = 1$ $(a_1, \ldots, a_n; 1)$-ромашка примитивна. Более того, выполняются условия следствия 9.8, и граница $T$ данной ромашки совпадает с экспонентой.*

Введём вспомогательную функцию $P$:

**Определение 10.4.** *Для взаимно простых в совокупности натуральных чисел $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ обозначим через $P(a_1, \ldots, a_n)$ минимальное целое неотрицательное число, удовлетворяющее следующему свойству: любое $p \geq P(a_1, \ldots, a_n)$ выражается в виде линейной комбинации чисел $a_1, \ldots, a_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то есть $p = a_1\lambda_1 + \ldots a_n\lambda_n$.*

*Число, выражающееся в виде линейной комбинации чисел $a_1, \ldots, a_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами, назовём выразимым.*

Здесь и далее под линейной комбинацией будем понимать линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами.

**Теорема 10.5.** $T(a_1, \ldots, a_n; 1) = P(a_1, \ldots, a_n) + 2a_n - 2$.

***Доказательство.*** Предположим, что в $(a_1, \ldots, a_n; 1)$-ромашке между любыми двумя вершинами существует путь длины $t$. Рассмотрим две произвольные вершины $u$ и $v$. Любой путь длины хотя бы $a_n - 1$ проходит через вершину 1, и $t \geq a_n - 1$. Поэтому путь длины $t$ от $u$ до $v$ состоит из трёх частей: пути от $u$ до 1 (обозначим длину этой части через $\hat{u}$), $\lambda_i$ циклов длины $a_i$ для $i = 1 \ldots n$, и пути от 1 до $v$ (обозначим длину этой части через $\hat{v}$). Тогда имеет место равенство:

$$t = \hat{u} + a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n + \hat{v} \quad \Longleftrightarrow \quad t - \hat{u} - \hat{v} = a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n.$$

Сумма $\hat{u} + \hat{v}$ принимает любые значения от 0 до $2a_n - 2$ (так как $0 \leq \hat{u}, \hat{v} \leq a_n - 1$). Следовательно, для любого $t - 2a_n + 2 \leq p \leq t$ должны существовать коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, удовлетворяющие уравнению

$$p = a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n. \tag{17}$$

При $t < P(a_1, \ldots, a_n) + 2a_n - 2$ минимальное значение $p$ не превосходит $P(a_1, \ldots, a_n) - 1$, и, по определению $P(a_1, \ldots, a_n)$, при наименьшем значении $p$ уравнение 17 решений не имеет — противоречие с наличием пути между $u$ и $v$.

Напротив, при $t \geq P(a_1, \ldots, a_n) + 2a_n - 2$ наименьшее значение $p$ не меньше $P(a_1, \ldots, a_n)$, и, в силу определения $P(a_1, \ldots, a_n)$, коэффициенты $\lambda_i$ найдутся для любого возможного значения $p$.

Значит, $T(a_1, \ldots, a_n; 1) = P(a_1, \ldots, a_n) + 2a_n - 2$. □

**Следствие 10.6** (Корректность функции $P$). *Функция $P$ определена корректно: её значение существует для любых возможных аргументов.*

***Доказательство.*** Рассмотрим $(a_1, \ldots, a_n; 1)$-ромашку. По замечанию 10.3 этот граф примитивен и, следовательно, имеет экспоненту, которая, в свою очередь, совпадает с границей $T$ для данной ромашки. По формуле из теоремы 10.5 имеем $P(a_1, \ldots, a_n) = T(a_1, \ldots, a_n; 1) - 2a_n + 2$. □

**Утверждение 10.7** (Свойства функции $P$).

1. *Если $a_1 = 1$, то $P(1, \ldots, a_n) = 0$.*

2. *$P(a_1,\dots,a_n) \le P(a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_k})$, где $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ — возрастающая последовательность индексов.*

3. *$P(a_1,\dots,a_n) = P(b_1,\dots,b_m)$, где набор $b_1,\dots,b_m$ получается из набора $a_1,\dots,a_n$ удалением повторяющихся элементов.*

4. *Если $a_j$ делится на $a_i$, то $P(a_1,\dots,a_n) = P(a_1,\dots,a_{j-1},a_{j+1},\dots,a_n)$.*

5. *Если $a_j$ представляется в виде линейной комбинации меньших элементов, то $P(a_1,\dots,a_n) = P(a_1,\dots,a_{j-1},a_{j+1},\dots,a_n)$.*

***Доказательство.*** 1) Действительно, если $a_1 = 1$, то любое неотрицательное число $k$ выражается как $1 \cdot k$. Следовательно, $P = 0$.

2) Свойство следует из следующего факта: сумма $a_{i_1}\lambda_{i_1} + \dots + a_{i_k}\lambda_{i_k}$ является частным случаем суммы $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$.

3) При приведении подобных членов в сумме $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$ получается корректная сумма $b_1\mu_1 + \dots b_m\mu_m$. С другой стороны, сумма $b_1\mu_1 + \dots b_m\mu_m$ является корректной суммой вида $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$.

