ДОМАШНЯЯ РАБОТА №5
«Сплайн-интерполирование»

Выполнил:
студент 3 курса 13 группы кафедры ТП.

Петров Андрей Александрович

Вариант 3).

Задание: Функция y = f(x) задана таблицей своих значений. Построить интерполяционный сплайн третьего порядка и с его помощью определить приближенное значение функции y = f (x) в точках, соответствующих серединам элементарных отрезков в данном случае:

x_i	2.1	2.9	3.6	4.4	5.2
$f(x_i)$	-8.1	-7.2	-6.3	-5.5	-4

По указанным узлам построить сплайны первого, второго и третьего порядков.

Ход работы:

1) Построим **линейный сплайн.**

$$S_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i)$$

Напишем функцию нахождения $S_i(x)$:

```
let splineLinear = function (i, x, alpha, beta, xi) {
    return alpha[i] + beta[i] * (x - xi[i]);
}
```

Из условия интерполяции найдем β_i:

$$S(x_i) = f(x_i) = y_i, \forall i = \overline{1, n}$$

$$\alpha_i = y_i$$

$$\beta_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

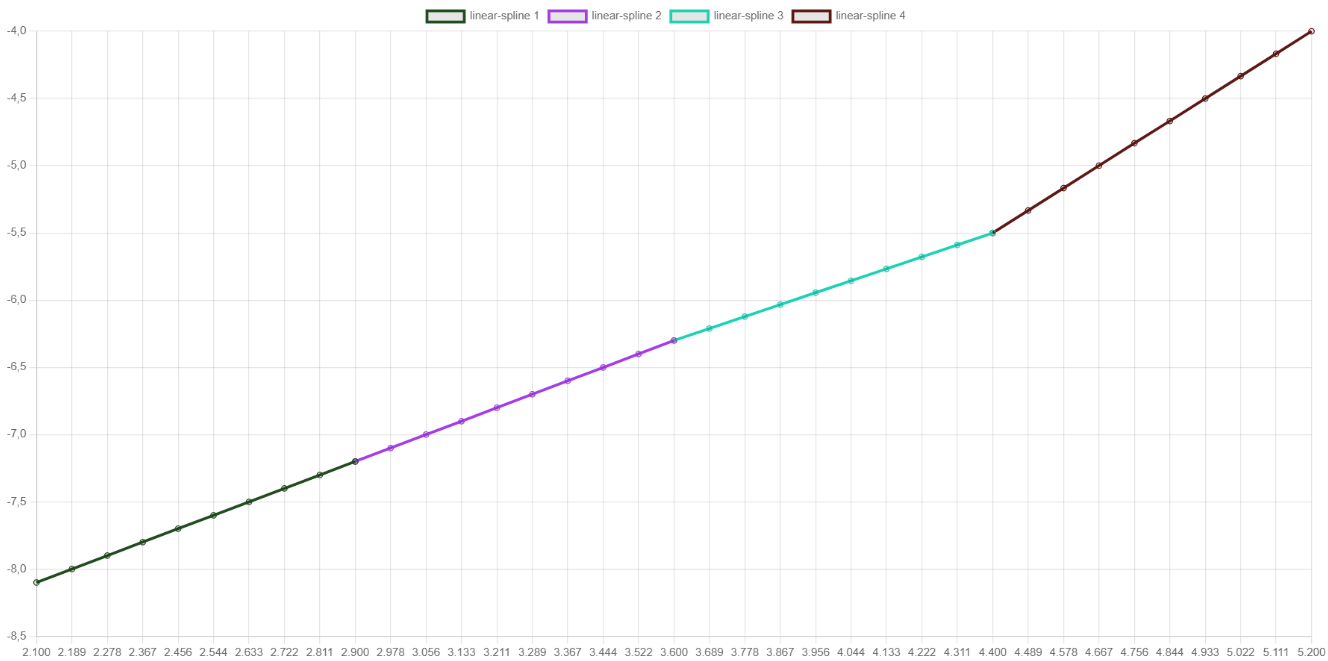
```
for (let i = 1; i <= n; i++) {
    beta[i] = (y[i] - y[i - 1]) / h[i - 1];
}
```

