

Степени тропических матриц и графы

Никита Шапошник, МФТИ
научный руководитель – А.Э. Гутерман

29 ноября 2021

Тропическое полукольцо

$\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями сложения \oplus и умножения \odot :

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

$$a \odot b = a + b$$

\mathbb{R}_{\max} также называется max-plus алгеброй.

$\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ с операциями сложения \oplus и умножения \odot :

$$a \oplus b = \min(a, b)$$

$$a \odot b = a + b$$

Свойства тропического полукольца

Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}$ верно:

- Сложение и умножение ассоциативны.
- Сложение и умножение коммутативны.
- Дистрибутивность: $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$.
- $-\infty$ — нулевой элемент: $a \oplus -\infty = a$.
- 0 — единичный элемент: $a \odot 0 = a$.
- Результат умножения на тропический ноль — тропический ноль: $a \odot -\infty = -\infty$.
- Несуществование обратного по сложению: если $a \neq -\infty$, то $a \oplus b \geq a > -\infty$.

Определения теории графов

- 1 **Ориентированный граф** $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$. Петли разрешены, кратные рёбра – нет.
- 2 $\mathcal{W}^t(i \rightarrow j)$ — множество всех путей из вершины i в вершину j длины t ;
Длина пути — это количество ребер в нём;
 $\mathcal{W}(i \rightarrow j)$ — множество всех путей из вершины i в вершину j . Вершины и ребра в обоих случаях могут повторяться.
- 3 Граф $\mathcal{G}(V, E)$ со введенной функцией $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется **взвешенным** графом.
Весом пути $W = e_1 e_2 \dots e_k$ называется число

$$p(W) = \bigodot_{i=1}^k p(e_i).$$

Связь матриц и графов

$A \in M_d(\mathbb{R}_{\max}) \longleftrightarrow \mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$, если

- ① $|V| = d$;
- ② $a_{ij} \neq -\infty \Leftrightarrow (i, j) \in E$ и $a_{ij} = p((i, j))$;
- ③ $a_{ij} = -\infty \Leftrightarrow (i, j) \notin E$.

Такая матрица A называется **матрицей смежности** графа \mathcal{G} .
Граф, построенный по матрице A , обозначим через $\mathcal{G}(A)$.

Степени тропических матриц и графы

Утверждение

Рассмотрим $A \in M_{d \times d}(\mathbb{R}_{\max})$, $i, j \in V(\mathcal{G}(A))$, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тогда:

$$a_{ij}^t = \bigoplus \{p(W) : W \in \mathcal{W}^t(i \rightarrow j)\}$$

Доказательство.

База: $t = 0$:

$$A^0 = I = \text{diag}(0, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & 0 & \dots & -\infty \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\infty & -\infty & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Переход:

$$a_{ij}^{t+1} = \bigoplus_{k=1}^d a_{ik}^t \odot a_{kj} = \max_k (a_{ik}^t + a_{kj})$$

Максимальный средний вес цикла

Определение

Максимальный средний вес цикла в \mathcal{G} :

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \bigoplus_{k=1}^d \bigoplus_{i_1, \dots, i_k} (a_{i_1 i_2} \odot \dots \odot a_{i_k i_1})^{\odot 1/k} = \\ &= \max_{k=1}^d \max_{i_1, \dots, i_k} \frac{(a_{i_1 i_2} + \dots + a_{i_k i_1})}{k}\end{aligned}$$

Звезда Клини

Определение

Для $A \in M_{d \times d}(\mathbb{R}_{\max})$ с $\lambda(A) \leq 0$ определим звезду Клини:

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i$$

Утверждение

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{d-1} A^i$$

$$(A^*)_{ij} = p(\mathcal{W}(i \rightarrow j))$$

Критические циклы и критический подграф

Определение

Ориентированный цикл называется **критическим**, если у него максимальный средний вес.

Определение

Объединение всех критических циклов называется **критическим подграфом**.

Примитивные матрицы

Определение

- Матрица $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $A \geq 0$ называется **примитивной**, если $\exists k \in \mathbb{N} : A^k > 0$.
- Матрица $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}_{\max})$ называется **примитивной**, если $\exists k \in \mathbb{N} : A^k$ не содержит $-\infty$.
- Наименьшее такое k называется **экспонентой** A и обозначается через $\exp(A)$.

