ДОМАШНЯЯ РАБОТА №2
«Численные методы решения нелинейных уравнений»

Выполнил:
студент 3 курса 13 группы кафедры ТП.

Петров Андрей Александрович

Вариант 3.

Задание №1: построить многочлен, удовлетворяющий условию $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, где P(-1) = 7, P(0) = 1, P(2) = −5, P(3) = −17.

Ход работы:

$$\begin{cases} a_0 + 0a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 1 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -5 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = -17 \end{cases}$$

$a_0=1$

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 - a_3 = 6 \\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -6 \\ 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = -18 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & -6 \\ 3 & 9 & 27 & -18 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & -6 \\ 0 & 12 & 24 & 0 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

$$\begin{cases} a_1 = -6 + a_2 - a_3 \\ a_2 = 1 - a_3 \\ a_3 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -3 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

Ответ: $P_3(x) = 1 - 3x + 2x^2 - x^3$

Задание №2: с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа второй степени, построенного по значениям функции f(x) в данных узлах x_0, x_1, x_2, найти ее приближенное значение в указанной точке x и оценить погрешность приближения $f(x) = \ln 2x$, $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}5$, $x_2 = 3$; $x = 2{,}25$;

Ход работы:

$$\begin{cases} f(x_0) = ln4 = 1{,}3863 \\ f(x_1) = ln5 = 1{,}6094 \\ f(x_2) = ln6 = 1{,}7918 \end{cases}$$

1) $\begin{pmatrix} null & x - x_1 & x - x_2 \\ x - x_0 & null & x - x_2 \\ x - x_0 & x - x_1 & null \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} null & -0{,}25 & -0{,}75 \\ 0{,}25 & null & -0{,}75 \\ 0{,}25 & -0{,}25 & null \end{pmatrix}$

$\frac{\omega(x)}{x - x_0} = -0{,}25 * (-0{,}75) = 0{,}1875$

$\frac{\omega(x)}{x - x_1} = 0{,}25 * (-0{,}75) = -0{,}1875$

$\frac{\omega(x)}{x - x_2} = 0{,}25 * (-0{,}25) = -0{,}0625$

2) $\begin{pmatrix} null & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 \\ x_1 - x_0 & null & x_1 - x_2 \\ x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & null \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} null & -0{,}5 & -1 \\ 0{,}5 & null & -0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & null \end{pmatrix}$

$\omega'(x_0) = 0{,}5$

$\omega'(x_1) = -0{,}25$

$\omega'(x_2) = 0{,}5$

3)

$\Lambda_0 = \frac{\omega(x)}{x - x_0} / \omega'(x_0) = 0{,}1875 / 0{,}5 = 0{,}375$

$\Lambda_1 = \frac{\omega(x)}{x - x_1} / \omega'(x_1) = -0{,}1875 / -0{,}25 = 0{,}75$

$\Lambda_2 = \frac{\omega(x)}{x - x_2} / \omega'(x_2) = -0{,}0625 / 0{,}5 = -0{,}125$

Найдем приближенное значение в точке x = 2,25:

$P(2{,}25) = f(x_0) * \Lambda_0 + f(x_1) * \Lambda_1 + f(x_2) * \Lambda_2 = 1{,}3863 * 0{,}375 + 1{,}6094 * 0{,}75 + 1{,}7918 * (-0{,}125) = 1{,}5029375$

А также с помощью Wolfram Alpha:

$P(2{,}25) \approx 1{,}504077$

Реальная погрешность составила $\approx 0{,}0011395$

Найдем теоретическую погрешность:

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$r_n = \frac{\|(x-2)(x-0{,}25)(x-3)\|}{3!} * \left\|\frac{2}{x^3}\right\|$

$r_n \leq \frac{1*0{,}5*1}{6} * \frac{1}{4} \approx 0{,}020833333$

Теоретическая погрешность составила ≈ 0,020833333

Вывод, реальная погрешность меньше теоретической.