Найдем значения β и S(x) и построим график:

```
## Linear spline ##
alpha:  [ -8.1, -7.2, -6.3, -5.5, -4 ]
beta:  [
  0,
  1.1249999999999993,
  1.2857142857142863,
  0.9999999999999998,
  1.875
]
```

$$
\mathrm{S(x)} = \begin{cases} S_1(x) = -7.2 + 1.125 * (x - 2.9), & x \in (2.1, 2.9] \\ S_2(x) = -6.3 + 1.286 * (x - 3.6), & x \in [2.9, 3.6] \\ S_3(x) = -5.5 + 0.999 * (x - 4.4), & x \in [3.6, 4.4] \\ S_4(x) = -4 + 1.875 * (x - 5.2), & x \in [4.4, 5.2] \end{cases}
$$

График:



2) Построим **квадратичный сплайн**.

$$
S_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \frac{1}{2}\gamma_i(x - x_i)^2
$$

Напишем функцию нахождения $S_i(x)$:

```
let splineQuadratic = function (i, x, alpha, beta, gamma, xi) {
    return alpha[i] +
        beta[i] * (x - xi[i]) +
        (1 / 2) * gamma[i] * Math.pow(x - xi[i], 2);
}
```

Из условия интерполяции найдем β_i и γ_i:

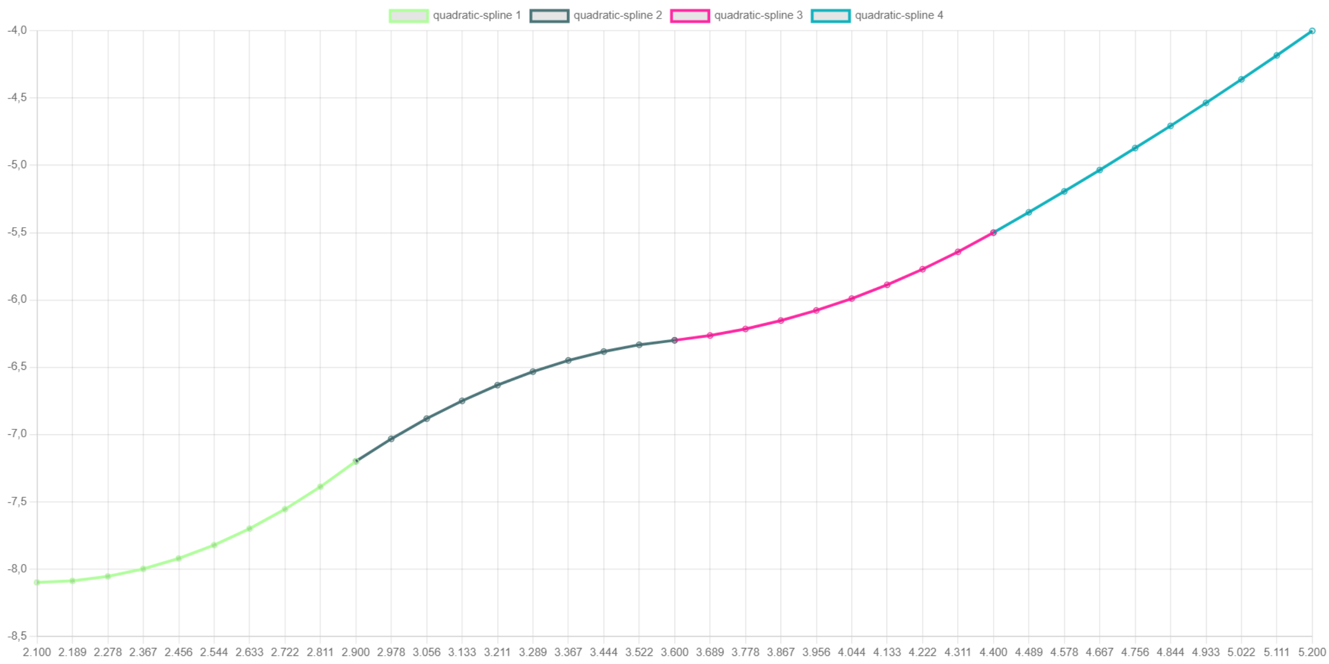
$$\alpha_i = y_i$$
$$S_0'(0) = 0 \Rightarrow \beta_0 = 0$$
$$\beta_i = -\beta_{i-1} + 2\frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{h_i}, i = \overline{1, n}$$
$$\gamma_i = \frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{h_i}$$

```
for (let i = 1; i <= n; i++) {
    beta[i] = -beta[i - 1] + 2 * (alpha[i] - alpha[i - 1]) / h[i - 1];
    gamma[i] = (beta[i] - beta[i - 1]) / h[i - 1];
}
```