Теорема (Виландта)

Экспонента примитивной матрицы порядка n не превосходит $W_i(n) = n^2 - 2n + 2$.

Примитивность на языке графов

Матрица A примитивна тогда и только тогда, когда существует такое $k \in \mathbb{N}$, что в $\mathcal{G}(A)$ для любых вершин u и v есть путь из u в v длины k .

Сильная связность и неразложимость

Определение

Граф \mathcal{G} зовётся **сильно связным**, если для любых $u, v \in V(\mathcal{G})$ есть путь из u в v .

Определение

Матрица $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ (или соответствующий ей граф) **неразложима**, если граф $\mathcal{G}(A)$ сильно связан, иначе **разложима**.
Матрица $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ (или соответствующий ей граф) **полностью разложима**, если в графе $\mathcal{G}(A)$ нет рёбер между различными компонентами сильной связности.

Индекс цикличности

Определение

Индекс цикличности σ_G графа G равен:

- *1, если в G есть только одна вершина (с петлей или без).*
- *НОД всех длин ориентированных циклов в G , если G сильно связан, и $|V(G)| \geq 2$.*
- *НОК цикличностей всех максимальных его сильно связанных подграфов, если G не сильно связан.*

Теорема

Неразложимая матрица примитивна тогда и только тогда, когда ее индекс цикличности равен 1.

Матрицы CSR

Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$, \mathcal{D} — подграф $\mathcal{G}^c(A)$ без тривиальных компонент сильной связности.

Введем обозначение: $M = ((\lambda(A)^- \odot A)^\sigma)^*$, где

- $\lambda(A)$ — максимальный средний вес цикла в $\mathcal{G}(A)$.
- $\lambda(A)^- = -\lambda(A)$ — обратный к $\lambda(A)$ по умножению элемент;
- σ — цикличность критического подграфа $\mathcal{G}^c(A)$.
- $A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i$ — звезда Клини матрицы A .

Определим матрицы $C, S, R \in M_r(\mathbb{R}_{\max})$:

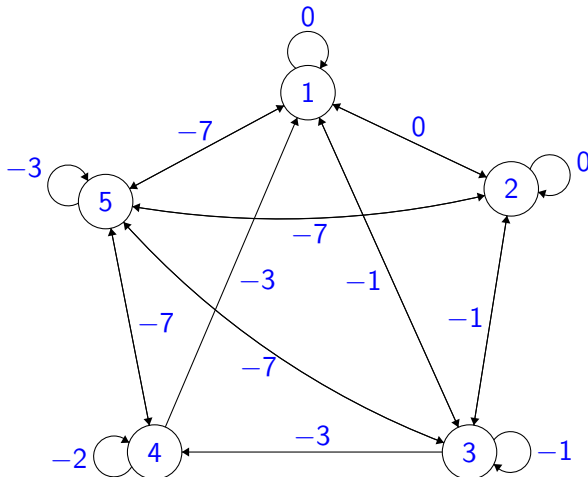
$$c_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, & \text{если } j \in V(\mathcal{D}) \\ -\infty, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, & \text{если } i \in V(\mathcal{D}) \\ -\infty, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$s_{ij} = \begin{cases} \lambda(A)^- \odot a_{ij}, & \text{если } (i, j) \in E(\mathcal{D}) \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример

Рассмотрим следующий граф $\mathcal{G}(A)$:



Пример

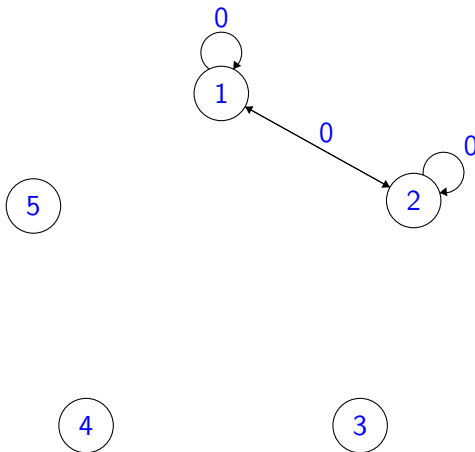
Ему соответствует матрица $A \in M_5(\mathbb{R}_{\max})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -\infty & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -\infty & -7 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -7 \\ -3 & -\infty & -\infty & -2 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(A) = 0.$$

Пример

Критический подграф: его цикличность равна: $\sigma = 1$.
Возьмем $\mathcal{D} = \mathcal{G}^c(A)$.