4) Очевидно, что любая сумма $a_1\lambda_1 + \dots + a_{j-1}\lambda_{j-1} + a_{j+1}\lambda_{j+1} + \dots + a_n\lambda_n$ является суммой вида $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$, где $\lambda_j = 0$. С другой стороны, заменив $a_j$ на $a_i \cdot \frac{a_j}{a_i}$, можно избавиться от слагаемого $a_j\lambda_j$ в сумме $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$, что доказывает утверждение.

5) Доказетельство этого свойства аналогично предыдущему. □

**Утверждение 10.8.** *$P(a,b) = (a-1)(b-1)$.*

***Доказательство.*** Покажем, что $p = ab - a - b \neq ma + nb$ для любых целых неотрицательных $m, n$.

Предположим противное. Тогда:

$$ab - a - b = am + bn \iff ab = (m+1)a + (n+1)b$$

В силу взаимной простоты $a$ и $b$ получим, что $n + 1 \,\vdots\, a$, и $m + 1 \,\vdots\, b$. Тогда, в силу того, что $m, n \ge 0$, имеем 2 случая:

$$\begin{cases} n+1 = a \\ m+1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n+1 = 0 \\ m+1 = b. \end{cases}$$

В обоих случаях получаем противоречие. Следовательно, $P(a,b) \ge (a-1)(b-1)$.

Теперь покажем, что $P(a,b) \le ab + b - a - 1$. Для любого $p \ge ab - b - a + 1$ решим уравнение:

$$am + bn = p$$

Так как $a$ и $b$ взаимно просты, числа из набора $0, b, 2b, \dots, (a-1)b$ дают все $a$ остатков по модулю $a$. Значит, существует единственное $0 \le n \le a-1$, что $bn \equiv p \pmod a$, причём $p - bn \ge 0$, так как

$$p - bn \ge ab - b - a + 1 - (a-1)b = -a + 1 > -a \Longrightarrow p - bn \ge 0.$$

Значит, $m = \frac{p-bn}{a} \ge 0$.

Таким образом, нами были найдены целые $m \ge 0$, $n \ge 0$. Следовательно, $P(a,b) = (a-1)(b-1)$. □

**Следствие 10.9.** *$T(a,b;\sigma) = (ab + b - a)\sigma - 1$.*

**Утверждение 10.10.** $P(2,a,b) = \begin{cases} P(2,b) = b-1, & \textit{если } a \textit{ чётно,} \\ P(2,a) = a-1, & \textit{иначе.} \end{cases}$

***Доказательство.*** Первый случай следует из свойства 4 утверждения 10.7.

Разберём второй случай: $a$ нечётно. Неравенство $P(2,a,b) \le P(2,a)$ следует из свойства 2 утверждения 10.7. Докажем обратное неравенство: необходимо показать, что с помощью слагаемых $2,a,b$ невозможно получить сумму $a-2$. Действительно, из трёх слагаемых можно использовать только одно: 2. Но $a-2$ нечётно — противоречие. Следовательно, $P(2,a,b) = P(2,a)$. □

**Следствие 10.11.** $T(2,a,b;\sigma) = \begin{cases} T(2,b;\sigma) = (3b-2)\sigma - 1, & \textit{если } a \textit{ нечётно,} \\ (2b+a-2)\sigma - 1, & \textit{иначе.} \end{cases}$

**Утверждение 10.12.** $P(3,a,b) = \begin{cases} P(3,b) = 2(b-1), & \textit{если } a \mathrel{\vdots} 3, \\ b-2, & \textit{если } a \not\mathrel{\vdots} 3, a+b \mathrel{\vdots} 3 \textit{ и } b < P(3,a) = 2a-2, \\ P(3,a) = 2(a-1), & \textit{иначе.} \end{cases}$

***Доказательство.*** Первый случай следует из свойства 4 утверждения 10.7.

Разберём второй случай. Покажем, что $P(3,a,b) \ge b-2$. Предположим противное. Тогда число $b-3$ должно выражаться в виде линейной комбинации $2, a$ и $b$:

$$b - 3 = 3\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

Тогда $\lambda_3 = 0$ и $\lambda_2 \le 1$. При $\lambda_2 = 0$ имеем $b = 3\lambda_1 + 3 \mathrel{\vdots} 3$. При $\lambda_2 = 1$ имеем $b - a = 3\lambda_1 + 3 \mathrel{\vdots} 3$. В обоих случаях $a \mathrel{\vdots} 3$, так как $a + b \mathrel{\vdots} 3$, что противоречит условию второго случая. Следовательно, $P(3,a,b) \ge b-2$.

Докажем обратное неравенство: для любого $p \ge b-2$ решим уравнение:

$$p = 3\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

Так как в правой части есть слагаемое $3\lambda_1$, то достаточно решить уравнение для $p = b-2$, $p = b-1$ и $p = b$ — тогда линейные комбинации для больших $p$ получатся увеличением $\lambda_1$.

