Тропическая линейная алгебра

Никита Шапошник, Б05-024
научный руководитель: А. Э. Гутерман

1 Введение

Тропическая математика была придумана бразильским математиком Имре Саймоном (Imre Simon, [1]) в конце XX века (название произошло от его места жительства). Матрицы над тропическим полукольцом имеют приложения в теории графов, отпимизации и биологии. В настоящей работе мы будем рассматривать матрицы над тропическим полукольцом, их связь с графами и некоторые их индексы: экспоненту, скрамблинг индекс, индекс цикличности и границы T.

2 Определения

Определение 2.1. *Тропическая алгебра ([2], [3]) — это множество* $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *с операциями сложения* $\oplus$ *и умножения* $\odot$*:*

$$a \oplus b = \max(a, b)$$
$$a \odot b = a + b$$

или множество $\mathbb{R}_{min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *с другой операцией сложения и идентичным умножением:*

$$a \oplus b = min(a, b)$$
$$a \odot b = a + b.$$

В дальнейшем мы будем работать с $\mathbb{R}_{\max}$.

Лемма 2.2 (Свойства тропической алгебры, см. [2], [3], [4])**.** *Тропическая алгебра обладает следующими свойствами: для любых* $a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}$ *верно:*

- *Сложение и умножение ассоциативны.*
- *Сложение и умножение коммутативны.*
- *Дистрибутивность:* $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$.
- $-\infty$ *— нулевой элемент:* $a \odot -\infty = a$.
- 0 *— единичный элемент:* $a \oplus 0 = a$.
- *Результат умножения на тропический ноль — это тропический ноль:* $a \odot -\infty = -\infty$.
- *Несуществование обратного по сложению: если* $a \neq -\infty$, *то* $a \oplus b \geq a > -\infty$.

Следствие 2.3. *Тропическая алгебра является полукольцом.*

Определение 2.4. *Граф (в рамках данной задачи) $\mathcal{G}(V, E)$ — совокупность двух множеств – непустого множества $V = V(\mathcal{G})$ и множества $E = E(\mathcal{G}) \subseteq V^2$. Множество V называется множеством вершин, множество E называется множеством рёбер.*

Если для любого ребра $(u, v) \in E(\mathcal{G})$ верно, что обратное ребро $(v, u) \in E(\mathcal{G})$ — тоже лежит в графе, то граф $\mathcal{G}$ называется неориентированным, в противном случае — ориентированным.

Путем из вершины u в вершину v в графе $\mathcal{G}$ называется последовательность вершин $u, w_1, w_2, \ldots, w_l, v \in V(\mathcal{G})$ и последовательность ребер $(u, w_1), (w_1, w_2), \ldots, (w_l, v) \in E(\mathcal{G})$, где вершины и ребра могут повторяться. Путь называется простым, если вершины в нём не повторяются. Длиной пути называется количество ребер в нем. Обозначим через $\mathcal{W}^t(i \to j)$ множество всех путей из вершины i в вершину j длины t, а через $\mathcal{W}(i \to j)$ — множество всех путей из вершины i в вершину j.

Граф $\mathcal{G}(V, E)$ со введенной функцией $P : E \to \mathbb{R}$ называется взвешенным графом. Весом пути называется тропическое произведение (т.е. вещественная сумма) весов всех ребер в пути. Обозначим вес пути W через $p(W)$.

Ориентированный граф называется сильно связным, если для любых $u, v \in V(\mathcal{G})$ существует путь из u в v и из v в u.

Граф $\mathcal{G}'$ называется подграфом графа $\mathcal{G}$, если $\mathcal{G}'$ получен из $\mathcal{G}$ удалением некоторых ребер и, возможно, вершин. Иначе, $V(\mathcal{G}') \subseteq V(\mathcal{G})$ и $E(\mathcal{G}') \subseteq E(\mathcal{G})$.

Обхватом графа $\mathcal{G}$ называется наименьшая длина цикла в $\mathcal{G}$ и обозначается как $g(\mathcal{G})$. Через $\hat{g}(\mathcal{G})$ обозначается максимальный обхват среди всех компонент сильной связности графа $\mathcal{G}$.

Окружностью графа $\mathcal{G}$ называется наибольшая длина цикла в $\mathcal{G}$ и обозначается как $cr(\mathcal{G})$.

Максимальную длину простого пути в графе $\mathcal{G}$ будем обозначать через $cb(\mathcal{G})$.

Граф $\mathcal{H}(U, F)$ называется индуцированным подграфом графа $\mathcal{G}(V, E)$, порожденным подмножеством вершин $U \subset V$, если ребрами $\mathcal{H}$ являются те и только те ребра множества E, оба конца которых принадлежат U.

3 Примитивность вещественной неотрицательной матрицы

Определение 3.1. *Вещественная матрица A называется примитивной, если существует натуральное число m такое, что A^m положительна, то есть все числа в ней положительны. При этом наименьшее такое m называется экспонентой матрицы и обозначается через $exp(A)$.*

Теорема 3.2 (Критерий примитивности матрицы, см.[12])**.** *Неотрицательная квадратная матрица порядка n над $\mathbb{R}$ примитивна тогда и только тогда, когда граф смежности этой матрицы сильно связен и НОК всех длин замкнутых путей (циклов) равно 1.*

Теорема 3.3 (Виландта, [5])**.** *Если неотрицательная квадратная матрица порядка n над полем вещественных чисел примитивна, то ее экспонента не превосходит число Виландта $Wi(n) = n^2 - 2n + 2$.*

4 Примитивность тропических матриц

Замечание 4.1. *Примитивность и экспонента тропической матрицы определяется так же, как и в вещественном случае, с отличием лишь в том, что в степени матрицы не должно быть нулей тропического полукольца, т.е. $-\infty$.*

4.1 Матрицы 2×2

Утверждение 4.2. *Матрица* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *над тропическим полукольцом примитивна тогда и только тогда, когда* $b \neq -\infty \wedge c \neq -\infty \wedge (a \neq -\infty \vee d \neq -\infty)$*; причем ее экспонента равна 2.*

Доказательство. Если перемножить матрицы, у которых в правом верхнем углу стоят $-\infty$, то у результата будет стоять $-\infty$ в том же углу:

$$\begin{pmatrix} a & -\infty \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & -\infty \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & a \odot -\infty \oplus -\infty \odot d' \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & -\infty \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Аналогично с левым нижнем углом. Значит, в правом верхнем и в левом нижним углах не могут стоять $-\infty$.

Перемножим 2 матрицы, у которых на главной диагонали стоят $-\infty$:

$$\begin{pmatrix} -\infty & b \\ c & -\infty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\infty & b' \\ c' & -\infty \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \dots & -\infty \odot b' \oplus b \odot -\infty \\ c \odot -\infty \oplus -\infty \odot c' & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & -\infty \\ -\infty & \dots \end{pmatrix}$$

У результата стоят ∞ на побочной диагонали. Перемножим такую матрицу с матрицей с ∞ на главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} a & -\infty \\ -\infty & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\infty & b \\ c & -\infty \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a \odot -\infty \oplus -\infty \odot c & \dots \\ \dots & -\infty \odot b \oplus -\infty \odot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\infty & \dots \\ \dots & -\infty \end{pmatrix}$$

Снова получилась матрица с $-\infty$ на главной диагонали. Значит, в любой степени матрицы с $-\infty$ на главной диагонали будут $-\infty$. Значит, она не может быть примитивной.

Проверим, что матрица с описанными выше ограничениями будет примитивной:

$$A^{\odot 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\odot 2} = \begin{pmatrix} a \odot a \oplus b \odot c & a \odot b \oplus b \odot d \\ a \odot c \oplus c \odot d & b \odot c \oplus d \odot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(2a, b+c) & b + \max(a,d) \\ c + \max(a,d) & \max(b+c, 2d) \end{pmatrix}$$

Равным $-\infty$ в этой матрице может быть или a, или d, или никто из них. В любом случае, в квадрате не будет $-\infty$. Значит, A является примитивной с показателем степени 2. □

4.2 Обобщение теоремы Виландта на тропические матрицы

Определение 4.3. $\mathbb{B} = \{$***0,1***$\}$ *— множество с сложением, аналогичным дизъюнкции, и умножением, аналогичным конъюнкции:*

+	***0***	***1***
0	***0***	***1***
1	***1***	***1***

·	***0***	***1***
0	***0***	***0***
1	***0***	***1***

Замечание 4.4. *Примитивность и экспонента матрицы над* $\mathbb{B}$ *определяется так же, как и в вещественном случае.*

Теорема 4.5 (Виландта для матриц над $\mathbb{B}$)**.** *Если матрица* $A \in M_n(\mathbb{B})$ *примитивна, то ее экспонента не превосходит* $n^2 - 2n + 2$*.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\beta' : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{B}$ такую, что

$$\beta'(t) = \begin{cases} \mathbf{1}, t \neq 0 \\ \mathbf{0}, t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

и функцию $B' : M_n(\mathbb{R}_{\geq 0}) \to M_n(\mathbb{B})$, действующая функцией β' поэлементно:

$$B' : A = (a_{ij}) \mapsto B'(A) = (\beta'(a_{ij})) \quad (2)$$

Лемма 4.6. *B' — гомоморфизм.*

Доказательство леммы. Необходимо доказать, что

$$B'(X) + B'(Y) = B'(X + Y) \text{ и } B'(X) \cdot B'(Y) = B'(X \cdot Y) \quad (3)$$

Первое верно, так как для любых $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ верно, что $\beta'(x) + \beta'(y) = \beta'(x + y)$.

Докажем, что B' сохраняет умножение: рассмотрим элемент с индексами i, j:

$$(B'(X) \cdot B'(Y))_{ij} = \sum_{s=1}^{n} B'(X)_{is} \cdot B'(Y)_{sj} = \sum_{s=1}^{n} \beta'(X_{is}) \cdot \beta'(Y_{sj}) =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \beta'(X_{is} \cdot Y_{sj}) = \beta'(\sum_{s=1}^{n} X_{is} \cdot Y_{sj}) = \beta'((X \cdot Y)_{ij}) = (B'(X \cdot Y))_{ij} \quad (4)$$

Значит, B' — гомоморфизм. □

Рассмотрим матрицу A', лежащую в прообразе матрицы A при отображении B' (для этого достаточно взять матрицу A как матрицу над $\mathbb{R}_{\geq 0}$).

Заметим, что для любого m положения нулей в матрице $(A')^m$ и нулей в $B'((A')^m) = (B'(A'))^m = A^m$ совпадают, в том числе и для $m = exp(A')$. Из этого следует, что $exp(A) = exp(A') \leq Wi(n)$ по теореме Виландта для матриц над $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Следовательно, теорема Виландта верна и для $\mathbb{B}$-матриц. □

Теорема 4.7 (Вилантда для тропических матриц)**.** *Если матрица $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ примитивна, то ее экспонента не превосходит $Wi(n)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\beta : \mathbb{R}_{max} \to \mathbb{B}$ такую, что

$$\beta(t) = \begin{cases} \mathbf{1}, t \neq -\infty \\ \mathbf{0}, t = -\infty \end{cases} \quad (5)$$

и функцию $B : M_n(\mathbb{R}_{max}) \to M_n(\mathbb{B})$, действующая функцией β поэлементно:

$$B : A = (a_{ij}) \mapsto B(A) = (\beta(a_{ij})) \quad (6)$$

Лемма 4.8. *B — гомоморфизм.*

Доказательство леммы. Надо доказать, что

$$B(X) + B(Y) = B(X \oplus Y) \text{ и } B(X) \cdot B(Y) = B(X \odot Y) \quad (7)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 4.6, но с заменой β' на β, B' на B и $\mathbb{R}_{\geq 0}$ на $\mathbb{R}_{max}$. □

Рассмотрим $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ и её образ при отображении B. Для любого m положения бесконечных элементов в матрице A^m и нулей в $B(A^m) = (B(A))^m$ совпадают, в том числе и для $m = exp(B(A))$.

Из этого следует, что $exp(A) = exp(B(A)) \leq Wi(n)$ по теореме Виландта для матриц над $\mathbb{B}$, что доказывает теорему Виладнта для тропических матриц. □

5 Примитивность тропических матриц и графы

Определение 5.1. *Матрица $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ называется матрицей смежности графа $\mathcal{G}$, если в $\mathcal{G}$ n вершин и в ячейке с индексами i и j матрицы A стоит:*
1) $-\infty$ тогда и только тогда, когда вершины с номерами i и j не соединены ребром;
2) число $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда между вершинами с номерами i и j есть ребро веса x. Если граф не взвешенный, то в матрице стоит $x = 0$.

Заметим, что есть и обратное соответствие: по матрице смежности можно восстановить граф. Обозначим через $\mathcal{G}(A)$ граф, соответствующий тропической матрице A.

Степени тропических матриц интересны по многим причинам, в том числе по следующей:

Утверждение 5.2. *Рассмотрим $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$, $i, j \in V(\mathcal{G}(A))$, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда:*

$$a_{ij}^t = \bigoplus \{p(W) : W \in \mathcal{W}^t(i \to j)\}$$

Доказательство. Докажем это по индукции. База, очевидно, верна для $t = 0$: в этом случае $A^t = I$ — единичная тропическая матрица, на главной диагонали которой стоят тропические единицы, т.е. 0, а на остальных местах стоят тропические нули, т.е. $-\infty$.

Докажем переход: пусть утверждение верно для t, докажем для $t+1$.

$$a_{ij}^{t+1} = \bigoplus_{k=1}^{k} a_{ik}^t \odot a_{kj} = \max_k a_{ik}^t + a_{kj}$$

Заметим, что любой путь из вершины i в вершину j длины $t+1$ есть конкатенация пути из вершины i в вершину k длины t и ребра из k в j для какой-то вершины k, а вес этого пути — это сумма веса первого пути и веса последнего ребра. Из всех возможных путей оптимальным будет путь с максимальным общим весом, что согласуется с определением тропического перемножения матриц. $\square$

5.1 Матрицы 2×2

Утверждение 5.3. *Матрица $A \in M_2(\mathbb{R}_{\max})$ примитивна тогда и только тогда, когда в графе $\mathcal{G}(A)$ для любых двух вершин между ними есть путь длины ровно 2.*

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Если $a_{12} = -\infty$, то не будет существовать пути из первой вершины во вторую. Если $a_{21} = -\infty$, то не будет существовать пути из второй вершины в первую. Если предыдущие два условия не выполняются, но $a_{11} = a_{22} = -\infty$, то не будет существовать пути из первой вершины во вторую и из второй в первую. В этих случаях матрица A не будет примитивной.

