ДОМАШНЯЯ РАБОТА №6

«Приближение кривых. Среднеквадратичное приближение функции»»

Выполнил:
студент 3 курса 13 группы кафедры ТП.

Петров Андрей Александрович

Вариант 8-3).

Задание №1: Для точек [0; 0], [8; 0], [8; 1], [4; 2] построить интерполирующий алгебраический многочлен и кубический сплайн;

x	0	8	8	4
y	0	0	1	2
ti	1	2	3	4

Ход работы:

КУБИЧЕСКИЙ СПЛАЙН

Построим **кубический сплайн** для параметрической функции

$$g(t)|_{t\in\Delta_i} = \begin{bmatrix}\alpha_i^1\\ \alpha_i^2\end{bmatrix} + (t-t_i)\begin{bmatrix}\beta_i^1\\ \beta_i^2\end{bmatrix} + \frac{1}{2}(t-t_i)^2\begin{bmatrix}\gamma_i^1\\ \gamma_i^2\end{bmatrix} + \frac{1}{6}(t-t_i)^3\begin{bmatrix}\delta_i^1\\ \delta_i^2\end{bmatrix},$$

Напишем функцию нахождения $S_i(t)$:

```
let splineCubic = function (i, t, alpha, beta, gamma, delta, ti) {
   return alpha[i] +
      beta[i] * (t - ti[i]) +
      (1 / 2) * gamma[i] * Math.pow(t - ti[i], 2) +
      (1 / 6) * delta[i] * Math.pow(t - ti[i], 3);
}
```

$$\text{Доп условие } S_0''(0) = S_n''(0) = 0 \Rightarrow \gamma_0 = \gamma_n = 0$$

$$h_i\gamma_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})\gamma_i + h_{i+1}\gamma_{i+1} = 6\left(\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{h_{i+1}} - \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{h_i}\right)$$

$$c_i\gamma_{i-1} + 2\gamma_i + e_i\gamma_{i+1} = b_i, i = \overline{1, \mathrm{n}-1}$$

$$c_i = \frac{h_i}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$e_i = \frac{h_{i+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$b_i = 6f[x_{i+1}, x_i, x_{i-1}]$$

Найдем значения c_i, e_i и b_i:

```
for (let i = 2; i < n; i++) {
   c.push(h / (ti[i + 1] - ti[i - 2]));
   e.push(h / (ti[i + 1] - ti[i - 2]));
}

for (let i = 1; i <= n - 1; i++) {
   b.push(6 * ((alpha[i + 1] - alpha[i]) / h - (alpha[i] - alpha[i - 1]) / h)
      / (ti[i + 1] - ti[i - 1]));
}
```

Используем метод прогонки (Tridiagonal matrix algorithm) для нахождения значения γ:

```
let tmpGamma = tridiagonalMatrixAlgorithm(1, n - 1, c, e, [2, 2], b);
const gamma = [0, ...tmpGamma, 0];
```

Найдем значения β, δ и $S(x)$ и построим график:

$$\delta_i = \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{h_i}$$

$$\beta_i = \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{h_i} + \frac{2\gamma_i + \gamma_{i-1}}{6} h_i, i = \overline{1, \mathrm{n}}$$

```
for (let i = 1; i <= n; i++) {
   delta[i] = (gamma[i] - gamma[i - 1]) / h;
   beta[i] = (alpha[i] - alpha[i - 1]) / h + h * (2 * gamma[i] + gamma[i - 1])
               / 6;
}
```

Произведем вычисления

$$\begin{cases} x(t_i) = x_i, \\ y(t_i) = y_i, \end{cases} \quad i = \overline{0, n}.$$

Результат нахождения $x(t_i)$:

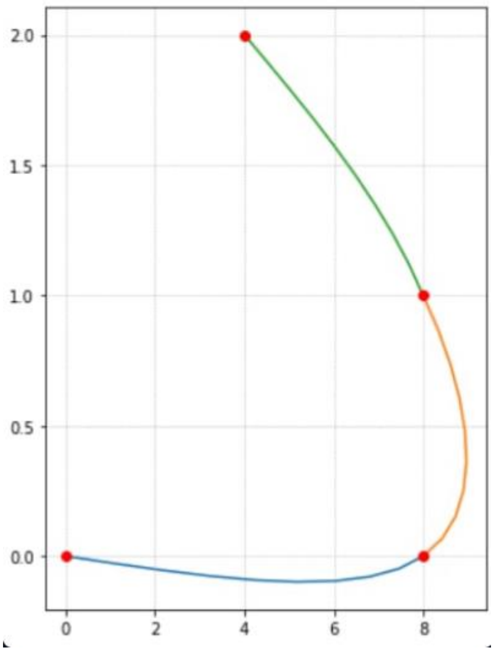
```
alpha:  [ 0, 8, 8, 4 ]
beta:  [ 0, 4.228571428571428, -3.2571428571428576, -4.685714285714286 ]
gamma:  [ 0, -11.314285714285715, -4.114285714285715, 0 ]
delta:  [ 0, -11.314285714285715, 7.2, 4.114285714285715 ]
x(ti) =  [
  4.440892098500626e-16, 1.094735324399999,
      2.173996880914286, 3.222310901657143,
      4.224203618742857, 5.172341295542858,
     6.0342027554857145, 6.803082204800001,
           7.4635058756,                 8,
      8.000000000000002,      8.4266823572,
      8.723808343314285, 8.901224901542857,
      8.968778975085714, 8.935600453485716,
      8.812202812742859, 8.608572228114287,
      8.334555642800002,                 8,
      8.000000000000002,      7.6838203184,
           7.3225753472, 6.921891911085714,
      6.487396834742857, 6.020437679542856,
      5.535022146057144, 5.032726138514286,
      4.519176481600001,                 4
]
```

Результат нахождения $y(t_i)$:

```
alpha:  [ 0, 0, 1, 2 ]
beta:  [ 0, 0.5142857142857143, 1.1714285714285715, 0.9571428571428572 ]
gamma:  [ 0, 1.542857142857143, -0.2571428571428572, 0 ]
delta:  [ 0, 1.542857142857143, -1.8, 0.2571428571428572 ]
y(ti) =  [
                      0, -0.02819118059999992,
    -0.05427230194285712, -0.07613330477142859,
    -0.09166412982857144, -0.09877381302857145,
    -0.09520946665714287, -0.07896575520000002,
           -0.0479326194,                    0,
  -5.551115123125783e-17,  0.06776591070000001,
     0.15207962845714282,  0.25047941747142866,
       0.360503541942857,    0.4807981723428572,
      0.6067349396714283,     0.736888657257143,
      0.8687975892999997,                    1,
      0.9999999999999999,    1.1189887699000003,
            1.2351609592,    1.3488682444428572,
      1.4604623021714287,    1.5712773549714285,
       1.679688884128571,     1.787045383657143,
      1.8936985300999998,                    2
]
```

$$S(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} + (t-2)\begin{bmatrix} 4.23 \\ 0.52 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(t-2)^2 * \begin{bmatrix} -11.31 \\ 1.54 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}(t-2)^3 * \begin{bmatrix} -11.31 \\ 1.54 \end{bmatrix}, & x \in [1,2] \\ \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} + (t-3)\begin{bmatrix} -3.26 \\ 1.17 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(t-3)^2 * \begin{bmatrix} -4.11 \\ -0.25 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}(t-3)^3 * \begin{bmatrix} 7.2 \\ -1.8 \end{bmatrix}, & x \in [2,3] \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + (t-4)\begin{bmatrix} -4.68 \\ 0.96 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(t-4)^2 * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}(t-4)^3 * \begin{bmatrix} 4.11 \\ 0.26 \end{bmatrix}, & x \in [3,4] \end{cases}$$

График:



ИНТЕРПОЛИРУЮЩИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН

Построим интерполирующий алгебраический многочлен

$$g(t) = \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i(t) p_i = \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i(t) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, \qquad \Lambda_i(t) = \prod_{i \neq j} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Реализуем функцию g(t):

```
function funcG(points, hop, t){
  let sum = 0;
  points.forEach((point, i) => {
    let lambda = 1;
    t.forEach((item, j) => {
      if(i !== j) {
        lambda *= (hop - t[j]) / (t[i] - t[j]);
      }
    });
    sum += lambda * point;
  })
  return sum;
}
```