Найдем значения β, γ и S(x) и построим график:

```
## Quadratic spline ##
alpha:  [ -8.1, -7.2, -6.3, -5.5, -4 ]
beta:  [
  0,
  2.2499999999999987,
  0.32142857142857384,
  1.6785714285714257,
  2.0714285714285743
]
gamma:  [
  0,
  2.8124999999999982,
  -2.7551020408163214,
  1.6964285714285647,
  0.4910714285714357
]
```

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = -7.2 + 2.250 * (x - 2.9) + 1.406 * (x - 2.9)^2, & x \in (2.1, 2.9] \\ S_2(x) = -6.3 + 0.321 * (x - 3.6) - 1.376 * (x - 3.6)^2, & x \in [2.9, 3.6] \\ S_3(x) = -5.5 + 1.679 * (x - 4.4) + 0.848 * (x - 4.4)^2, & x \in [3.6, 4.4] \\ S_4(x) = -4 + 2.071 * (x - 5.2) + 0.246 * (x - 5.2)^2, & x \in [4.4, 5.2] \end{cases}$$



3) Построим **кубический сплайн**.

$$S_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \frac{1}{2}\gamma_i(x - x_i)^2 + \frac{1}{6}\delta_i(x - x_i)^3$$

Напишем функцию нахождения $S_i(x)$:

```
let splineCubic = function (i, x, alpha, beta, gamma, delta, xi) {
    return alpha[i] +
        beta[i] * (x - xi[i]) +
        (1 / 2) * gamma[i] * Math.pow(x - xi[i], 2) +
        (1 / 6) * delta[i] * Math.pow(x - xi[i], 3);
}
```

$$\text{Доп условие } S_0''(0) = S_n''(0) = 0 \Rightarrow \gamma_0 = \gamma_n = 0$$

$$h_i\gamma_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})\gamma_i + h_{i+1}\gamma_{i+1} = 6\left(\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{h_{i+1}} - \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{h_i}\right)$$

$$c_i\gamma_{i-1} + 2\gamma_i + e_i\gamma_{i+1} = b_i, i = \overline{1, \mathrm{n} - 1}$$

$$c_i = \frac{h_i}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$e_i = \frac{h_{i+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$b_i = 6f[x_{i+1}, x_i, x_{i-1}]$$

Найдем значения c_i, e_i и b_i:

```
for (let i = 2; i < n; i++) {
    c.push(h[i - 1] / (xi[i + 1] - xi[i - 2]));
    e.push(h[i] / (xi[i + 1] - xi[i - 2]));
}

for (let i = 1; i <= n - 1; i++) {
    b.push(6 * ((alpha[i + 1] - alpha[i]) / h[i] - (alpha[i] - alpha[i - 1]) /
           h[i - 1]) / (xi[i + 1] - xi[i - 1]));
}
```

Используем метод прогонки (Tridiagonal matrix algorithm) для нахождения значения γ:

```
let tmpGamma = tridiagonalMatrixAlgorithm(n / 2, n - 1, c, e, [2, 2, 2], b);
const gamma = [0, ...tmpGamma, 0];
```