Если все вышеперечисленные условия не выполняются, то матрица будет примитивной, что подтверждает доказанный ранее путем перемножения матриц факт. $\square$

5.2 Общий случай

Утверждение 5.4. *Матрица $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ примитивна тогда и только тогда, когда в графе $\mathcal{G}(A)$ между любыми двумя вершинами найдётся путь длины ровно $Wi(n)$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ и соответствующий ей граф $\mathcal{G}(A)$. Примитивность A равносильна отсутствия в матрице $A^{Wi(n)}$ бесконечных элементов (так как по теореме Виландта $exp(A) \leq Wi(n)$). Последнее утверждение равносильно тому, что в графе $\mathcal{G}(A)$ между любыми двумя вершинами найдётся путь длины ровно $exp(A)$. $\square$

6 Индекс цикличности

Определение 6.1. *Граф $\mathcal{G}_1$ гомоморфен графу $\mathcal{G}_2$, если существует сюръективное отображение $f : V(\mathcal{G}_1) \to V(\mathcal{G}_2)$ такое, что для любого ребра $(u, v) \in E(\mathcal{G}_1)$ верно, что $(f(u), f(v)) \in E(\mathcal{G}_2)$.*

Определение 6.2. *Графы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ изоморфны, если существует биекция $\rho : V(\mathcal{G}_1) \to V(\mathcal{G}_2)$ такая, что для любых $u, v \in V(\mathcal{G}_1)$ верно, что $(u, v) \in E(\mathcal{G}_1)$ выполняется тогда и только тогда, когда $(\rho(u), \rho(v)) \in E(\mathcal{G}_2)$.*

Определение 6.3. *Индекс цикличности (или просто цикличность) ориентированного графа $\mathcal{G}$ обозначается через $\sigma_{\mathcal{G}}$ и определяется следующим образом:*

1. *Если $\mathcal{G}$ сильно связен, и $|V(\mathcal{G})| \geq 2$, то цикличность равна НОД всех длин ориентированных циклов в $\mathcal{G}$.*

2. *Если в $\mathcal{G}$ есть только одна вершина (с петлей или без), то $\sigma_{\mathcal{G}} = 1$.*

3. *Если $\mathcal{G}$ не сильно связен, то его цикличность равна НОК цикличностей всех максимальных его сильно связных подграфов.*

Замечание 6.4 (Переформулировка критерия примитивности, см.[12])**.** *Тропическая матрица $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ примитивна тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}(A)$ сильно связен и его индекс цикличности равен 1.*

Замечание 6.5. *Цикличность сильно связного графа $\mathcal{G}$ — это наибольшее k такое, что $\mathcal{G}$ гомоморфен ориентированному циклу из k вершин.*

Заметим, что в сильно связном графе $\mathcal{G}$ с цикличностью γ любые 2 пути, соединяющий 2 фиксированные вершины, имеют одинаковые длины по модулю γ. Из этого следует, что на множестве $V(\mathcal{G})$ можно ввести отношение эквивалентности: 2 вершины лежат в одном классе эквивалентности тогда и только тогда, когда длина пути от одной к другой кратна γ.

Определение 6.6. *Эти классы эквивалентности называются циклическими классами.*

Пусть $\mathcal{G} = (V, E)$ — взвешенный ориентированный граф с матрицей смежности $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$. Пусть C — это ориентированный цикл в $\mathcal{G}$ с весами ребер $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_l}$. Средний вес ребра в C — это тропическое среднее геометрическое весов ребер в C:

$$w_a(C) = \sqrt[\odot l]{a_{i_1} \odot a_{i_2} \odot \cdots \odot a_{i_l}} = \frac{1}{l}(a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_l})$$

Определение 6.7. *Ориентированный цикл называется критическим, если у него максимальный средний вес. Критический подграф $\mathcal{G}^c$ графа $\mathcal{G}$ — это объединение всех критических циклов в $\mathcal{G}$.*

Пусть $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ — матрица смежности графа $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$, который содержит хотя бы один ориентированный цикл.

Определение 6.8. *Цикличностью A называется цикличность критического подграфа $\mathcal{G}^c$ графа $\mathcal{G}$, то есть $\sigma(A) := \sigma_{\mathcal{G}^c}$. Если в $\mathcal{G}(A)$ нет ориентированных циклов, то $\sigma(A) = 1$.*

7 Скрамблинг индекс

Определение 7.1. *Скрамблинг индекс ориентированного графа* $\mathcal{G}$ *— это наименьшее натуральное число* k *такое, что для любых* $u, v \in V(\mathcal{G})$ *существует* $w \in V(\mathcal{G})$ *такая, что есть путь длины* k *из* u *в* w *и из* v *в* w*. Обозначим скрамблинг индекс через* $k(\mathcal{G})$*. Если не существует таких* k*, то* $k(\mathcal{G}) = 0$*.*

Определение 7.2. *Графом Виландта называется ориентированный граф на* $n \geq 2$ *вершинах со множеством вершин* $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ *и множеством ребер*

$$E = \{(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n)\} \cup \{(n-1, 1)\}$$

В этом графе есть два цикла длиной $n-1$ *и* n*, следовательно,* $\sigma_{W_n} = 1$*, он сильно связен. Следовательно, он примитивен.*

Теорема 7.3 ([8])**.** *Пусть* $\mathcal{G}$ *— примитивный ориентированный граф порядка* $n \geq 2$*. Тогда*

$$exp(\mathcal{G}) \leq n^2 - 2n + 1$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} \cong W_n$*.*

Замечание 7.4 ([8])**.** *Для примитивного ориентированного графа верно неравенство*

$$0 < k(\mathcal{G}) \leq exp(\mathcal{G})$$

Это следует из определений скрамблинг индекса и экспоненты.

Определение 7.5. *Будем называть подграф* $\mathcal{H}$ *графа* $\mathcal{G}$ *достижимым, если для любой вершины* v *из* $\mathcal{G}$ *существует путь из* v *в какую-либо вершину из* $\mathcal{H}$*.*

Теорема 7.6 ([8], критерий положительности скрамблинг-индекса)**.** *Рассмотрим произвольный ориентированный граф* $\mathcal{G}$*. Его скрамблинг-индекс положителен тогда и только тогда, когда в* $\mathcal{G}$ *есть примитивный достижимый подграф.*

Теорема 7.7 ([8])**.** *Обозначим через* $\lceil x \rceil$ *наименьшее целое число, большее или равное* x*.*

Если $\mathcal{G}$ *— примитивный граф с* $n \geq 2$ *вершинами, то*

$$k(\mathcal{G}) \leq \left\lceil \frac{Wi(n)}{2} \right\rceil$$

При $n \geq 3$ *равенство достигается тогда и только тогда, когда* $\mathcal{G} \cong W_n$*. При* $n = 2$ *равенство достигается тогда и только тогда, когда* $\mathcal{G} \cong W_2$ *или* $\mathcal{G} \cong J_2$*, где* J_n *— полный ориентированный граф на* n *вершинах, то есть* $E(J_n) = V^2$*.*

8 CSR-декомпозиция и слабое CSR-расширение

8.1 Необходимые определения

Определение 8.1. *Назовем тропическую матрицу* A *(или соответствующий ей граф) неразложимой, если граф* $\mathcal{G}(A)$ *сильно связен, иначе — разложимой.*

Назовем тропическую матрицу A *(или соответствующий ей граф) полностью разложимой, если в графе* $\mathcal{G}(A)$ *нет ребер между различными компонентами сильной связности.*

Рассмотрим тропическую матрицу $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$. Обозначим максимальный средний вес цикла в $\mathcal{G}(A)$ через $\lambda(A)$, т.е.

$$\begin{aligned}\lambda(A) = \bigoplus_{k=1}^{d} \bigoplus_{i_1,\dots,i_k} (a_{i_1 i_2} \odot \cdots \odot a_{i_{k-1} i_k})^{\odot 1/k} = \\ = \max_{k=1}^{d} \max_{i_1,\dots,i_k} \frac{(a_{i_1 i_2} + \cdots + a_{i_{k-1} i_k})}{k}\end{aligned} \tag{8}$$

Необходимо сказать, что критический подграф $\mathcal{G}^c(A)$ является полностью разложимым и средний вес любого цикла в нём равен $\lambda(A)$.

Определение 8.2. *Для $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ с $\lambda(A) \leq 0$ звездой Клини называется следующая матрица:*

$$A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i = \bigoplus_{i=0}^{d-1} A^i$$

В матрице A^* в ячейке под номером i и j лежит длина оптимального пути от вершины i к вершине j по всему графу, без ограничения на длину пути. Условие $\lambda(A) \leq 0$ необходимо, так как иначе этот ряд расходится: можно идти по циклу с положительным средним весом и улучшать ответ. Так как дважды проходить через одну и ту же вершину не имеет смысла, можно ограничиться первыми d матрицами.

8.2 Матрицы CSR

Рассмотрим неразложимую $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ и некоторый подграф $\mathcal{G}$ критического подграфа $\mathcal{G}^c(A)$ без тривиальных компонент сильной связности. Введем обозначения: $\sigma = \sigma(\mathcal{G})$ – индекс цикличности $\mathcal{G}$, $M = ((\lambda(A)^- \odot A^\sigma)^*$. Здесь и далее для $a \in \mathbb{R}_{\max}$, $a \neq -\infty$ через a^- будем обозначать обратное по умножению к a, т.е. $a^- = -a$.

Определим матрицы $C, S, R \in M_r(\mathbb{R}_{\max})$ следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ если } j \in V(\mathcal{G}) \\ -\infty, \text{ иначе,} \end{cases} \qquad r_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ если } i \in V(\mathcal{G}) \\ -\infty, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$s_{ij} = \begin{cases} \lambda(A)^- \odot a_{ij}, \text{ если } (i,j) \in E(\mathcal{G}) \\ -\infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Если матрицы C, S, R определены через матрицу A, будем писать $CS^tR[A]$ для произвольного t.

Теорема 8.3 ([9], [10])**.** *Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ неразложима и CSR-матрицы определены через некоторый подграф $\mathcal{G}$ графа $\mathcal{G}(A)$. Тогда существует неотрицательное целое $T(A)$ такое, что для любого $t \geq T(A)$:*

$$A^t = \lambda(A)^{\odot t} \odot CS^tR[A]. \tag{9}$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (9) записывается в виде:

$$A^t = CS^tR[A]. \tag{10}$$

В добавок к $T(A)$, введем ещё 2 функции: $T_1(A, B)$ и $T_2(A, B)$. Для этого зафиксируем тот же подграф $\mathcal{G}$ и введем новую матрицу $B \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\infty, \text{ если } i \in V(\mathcal{G}) \text{ или } j \in V(\mathcal{G}), \\ a_{ij}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Теорема 8.4 ([9], [10]). *Пусть $A \in M_d(\mathbb{R}_{\max})$ неразложима и CSR-матрицы определены через некоторый подграф $\mathcal{G}$ графа $\mathcal{G}(A)$.*

(Определение $T_1(A,B)$:) существует неотрицательное целое $T_1(A,B)$ такое, что для любого $t \geq T_1(A,B)$ верно следующее:

$$A^t = (\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A]) \oplus B^t. \tag{11}$$

(Определение $T_2(A,B)$:) существует неотрицательное целое $T_2(A,B)$ такое, что для любого $t \geq T_2(A,B)$ верно следующее:

$$\lambda(A)^{\odot t} \odot CS^t R[A] \geq B^t. \tag{12}$$

Заметим, что если $\lambda(A) = 0$, то (11) записывается в виде:

$$A^t = CS^t R[A] \oplus B^t, \tag{13}$$

а 12 записывается в виде

$$CS^t R[A] \geq B^t. \tag{14}$$

Есть несколько способов выбрать подграф $\mathcal{G}$, но в этой работе мы будем работать со способом Нахтигалля, в котором этот подграф совпадает с критическим подграфом исходного графа: $\mathcal{G} = \mathcal{G}^c(A)$. В дальнейшем, чтобы указать, что матрица была выбрана с помощью способа Нахтигалля, будем писать B_N вместо B и $T_{1,N}(A)$ вместо $T_1(A, B_N)$.

Утверждение 8.5. $T(A) \leq \max(T_1(A,B), T_2(A,B))$.

Доказательство. Возьмем $t \geq \max(T_1(A,B), T_2(A,B))$, для него выполняются условия (11) и (12). Из (12) следует, что операция тропического сложения с B^t в (11) бессмысленна, откуда для данного t следует (9). □

Замечание 8.6. *Заметим, что если $B = -\infty$, то $T(A) = T_1(A,B)$, а $T_2(A,B) = 0$.*

Замечание 8.7 (Инвариантность относительно умножения на скаляр)**.** *Если $A' = A \odot \mu$, где $\mu \in \mathbb{R}$, то*

- $\lambda(A') = \lambda(A) \odot \mu$, $B_N[A'] = B_N[A]$
- $CSR[A'] = CSR[A]$

Значит, $T_1(A,B)$, $T_2(A,B)$ инвариантны относительно умножения матрицы на скаляр, что позволяет нам без разграничения общности говорить, что $\lambda(A) = 0$.

Утверждение 8.8 (см. [9])**.** *Пусть $\lambda(A) = 0$. Тогда $A^t \geq CS^t R[A]$ тогда и только тогда, когда $t \geq T_{1,N}(A)$.*

Это утверждение позволяет искать $T_{1,N}$: достаточно найти наименьшее t, для которого верно $A^t \geq CS^t R[A]$. Тогда $T_{1,N} = t$. Если, вдобавок, $B = -\infty$, то $T = t$ по замечанию 8.6.

Утверждение 8.9 (Периодичность, см. [11])**.** *Для любого $t \geq 0$ верно, что $CS^{t+\sigma} R[A] = CS^t R[A]$, где σ — это цикличность $\mathcal{G}^c(A)$. Иначе говоря, последовательность матриц $\{CS^t R[A]\}_{t \geq 0}$ периодична с периодом σ.*

Значит, в силу равенства $A^t = CS^t R$ при $t \geq T(A)$, последовательность матриц A^t при $t \geq T(A)$ является периодической с периодом σ.