- $p = b-2$. Если $b \equiv 2 \pmod 3$, то $\lambda_1 = \frac{b-2}{3}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  Если $b \equiv 1 \pmod 3$, то $a \equiv 2 \pmod 3$, $b-2 = (b-a-2)+a$ и $\lambda_1 = \frac{b-a-2}{3}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$.
- $p = b-1$. Если $b \equiv 1 \pmod 3$, то $\lambda_1 = \frac{b-1}{3}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  Если $b \equiv 2 \pmod 3$, то $a \equiv 1 \pmod 3$, $b-2 = (b-a-1)+a$ и $\lambda_1 = \frac{b-a-1}{3}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$.
- $p = b$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$.

Таким образом, $P(3,a,b) = b-2$.

Перейдём к третьему случаю: если $b \ge P(3,a)$, то наличие слагаемого $b\lambda_3$ не повлияет на значение функции $P$: если некое $p$ выражается в виде линейной комбинации с участием $b$, то $p \ge P(3,a)$ и, следовательно, выражается и без участия $b$. Следовательно, $P(3,a,b) = P(a,b)$.

Рассмотрим последний случай: $a \not\mathrel{\vdots} 3,\ a+b \not\mathrel{\vdots} 3,\ b < P(3,a)$. Неравенство $P(3,a,b) \ge P(a,b)$ следует из свойства 2 утверждения 10.7. Докажем обратное неравенство. Для этого покажем, что следующее уравнение не имеет решений:

$$2a - 3 = 3\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

Заметим, что $\lambda_3 = 0$, так как $b < 2a - a$. Также, $\lambda_2 \le 1$. Тогда $(2-\lambda_2)a = 3\lambda_1 + 3 \mathrel{\vdots} 3$ — противоречие с $a \not\mathrel{\vdots} 3$. Значит, $P(3,a,b) = P(a,b)$. □

**Следствие 10.13.** $T(3, a, b; 1) = \begin{cases} T(3, b; 1) = 4b - 4, & \text{если } a \vdots 3, \\ 3b - 4, & \text{если } a \not\vdots 3, a + b \vdots 3 \text{ и } m < 2a - 2, \\ 2a + 2b - 4, & \text{иначе.} \end{cases}$

## 10.2 Алгоритмы вычисления функции $P$

**Лемма 10.14.** *Число $p$ выразимо тогда и только тогда, когда $p = 0$ или выразимо хотя бы одно из чисел $p - a_1, \dots, p - a_n$.*

***Доказательство.*** Докажем необходимость: пусть некоторое $p > 0$ выразимо: $p = a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$. Тогда хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ положительно: пусть $\lambda_i > 0$. Тогда выразимо число $p - a_i = a_1\lambda_1 + \dots + a_i \cdot (\lambda_i - 1) + \cdot + a_n\lambda_n$.

Докажем достаточность. Очевидно, что $p = 0$ выразимо. Если $p > 0$ и выразимо число $p - a_i$, то выразимо и $p$: достаточно увеличить $\lambda_i$ в линейной комбинации для $p - a_i$ на единицу. □

**Лемма 10.15.** *$P(a_1, \dots, a_n) = p$ тогда и только тогда, когда $p - 1$ не выразимо, а числа $p, p + 1, \dots, p + a_1 - 1$ выразимы.*

***Доказательство.*** Необходимость следует из определения функции $P$.

Докажем достаточность: пусть числа $p, p+1, \dots, p+a_1-1$ выразимы. Тогда выразимо любое число, не меньшее $p$: для любого $x \geq p$ существует единственное число $k$ такое, что $p \leq x - k \cdot a_1 \leq p + a_1 - 1$, то есть $x - k \cdot a_1$ выразимо. Увеличив коэффициент $\lambda_1$ в линейной комбинации для $x - k \cdot a_1$ на $k$, получим линейную комбинацию для $x$. Значит, $P(a_1, \dots, a_n) \leq p$.

Так как $p - 1$ невыразимо, имеем $P(a_1, \dots, a_n) \geq p$. Следовательно, $P(a_1, \dots, a_n) = p$. □

Приведём алгоритм, позволяющий вычислять функцию $P$ с помощью метода динамического программирования.

**Алгоритм 10.16** (Метод динамического программирования)**.**

1. *Создадим массив $dp$ длины 1, единственная ячейка которого содержит число 1. В дальнейшем, в ячейке $dp[p]$ будет лежать 0, если $p$ невыразимо, и 1 — иначе.*

2. *Добавим в конец массива ячейку с номером $p$ и проверим число $p$ на выразимость. Для этого переберём числа $p - a_i$ для $1 \leq i \leq n$. Если хотя бы одно из значений $dp[p - a_i]$ равно 1, то $p$ выразимо и $dp[p] = 1$, иначе $dp[p] = 0$.*

3. *Когда мы впервые обнаружим $a_1$ последовательно лежащих единиц (то есть $dp[p - a_1 + 1] = dp[p - a_1 + 2] = \dots = dp[p]$), то ответом будет $p - a_i + 1$.*