Найдем значения β, δ и S(x) и построим график:

$$\delta_i = \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{h_i}$$

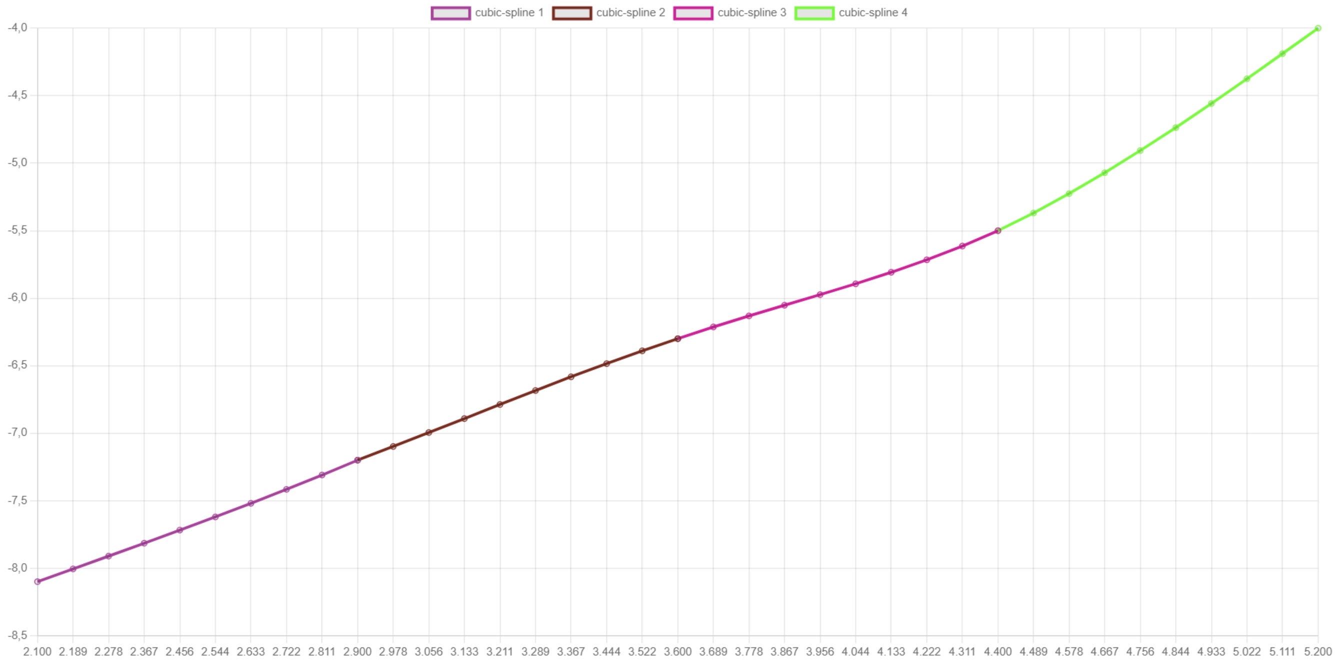
$$\beta_i = \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{h_i} + \frac{2\gamma_i + \gamma_{i-1}}{6}h_i, i = \overline{1, \mathrm{n}}$$

```
for (let i = 1; i <= n; i++) {
    delta[i] = (gamma[i] - gamma[i - 1]) / h[i - 1];
    beta[i] = (alpha[i] - alpha[i - 1]) / h[i - 1] + h[i - 1] *
              (2 * gamma[i] + gamma[i - 1]) / 6;
}
```