Введем несколько новых обозначений:

1. Через $\mathcal{W}^{t,l}(i \to j)$ обозначим множество путей от вершины i к вершине j, имеющих длину t по модулю l;

2. Через $\mathcal{W}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ обозначим множество путей от вершины i к вершине j, проходящих хотя бы через одну вершину из $\mathcal{G}$. Аналогично определяются $\mathcal{W}^t(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$, $\mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ — граф над стрелкой добавляет ограничение на пути в множестве.

3. Для множества $\mathcal{W}$ через $p(\mathcal{W})$ обозначим максимальный вес пути из множества $\mathcal{W}$.

Утверждение 8.10 ([10]). *Если $\lambda(A) = 0$, то верно следующее тождество:*

$$(CS^t R[A])_{ij} = p(\mathcal{W}^{t,\sigma}(i \xrightarrow{\mathcal{G}^c(A)} j)), \tag{15}$$

где σ обозначает цикличность $\mathcal{G}^c(A)$.

Теорема 8.11 (Некоторые оценки $T_{1,N}(A)$, см. [10]). *Для любой $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ имеем:*

1. $T_{1,N}(A) \leq Wi(n)$;

2. $T_{1,N}(A) \leq \hat{g}(n-2) + n$;

3. $T_{1,N}(A) \leq (\hat{g} - 1)(cr - 1) + (\hat{g} + 1)cd$,

где $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$, $cr = cr(\mathcal{G}(A))$, а $cd = cd(\mathcal{G}(A))$.

9 Примеры

Оценим T, T_1 и T_2 для некоторых графов.

9.1 Полный граф

Рассмотрим матрицу $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$, $a_{ij} = 0$ для любых индексов i, j. Граф $\mathcal{G}(A)$ является полным, веса всех ребер в нём равны 0. Значит, критический подграф $\mathcal{G}^c$ совпадает со всем графом $\mathcal{G}$. Из этого следует, что матрица $B = -\infty$ и $T_2 = 0$.

Найдем матрицы C, S, R. Индекс цикличности полного графа $\sigma = 1$ (т.к. в нём есть циклы длины 1), следовательно $C = R = M = A^*$, $S = A$.

Так как для любого положительного t верно, что $A^t = A$, то $A^* = A$ и равенство $A^* A^t A^* = A^t$ выполняется для любого положительного t.

Следовательно, $T = T_1 = 1$.

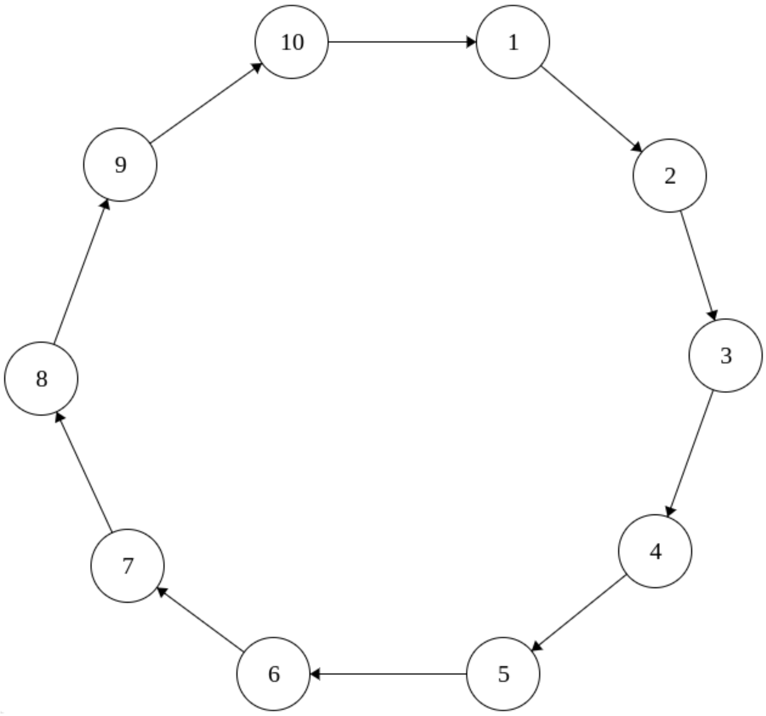
9.2 Односторонний цикл

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ одностороннего цикла на n вершинах.

В силу инвариантности границ относительно домножения на скаляр из $\mathbb{R}$ (замечание 8.7), можно рассматривать только тот случай, в котором $\lambda(A) = 0$. Тогда $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A)$, $\sigma = n$.

$$M = (A^n)^* = E^* = E = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & ... & -\infty \\ -\infty & 0 & ... & -\infty \\ ... & ... & ... & ... \\ -\infty & -\infty & ... & 0 \end{pmatrix} = diag(0, 0, \ldots, 0)$$

Значит, $C = R = E$, $S = A$, $B = -\infty$, и для любого неотрицательного t верно $CS^t R[A] = A^t$. Следовательно, $T = T_1 = T_2 = 0$.



9.3 Двусторонний цикл

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_n(\mathbb{R}_{\max})$ двустороннего цикла на n вершинах. Пронумеруем вершины так, чтобы первый цикл состоял из вершин $1, 2, \ldots n$(в порядке обхода), а второй — из $n, n-1, \ldots, 1$ (в порядке обхода). Чтобы избежать кратных рёбер, будем работать с $n \geq 3$.

Будем считать, что $\lambda(A) = 0$. Рассмотрим случай, в котором циклы по часовой стрелке и против часовой стрелки имеют одинаковый средний вес, равный нулю. Значит, критический подграф $\mathcal{G}^c(A)$ совпадает со всем графом $\mathcal{G}(A)$.

Лемма 9.1. *Все циклы в таком графе имеют средний вес 0.*

Доказательство. Пусть вес пути по часовой стрелке от вершины i до вершины j равен x, а против часовой стрелки — y. Эти два пути образуют цикл, значит $x+y \leq 0$. Докажем, что $x + y = 0$.

Дополнение к большому циклу по часовой стрелке первого пути весит $-x$, а дополнение к большому циклу против часовой стрелки весит $-y$. Так как можно сначала пойти по дополнению к первому пути, а потом — по дополнению ко второму пути, эти два дополнения тоже образуют цикл. Значит, $(-x) + (-y) \leq 0$. Значит, $x + y \geq 0$.

Следовательно, $x + y = 0$. □

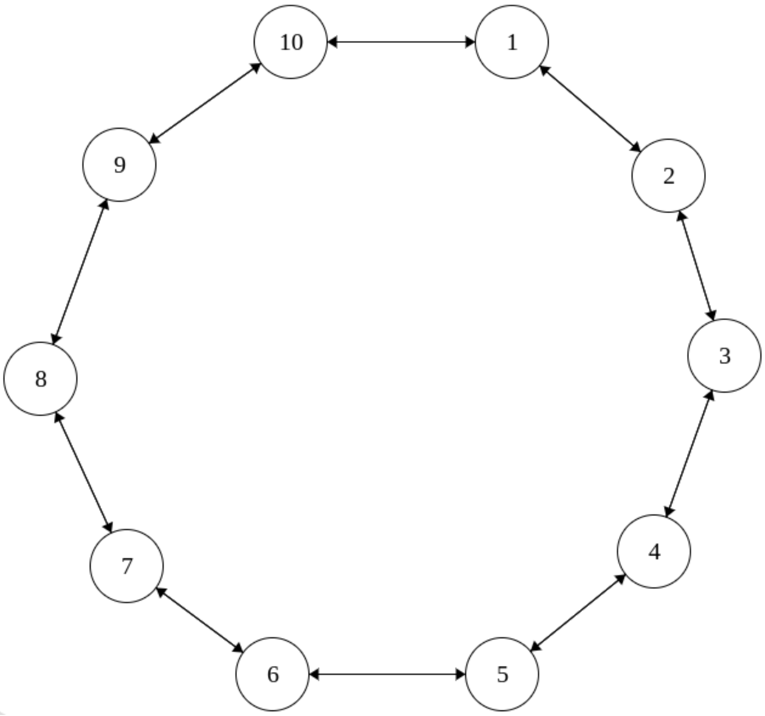
Следствие 9.2. *Для фиксированных вершины i и j все пути от i до j весят одинаково.*

Это верно, так как, в терминах леммы, $x = -y$. Не важно, какой путь выбрать от одной вершины к другой: по или против часовой стрелки — вес будет одинаковый. Если пройти по большому циклу, то вес не изменится, так как суммарный вес большого цикла равен 0.

Необходимо рассмотреть 2 случая: когда n нечётно и когда n чётно.

n нечетно. В этом случае цикличность критического графа $\sigma = 1$.

Следовательно, $C = R = M = A^*$, а $S = A$. Заметим, что в матрице $CS^tR[A]$ нет $-\infty$ (так как $CS^tR[A] = A^*A^tA^*$, а в A^* нет $-\infty$). Значит, по следствию из леммы, $CS^tR[A] = A^*$.



Значит, условие $CS^tR[A] = A^t$ верно тогда и только тогда, когда $A^t = A^*$. Поэтому $T = exp(\mathcal{G})$.

Утверждение 9.3. *Экспонента данного графа равна* $n-1$.

Доказательство. Заметим, что в A^{n-2} на главной диагонали стоят $-\infty$: $n-2$ нечётно, поэтому, чтобы вернуться в исходную вершину за $n-2$ шага, надо сменить чётность — пройти весь круг, так как остальные циклы имеют чётную длину. Но цикл имеет длину n, поэтому его пройти не получится. Значит, $exp(\mathcal{G}) \geq n-1$.

Покажем, что $A^{n-1} > -\infty$.

Зафиксируем произвольную вершину v графа. Назовем вершину *четной*, если до нее можно дойти из v за чётное число шагов. Заметим, что тогда все вершины графа четные, так как n нечетно и идти можно как по, так и против часовой стрелки. Наибольшая длина такого пути равна $n-1$. Значит, $A^{n-1} > -\infty$. $\square$

Следствие 9.4. $T_2 = 0$, *так как* $B = -\infty$. $T = T_1 = exp(\mathcal{G}) = n-1$.

Утверждение 9.5. *Скрамблинг-индекс этого графа равен* $\frac{n-1}{2}$.

Доказательство. Пусть $k = k(\mathcal{G})$ — скрамблинг-индекс данного графа, т. е. для любых двух вершин u и v существуют вершина w такая, что существуют пути из u в w и из v в w длины k. В силу неориентированности этого графа это условие равносильно следующему: для любых вершин u и v существует путь из u в v длины $2k$.

Заметим, что для соседних вершин минимальная четная длина пути, соединяющего их, равна $n-1$, так как n нечетно. Значит, $k \geq \frac{n-1}{2}$.

Рассмотрим произвольные вершины i и j. Пусть два простых пути между ними имеют длину x и $n-x$. Так как $x + (n-x) = n$ — нечетное число, то среди этих двух путей найдется ровно один с четной длиной. Его длина не превышает $n-1$ — наибольшее четное число, не превосходящее n. Значит, $k \leq \frac{n-1}{2}$.

Следовательно, $k(\mathcal{G}) = \frac{n-1}{2}$. $\square$

n четно. В этом случае $\sigma = 2$ и граф не примитивен. $C = R = M = (A^2)^*$, $S = A$.

Так как последовательность матриц CS^tR периодична с периодом $\sigma = 2$ (см. [10]), то при $t \geq T(A)$

$$A^t = CS^tR = \begin{cases} (A^2)^*, \text{ если } t \text{ четно.} \\ A \odot (A^2)^*, \text{ если } t \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В матрице $(A^2)^*$ небесконечные элементы стоят в клетках (i, j), если вершины i и j находятся на четном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с одинаковой четностью равно $\frac{n}{2}$. Значит, условие при четном t выполняется при $t \geq \frac{n}{2}$, а при прочих t не выполняется.

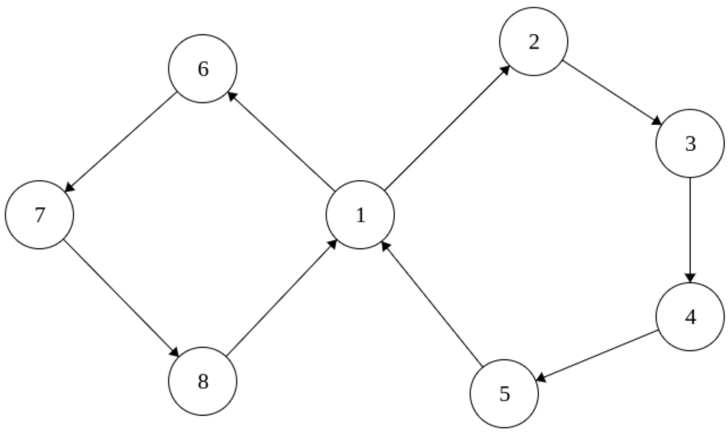
В матрице $A \odot (A^2)^*$ небесконечные элементы стоят в клетках (i, j), если вершины i и j находятся на нечетном расстоянии друг от друга. Наибольшее расстояние между вершинами с разной четностью равно $\frac{n}{2} - 1$. Значит, условие при четном t выполняется при $t \geq \frac{n}{2} - 1$, а при прочих t — не выполняется.

Следовательно, $T(A) = \frac{n}{2}$. В силу того, что $B = -\infty$, границы $T_1 = T = \frac{n}{2}$, а $T_2 = 0$, так как $B = -\infty$.

9.4 Два цикла

Определение 9.6. *Назовем ромашкой граф, состоящий из нескольких пересекающихся по одной вершине циклов.*

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_{2n}(\mathbb{R}_{\max})$ графа-ромашки, состоящего из двух циклов длины n и $n+1$. Будем называть n-циклом цикл длины n и $(n+1)$-циклом — цикл длины $n + 1$.



Будем рассматривать те графы, в которых средний вес каждого цикла равен 0. Тогда критический подграф совпадает со всем графом: $\mathcal{G}^c(A) = \mathcal{G}(A) = \mathcal{G}$. Его цикличность $\sigma = 1$, значит, $C = R = M = A^*$, а $S = A$.

Следовательно, при $t \geq T(A)$ верно $CS^tR[A] = A^*A^tA^* = A^t$. Так как для произвольных фиксированных вершин любые два пути между ними имеют равные веса, то $T(A) = exp(A)$ (так как в равенстве $A^t = CS^tR[A]$ справа стоит матрица без $-\infty$, а значит и слева должна стоять матрица без $-\infty$).

Это приводит нас к более общему утверждению.