**Утверждение 10.17.** *Алгоритм 10.16 работает корректно. Время его работы равно $O(n \cdot P)$. Затраты памяти составляют $O(P)$.*

***Доказательство.*** Докажем корректность. Шаг 2 верен по лемме 10.14. Шаг 3 — по лемме 10.15.

Докажем асимптотику. Добавление элемента в конец массива работает за $O(1)$. Всего будет добавлено ровно $P(a_1, \dots, a_n) + 1$ ячеек, и будет проведено столько же проверок индексов новых ячеек, и каждая проверка будет работать за $O(n)$. Итоговое время работы — $O(n \cdot (P + a_1)) = O(n \cdot P)$, так как $P \geq a_1 - 1$ (по следствию 10.19, будет доказано позже).

Память тратится только на массив $dp$, который имеет длину $P + a_1$. Значит, будет использовано $O(P)$ памяти. □

Приведём ещё один алгоритм. Для этого введём несколько новых обозначений и докажем несколько утверждений.

Рассмотрим массив $M$ длины $a_1$, где в $M[i]$ лежит минимальное выразимое число, сравнимое с $i$ по модулю $a_1$. Заметим, что $M[0] = 0$ и что $M[i] \equiv i \pmod{a_1}$.

**Утверждение 10.18.** $P(a_1, \dots, a_n) = \max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$.

***Доказательство.*** Пусть $\max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1 = M[k] - a_1 + 1$.

Выразимость $M[k] - a_1$ вела бы к противоречию с определением массива $M$, так как $M[k] - a_1 \equiv M[k] \pmod{a_1}$. Значит, $P(a_1, \dots, a_n) \geq \max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$.

Заметим, что если произвольное $x$ выразимо, то и число $x + a_1$ выразимо. Из этого следует, что любое число, сравнимое с $i$ по модулю $a_1$ и не меньшее $M[i]$ выразимо. Значит, все числа, начиная с $M[k] - a_1 + 1$ выразимы — иначе $M[k]$ было бы не максимальным числом в массиве $M$.

Следовательно, $P(a_1, \dots, a_n) = \max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$. □

**Следствие 10.19.** $P(a_1, \dots, a_n) \geq a_1 - 1$.

***Доказательство.*** Утверждение следует из следующего факта: $M[a_1 - 1] \geq a_1 - 1$. □

Используя массив $M$, можно легко посчитать $P(4, a, b)$. Здесь и далее через $x\ rem\ y$ будем обозначать остаток при делении $x$ на $y$.

**Утверждение 10.20** (Формула для $P(4, a, b)$)**.**

1. *$a \vdots 4, b \not\vdots 2$. Тогда $P(4, a, b) = P(4, b)$.*

2. *$a \not\vdots 2, b \vdots 4$, или $0 \not\equiv a \equiv b \pmod 4$, или $a \not\vdots 2, b \geq P(4, a)$. Тогда $P(4, a, b) = P(4, a)$.*

3. *$a \equiv 2 \pmod 4, b \not\vdots 2$. Тогда $P(4, a, b) = a + b - 3$.*

4. *$a \not\vdots 2, b \equiv 2 \pmod 4$. Тогда*
$$P(4, a, b) = \begin{cases} a + b - 3, & \text{если } b < 2a \\ 3a - 3, & \text{иначе.} \end{cases}$$

5. *$a, b \not\vdots 2$, $a + b \vdots 4, b < P(4, a)$. Тогда*
$$P(4, a, b) = \begin{cases} 2a - 3, & \text{если } b \leq 2a \\ b - 3, & \text{иначе.} \end{cases}$$

***Доказательство.*** Из свойства 4 утверждения 10.7 можно вывести случай $a \vdots 4, b \not\vdots 2$ и случай $a \not\vdots 2, b \vdots 4$, а из свойства 5 того же утверждения — случай $0 \not\equiv a \equiv b \pmod 4$.

Во всех остальных случаях посчитаем массив $M$, и по утверждению 10.18 найдём ответ. Заметим, $M[0]$ всегда равен 0.

Докажем случай $a \not\vdots 2, b \geq P(4, a)$. Тогда $M[a\ rem\ 4] = a$, $M[2] = 2a$, и $M[4 - a\ rem\ 4] = 3a$ — число $b$ слишком большое, чтобы повлиять на этот массив. Таким образом, максиму этого массива равен $3a$, и ответом будет число $3a - 3 = P(4, a)$.

Разберём случай $a \equiv 2 \pmod 4), b \not\vdots\, 2$. Заметим, что $M[2] = a$, $M[b\ rem\ 4] = b$, $M[4 - b\ rem\ 4] = a + b$. Максимум этого массива — $a + b$, поэтому ответ равен $a + b - 3$.