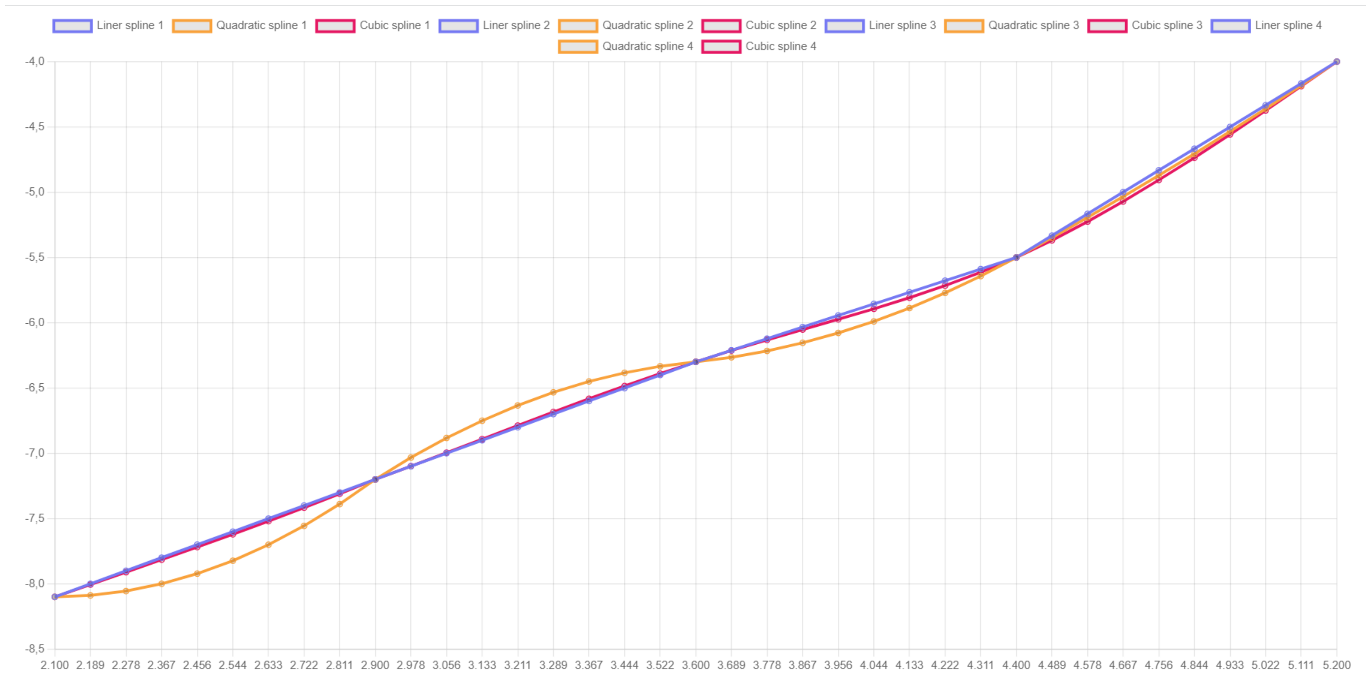
```
## Cubic spline ##
alpha:  [ -8.1, -7.2, -6.3, -5.5, -4 ]
beta:  [
  0,
  1.2552414352514554,
  1.1186676925279135,
  1.3540115946178066,
  2.116013574768585
]
gamma:  [ 0, 0.48840538219296004, -0.9601166618952208, 1.8076018107643865, 0 ]
delta:  [
  0,
  0.6105067277412,
  -2.0693172058402585,
  3.459648090824509,
  -2.259502263455483
]
```

$$\mathrm{S(x)} = \begin{cases} S_1(x) = -7.2 + 1.255 * (x - 2.9) + 0.244 * (x - 2.9)^2 + 0.102 * (x - 2.9)^3, \; x \in (2.1, 2.9] \\ S_2(x) = -6.3 + 1.119 * (x - 3.6) - 0.480 * (x - 3.6)^2 - 0.345 * (x - 2.9)^3, \; x \in [2.9, 3.6] \\ S_3(x) = -5.5 + 1.354 * (x - 4.4) + 0.904 * (x - 4.4)^2 + 0.577 * (x - 2.9)^3, \; x \in [3.6, 4.4] \\ S_4(x) = -4 + 2.116 * (x - 5.2) - 0.377 * (x - 2.9)^3, \; x \in [4.4, 5.2] \end{cases}$$

График:



4) Выведем график всех сплайнов:


Liner spline 1
Quadratic spline 1
Cubic spline 1
Liner spline 2
Quadratic spline 2
Cubic spline 2
Liner spline 3
Quadratic spline 3
Cubic spline 3
Liner spline 4
Quadratic spline 4
Cubic spline 4
-4,0
-4,5
-5,0
-5,5
-6,0
-6,5
-7,0
-7,5
-8,0
-8,5
2.100 2.189 2.278 2.367 2.456 2.544 2.633 2.722 2.811 2.900 2.978 3.056 3.133 3.211 3.289 3.367 3.444 3.522 3.600 3.689 3.778 3.867 3.956 4.044 4.133 4.222 4.311 4.400 4.489 4.578 4.667 4.756 4.844 4.933 5.022 5.111 5.200