Утверждение 9.7. *Рассмотрим примитивную матрицу A, у которой $\mathcal{G}(A)$ совпадает со своим критическим подграфом, $\lambda(A) = 0$. Если для двух произвольных фиксированных вершин u и v верно, что все пути из u в v имеют одинаковый вес, то $T(A) = T_{1,N}(A) = exp(A)$, а $T_{2,N}(A) = 0$.*

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему пункту.

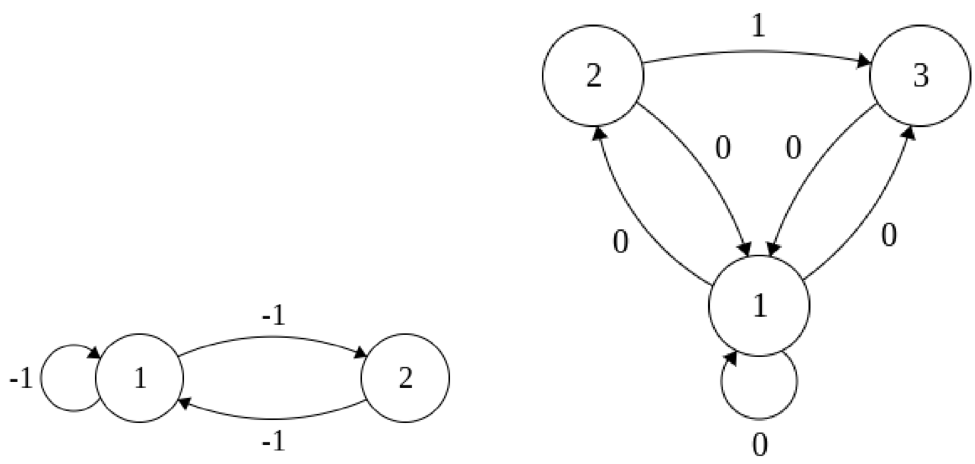
По определению, $M = (A^\sigma)^* = A^*$. Следовательно, $C = R = M = A^*$, а $S = A$.

Значит, при $t \geq T(A)$ верно $CS^tR[A] = A^*A^tA^* = A^t$. В A^* нет $-\infty$, потому что $\mathcal{G}(A)$ сильно связен. Значит, при домножении A^* на матрицу, у которой в каждом столбце есть небесконечный элемент (т.к. граф связен), в результате получится матрица без бесконечностей.

Значит, в левой части равенства нет $-\infty$, поэтому она совпадает с $A^{exp(A)}$. Значит, при $t \geq exp(A)$ выполняется условие на $T(A)$, и $T(A) = exp(A)$.

Так как $B = -\infty$, то $T_{2,N}(A) = 0$, и $T_{1,N}(A) = T(A) = exp(A)$. □

Заметим, что обратное утверждение неверно. Рассмотрим следующие графы:



(a) (b)

В обоих графах экспонента совпадает с T и T_1, а $T_2 = 0$ (в обоих графах экспонента равна 2), но в графе (a) максимальный средний вес цикла равен -1, а в графе (b) критический подграф не совпадает со всем графом.

Следствие 9.8. *Если $\mathcal{G}$ — примитивный граф, все рёбра которого имеют вес* 0*, и A — его матрица смежности, то $T(A) = T_{1,N}(A) = exp(A)$, а $T_{2,N}(A) = 0$.*

Доказательство. Это утверждение верно, так как $\mathcal{G}$ удовлетворяет всем условиям утверждения 9.7. □

Утверждение 9.9. *Экспонента ромашки, состоящей из циклов длины n и $n+1$, равна $n(n+1)$.*

Доказательство. Докажем, что в $A^{n(n+1)-1}$ есть бесконечные элементы. Рассмотрим вершины $i = 2$, $j = n+1$ и покажем, что в $\mathcal{G}(A)$ не существует пути длины $n(n+1)-1$ между i и j.

Любой путь из i в j, длина которого больше $n-1$, состоит из трех частей: первая часть — путь из i в 1 длины n, вторая часть — a циклов длины n, и b циклов длины $n+1$, идущих в любом порядке. Третья часть — путь из 1 в j длины n. Таким образом, суммарная длина пути равна $an + b(n+1) + 2n = (a+2)n + b(n+1)$.

Покажем, что уравнение

$$n(n+1) - 1 = (a+2)n + b(n+1) \tag{16}$$

не имеет решений в целых неотрицательных числах относительно a и b.

Предположим противное: пусть существуют целые неотрицательные a, b, являющиеся решениями 16. Заметим, что $n(n+1)-1 \equiv -1 \equiv b \pmod{n}$. Значит, $b \geq n-1$, и

$$n(n+1)-1 = (a+2)n + b(n+1) \geq (a+2)n + n^2 - 1$$

Следовательно, $n \geq (a+2)n$, что невозможно в силу неотрицательности a.

Значит, уравнение не имеет решений, и в $\mathcal{G}(A)$ нет искомого пути. Следовательно, в $A^{n(n+1)-1}$ есть бесконечности и $exp(A) \geq n(n-1)$.

Покажем, что в $A^{n(n+1)}$ нет бесконечностей. Надо доказать, что для любых вершин i, j существует путь из i в j длины $n(n-1)$. Пусть расстояние от i до 1 равно x, а расстояние от 1 до j равно y.

Для доказательства утверждения надо показать, что для любых x, y существует решение уравнения $n(n+1) = an + b(n+1) + x + y$. Заметим, что $x, y \leq n$. Пусть $z = x + y$. Рассмотрим

$$(a, b) = \begin{cases} (z, n-z) & \text{при } 0 \leq z \leq n \\ (z-n-1, 2n-z) & \text{при } n+1 \leq z \leq 2n \end{cases}$$

Легко проверить, что a и b, определенные таким образом, неотрицательны и являются решениями данного уравнения.

Значит, искомый путь всегда найдется, и $exp(A) = n(n+1)$. $\square$

Посчитаем скрамблинг-индекс ромашки, состоящей из циклов длины n и $n+1$. Для этого введём следующее определение:

Определение 9.10. *Для $u, v \in V(\mathcal{G})$ введём обозначение:*

$$k_{u,v}(\mathcal{G}) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \textit{существует } w \in V(\mathcal{G}) : \mathcal{W}^k(u \to w) \neq \varnothing \\ \textit{и } \mathcal{W}^k(v \to w) \neq \varnothing\}$$

Зная значения $k_{u,v}$ для всех пар вершин u, v, легко можно вычислить скрамблинг-индекс всего графа:

Лемма 9.11 ([8]). $k(\mathcal{G}) = \max_{u,v \in V(\mathcal{G})} k_{u,v}$.

Заметим, что скрамблинг-индекс ромашки положителен тогда и только тогда, когда она примитивна, т.е. когда НОД длин циклов в ней равен 1. Это следует из теоремы 7.6.

Рассмотрим произвольную примитивную ромашку и две её вершины u и v. Тогда существует вершина w, в которую ведут пути из u и из v длины $k_{u,v}$.

Лемма 9.12. *Если $u = v$, то $w = u = v$ и $k_{u,v} = 0$. Иначе $w = 1$.*

Если $u \neq v$, то не существует цикла, по которому полностью прошла и вершина u, и вершина v.

Доказательство. Если $u = v$, то подходят пути длины ноль и $w = u = v$. Если $u \neq v$ и $w \neq 1$, то у построенных путей есть общий суффикс, и их можно укоротить, что противоречит минимальности $k_{u,v}$.

Если существует цикл, по которому полностью прошла и вершина u, и вершина v, то оба пути можно было укоротить на этот цикл, что противоречит минимальности $k_{u,v}$. $\square$

Утверждение 9.13. *Скрамблинг-индекс ромашки, состоящей из циклов длины n и $n+1$, равен:*

$$k(\mathcal{G}) = \begin{cases} \frac{n^2+2n}{2}, & n \textit{ чётно} \\ \frac{n^2+2n-1}{2}, & n \textit{ нечётно} \end{cases}$$

Доказательство. Так как граф в данной задаче фиксирован, обозначим $k_{u,v} = k_{u,v}(\mathcal{G})$.

Сначала найдем $k_{u,v}$ при $u = 1$, т.е. $k_{1,v}$. Рассмотрим пути вершин 1 и v: путь вершины 1 состоит из нескольких циклов, а путь вершины v — это дуга длины x от v до 1, а затем — несколько циклов.

В силу леммы 9.12 есть 2 варианта:

1. путь вершины 1 содержит $(n+1)$-циклы, а вершины v — n-циклы;
2. путь вершины 1 содержит n-циклы, а вершины v — $(n+1)$-циклы.

Пусть вершина v прошла a циклов, а вершина 1 — b циклов $(a, b \geq 0)$. Решим для каждого случая уравнение, минимизировав длину пути каждой вершины:

1. $x + an = b(n+1)$ — слева стоит длина пути вершины v, а справа — вершины 1. Так как мы ищем минимальную длину пути, то необходимо минимизировать левую и правую части.

   Заметим, что $b \equiv x \pmod n$. Значит, $b \geq x$. Следовательно, решение $a = n - x$, $b = x$ дает минимальную длину путей, которая равна $x(n+1)$.

2. $x + a(n-1) = bn$. Заметим, что $a \equiv -x \pmod n$. Значит, решение $a = n - x$, $b = n - x + 1$ — оптимальное. Длины путей равны $n(n - x + 1)$.

Таким образом, $k_{1,v} = \min\{x(n+1), n(n-x+1)\}$.

Найдём $k_{u,v}$ в общем случае. Пусть расстояние от u до 1 равно d_u, расстояние от v до 1 равно d_v, без ограничения общности $d_u \leq d_v$, и $x = d_v - d_u$.

Заметим, что первые d_u рёбер в путях вершин определены однозначно, так как в этом графе есть разветвления только в вершине 1. После d_u шагов вершина u придет в вершину 1, и задача сводится к предыдущему случаю.

Значит, $k_{u,v} = d_u + \min\{x(n+1), n(n-x+1)\}$.

Легко видеть, что максимальное значение d_u равно $n - x$. Оно достигается при $u = ((x+1) \mod (n+1)) + 1$, $v = 2$. Нельзя получить больше, так как вершина v должна оказаться в вершине 1 через $x + d_u$ шагов, но не раньше. Значит, $x + d_u \leq n$ и $d_u \leq n - x$.

Следовательно, по лемме 9.11:

$$k(\mathcal{G}) = \max_{u,v \in V(\mathcal{G})} d_u + \min\{x(n+1),\ n(n-x+1)\} =$$
$$= \max_{0 \leq x \leq n} n - x + \min\{x(n+1),\ n(n-x+1)\} = \max_{0 \leq x \leq n} \min\{n(x+1),\ n^2 + 2n - x(n+1)\}$$

Требуется найти максимум минимумов двух линейных по x функций. Графики этих функций пересекаются в точке $\hat{x} = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4(2n+1)}$. Значит, максимум достигается в одной из целых точек по обе стороны от $\hat{x}$.

Рассмотрим два случая:

- n чётно. Тогда две целые точки по обе стороны от $\hat{x}$ — это $x_1 = \frac{n}{2}$ и $x_2 = \frac{n+2}{2}$, при этом в x_1 минимумом будет первая функция, а в x_2 — вторая. Значит,

$$k(\mathcal{G}) = \max\{n(x_1+1),\ n^2 + 2n - x_2(n+1)\} =$$
$$= \max\{n(\frac{n}{2}+1),\ n^2 + 2n - \frac{n+2}{2}(n+1)\} = \frac{n^2+2n}{2}$$

- n нечётно. Тогда две целые точки по обе стороны от $\hat{x}$ — это $x_1 = \frac{n-1}{2}$ и $x_2 = \frac{n+1}{2}$. Значит,

$$k(\mathcal{G}) = \max\{n(x_1+1),\ n^2 + 2n - x_2(n+1)\} =$$
$$= \max\{n(\frac{n-1}{2}+1),\ n^2 + 2n - \frac{n+1}{2}(n+1)\} = \frac{n^2+2n-1}{2}$$

В итоге имеем

$$k(\mathcal{G}) = \begin{cases} \frac{n^2+2n}{2}, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ \frac{n^2+2n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

□

9.5 Ромашка из p циклов длины k

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_{p(k-1)+1}(\mathbb{R}_{\max})$ графа-ромашки $\mathcal{G}(A)$, состоящего из $p > 1$ циклов длины k (всего в графе будет $p(k-1)+1$ вершин). Будем считать, что вершина, по которой пересекаются все циклы, имеет номер 1.

Пусть для простоты все ребра в этом графе имеют нулевой вес. Тогда $\mathcal{G}^c = \mathcal{G}(A)$ и $T_2 = 0$, так как $B = -\infty$.

Утверждение 9.14. *Граница T, определенная для такого графа-ромашки, равна $k-1$.*

Доказательство. Индекс цикличности этого графа $\sigma = k$. Следовательно, $C = R = M = (A^k)^*$ и $S = A$. По утверждению 8.10 в ячейке с индексами i, j матрицы CS^tR стоит 0, если из вершины i можно добраться до вершины j за количество шагов, сравнимое с t по модулю k, и $-\infty$ иначе.

Будем говорить, что вершина v имеет класс i, если минимальная длина пути между вершинами 1 и v дает остаток i при делении на k. Заметим, что т.к. цикличность графа равна k, то длина любого пути из вершины 1 в v дает остаток i при делении на k. Следует упомянуть, что любое ребро ведет из вершины класса i в вершину класса $i+1 \pmod k$.

Покажем, что $T > k-2$. Рассмотрим вершину v класса 1 и вершину u класса $k-1$. Тогда элемент матрицы $CS^{k-2}R$ с индексами v, u равен 0. Но в матрице A^{k-2} элемент с теми же индексами равен $-\infty$, т.к. минимальный путь, соединяющий эти вершины, имеет длину $2k-2$. Следовательно, $CS^{k-2}R \neq A^{k-2}$ и $T \geq k-1$.

Покажем, что $T = k-1$. Предположим противное: пусть $T > k-1$. Рассмотрим $t = T-1 \geq k-1$. Заметим, что $CS^{t+k}R = A^{t+k}$, так как $t+k \geq T$.

В матрице A^{t+k} хранится информация о путях длины $t+k$. Но наибольший простой путь имеет длину $2k-2 < t+k$ — это путь между вершиной класса 1 и вершиной класса $k-1$ из другого цикла. Значит, каждый путь длины $t+k$ можно укоротить на k и получить путь длины t с тем же весом. Значит, $A^{t+k} = A^t$.

