ДОМАШНЯЯ РАБОТА №3

«Интерполяционный многочлен в форме Ньютона. Остаток интерполяции»»

Выполнил:
студент 3 курса 13 группы кафедры ТП.

Петров Андрей Александрович

Вариант 3.

Задание №1: построить интерполяционный многочлен в форме Ньютона и барицентрическую форму, удовлетворяющий условию $x_0=0$; $x_1=0,25$; $x_2=0,5$; $x_3=0,75$; $x_4=1$; $\mathbf{f(x) = e^{-2x} - \ln(x^2+1) - tg(x)}$, где x = 0,8. Оценить остаток интерполяции.

Ход работы:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 0,290564 \\ y_2 = -0,401567 \\ y_3 = -1,15475 \\ y_4 = -2,11522 \end{cases}$$

Построим интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

x_i	y_i	f [ ] I	f [ ] II	f [ ] III	f [ ] IV
0	1				
0,25	0,290564	-2.837744			
0,5	-0,401567	-2.768524	0.13844		
0,75	-1,15475	-3.012732	-0.488416	-1.253712	
1	-2,11522	-3.84188	-1.658296	-2.339760	-2.172096

P(x)=1 + (x)(-2.837744) + (x – 0,25)(x)(0.13844) + (x – 0,5)(x – 0,25)(x)(-1.253712) + (x – 0,75)(x – 0,5)(x – 0,25)(x)(-2.172096)

Значение функции f(x) в точке 0,8:
$P_4(0,8) \approx -1.46079$

Значение функции f(x) в точке 0,8 полученное с помощью Wolfram Alpha:
$f(0,8) \approx -1.32244$

Построим барицентрическую форму интерполяционное многочлена.

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{v_i}{x - x_i}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{v_i}{x - x_i}},$$

$$v_i = \frac{1}{\omega'_{n+1}(x_i)}$$

Напишем программу, рассчитывающую весовой коэффициент v:

```
let weightFactors = function (xArr){
    let res = []
    xArr.forEach( (xI, i) => {
        let currentV = 1;
        xArr.forEach( (xJ, j) => {
            if(i != j){
                currentV *= (xI - xJ);
            }
        });
        res.push(1/currentV);
    });
    return res;
}
console.log("Weight factor: ", weightFactors())
```

Результат выполнения программы:

x_i	y_i	v_i
0	1	10.666666666666666
0,25	0,290564	-42.666666666666664
0,5	-0,401567	64
0,75	-1,15475	-42.666666666666664
1	-2,11522	10.666666666666666

Напишем программу, рассчитывающую значение полинома в барицентрической форме в точке 0,8:

```
let calcBarycentricForm = function (x, xArr, yArr, weightFactorArr) {
    let numerator = 0;
    let denominator = xArr.reduce((res, xi, i) => {
        let tmp = weightFactorArr[i]/(x - xi);
        numerator += yArr[i] * tmp;
        return res + tmp;
    });

    return numerator / denominator;
}
console.log(calcBarycentricForm(0.8, xArr, yArr, weightFactorArr))
```

Результат выполнения программы:

```
-1.2841852075471698
```

Проведем оценку остатка интерполяции:

$$f^{(5)}(x) = \frac{d^5}{dx^5}\left(e^{-2x} - \log(x^2+1) - \tan(x)\right) = -\frac{240x}{(x^2+1)^3} - \frac{768x^5}{(x^2+1)^5} + \frac{960x^3}{(x^2+1)^4} - 32e^{-2x} - 16\sec^6(x) - 88\tan^2(x)\sec^4(x) - 16\tan^4(x)\sec^2(x)$$

Так как производная – убывающая функция, то максимальное значение по модулю на отрезке [0,1] находится в точке 1.

$f^{(5)}(1) = 3468.52$

$$r_n = \frac{\|\omega_{n+1}\|}{5!} * \| f^{(5)}(x)\|$$

$$\omega_{n+1} = (x-0)(x-0.25)(x-0.5)(x-0.75)(x-1)$$

$$r_n \le \frac{\|(1-0)(1-0.25)(1-0.5)(0-0.75)(0-1)\|}{5!} * \| f^{(5)}(x)\| \approx 2.70978125$$

Задание №2: По данным таблицы значений функции определить значение аргумента x, соответствующее указанным значениям y:

з)

x	5	7	8	10
$f(x)$	0	1	3	6

, $f(x)=5;$

f(x)	x	f[ ] I	f[ ] II	f[ ] III
0	5			
1	7	2		
3	8	0.5	-0.5	
6	10	0.666667	0.333333	0.106667

f(x)=1 + (x)(2) + (x – 1)(x)(-0.5) + (x – 3)(x – 1)(x)(0.106667)

1 + (x)(2) + (x – 1)(x)(-0.5) + (x – 3)(x – 1)(x)(0.106667) = 5

x ≈ 4.81372