Разберём случай $a \not\vdots\, 2, b \equiv 2 \pmod 4$. Тогда $M[a\ rem\ 4] = a$. На место $M[2]$ есть два кандидата: $2a$ и $b$. Если $b < 2a$, то $M[2] = b$, и иначе — $2a$. Далее, для $M[4 - a\ rem\ 4]$ имеем два варианта: $3a$ и $a + b$, и если $b < 2a$, то $M[4 - a\ rem\ 4] = a + b$, и иначе — $3a$. Таким образом, если $b < 2a$, то ответ равен $a + b - 3$, а иначе — $3a - 3 = P(4, a)$.

Разберём последний случай: $a, b \not\vdots\, 2, a + b \vdots\, 4, b < 3a - 3$. Тогда $M[a\ rem\ 4] = a$, $M[b\ rem\ 4] = b$ и $M[2] = 2a$. В зависимости от относительного расположения $2a$ и $b$ имеем 2 различных возможных максимума массива $M$, откуда, по утверждению 10.22 находим ответ. □

Приведём ещё один алгоритм, вычисляющий функцию $P$. В нём будем считать массив $M$ постепенно, перебирая линейные комбинации в порядке увеличения числа слагаемых.

**Алгоритм 10.21** (Метод подсчёта ответа для каждого остатка отдельно)**.**

1. *Создадим массив $M$ длины $a_1$ содержащий числа из $\mathbb{R}_{\min}$. Запишем во все ячейки значения $\infty$. (Далее, для простоты, в выражениях пишутся обычные знаки арифметических операций. Будем считать, что если где-то в нижеследующем выражении встретилось $\infty$, то результат всего выражения равен $\infty$, а иначе — работаем с выражением как над $\mathbb{R}$).*

2. *На нулевой итерации переберём все линейные комбинации с одним слагаемым. Для этого для каждого $a_i$ и для каждого множителя $0 \le k < a_1$ проверим, можем ли мы улучшить ответ: сравним $a_i \cdot k$ с $M[a_i \cdot k\ rem\ a_1]$, и если в массиве записано большее число, то улучшим ответ: запишем в ячейку $a_i \cdot k\ rem\ a_1$ значение $a_i \cdot k$.*

3. *На каждой следующей итерации будем перебирать все пары ячеек $M[i]$ и $M[j]$ и пытаться улучшить ответ: сравним $M[(i + j)\ rem\ a_1]$ с $M[i] \odot M[j]$ (т.е. $M[i] + M[j]$, если оба эти числа меньше $\infty$, и $\infty$ иначе), и если в массиве записано большее число, то улучшим ответ: запишем в ячейку $(i + j)\ rem\ a_1$ значение $M[i] \odot M[j]$.*

4. *Всего необходимо сделать $\lceil log_2(n) \rceil + 1$ итераций, где $\lceil x \rceil$ — это округление числа $x$ вверх. После этого ответом будет $\bigoplus\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1 = \max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$.*

Для доказательства корректности докажем следующее утверждение.

**Лемма 10.22.** *После итерации с номером $d$ в ячейке $M[i]$ лежит минимальное число, сравнимое с $i$ по модулю $a_1$, которое может быть представлено в виде линейной комбинации с не более чем $2^d$ слагаемыми, или $\infty$, если такого числа не существует.*

***Доказательство.*** Докажем утверждение по индукции.

База: $d = 0$. В шаге 1 перебираются все линейные комбинации вида $a_j \cdot k$, где $0 \le k < a_1$. Рассмотрим линейную комбинацию, которую мы не перебрали: $a_i \cdot m$. Так как мы не перебрали эту комбинацию, то $m \ge a_1$. Но тогда $a_i \cdot m \equiv a_i \cdot (m - a_1) \pmod{a_1}$ и $a_i \cdot m > a_i \cdot (m - a_1) \ge 0$ — эта линейная комбинация не может улучшить ответ. Значит, база верна.

Докажем переход. Предположим, утверждение доказано для $d - 1$, докажем его для $d$. Обозначим массив $M$ в состоянии до итерации с номером $d$ через $M'$.

Рассмотрим произвольную ячейку $M[i]$, в которой записано число, меньшее $\infty$. Тогда существуют два индекса $j$ и $k$ такие, что $i = (j + k)\ rem\ a_1$ и $M[i] = M'[j] + M'[k]$. По предположению индукции в каждой ячейке массива $M'$ лежит число, которое может быть представлено в виде линейной комбинации с не более чем $2^{d-1}$ слагаемыми. Значит, в $M[i]$ лежит число, представимое в виде линейной комбинации с не более чем $2^d$ слагаемыми. По предположению индукции $M[i] = M'[j] + M'[k] \equiv j + k \equiv i \pmod{a_1}$.

Осталось доказать минимальность $M[i]$. Предположим противное: пусть существует число $x < M[i]$, сравнимое с $i$ по модулю $a_1$ и представимое в виде линейной комбинации с не более чем $2^d$ слагаемыми. Тогда эту комбинацию можно разбить на две меньших, в каждой из которых будет не более $2^{d-1}$ слагаемых. Обозначим суммы этих линейных комбинаций через $S_1$ и $S_2$. Пусть $S_1 \equiv j \pmod{a_1}$, а $S_2 \equiv k \pmod{a_1}$.