По утверждению 8.9 выполняется равенство $CS^{t+k}R = CS^tR$. Значит, $CS^tR = CS^{t+k}R = A^{t+k} = A^t$. Таким образом, мы получили противоречие с минимальностью T, т.к. $t = T-1$ и $CS^tR = A^t$.

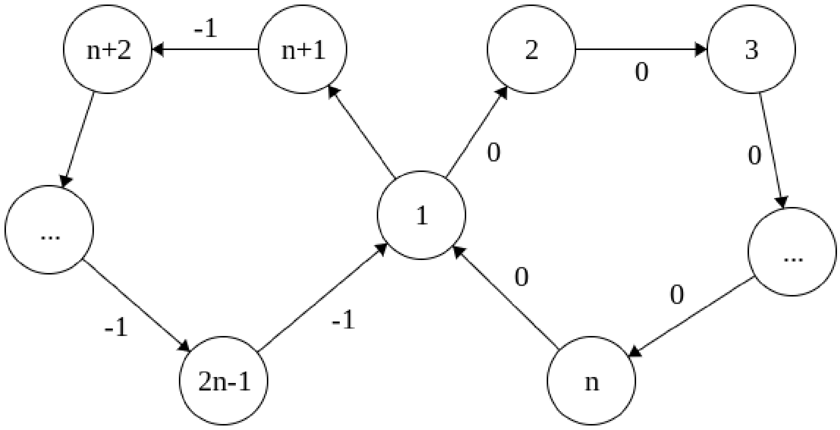
Следовательно, $T = k-1$. □

9.6 Ромашка с отрицательными циклами

Рассмотрим матрицу смежности $A \in M_{2n-1}(\mathbb{R}_{\max})$, графа-ромашки, состоящей из двух циклов: цикла длины n с нулевым средним весом (будем называть его нулевым циклом) и цикла длины n с отрицательным средним весом (будем называть его отрицательным циклом). Будем считать, что вершины первого цикла имеют номера от 1 до n в порядке обхода, а второго — $1, n+1, \ldots, 2n-1$ в порядке обхода.

Утверждение 9.15. $T(A) = T_{1,N}(A) = T_{2,N}(A) = n-1$.

Доказательство. В этом примере матрица B нетривиальна: она получается из A заменой первых n строк и столбцов на $-\infty$ и кодирует пути в отрицательном цикле. Заметим, что вершина n лежит в критическом подграфе, и, следовательно, инцидентные ей ребра не



кодируются матрицей B, т.е. $\mathcal{G}(B)$ — это $n-1$ последовательная соединенная вершина. Это значит, что B нильпотентна: $B^{n-1} = -\infty$, так как длиннейший путь в $\mathcal{G}(B)$ имеет длину $n-2$.

Докажем, что $T_2(A, B) = n-1$.

В силу нильпотентности $CS^{n-1}R \geq B^{n-1} = -\infty$. Значит, $T_2(A, B) \geq n-1$.

Покажем, что неравенство $CS^tR \geq B^t$ не выполняется при $t = n-2$.

Рассмотрим вершины $i = n+1$ и $j = 2n-1$. Путь, вес которого кодирует ячейка $[B^t]_{ij}$ — единственная небесконечная ячейка матрицы B^t — это дуга отрицательного цикла из вершины i в вершину j длины $n-2$.

Рассмотрим путь, который кодирует ячейка с теми же индексами матрицы CS^tR. Он состоит из трех частей: части C, части S^t, и части R. После прохождения части C мы попадем в вершину номер 1 (так как в матрице C мы делаем произвольное количество шагов длины n и после ее прохождения мы всегда оказываемся в критическом подграфе). Далее в части S^t делаем $n-2$ шага по критическому подграфу и попадаем в вершину номер $n-1$. И, наконец, после части R мы оказываемся в вершине $2n-1$, пройдя еще n шагов.

Посчитаем вес этого пути. Мы целиком прошли нулевой цикл (что не влияет на вес пути, т.к. средний вес ребра в нем равен 0), целиком прошли отрицательный цикл и еще прошли по простой дуге от $n+1$-й до $2n-1$-й вершины. Значит, $[CS^tR + B^t]_{ij} = (\lambda')^{\odot n} \oplus [B^t]_{ij}$, где $\lambda' = \lambda(B) < 0$ — средний вес отрицательного цикла.

Следовательно, $[CS^tR]_{ij} < [B]_{ij}$, и неверно, что $CS^tR \geq B^t$. Значит, $T_2(A, B) = n-1$.

Покажем, что $T_1(A, B) = n-1$. Рассуждения аналогичны доказательству точной оценки для $T(A)$ в утверждении 9.14, но с некоторыми изменениями. Назовем путь подходящим, если его вес минимален среди всех имеющих ту же длину путей с концами в тех же вершинах. Чтобы получить доказательство для графа с отрицательным циклом, надо заменить в доказательстве все слова "путь" на "подходящий путь" (в том графе все пути были подходящими, а в нашем графе — не все).

Для окончания доказательства надо показать, что любой подходящий путь длины $m > 2n-2$ можно укоротить на n, при этом его вес останется прежним. Действительно, если $m > 2n-2$, то путь не может быть простым. Значит, в нем есть цикл. Но в подходящем пути не может быть отрицательных циклов, иначе этот цикл можно поменять на нулевой и улучшить ответ. Значит, убрав этот нулевой цикл, можно получить путь между теми же вершинами того же веса, но длины $m-n$. Это завершает доказательство оценки $T_1(A, B)$ для данного графа. В итоге имеем $T(A) = T_1(A, B) = T_2(A, B) = n-1$. $\square$

Утверждение 9.15 верно и для графов-ромашек с большим количеством циклов.

Следствие 9.16. *Если A — матрица смежности графа-ромашки, где каждый цикл* *имеет длину n и есть хотя бы один нулевой цикл и хотя бы один отрицательный цикл, то $T(A) = T_{1,N}(A) = T_{2,N}(A) = n - 1$.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения 9.15.

10 Разные ромашки

Здесь и далее будем рассматривать графы-ромашки, состоящие из циклов длины, кратной σ, все рёбра в которых имеют вес 0. Тогда сразу можно сказать, что у каждой такой ромашки $T_2 = 0$ и $T = T_1$. Для разных таких ромашек будем искать границу T.

Определение 10.1. *Ромашку, состоящую из циклов длины $a_1\sigma, a_2\sigma, \ldots, a_n\sigma$, где числа $a_1, \ldots, a_n$ взаимно просты в совокупности, $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ назовем $(a_1, \ldots, a_n; \sigma)$-ромашкой.*

Границу T, определенную для такой ромашки, будем обозначать через $T(a_1, \ldots, a_n; \sigma)$.

Заметим, что индекс цикличности такой ромашки равен σ и всего в ней $N = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\sigma - n + 1$ вершин. Пусть вершина, в которой пересекаются все циклы, имеет номер 1. Пронумеруем вершины в порядке следующего обхода: начнем в вершине 1, далее пройдём по первому циклу, затем — по второму, и так далее до цикла с номером n (не изменяя номер у вершины 1).

Во всех примерах матрицу смежности рассматриваемого графа будем обозначать через $A \in M_N(\mathbb{R}_{\max})$, а через C, S, R будем обозначать матрицы C, S, R, построенные по матрице A.

10.1 Подсчет границы T вручную

Теорема 10.2. $T(a_1, \ldots, a_n; \sigma) = (T(a_1, \ldots, a_n; 1) + 1)\sigma - 1$.

Доказательство. Обозначим граф, соответствующий $(a_1, \ldots, a_n; 1)$-ромашке через $\mathcal{G}$, а граф, соответствующий $(a_1, \ldots, a_n; \sigma)$-ромашке — через $\mathcal{G}_\sigma$. Граф $\mathcal{G}_\sigma$ получается из графа $\mathcal{G}$ разделением каждого ребра на σ более мелких рёбер. Вершины $\mathcal{G}_\sigma$, лежащие в одном циклическом классе с вершиной 1, будем называть начальными. Для краткости будем обозначать $T(a_1, \ldots, a_n; 1)$ через $T(1)$, а $T(a_1, \ldots, a_n; \sigma)$ — через $T(\sigma)$.

Покажем, что $T(\sigma) > (T(1) + 1)\sigma - 2$. В $\mathcal{G}$ есть 2 вершины, между которыми нет пути длины $T(1) - 1$. Значит, в $\mathcal{G}_\sigma$ между соответствующими начальными вершинами нет пути длины $(T(1) - 1)\sigma$. Обозначим эти вершины через u и v. Но тогда между вершинами $\hat{u}$ и $\hat{v}$ не будет пути длины $(T(1) - 1)\sigma + 2(\sigma - 1) = (T(1) + 1)\sigma - 2$, где $\hat{u}$ получается, если отойти от u на $\sigma - 1$ шаг вперёд, а $\hat{v}$ — от вершины v на $\sigma - 1$ шаг назад (обе новые вершины существуют, так как любая вершина в $\mathcal{G}$ лежит в цикле). Значит, $T(\sigma) \ge (T(1) + 1)\sigma - 1$.

Покажем, что $T(\sigma) \ge (T(1) + 1)\sigma - 1$. Для этого нужно доказать, что между любыми двумя вершинами u и v графа $\mathcal{G}_\sigma$ есть путь длины $(T(1) + 1)\sigma - 1$ от u до v. Путь длины $(T(1) + 1)\sigma - 1$ от u до v состоит из трех частей: путь от u до ближайшей начальной вершины, путь между начальными вершинами, и путь от ближайшей начальной вершины до v. Суммарная длина первой и третьей частей не превосходит $2\sigma - 2$, значит, длина второй части не меньше $(T(1) - 1)\sigma + 1$. Но длина пути между двумя начальными вершинами должна быть кратна σ, поэтому длина второй части не меньше $T(1) \cdot \sigma$. Но, по определению $T(1)$, между любыми начальными вершинами есть путь длины $T(1) \cdot \sigma$. Значит, $T(\sigma) \ge (T(1) + 1)\sigma - 1$, и утверждение доказано. □

Таким образом, при расчёте границы T для произвольной ромашки достаточно посчитать искомую границу при $\sigma = 1$, а затем получить ответ по формуле из утверждения 10.2.

Замечание 10.3. *При $\sigma = 1$ $(a_1, \dots, a_n; 1)$-ромашка примитивна. Более того, выполняются условия следствия 9.8, и граница T данной ромашки совпадает с экспонентой.*

Введём вспомогательную функцию P:

Определение 10.4. *Для взаимно простых в совокупности натуральных чисел $a_1 \le \dots \le a_n$ обозначим через $P(a_1, \dots, a_n)$ минимальное целое неотрицательное число, удовлетворяющее следующему свойству: любое $p \ge P(a_1, \dots, a_n)$ выражается в виде линейной комбинации чисел $a_1, \dots, a_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то есть*

$$p = a_1\lambda_1 + \dots a_n\lambda_n \tag{17}$$

. Число, выражающееся в виде линейной комбинации чисел $a_1, \dots, a_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами, назовём выразимым.

Здесь и далее под линейной комбинацией будем понимать линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами.

Теорема 10.5. $T(a_1, \dots, a_n; 1) = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2.$

Доказательство. Предположим, что в $(a_1, \dots, a_n; 1)$-ромашке между любыми двумя вершинами существует путь длины t. Рассмотрим две произвольные вершины u и v. Любой путь длины хотя бы $a_n - 1$ проходит через вершину 1, и $t \ge a_n - 1$. Поэтому путь длины t от u до v состоит из трёх частей: пути от u до 1 (обозначим длину этой части через $\hat{u}$), λ_i циклов длины a_i для $i = 1 \dots n$, и пути от 1 до v (обозначим длину этой части через $\hat{v}$). Тогда имеет место равенство:

$$t = \hat{u} + a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n + \hat{v} \quad \iff \quad t - \hat{u} - \hat{v} = a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n.$$

Сумма $\hat{u} + \hat{v}$ принимает любые значения от 0 до $2a_n - 2$ (так как $0 \le \hat{u}, \hat{v} \le a_n - 1$). Следовательно, для любого $t - 2a_n + 2 \le p \le t$ должны существовать коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, удовлетворяющие уравнению

$$p = a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n. \tag{18}$$

При $t < P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$ минимальное значение p не превосходит $P(a_1, \dots, a_n) - 1$, и, по определению $P(a_1, \dots, a_n)$, при наименьшем значении p уравнение 18 решений не имеет — противоречие с наличием пути между u и v.

Напротив, при $t \ge P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$ наименьшее значение p не меньше $P(a_1, \dots, a_n)$, и, в силу определения $P(a_1, \dots, a_n)$, коэффициенты λ_i найдутся для любого возможного значения p.

Значит, $T(a_1, \dots, a_n; 1) = P(a_1, \dots, a_n) + 2a_n - 2$. □

Следствие 10.6 (Корректность функции P)**.** *Функция P определена корректно: её значение существует для любых возможных аргументов.*

Доказательство. Рассмотрим $(a_1, \dots, a_n; 1)$-ромашку. По замечанию 10.3 этот граф примитивен и, следовательно, имеет экспоненту, которая, в свою очередь, совпадает с границей T для данной ромашки. По формуле из теоремы 10.5 имеем $P(a_1, \dots, a_n) = T(a_1, \dots, a_n; 1) - 2a_n + 2$. □

Утверждение 10.7 (Свойства функции P)**.**

1. *Если $a_1 = 1$, то $P(1, \dots, a_n) = 0$.*

2. *$P(a_1, \dots, a_n) \le P(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$, где $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ — возрастающая последовательность индексов.*

3. *$P(a_1, \dots, a_n) = P(b_1, \dots, b_m)$, где набор $b_1, \dots, b_m$ получается из набора $a_1, \dots, a_n$ удалением повторяющихся элементов.*

4. *Если a_j делится на a_i, то $P(a_1, \dots, a_n) = P(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$.*

5. *Если a_j представляется в виде линейной комбинации меньших элементов, то $P(a_1, \dots, a_n) = P(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$.*

Доказательство. 1) Действительно, если $a_1 = 1$, то любое неотрицательное число k выражается как $1 \cdot k$. Следовательно, $P = 0$.

2) Свойство следует из следующего факта: сумма $a_{i_1}\lambda_{i_1} + \dots + a_{i_k}\lambda_{i_k}$ является частным случаем суммы $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$.