Пример

$$M = ((\lambda(A)^- \odot A^\sigma)^* = A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -7 \\ -3 & -3 & -4 & 0 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -1 & -1 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -3 & -3 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -7 & -7 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

Пример

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

Замечание

В дальнейшем матрицы C, S, R , определённые через матрицу A , будем обозначать через $CSR[A]$.

Граница T

Теорема (Sergeev, 2009)

Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ неразложима и CSR-матрицы определены через некоторый подграф \mathcal{D} графа $\mathcal{G}^c(A)$. Тогда $\exists T(A) \leftrightarrow \forall t \geq T(A) :$

$$A^t = \lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A].$$

Замечание

Если $\lambda(A) = 0$, то $\forall t \geq T(A) :$

$$A^t = CS^t R[A].$$

Вспомогательная матрица B

Введем новую матрицу $B \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\infty, & \text{если } i \text{ или } j \text{ лежат в } \mathcal{D}, \\ a_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -1 & -3 & -7 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -2 & -7 \\ -\infty & -\infty & -7 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Эта матрица нужна нам для определения следующих границ.

Границы T_1 и T_2

Теорема (Merlet, Nowak, Sergeev, 2014)

Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ неразложима. Тогда
 $\exists T_1(A, B) \Leftrightarrow \forall t \geq T_1(A, B) :$

$$A^t = (\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A]) \oplus B^t.$$

$\exists T_2(A, B) \Leftrightarrow \forall t \geq T_2(A, B) :$

$$\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A] \geq B^t.$$

Если $\lambda(A) = 0$, то равенства из определения T_1 и T_2 записываются в виде:

$$\begin{aligned} A^t &= CS^t R[A] \oplus B^t \\ CS^t R[A] &\geq B^t \end{aligned}$$

Как относятся между собой разные границы

Утверждение

$$T(A) \leq \max(T_1(A, B), T_2(A, B)).$$

Доказательство.

Возьмем $t \geq \max(T_1(A, B), T_2(A, B))$. Тогда:

$$\begin{aligned} A^t &= (\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A]) \oplus B^t \\ \lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A] &\geq B^t \end{aligned}$$

и, значит,

$$A^t = \lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A]$$



Пример

Для матрицы A граница $T(A) = 5$, $T_1(A, B) = 2$, а $T_2(A, B) = 5$

Как выбрать подграф \mathcal{D} ?

$\mathcal{D} = \mathcal{G}^c(A)$ — способ Нахтигалля.

Обозначения

Обозначим через B_N матрицу B , выбранную способом Нахтигалля.

Будем писать $T_{1,N}(A)$ вместо $T_1(A, B_N)$ и $T_{2,N}(A)$ вместо $T_2(A, B_N)$.

Инвариантность относительно умножения на скаляр

Утверждение (Kennedy-Cochran-Patrick, Merlet, Nowak, Sergeev)

Если $A' = \mu \odot A$, где $\mu \in \mathbb{R}$, то

- $\lambda(A') = \mu \odot \lambda(A)$
- $B_N[A'] = B_N[A]$
- $CSR[A'] = CSR[A]$

Значит, $T_1(A, B)$, $T_2(A, B)$ инвариантны относительно умножении матрицы на скаляр, что позволяет нам без разграничения общности говорить, что $\lambda(A) = 0$.