Тогда $S_1 + S_2 = x < M[i] \le M'[j] + M'[k]$ и или $S_1 < M'[j]$, или $S_2 < M'[k]$. В обоих случаях имеем противоречие с предположением индукции. Значит, предположение индукции верно и для $d$, что и требовалось доказать. □

**Утверждение 10.23.** *Алгоритм 10.21 корректен. Время его работы — $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot log\ n)$. Объем затраченной памяти — $O(a_1)$.*

***Доказательство.*** Докажем асимптотику. Первый шаг работает за $O(a_1)$, второй — за $O(a_1 \cdot n)$ (надо перебрать все $1 \le j \le n$ и все $0 \le k < a_1$). Третий работает за $O(a_1^2 \cdot log\ n)$, так как всего $O(log\ n)$ итераций, в каждой из которых надо перебрать пары $(i, j)$, где $0 \le i, j \le a_1$. Четвертый — за $O(a_1)$. Итоговая сложность алгоритма: $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot log\ n)$.

Память тратится только на массив $M$ длины $a_1$. Значит, алгоритм требует $O(a_1)$ памяти.

Докажем корректность. По лемме 10.22 после итерации с номером $d$ в ячейках массива $M$ лежит информация об оптимальных линейных комбинациях с не более чем $2^d$ слагаемыми. Следовательно, после итерации с номером $\lceil log_2(n) \rceil$ в массиве $M$ лежит информация об оптимальных линейных комбинациях из $n$ слагаемых, то есть массив $M$ будет наконец посчитан.

Во время работы алгоритма каждая ячейка массива $M$ изменит своё значение хотя бы раз: это следует из корректности функции $P$. Значит, после последней итерации в массиве $M$ не останется $\infty$.

Далее ответ может быть получен по лемме 10.18. □

В итоге имеем два алгоритма: первый — с использованием динамического программирования — работает за $O(n \cdot P)$ времени и тратит $O(P)$ памяти. Второй — через массив $M$ — работает за $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot log\ n)$ времени и тратит $O(a_1)$ памяти.

И время работы, и объем затраченной памяти первого алгоритма зависят от ответа, в отличие от второго алгоритма. В силу следствия 10.19 первый алгоритм требует больше памяти, чем второй.

## 10.3 Верхние оценки функции $P$

Оценим сверху значение функции $P$. Это поможет и в оценке сверху границы $T$ для ромашек, и для уточнения времени работы алгоритма 10.16.

**Утверждение 10.24.** *Функция $P(a_1, \ldots, a_n)$ оценивается сверху следующими функциями:*

1. $Wi(N) - 2a_n + 2$,
2. $(a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2$,
3. $(a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2)$,

*где $N = \sum_{i=1}^{n} a_i - n + 1$ — количество вершин в $(a_1, \ldots, a_n; 1)$-ромашке.*

***Доказательство.*** По замечанию 10.3 граница $T$ данной ромашки совпадает с её экспонентой, которая по теореме 8.11 оценивается сверху числом Виландта от количества вершин $Wi(N)$, функцией $\hat{g}(N-2)+N$ и функцией $(\hat{g}-1)(cr-1)+(\hat{g}+1)cd$.

Обхват $(a_1,\ldots,a_n)$-ромашки равен $a_1$, её окружность равна $a_n$, а длина наибольшего простого пути не превышает $2a_n-2$.

Далее достаточно применить теорему 10.5. □

**Следствие 10.25.** *Время работы алгоритма 10.16 можно оценить следующими способами, убрав из асимптотики искомую величину: $O(n\cdot a_1\cdot a_n)$. Объем затраченной памяти — $O(a_1\cdot a_n)$.*

***Доказательство.*** Так как ответ оценивается сверху функцией $Wi(N)+2a_2-2$, то имеем время работы $O(n\cdot(N^2-2N+2-2a_n+2))=O(n\cdot N^2)$ и объем памяти $O(N^2)$ (так как $N=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-n+1$).

При подстановке $(a_1+1)N-2a_1-2a_n+2$ вместо функции $P$ имеем время работы $O(n\cdot((a_1+1)N-2a_1-2a_n+2))=O(n\cdot a_1\cdot N)$ и объем памяти $O(a_1\cdot N)$.

При подстановке $(a_1-1)(a_n-1)+a_1(2a_n-2)$ вместо функции $P$ имеем асимптотику $O(n\cdot((a_1-1)(a_n-1)+a_1(2a_n-2)))=O(n\cdot a_1\cdot a_n)$ и объем памяти $O(a_1\cdot a_n)$.