3) При приведении подобных членов в сумме $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$ получается корректная сумма $b_1\mu_1 + \dots b_m\mu_m$. С другой стороны, сумма $b_1\mu_1 + \dots b_m\mu_m$ является корректной суммой вида $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$.

4) Очевидно, что любая сумма $a_1\lambda_1 + \dots + a_{j-1}\lambda_{j-1} + a_{j+1}\lambda_{j+1} + \dots + a_n\lambda_n$ является суммой вида $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$, где $\lambda_j = 0$. С другой стороны, заменив a_j на $a_i \cdot \frac{a_j}{a_i}$, можно избавиться от слагаемого $a_j\lambda_j$ в сумме $a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$, что доказывает утверждение.

5) Доказетельство этого свойства аналогично предыдущему. $\square$

Утверждение 10.8. *$P(a, b) = (a-1)(b-1)$.*

Доказательство. Покажем, что $p = ab - a - b \neq ma + nb$ для любых целых неотрицательных m, n.

Предположим противное. Тогда:

$$ab - a - b = am + bn \iff ab = (m+1)a + (n+1)b$$

В силу взаимной простоты a и b получим, что $n + 1 \vdots a$, и $m + 1 \vdots b$. Тогда, в силу того, что $m, n \ge 0$, имеем 2 случая:

$$\begin{cases} n + 1 = a \\ m + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n + 1 = 0 \\ m + 1 = b. \end{cases}$$

В обоих случаях получаем противоречие. Следовательно, $P(a, b) \ge (a-1)(b-1)$.

Теперь покажем, что $P(a, b) \le ab + b - a - 1$. Для любого $p \ge ab - b - a + 1$ решим уравнение:

$$am + bn = p$$

Так как a и b взаимно просты, числа из набора $0, b, 2b, \dots, (a-1)b$ дают все a остатков по модулю a. Значит, существует единственное $0 \le n \le a - 1$, что $bn \equiv p \pmod a$, причём $p - bn \ge 0$, так как

$$p - bn \ge ab - b - a + 1 - (a-1)b = -a + 1 > -a \Longrightarrow p - bn \ge 0.$$

Значит, $m = \frac{p - bn}{a} \ge 0$.

Таким образом, нами были найдены целые $m \ge 0$, $n \ge 0$. Следовательно, $P(a, b) = (a-1)(b-1)$. $\square$

Следствие 10.9. $T(a,b;\sigma) = (ab+b-a)\sigma - 1$.

Утверждение 10.10. $P(2,a,b) = \begin{cases} P(2,b) = b-1, & \textit{если } a \textit{ чётно,} \\ P(2,a) = a-1, & \textit{иначе.} \end{cases}$

Доказательство. Первый случай следует из свойства 4 утверждения 10.7.

Разберём второй случай: a нечётно. Неравенство $P(2,a,b) \le P(2,a)$ следует из свойства 2 утверждения 10.7. Докажем обратное неравенство: необходимо показать, что с помощью слагаемых $2, a, b$ невозможно получить сумму $a-2$. Действительно, из трёх слагаемых можно использовать только одно: 2. Но $a-2$ нечётно — противоречие. Следовательно, $P(2,a,b) = P(2,a)$. □

Следствие 10.11. $T(2,a,b;\sigma) = \begin{cases} T(2,b;\sigma) = (3b-2)\sigma - 1, & \textit{если } a \textit{ нечётно,} \\ (2b+a-2)\sigma - 1, & \textit{иначе.} \end{cases}$

Утверждение 10.12. $P(3,a,b) = \begin{cases} P(3,b) = 2(b-1), & \textit{если } a \,\vdots\, 3, \\ b-2, & \textit{если } a \not\vdots\, 3, a+b \,\vdots\, 3 \textit{ и } b < P(3,a) = 2a-2, \\ P(3,a) = 2(a-1), & \textit{иначе.} \end{cases}$

Доказательство. Первый случай следует из свойства 4 утверждения 10.7.

Разберём второй случай. Покажем, что $P(3,a,b) \ge b-2$. Предположим противное. Тогда число $b-3$ должно выражаться в виде линейной комбинации $2, a$ и b:

$$b - 3 = 3\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

Тогда $\lambda_3 = 0$ и $\lambda_2 \le 1$. При $\lambda_2 = 0$ имеем $b = 3\lambda_1 + 3 \,\vdots\, 3$. При $\lambda_2 = 1$ имеем $b - a = 3\lambda_1 + 3 \,\vdots\, 3$. В обоих случаях $a \,\vdots\, 3$, так как $a + b \,\vdots\, 3$, что противоречит условию второго случая. Следовательно, $P(3,a,b) \ge b-2$.

Докажем обратное неравенство: для любого $p \ge b-2$ решим уравнение:

$$p = 3\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

Так как в правой части есть слагаемое $3\lambda_1$, то достаточно решить уравнение для $p = b-2$, $p = b-1$ и $p = b$ — тогда линейные комбинации для больших p получатся увеличением λ_1.

- $p = b-2$. Если $b \equiv 2 \pmod 3$, то $\lambda_1 = \frac{b-2}{3}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  Если $b \equiv 1 \pmod 3$, то $a \equiv 2 \pmod 3$, $b-2 = (b-a-2)+a$ и $\lambda_1 = \frac{b-a-2}{3}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$.
- $p = b-1$. Если $b \equiv 1 \pmod 3$, то $\lambda_1 = \frac{b-1}{3}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  Если $b \equiv 2 \pmod 3$, то $a \equiv 1 \pmod 3$, $b-2 = (b-a-1)+a$ и $\lambda_1 = \frac{b-a-1}{3}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$.
- $p = b$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$.

Таким образом, $P(3,a,b) = b-2$.

Перейдём к третьему случаю: если $b \ge P(3,a)$, то наличие слагаемого $b\lambda_3$ не повлияет на значение функции P: если некое p выражается в виде линейной комбинации с участием b, то $p \ge P(3,a)$ и, следовательно, выражается и без участия b. Следовательно, $P(3,a,b) = P(a,b)$.

Рассмотрим последний случай: $a \not\vdots\, 3$, $a+b \not\vdots\, 3$, $b < P(3,a)$. Неравенство $P(3,a,b) \ge P(a,b)$ следует из свойства 2 утверждения 10.7. Докажем обратное неравенство. Для этого покажем, что следующее уравнение не имеет решений:

$$2a - 3 = 3\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

Заметим, что $\lambda_3 = 0$, так как $b < 2a - a$. Также, $\lambda_2 \le 1$. Тогда $(2 - \lambda_2)a = 3\lambda_1 + 3 \,\vdots\, 3$ — противоречие с $a \not\vdots\, 3$. Значит, $P(3, a, b) = P(a, b)$. $\square$

Следствие 10.13. $T(3, a, b; 1) = \begin{cases} T(3, b; 1) = 4b - 4, & \text{если } a \,\vdots\, 3, \\ 3b - 4, & \text{если } a \not\vdots\, 3, a + b \,\vdots\, 3 \text{ и } m < 2a - 2, \\ 2a + 2b - 4, & \text{иначе.} \end{cases}$

10.2 Алгоритм вычисления функции P

Рассмотрим массив M длины a_1, где в $M[i]$ лежит минимальное выразимое число, сравнимое с i по модулю a_1. Заметим, что $M[0] = 0$ и что $M[i] \equiv i \pmod{a_1}$.

Утверждение 10.14. $P(a_1, \ldots, a_n) = \max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1 = M[k] - a_1 + 1$.

Выразимость $M[k] - a_1$ вела бы к противоречию с определением массива M, так как $M[k] - a_1 \equiv M[k] \pmod{a_1}$. Значит, $P(a_1, \ldots, a_n) \ge \max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$.

Заметим, что если произвольное x выразимо, то и число $x + a_1$ выразимо. Из этого следует, что любое число, сравнимое с i по модулю a_1 и не меньшее $M[i]$ выразимо. Значит, все числа, начиная с $M[k] - a_1 + 1$ выразимы — иначе $M[k]$ было бы не максимальным числом в массиве M.

Следовательно, $P(a_1, \ldots, a_n) = \max\limits_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$. $\square$

Используя массив M, можно легко посчитать $P(4, a, b)$. Здесь и далее через $x \text{ rem } y$ будем обозначать остаток при делении x на y.

Утверждение 10.15 (Формула для $P(4, a, b)$)**.**

1. *$a \,\vdots\, 4, b \not\vdots\, 2$. Тогда $P(4, a, b) = P(4, b)$.*

2. *$a \not\vdots\, 2, b \,\vdots\, 4$, или $0 \not\equiv a \equiv b \pmod 4$, или $a \not\vdots\, 2, b \ge P(4, a)$. Тогда $P(4, a, b) = P(4, a)$.*

3. *$a \equiv 2 \pmod 4), b \not\vdots\, 2$. Тогда $P(4, a, b) = a + b - 3$.*

4. *$a \not\vdots\, 2, b \equiv 2 \pmod 4$. Тогда*

$$P(4, a, b) = \begin{cases} a + b - 3, & \text{если } b < 2a \\ 3a - 3, & \text{иначе.} \end{cases}$$

5. *$a, b \not\vdots\, 2$, $a + b \,\vdots\, 4, b < P(4, a)$. Тогда*

$$P(4, a, b) = \begin{cases} 2a - 3, & \text{если } b \le 2a \\ b - 3, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Из свойства 4 утверждения 10.7 можно вывести случай $a \,\vdots\, 4, b \not\vdots\, 2$ и случай $a \not\vdots\, 2, b \,\vdots\, 4$, а из свойства 5 того же утверждения — случай $0 \not\equiv a \equiv b \pmod 4$.

Во всех остальных случаях посчитаем массив M, и по утверждению 10.14 найдём ответ. Заметим, $M[0]$ всегда равен 0.

Докажем случай $a \not\vdots 2, b \geq P(4, a)$. Тогда $M[a\ rem\ 4] = a$, $M[2] = 2a$, и $M[4 - a\ rem\ 4] = 3a$ — число b слишком большое, чтобы повлиять на этот массив. Таким образом, максиму этого массива равен $3a$, и ответом будет число $3a - 3 = P(4, a)$.

Разберём случай $a \equiv 2 \pmod 4), b \not\vdots 2$. Заметим, что $M[2] = a$, $M[b\ rem\ 4] = b$, $M[4 - b\ rem\ 4] = a + b$. Максимум этого массива — $a + b$, поэтому ответ равен $a + b - 3$.

Разберём случай $a \not\vdots 2, b \equiv 2 \pmod 4$. Тогда $M[a\ rem\ 4] = a$. На место $M[2]$ есть два кандидата: $2a$ и b. Если $b < 2a$, то $M[2] = b$, и иначе — $2a$. Далее, для $M[4 - a\ rem\ 4]$ имеем два варианта: $3a$ и $a + b$, и если $b < 2a$, то $M[4 - a\ rem\ 4] = a + b$, и иначе — $3a$. Таким образом, если $b < 2a$, то ответ равен $a + b - 3$, а иначе — $3a - 3 = P(4, a)$.

Разберём последний случай: $a, b \not\vdots 2, a + b \vdots 4, b < 3a - 3$. Тогда $M[a\ rem\ 4] = a$, $M[b\ rem\ 4] = b$ и $M[2] = 2a$. В зависимости от относительного расположения $2a$ и b имеем 2 различных возможных максимума массива M, откуда, по утверждению 10.17 находим ответ. □

Приведём алгоритм, вычисляющий функцию P. На вход ему подаётся число n числа $a_1, \ldots, a_n$.

Алгоритм вычисляет массив M, а затем, по формуле из леммы 10.14, вычисляет ответ на поставленную задачу. Массив M вычисляется постепенно: изначально в каждой ячейке $M[i]$ значения ∞ из $\mathbb{R}_{\min}$ — это значит, что пока не было найдено ни одного выразимого числа, сравнимого с i по модулю a_1. Если при последующем переборе было найдено некоторое p, сравнимое с i по модулю a_1 и меньшее $M[i]$, то необходимо перезаписать в ячейку $M[i]$ значение p.

Перебор начинается с рассмотрения всех линейных комбинаций с одним слагаемым (здесь и далее через количество слагаемых будем обозначать количество ненулевых коэффициентов λ_i в линейной комбинации вида 17). Затем будем перебирать линейные комбинации, на каждом шаге увеличивая максимальное количество слагаемых вдвое. Таким образом, необходимо сделать $\lceil log_2 n \rceil$ итераций, где $\lceil x \rceil$ — это округление числа x вверх.

Алгоритм 10.16.

1. *Создадим массив M длины a_1 содержащий числа из $\mathbb{R}_{\min}$. Запишем во все ячейки значения ∞.*

2. *На нулевой итерации переберём все линейные комбинации с одним слагаемым. Для этого для каждого a_i и для каждого множителя $0 \leq k < a_1$ проверим, можем ли мы улучшить ответ: сравним $a_i^{\odot k} = a_i \cdot k$ с $M[a_i \cdot k\ rem\ a_1]$, и если в массиве записано большее число, то улучшим ответ: запишем в ячейку $a_i \cdot k\ rem\ a_1$ значение $a_i^{\odot k} = a_i \cdot k$.*

3. *На каждой следующей итерации будем перебирать все пары ячеек $M[i]$ и $M[j]$ и пытаться улучшить ответ: сравним $M[(i + j)\ rem\ a_1]$ с $M[i] \odot M[j]$ (т.е. $M[i] + M[j]$, если оба эти числа меньше ∞, и ∞ иначе), и если в массиве записано большее число, то улучшим ответ: запишем в ячейку $(i + j)\ rem\ a_1$ значение $M[i] \odot M[j]$.*

4. *Всего необходимо сделать $\lceil log_2(n) \rceil + 1$ итераций. После этого ответом будет $\bigoplus_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1 = \max_{i=0}^{a_0-1} M[i] - a_1 + 1$.*

Для доказательства корректности докажем следующее утверждение.

Лемма 10.17. *После итерации с номером d в ячейке $M[i]$ лежит минимальное число, сравнимое с i по модулю a_1, которое может быть представлено в виде линейной комбинации с не более чем 2^d слагаемыми, или ∞, если такого числа не существует.*

Доказательство. Докажем утверждение по индукции.