Смысл матриц CSR

Утверждение (Kennedy-Cochran-Patrick, Merlet, Nowak, Sergeev)

Если $\lambda(A) = 0$, то верно следующее тождество:

$$(CS^t R[A])_{ij} = p(\mathcal{W}^{t,\sigma}(i \xrightarrow{\mathcal{G}^c(A)} j)), \quad (1)$$

где σ обозначает цикличность $\mathcal{G}^c(A)$, $p(\mathcal{W})$ — максимальный вес пути из множества \mathcal{W} ,

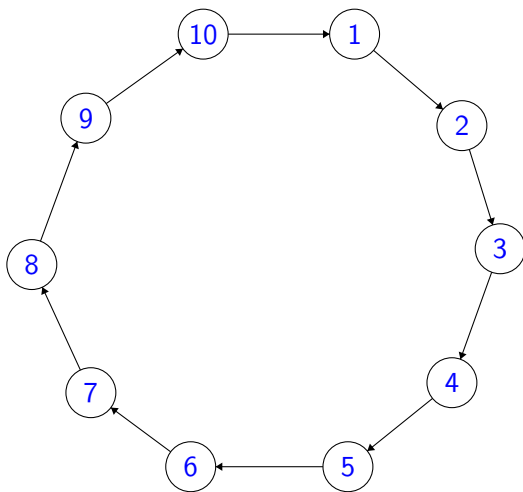
Некоторые оценки для $T_{1,N}(A)$

Теорема (Kennedy-Cochran-Patrick, Merlet, Nowak, Sergeev)

Для любой $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ имеем:

- 1 $T_{1,N}(A) \leq n^2 - 2n + 2$;
- 2 $T_{1,N}(A) \leq \hat{g}(n - 2) + n$, где $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$ — обхват критического подграфа, то есть наименьшая длина цикла.

Границы T для цикла



Будем считать, что $\lambda(A) = 0$.

Границы T для цикла

- $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A)$,
- $\sigma = n$,

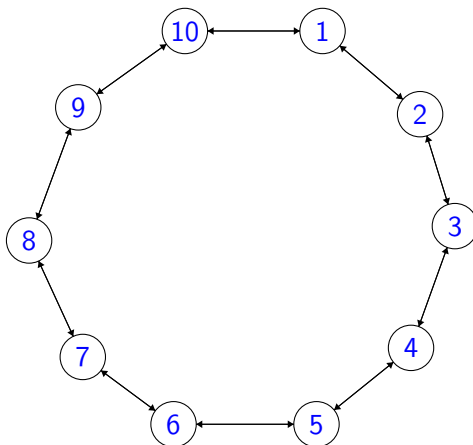
- $M = (A^n)^* = E^* = E = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & \dots & -\infty \\ -\infty & 0 & \dots & -\infty \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\infty & -\infty & \dots & 0 \end{pmatrix},$

- $C = R = E, S = A, B = -\infty$.

Значит, $CS^tR[A] = A^t$ для любого неотрицательного t .

Следовательно, $T = T_1 = T_2 = 0$.

Границы T для двустороннего цикла



- Оба цикла длины 2 в этом графе имеют средний вес 0.
- $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A)$.

Границы T для двустороннего цикла, n нечетно

- $\sigma = 1$
- $C = R = M = A^*$
- $S = A$
- $B = -\infty$
- В $CS^tR[A] = A^*A^tA^*$ нет $-\infty$. Значит, $CS^tR[A] = A^*$.
- Следовательно, $CS^tR[A] = A^t$ верно тогда и только тогда, когда $A^t = A^*$.
- $T = \exp(A)$
- $\exp(A) = n - 1$

Значит, $T = T_1 = n - 1$, $T_2 = 0$.

Границы T для двустороннего цикла, n четно

- $\sigma = 2$

- $C = R = M = (A^2)^*$

- $S = A^2$

- $B = -\infty$

- $A^t = CS^tR = \begin{cases} (A^2)^*, & \text{если } t \text{ четно,} \\ A \odot (A^2)^*, & \text{если } t \text{ нечетно.} \end{cases} \quad \text{при } t \geq T(A).$

$$T(A) = T_1(A) = \frac{n}{2}, \quad T_2(A) = 0.$$

Примеры границ T

Теорема

Если граф $\mathcal{G}(A)$

- сильно связан
- совпадает со своим критическим подграфом
- $\lambda(A) = 0$
- его цикличность $\sigma = 1$
- для произвольных двух вершин верно, что все пути между ними имеют одинаковый вес

то $T(A) = T_{1,N}(A) = \exp(A)$, а $T_{2,N}(A) = 0$.

Спасибо за внимание!