Утверждение следует из неравенства $a_1\cdot a_n\le a_1\cdot N\le N^2$. □

# 11 Границы $T$ и скрамблинг-индекс

**Определение 11.1.** *Рассмотрим произвольную матрицу $X\in M_{n+m}(\mathbb{R}_{\max})$ размера $n+m$. Назовем $n$-$m$-декомпозицией матрицы $X$ следующие четыре матрицы:*

$$X_{11}\in M_{n\times n}(\mathbb{R}_{\max})\quad X_{12}\in M_{n\times m}(\mathbb{R}_{\max})$$
$$X_{21}\in M_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})\quad X_{22}\in M_{m\times m}(\mathbb{R}_{\max}),$$

*такие, что*

$$X=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим граф $\mathcal{G}$ на $n+m$ вершинах, матрицей смежности $A\in M_{n+m}(\mathbb{R}_{\max})$ и с положительным скрамблинг-индексом $k(\mathcal{G})$. По критерию положительности скрамблинг-индекса (7.6) в $\mathcal{G}$ существует примитивный достижимый подграф $\mathcal{G}_2$. Обозначим через $\mathcal{G}_1$ индуцированный подграф исходного графа $\mathcal{G}$, порожденный множеством вершин $V(\mathcal{G})\backslash V(\mathcal{G}_2)$.

Для удобства перенумеруем вершины: пусть в графе $\mathcal{G}_1$ лежат вершины с номерами от 1 до $n$, а в $\mathcal{G}_2$ — от $n+1$ до $n+m$. Тогда в $n$-$m$-декомпозиции матрицы $A$ в матрице $A_{ij}$ лежит информация о ребрах из $\mathcal{G}_i$ в $\mathcal{G}_j$.

Будем рассматривать те графы, для которых $\mathcal{G}^c=\mathcal{G}_2$ и $\lambda(A)=0$. Так как граф $\mathcal{G}_2$ примитивен, его цикличность равна 1. Значит, $M=A^*$.

Рассмотрим $n$-$m$-декомпозицию матрицы $M$:

$$M=\begin{pmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{pmatrix}.$$

**Утверждение 11.2.** *Матрица $M_{ij}$ имеет вид:*

$$M_{ij}=(A^*)_{ij}=\bigoplus_{t=0}^{n+m-1}\bigoplus_{\sigma}\bigodot_{k=0}^{t-1}A_{\sigma(k),\sigma(k+1)},$$

*где $i,j\in\{1,2\}$, $\sigma\in\{1,2\}^{t+1}$, причем $\sigma(0)=i$, $\sigma(t)=j$.*

***Доказательство.*** Матрицы $C, R, S, B$ имеют вид:

$$C = \begin{pmatrix} -\infty & M_{12} \\ -\infty & M_{22} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} A_{11} & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Для $t \geq T(A)$ верно следующее равенство:

$$A^t = CS^tR = \begin{pmatrix} -\infty & M_{12} \\ -\infty & M_{22} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & A_{22} \end{pmatrix}^t \odot \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} M_{12}A_{22}^tM_{21} & M_{12}A_{22}^tM_{22} \\ M_{22}A_{22}^tM_{21} & M_{22}A_{22}^tM_{22} \end{pmatrix},$$

для $t \geq T_1(A, B)$ — следующее:

$$A^t = CS^tR \oplus B^t = \begin{pmatrix} M_{12}A_{22}^tM_{21} \oplus A_{11}^t & M_{12}A_{22}^tM_{22} \\ M_{22}A_{22}^tM_{21} & M_{22}A_{22}^tM_{22} \end{pmatrix},$$

и для $t \geq T_2(A, B)$ — следующее неравенство:

$$\begin{pmatrix} M_{12}A_{22}^tM_{21} & M_{12}A_{22}^tM_{22} \\ M_{22}A_{22}^tM_{21} & M_{22}A_{22}^tM_{22} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} A_{11}^t & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix},$$

т.е., что равносильно, $M_{12}A_{22}^tM_{21} \geq A_{11}^t$.

Выразим $A^t$:

$$(A^t)_{ij} = \bigoplus_{\sigma} \bigodot_{k=0}^{t-1} A_{\sigma(k),\sigma(k+1)},$$

где $i, j \in \{1, 2\}$, $\sigma \in \{1, 2\}^{t+1}$, причем $\sigma(0) = i, \sigma(t) = j$. Здесь и далее считаем, что $\sigma(k)$ — это $k$-й элемент кортежа $\sigma$, нумерация в котором идет с нуля.

Рассмотрим путь из произвольной вершины подграфа $\mathcal{G}_i$ в произвольную вершину подграфа $\mathcal{G}_j$. Каждое ребро этого пути либо лежит внутри соответствующего подграфа, либо соединяет текущий подграф с другим. Переберем все возможные варианты расположения ребер в пути: если $\sigma(k-1) = \sigma(k)$, то $k$-е ребро пути лежит в графе $\mathcal{G}_{\sigma(k-1)}$. Иначе — ведёт из $\mathcal{G}_{\sigma(k-1)}$ в $\mathcal{G}_{\sigma(k)}$. По всем таким вариантам возьмем максимум — это и будет оптимальным весом пути.