База: $d = 0$. В шаге 1 перебираются все линейные комбинации вида $a_j \cdot k$, где $0 \le k < a_1$. Рассмотрим линейную комбинацию, которую мы не перебрали: $a_i \cdot m$. Так как мы не перебрали эту комбинацию, то $m \ge a_1$. Но тогда $a_i \cdot m \equiv a_i \cdot (m - a_1) \pmod{a_1}$ и $a_i \cdot m > a_i \cdot (m - a_1) \ge 0$ — эта линейная комбинация не может улучшить ответ. Значит, база верна.

Докажем переход. Предположим, утверждение доказано для $d - 1$, докажем его для d. Обозначим массив M в состоянии до итерации с номером d через M'.

Рассмотрим произвольную ячейку $M[i]$, в которой записано число, меньшее ∞. Тогда существуют два индекса j и k такие, что $i = (j + k)\ rem\ a_1$ и $M[i] = M'[j] + M'[k]$. По предположению индукции в каждой ячейке массива M' лежит число, которое может быть представлено в виде линейной комбинации с не более чем 2^{d-1} слагаемыми. Значит, в $M[i]$ лежит число, представимое в виде линейной комбинации с не более чем 2^d слагаемыми. По предположению индукции $M[i] = M'[j] + M'[k] \equiv j + k \equiv i \pmod{a_1}$.

Осталось доказать минимальность $M[i]$. Предположим противное: пусть существует число $x < M[i]$, сравнимое с i по модулю a_1 и представимое в виде линейной комбинации с не более чем 2^d слагаемыми. Тогда эту комбинацию можно разбить на две меньших, в каждой из которых будет не более 2^{d-1} слагаемых. Обозначим суммы этих линейных комбинаций через S_1 и S_2. Пусть $S_1 \equiv j \pmod{a_1}$, а $S_2 \equiv k \pmod{a_1}$.

Тогда $S_1 + S_2 = x < M[i] \le M'[j] + M'[k]$ и или $S_1 < M'[j]$, или $S_2 < M'[k]$. В обоих случаях имеем противоречие с предположением индукции. Значит, предположение индукции верно и для d, что и требовалось доказать. □

Утверждение 10.18. *Алгоритм 10.16 корректен. Время его работы —* $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot log\ n)$*. Объем затраченной памяти —* $O(a_1)$*.*

Доказательство. Докажем асимптотику. Первый шаг работает за $O(a_1)$, второй — за $O(a_1 \cdot n)$ (надо перебрать все $1 \le j \le n$ и все $0 \le k < a_1$). Третий работает за $O(a_1^2 \cdot log\ n)$, так как всего $O(log\ n)$ итераций, в каждой из которых надо перебрать пары (i, j), где $0 \le i, j \le a_1$. Четвертый — за $O(a_1)$. Итоговая сложность алгоритма: $O(n \cdot a_1 + a_1^2 \cdot log\ n)$.

Память тратится только на массив M длины a_1. Значит, алгоритм требует $O(a_1)$ памяти.

Докажем корректность. По лемме 10.17 после итерации с номером d в ячейках массива M лежит информация об оптимальных линейных комбинациях с не более чем 2^d слагаемыми. Следовательно, после итерации с номером $\lceil log_2(n) \rceil$ в массиве M лежит информация об оптимальных линейных комбинациях из n слагаемых, то есть массив M будет наконец посчитан.

Во время работы алгоритма каждая ячейка массива M изменит своё значение хотя бы раз: это следует из корректности функции P. Значит, после последней итерации в массиве M не останется ∞.

Далее ответ может быть получен по лемме 10.14. □

На моём компьютере при $n = 100, a_1 = 100$ алгоритм ни разу не показывал время, большее 0.2 с. При $n = 1000, a_1 = 1000$ алгоритм работал не дольше 0.3 с. При $n = 10000, a_1 = 10000$ алгоритм работает существенно медленнее: в районе 40 с.

10.3 Верхние оценки функции P

Оценим сверху значение функции P. Это поможет и в оценке сверху границы T для ромашек, и для уточнения времени работы алгоритма **??**.

Утверждение 10.19. *Функция* $P(a_1, \ldots, a_n)$ *оценивается сверху следующими функциями:*

1. $Wi(N) - 2a_n + 2$,

2. $(a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2$,

3. $(a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2)$,

где $N = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - n + 1$ *— количество вершин в* $(a_1, \ldots, a_n; 1)$*-ромашке.*

Доказательство. По замечанию 10.3 граница T данной ромашки совпадает с её экспонентой, которая по теореме 8.11 оценивается сверху числом Виландта от количества вершин $Wi(N)$, функцией $\hat{g}(N-2) + N$ и функцией $(\hat{g} - 1)(cr - 1) + (\hat{g} + 1)cd$.

Обхват $(a_1, \ldots, a_n)$-ромашки равен a_1, её окружность равна a_n, а длина наибольшего простого пути не превышает $2a_n - 2$.

Далее достаточно применить теорему 10.5. □

Следствие 10.20. *Время работы алгоритма* **??** *можно оценить следующими способами, убрав из асимптотики искомую величину:* $O(n \cdot a_1 \cdot a_n)$*. Объем затраченной памяти —* $O(a_1 \cdot a_n)$*.*

Доказательство. Так как ответ оценивается сверху функцией $Wi(N) + 2a_2 - 2$, то имеем время работы $O(n \cdot (N^2 - 2N + 2 - 2a_n + 2)) = O(n \cdot N^2)$ и объем памяти $O(N^2)$ (так как $N = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - n + 1$).

При подстановке $(a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2$ вместо функции P имеем время работы $O(n \cdot ((a_1 + 1)N - 2a_1 - 2a_n + 2)) = O(n \cdot a_1 \cdot N)$ и объем памяти $O(a_1 \cdot N)$.

При подстановке $(a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2)$ вместо функции P имеем асимптотику $O(n \cdot ((a_1 - 1)(a_n - 1) + a_1(2a_n - 2))) = O(n \cdot a_1 \cdot a_n)$ и объем памяти $O(a_1 \cdot a_n)$.

Утверждение следует из неравенства $a_1 \cdot a_n \le a_1 \cdot N \le N^2$. □

11 Границы T и скрамблинг-индекс

Определение 11.1. *Рассмотрим произвольную матрицу* $X \in M_{n+m}(\mathbb{R}_{\max})$ *размера* $n + m$*. Назовем* n*-*m*-декомпозицией матрицы* X *следующие четыре матрицы:*

$$\begin{array}{ll} X_{11} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_{\max}) & X_{12} \in M_{n\times m}(\mathbb{R}_{\max}) \\ X_{21} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max}) & X_{22} \in M_{m\times m}(\mathbb{R}_{\max}), \end{array}$$

такие, что

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим граф $\mathcal{G}$ на $n + m$ вершинах, матрицей смежности $A \in M_{n+m}(\mathbb{R}_{\max})$ и с положительным скрамблинг-индексом $k(\mathcal{G})$. По критерию положительности скрамблинг-индекса (7.6) в $\mathcal{G}$ существует примитивный достижимый подграф $\mathcal{G}_2$. Обозначим через $\mathcal{G}_1$ индуцированный подграф исходного графа $\mathcal{G}$, порожденный множеством вершин $V(\mathcal{G})\backslash V(\mathcal{G}_2)$.

Для удобства перенумеруем вершины: пусть в графе $\mathcal{G}_1$ лежат вершины с номерами от 1 до n, а в $\mathcal{G}_2$ — от $n + 1$ до $n + m$. Тогда в n-m-декомпозиции матрицы A в матрице A_{ij} лежит информация о ребрах из $\mathcal{G}_i$ в $\mathcal{G}_j$.

Будем рассматривать те графы, для которых $\mathcal{G}^c = \mathcal{G}_2$ и $\lambda(A) = 0$. Так как граф $\mathcal{G}_2$ примитивен, его цикличность равна 1. Значит, $M = A^*$.

Рассмотрим n-m-декомпозицию матрицы M:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 11.2. *Матрица M_{ij} имеет вид:*

$$M_{ij} = (A^*)_{ij} = \bigoplus_{t=0}^{n+m-1} \bigoplus_{\sigma} \bigodot_{k=0}^{t-1} A_{\sigma(k),\sigma(k+1)},$$

где $i, j \in \{1, 2\}$, $\sigma \in \{1, 2\}^{t+1}$, причем $\sigma(0) = i$, $\sigma(t) = j$.

Доказательство. Матрицы C, R, S, B имеют вид:

$$C = \begin{pmatrix} -\infty & M_{12} \\ -\infty & M_{22} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} A_{11} & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Для $t \geq T(A)$ верно следующее равенство:

$$A^t = CS^tR = \begin{pmatrix} -\infty & M_{12} \\ -\infty & M_{22} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ -\infty & A_{22} \end{pmatrix}^t \odot \begin{pmatrix} -\infty & -\infty \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} M_{12}A_{22}^tM_{21} & M_{12}A_{22}^tM_{22} \\ M_{22}A_{22}^tM_{21} & M_{22}A_{22}^tM_{22} \end{pmatrix},$$

для $t \geq T_1(A, B)$ — следующее:

$$A^t = CS^tR \oplus B^t = \begin{pmatrix} M_{12}A_{22}^tM_{21} \oplus A_{11}^t & M_{12}A_{22}^tM_{22} \\ M_{22}A_{22}^tM_{21} & M_{22}A_{22}^tM_{22} \end{pmatrix},$$

и для $t \geq T_2(A, B)$ — следующее неравенство:

$$\begin{pmatrix} M_{12}A_{22}^tM_{21} & M_{12}A_{22}^tM_{22} \\ M_{22}A_{22}^tM_{21} & M_{22}A_{22}^tM_{22} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} A_{11}^t & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix},$$

т.е., что равносильно, $M_{12}A_{22}^tM_{21} \geq A_{11}^t$.

Выразим A^t:

$$(A^t)_{ij} = \bigoplus_{\sigma} \bigodot_{k=0}^{t-1} A_{\sigma(k),\sigma(k+1)},$$

где $i, j \in \{1, 2\}$, $\sigma \in \{1, 2\}^{t+1}$, причем $\sigma(0) = i, \sigma(t) = j$. Здесь и далее считаем, что $\sigma(k)$ — это k-й элемент кортежа σ, нумерация в котором идет с нуля.

Рассмотрим путь из произвольной вершины подграфа $\mathcal{G}_i$ в произвольную вершину подграфа $\mathcal{G}_j$. Каждое ребро этого пути либо лежит внутри соответствующего подграфа, либо соединяет текущий подграф с другим. Переберем все возможные варианты расположения ребер в пути: если $\sigma(k-1) = \sigma(k)$, то k-е ребро пути лежит в графе $\mathcal{G}_{\sigma(k-1)}$. Иначе — ведёт из $\mathcal{G}_{\sigma(k-1)}$ в $\mathcal{G}_{\sigma(k)}$. По всем таким вариантам возьмем максимум — это и будет оптимальным весом пути.

Зафиксируем $i, j \in \{1, 2\}$. Тогда матрица M_{ij} выражается следующим образом:

$$M_{ij} = (A^*)_{ij} = \bigoplus_{t=0}^{n+m-1} \bigoplus_{\sigma} \bigodot_{k=0}^{t-1} A_{\sigma(k),\sigma(k+1)},$$

где $\sigma \in \{1, 2\}^{t+1}$, причем $\sigma(0) = i$, $\sigma(t) = j$. $\square$

12 Конусы

Определение 12.1. *Пусть K — некоторе непустое подмножество $\mathbb{R}^n$. Назовём K конусом, если выполнены следующие условия:*

1. *$\alpha x + \beta y \in K$ для любых $x, y \in K$ и для любых $\alpha, \beta \geq 0$,*
2. *$K \cap -K = \{0\}$,*
3. *$intK \neq \varnothing$ (здесь и далее через $intX$ будем обозначать внутренность множества X) или, что эквивалентно, $K - K = \mathbb{R}^n$.*

Подмножество F конуса K называется подконусом, если само является конусом. Размерность конуса K — размерность линейной оболочки всех векторов из K.

Введём несколько отношений частичного порядка на K:

- $x \geq^K y$ тогда и только тогда, когда $x - y \in K$,
- $x >^K y$ тогда и только тогда, когда $x \geq^K y$ и $x - y \neq 0$,
- $x \gg^K y$ тогда и только тогда, когда $x - y \in intK$.

Определение 12.2. *Подконус F конуса K называется гранью конуса K, если для любых $x \in F$, $y \in K$ из $x \geq^K y \geq^K 0$ следует $y \in F$. Обозначим множество всех граней конуса K через $\mathcal{F}(K)$.*

Для любого подмножества $S \subset K$ определим $\Phi(S)$ — наименьшая по включению грань конуса K, содержащее S:

$$\Phi(S) = \cap\{F \mid F\text{— грань } K \text{ и } F \supseteq S\} \tag{19}$$

Если $S = \{x\}$, то для удобства будем писать $\Phi(x) = \Phi(\{x\})$

Заметим, что $\{0\}$ и K являются гранями конуса K. Назовём эти грани тривиальными, а все остальные — нетривиальными. Обозначим множество всех нетривиальных граней конуса K через $\mathcal{F}'(K)$.

Иногда для описания некоторой грани F конуса K достаточно взять один вектор из F. Обозначим через riF относительную внутренность множества F. (см. [13]).

Утверждение 12.3 (Добавить ссылку)**.** *$F = \Phi(K)$ тогда и только тогда, когда $x \in riF$.*

Утверждение 12.4 (Добавить ссылку)**.** *$\Phi(x) = \{y \in K \mid x \geq^K \alpha y$ для некоторого $\alpha > 0\}$.*

Определение 12.5. *$x \in K$ называется экстремальным вектором, если $x = 0$ или $x \neq 0$ и $\Phi(x) = \{\lambda x \mid \lambda \geq 0\}$. В последнем случае такое $\Phi(x)$ называется экстремальным лучом. Обозначим множество экстремальных лучей через $\mathcal{E}(K)$.*

Если конус содержит конечное число экстремальных лучей, то такой конус называется полиэдральным.

Если размерность конуса совпадает с количеством его экстремальных лучей, то такой конус называется симплициальным.

Множество n-мерных полиэдральных конусов с m экстремальными лучами будем обозначать через $\mathcal{P}(n, m)$.

Таким образом, экстремальные лучи — это одномерные грани конуса. Простейший пример полиэдрального конуса — это положительный октант $\mathbb{R}^n_+ = \{(\xi_1, \dots, \xi_n)^R \mid \xi_i \geq 0$ для любого $1 \leq i \leq n\}$. Этот конус является симплициальным. Заметим, что любой симплициальный конус линейно изоморфен $\mathbb{R}^n_+$ (см. [13]).