Зафиксируем $i, j \in \{1, 2\}$. Тогда матрица $M_{ij}$ выражается следующим образом:

$$M_{ij} = (A^*)_{ij} = \bigoplus_{t=0}^{n+m-1} \bigoplus_{\sigma} \bigodot_{k=0}^{t-1} A_{\sigma(k),\sigma(k+1)},$$

где $\sigma \in \{1, 2\}^{t+1}$, причем $\sigma(0) = i$, $\sigma(t) = j$. □

# 12 Обозначения

1. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ — множество неотрицательных вещественных чисел.
2. $\mathbb{R}_{\max}, \mathbb{R}_{\min}$ — тропические полукольца.
3. $x\ rem\ y$ — остаток при делении $x$ на $y$.
4. $\lceil x \rceil$ — округление числа $x$ вверх.

5. $\mathbb{B} = \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ — множество с сложением, аналогичным дизъюнкции, и умножением, аналогичным конъюнкции.

6. $M_{n\times m}(\mathbb{F})$ — множество матриц $n \times m$ с элементами из $\mathbb{F}$.

   $M_n(\mathbb{F})$ — множество квадратных матриц $n \times n$ с элементами из $\mathbb{F}$.

7. $[M]_{ij}$ — элемент матрицы $M$ с индексами $i$ и $j$.

8. $\mathcal{G}(V, E)$ — граф со множеством вершин $V$ и множеством ребер $E$.

9. $Wi(n) = (n-1)^2 + 1$ — число Виландта.

10. $DM(\hat{g}, n) = \hat{g}(n-2) + n$, где $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$ — число Далмаджа-Мендельсона.

11. $\sigma_{\mathcal{G}}$ — индекс цикличности графа $G$.

12. $k(\mathcal{G})$ — скрамблинг индекс графа $G$.

13. $g(\mathcal{G})$ — обхват графа $\mathcal{G}$, т.е. длина наименьшего цикла в $\mathcal{G}$.

14. $\hat{g}(\mathcal{G})$ — максимальный обхват среди всех компонент сильной связности графа $\mathcal{G}$.

15. $cr(\mathcal{G})$ — окружность графа $\mathcal{G}$, т.е. длина наибольшего цикла в $\mathcal{G}$.

16. $cb(\mathcal{G})$ — максимальная длина простого пути в графе $\mathcal{G}$.

17. $exp(\mathcal{G})$ — экспонента графа (а значит, и его матрицы смежности).

18. $\lambda(A)$ — максимальный средний вес цикла в графе $\mathcal{G}(A)$.

19. $\mathcal{G}^c$ — критический подграф графа $\mathcal{G}$.

20. $A^*$ — звезда Клини матрицы $A$.

21. $\mathcal{W}(i \to j)$ — множество путей из вершины $i$ в вершину $j$.

    $\mathcal{W}^t(i \to j)$ — множество путей из вершины $i$ в вершину $j$ длины $t$.

    $\mathcal{W}^{t,l}(i \to j)$ — множество путей из вершины $i$ в вершину $j$ длины $t$ по модулю $l$.

22. $\mathcal{W}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j), \mathcal{W}^t(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j), \mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ — аналогично предыдущему пункту, но с дополнительным условием на путь: он должен проходить хотя бы через одну вершину из $\mathcal{G}$.

23. $T(A), T_1(A, B), T_2(A, B)$ — границы, определенные в подразделе 8.2.

# References


[1] Imre Simon *On semigroups of matrices over the tropical semiring* Theoretical Informaties and Applications (Tome 28 (1994) no. 3-4, pp. 277-294)

[2] Semere Tsehaye Tesfay. *A Glance at Tropical Operations and Tropical Linear Algebra* Eastern Illinois University, 2015.

[3] David Speyer, Bernd Sturmfels. *Tropical Mathematics* Mathematics Magazine, vol. 82, №3, June 2009.

[4] Ю.М. Волченко *Max-plus алгебра и ее применение*, декабрь 2017

[5] Hans Schneider. *Wielandt's proof of the exponent inequality for primitive nonnegative matrices* Department of Mathematics, University of Wisconsin at Madison, 2002.

[6] Ю.А. Альпин, И.В. Башкин. *Неотрицательные цепные матрицы* Казанский федеральный университет, 2020.

[7] Alexander Guterman, Elena Kreines, and Carsten Thomassen. *Linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index* Special Matrices Volume 9, 2021.

[8] A. E. Guterman, A. M. Maksaev *Upper bounds on scrambling index for non-primitive digraphs* Linear and Multilinear Algebra, 2019

[9] Arthur Kennedy-Cochran-Patrick, Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev. *New bounds on the periodicity transient of the powers of a tropical matrix: Using cyclicity and factor rank* Linear Algebra and its Applications, 2020

[10] Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev. *https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379514004777*

[11] Sergei Sergeev, Hans Schneider. *CSR expansions of matrix powers in max algebra* Transactions of the American Mathematical Society, December 2009

[12] Brualdi RA, Ryser HJ. *Combinatorial matrix theory.* Cambridge: Cambridge University Press; 1991. (Encyclopedia of mathematics and its applications; 39).