Мы будем работать с линейными отображениями, сохраняющими конус. Обозначим это множество через $\Pi(K)$:

Определение 12.6. $\Pi(K) = \{A \in Mat_n(\mathbb{R}) \mid AK \subseteq K\}$. *Все матрицы из* $\Pi(K)$ *назовём* K*-неотрицательными.*

При $K = \mathbb{R}^n_+$ множество K-неотрицательных матриц целиком состоит из неотрицательных матриц.

Определим несколько классов матриц:

Определение 12.7. *Рассмотрим* $A \in \Pi(K)$.

A называется K*-неразложимой, если любая нетривиальная грань конуса* K *не инвариантно относительно* K.

A называется K*-положительной, если* $A(K \setminus \{0\}) \subseteq intK$.

A называется K*-примитивной, если существует целое положительное число* p *такое, что* A^p *является* K*-положительной. В этом случае минимальное такое* p *называется экспонентой матрицы* A *и обозначается через* $\gamma(A)$.

Добавить утверждение, что если A^p K-положительная, то и для любого $q \geq p$ верно, что A^q — K-положительная.

По конусу K и матрицы A, его сохраняющей, можно определить несколько графов. Рассмотрим две грани F, G конуса K. Будем говорить, что от F до G идёт $\mathcal{P}$-ребро, если $G \subseteq \Phi(AF)$, и $\mathcal{I}$-ребро, если $G \subseteq \Phi((I + A)F)$, где I — единичная матрица подходящей размерности. Заметим, что если от F до G идёт $\mathcal{P}$-ребро, то идёт и $\mathcal{I}$-ребро (см. [13]).

Определение 12.8. $(\mathcal{E}, \mathcal{P}(A, K))$ *— граф, вершинами которого являются его экстремальные лучи, а рёбрами — все* $\mathcal{P}$*-рёбра.*

Аналогично определяются $(\mathcal{E}, \mathcal{I}(A, K))$, $(\mathcal{F}, \mathcal{P}(A, K))$, $(\mathcal{F}, \mathcal{I}(A, K))$, $(\mathcal{F}', \mathcal{P}(A, K))$, $(\mathcal{F}', \mathcal{I}(A, K))$: на первом месте стоит множество вершин, а на втором — множесво рёбер.

Далее иногда будем писать просто $(\mathcal{E}, \mathcal{P})$, если по контексту понятно, какой конус K и какая матрица A рассматриваются.

Утверждение 12.9 ([13]). *Если* $K = \mathbb{R}^n_+$, *то* $(\mathcal{E}, \mathcal{P}(A, K)) = \mathcal{G}(A^T)$.

Утверждение 12.10 ([13], [15]). *Если в* $(\mathcal{E}, \mathcal{P}(A, K))$ *есть путь длины* k *между вершинами* $\Phi(x)$ *и* $\Phi(y)$, *то* $\Phi(A^k x) \supseteq \Phi(y)$.

Пусть F, G *— грани конуса* K. *Тогда в графе* $(\mathcal{F}, \mathcal{P}(A, K))$ *(или* $(\mathcal{F}, \mathcal{I}(A, K))$*) существует путь длины* k *между* F *и* G *тогда и только тогда, когда* $G \subseteq \Phi(A^k F)$ *(соответственно,* $G \subseteq \Phi((I + A)^k F)$.

Теорема 12.11 ([16]). *Если для любой* K*-неразложимой матрицы* A *граф* $(\mathcal{E}, \mathcal{P}(A, K))$ *сильно связен, то* K *симплициален.*

Теорема 12.12 ([15]). A *—* K*-неразложима тогда и только тогда, когда* $(\mathcal{F}', \mathcal{I})$ *сильно связен.*

Теорема 12.13 ([15]). *Пусть* $A \in \Pi(K)$ *и размерность конуса* $n > 2$. *Тогда* A *—* K*-примитивна тогда и только тогда, когда* $(\mathcal{F}', \mathcal{P})$ *сильно связен.*

Докажем две вспомогательные леммы:

Лемма 12.14. *Если некоторая грань F полиэдрального конуса K содержит все нетривиальные грани K, то $F = K$.*

Доказательство. В [16] доказано, что у любого n-мерного несимплициального конуса существуют линейные независимые экстремаьлные вектора $x_1, \ldots, x_r$, где $r < n$ такие, что $x_1 + \ldots x_r \in intK$.

Заметим, что если конус полиэдральный, то он линейно изоморфен $\mathbb{R}^n_+$, а в последнем конусе сумма всех базисных векторов лежит во внутренности $\mathbb{R}^n_+$.

Значит, в любом случае существуют экстремальные вектора $x_1, \ldots, x_r$, сумма которых лежит во внутренности K. Заметим, что $x_i \in \Phi(x_i) \subseteq F$ для любого $1 \leq i \leq r$. Значит, $x_1 + \ldots x_r \in F$. Но, так как сумма x_i лежит во внутренности K, $K \subseteq F$. Следовательно, $F = K$. □

Лемма 12.15. *Если x — экстремальный вектор, то $\Phi(A^p\Phi(x)) = \Phi(A^p x)$.*

Доказательство. По определению экстремального вектора $\Phi(x) = \{\lambda x \mid \lambda \geq 0\}$. Тогда $\Phi(A^p\Phi(x)) = \Phi(A^p\{\lambda x \mid \lambda \geq 0\}) = \Phi(\{\lambda A^p x \mid \lambda \geq 0\}) = \Phi(A^p x)$. □

Теорема 12.16. *Пусть A — K-примитивна и размерность конуса $n > 2$. Тогда $(\mathcal{F}', \mathcal{P})$ примитивен и $\gamma(A) = exp(\mathcal{F}', \mathcal{P})$.*

Доказательство. Пусть $q = \gamma(A)$. Тогда заметим, что для любой нетривиальной грани F конуса K верно равенство $\Phi(A^q F) = K$. Это следует из следующего: рассмотрим произвольный ненулевой вектор $x \in F$. Тогда, так как A примитивна, $A^q x \gg 0$. Значит, $\Phi(A^q F) \supseteq \Phi(A^q x) = K$ и, следовательно, $\Phi(A^q F) = K$.

Значит, для любых нетривиальных граней F, G конуса K в $(\mathcal{F}', \mathcal{P})$ существует путь между F и G длины p — это равносильно $G \subseteq \Phi(A^q F) = K$, а любая грань конуса в нём содержится. Значит, экспонента графа $(\mathcal{F}', \mathcal{P})$ не превосходит экспоненты матрицы A, то есть $exp(\mathcal{F}', \mathcal{P}) \leq \gamma(A)$.

Докажем обратное неравенство: $exp(\mathcal{F}', \mathcal{P}) \geq \gamma(A)$. Пусть $p = exp(\mathcal{F}', \mathcal{P})$. Необходимо показать, что A^p — K-положительная матрица. Для этого рассмотрим произвольный вектор $x \in K$ и покажем, что $A^p x \in intK$.

Покажем, что $A^p x \in intK$ для экстремальных векторов. Тогда в $(\mathcal{F}', \mathcal{P})$ существует путь из $\Phi(x)$ в любую другую вершину. Следовательно, $\Phi(A^p\Phi(x))$ содержит в себе все нетривиальные грани конуса, а значит $\Phi(A^p\Phi(x)) = K$. (по лемме 12.14). Докажем следующую лемму:

Значит, $K = \Phi(A^p\Phi(x)) = \Phi(A^p x)$. Следовательно, $A^p x \in riK = intK$.

Теперь пусть x — произвольный ненулевой вектор из K. Тогда x выражается в виде линейной комбинации экстремальных векторов с положительными коэффициентами (так как среди них можно выбрать n базисных): $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Без ограничения общности, пусть $\lambda_1 > 0$.

Заметим, что $A^p x \in \Phi(A^p x)$, а также что $0 \leq^K \lambda_1 A^p x_1 \leq^K A^p x$.

Значит, $A^p x_1 \in \Phi(A^p x)$ и $\Phi(A^p x_1) \subseteq \Phi(A^p x)$. Но по лемме 12.15 $\Phi(A^p x_1) = K$. Следовательно, $\Phi(A^p x) = K$. Таким образом, $A^p x \in intK$.

В силу произвольности x экспонента $\gamma(A) \leq p$.

Значит, $\gamma(A) = exp(\mathcal{F}', \mathcal{P})$. □

13 Обозначения

1. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ — множество неотрицательных вещественных чисел.

2. $\mathbb{R}_{\max}, \mathbb{R}_{\min}$ — тропические полукольца.

3. $x \; rem \; y$ — остаток при делении x на y.
4. $\lceil x \rceil$ — округление числа x вверх.
5. $\mathbb{B} = \{\mathbf{0,1}\}$ — множество с сложением, аналогичным дизъюнкции, и умножением, аналогичным конъюнкции.
6. $M_{n \times m}(\mathbb{F})$ — множество матриц $n \times m$ с элементами из $\mathbb{F}$.
   $M_n(\mathbb{F})$ — множество квадратных матриц $n \times n$ с элементами из $\mathbb{F}$.
7. $[M]_{ij}$ — элемент матрицы M с индексами i и j.
8. $\mathcal{G}(V, E)$ — граф со множеством вершин V и множеством ребер E.
9. $Wi(n) = (n-1)^2 + 1$ — число Виландта.
10. $DM(\hat{g}, n) = \hat{g}(n-2) + n$, где $\hat{g} = \hat{g}(\mathcal{G}^c(A))$ — число Далмаджа-Мендельсона.
11. $\sigma_{\mathcal{G}}$ — индекс цикличности графа G.
12. $k(\mathcal{G})$ — скрамблинг индекс графа G.
13. $g(\mathcal{G})$ — обхват графа $\mathcal{G}$, т.е. длина наименьшего цикла в $\mathcal{G}$.
14. $\hat{g}(\mathcal{G})$ — максимальный обхват среди всех компонент сильной связности графа $\mathcal{G}$.
15. $cr(\mathcal{G})$ — окружность графа $\mathcal{G}$, т.е. длина наибольшего цикла в $\mathcal{G}$.
16. $cb(\mathcal{G})$ — максимальная длина простого пути в графе $\mathcal{G}$.
17. $exp(\mathcal{G})$ — экспонента графа (а значит, и его матрицы смежности).
18. $\lambda(A)$ — максимальный средний вес цикла в графе $\mathcal{G}(A)$.
19. $\mathcal{G}^c$ — критический подграф графа $\mathcal{G}$.
20. A^* — звезда Клини матрицы A.
21. $\mathcal{W}(i \to j)$ — множество путей из вершины i в вершину j.
   $\mathcal{W}^t(i \to j)$ — множество путей из вершины i в вершину j длины t.
   $\mathcal{W}^{t,l}(i \to j)$ — множество путей из вершины i в вершину j длины t по модулю l.
22. $\mathcal{W}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j), \mathcal{W}^t(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j), \mathcal{W}^{t,l}(i \xrightarrow{\mathcal{G}} j)$ — аналогично предыдущему пункту, но с дополнительным условием на путь: он должен проходить хотя бы через одну вершину из $\mathcal{G}$.
23. $T(A), T_1(A,B), T_2(A,B)$ — границы, определенные в подразделе 8.2.
24. $\Pi(K)$ — множество матриц, сохраняющих конус K.
25. $\gamma(A)$ — экспонента K-примитивной матрицы A.
26. $\Phi(S)$ — грань конуса, порождённая множеством S.
   $\Phi(x) = \Phi(\{x\}$ — грань конуса, порождённая одноэлементным множеством.
27. $P(n, m)$ — множество n-мерных правильных конусов с m экстремальными лучами.
28. $(\mathcal{E}, \mathcal{P}(A, K))$ — граф с вершинами из множества экстремальных лучей конуса K и с $\mathcal{P}$-рёбрами.
   Аналогично — $(\mathcal{F}', \mathcal{I}(A, K))$, и т. д.

References

[1] Imre Simon *On semigroups of matrices over the tropical semiring* Theoretical Informaties and Applications (Tome 28 (1994) no. 3-4, pp. 277-294)

[2] Semere Tsehaye Tesfay. *A Glance at Tropical Operations and Tropical Linear Algebra* Eastern Illinois University, 2015.

[3] David Speyer, Bernd Sturmfels. *Tropical Mathematics* Mathematics Magazine, vol. 82, №3, June 2009.

[4] Ю.М. Волченко *Max-plus алгебра и ее применение*, декабрь 2017

[5] Hans Schneider. *Wielandt's proof of the exponent inequality for primitive nonnegative matrices* Department of Mathematics, University of Wisconsin at Madison, 2002.

[6] Ю.А. Альпин, И.В. Башкин. *Неотрицательные цепные матрицы* Казанский федеральный университет, 2020.

[7] Alexander Guterman, Elena Kreines, and Carsten Thomassen. *Linear transformations of tropical matrices preserving the cyclicity index* Special Matrices Volume 9, 2021.

[8] A. E. Guterman, A. M. Maksaev *Upper bounds on scrambling index for non-primitive digraphs* Linear and Multilinear Algebra, 2019

[9] Arthur Kennedy-Cochran-Patrick, Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev. *New bounds on the periodicity transient of the powers of a tropical matrix: Using cyclicity and factor rank* Linear Algebra and its Applications, 2020

[10] Glenn Merlet, Thomas Nowak, Sergei Sergeev. *https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379514004777*

[11] Sergei Sergeev, Hans Schneider. *CSR expansions of matrix powers in max algebra* Transactions of the American Mathematical Society, December 2009

[12] Brualdi RA, Ryser HJ. *Combinatorial matrix theory.* Cambridge: Cambridge University Press; 1991. (Encyclopedia of mathematics and its applications; 39).

[13] Raphael Loewy, Bit-Shun Tam. *Maximal exponents of polyhedral cones (I).* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 365 (2010) 570–583

[14] George Phillip Barker. *On matrices having an invariant cone.* Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972), No. 1, 49–68 *https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/101076*

[15] George Phillip Barker, Bit-Shun Tam. *Graphs for Cone Preservlng Maps.* Linear Algebra and its Applications 37:199-204 (1981)

[16] Bit-Shun Tam, George Phillip Barker. *Graphs and irreducible cone preserving maps.* Linear and Mukilinear Algebra, 1992, Vol. 31, pp. 19-25 *https://doi.org/10.1080/03081089208818118*