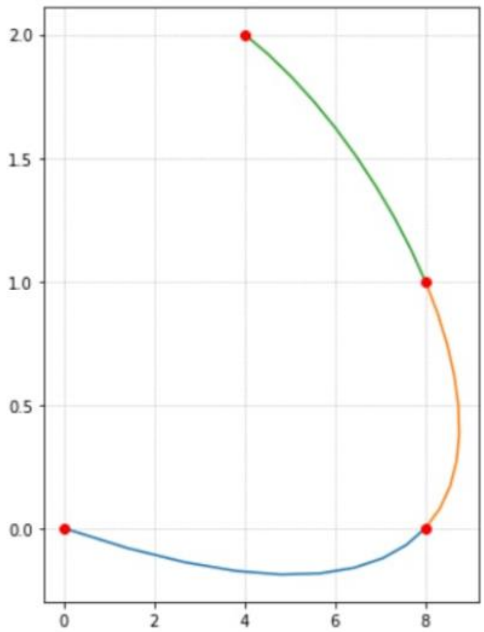
Произведем расчеты:

```
## Interpolating  Polynomial ##
x:  [
                  0, 1.4069857539999997,
  2.6715900319999992,  3.799283357999999,
   4.795536255999999, 5.6731037440000005,
         6.421826642, 7.0555699679999995,
   7.579804245999999,                  8,
                   8,  8.321627754000001,
   8.550158031999999,  8.691061357999999,
         8.749808256,        8.731375744,
   8.641604641999999,        8.486137968,
         8.270446246,                  8,
                   8,  7.680269753999999,
         7.316726032,        6.914839358,
         6.480080256,        6.013647744,
   5.529382642000001,  5.028705967999999,
   4.517088246000002,                  4
]
```

```
y:  [
                      0,        -0.0804069385,
  -0.13753950799999998, -0.17276533949999995,
           -0.187452064, -0.18284393599999998,
  -0.16040116049999997, -0.12153449199999998,
  -0.06761156149999997,                    0,
                      0,  0.07993256150000015,
            0.170818492,  0.27129016050000015,
   0.37997993599999996,   0.4965880640000001,
    0.6176543394999997,          0.742823508,
    0.8707279384999997,                    1,
                      1,   1.1292720615000003,
            1.257176492,   1.3823456605000002,
            1.503411936,          1.620020064,
    1.7287098394999998,          1.829181508,
           1.9200674385,                    2
]
```

$$g(t) = \frac{(t-2)(t-3)(t-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \frac{(t-1)(t-3)(t-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}\begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix} + \frac{(t-1)(t-2)(t-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix} + \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \frac{(t-1)(t-3)(t-4)}{2}\begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix} - \frac{(t-1)(t-2)(t-4)}{2}\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix} + \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{6}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

График:



Задание №2:

$$y = \ln\frac{1}{x} + x, \quad x \in [1; 2]$$

Построить среднеквадратичное приближение параболой к выбранной функции. Выбрать 5 равномерно расположенных на отрезке узлов. Построить среднеквадратичное приближение параболой по выбранным узлам.

Ход работы:

Построим среднеквадратичное приближение параболой к выбранной функции.

$$\varphi(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad p(x) = 1;$$
$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x,\ \varphi_2(x) = x^2$$

Построим матрицу Грамма:

$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_1^2 1 * 1dx = 1$

$(\varphi_0, \varphi_1) = \int_1^2 1 * xdx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$(\varphi_0, \varphi_2) = \int_1^2 1 * x^2dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_1^2 x * xdx = \frac{3}{2}$

$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_1^2 x * x^2dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$(\varphi_2, \varphi_2) = \int_1^2 x^2 * x^2dx = \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 = 3$

$(\varphi_o,\ f) = \int_1^2 (\ln\frac{1}{x} + x)dx = \frac{5}{2} - \ln 4 \ \approx 1.1137$

$(\varphi_1,\ f) = \int_1^2 x * (\ln\frac{1}{x} + x)dx = \frac{37}{12} - \ln 4 \ \approx 1.6970$

$(\varphi_2,\ f) = \int_1^2 x^2 * (\ln\frac{1}{x} + x)dx = \frac{163}{36} - \frac{8\ln 8}{9} \ \approx 2.6794$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} \\ \frac{7}{3} & \frac{7}{4} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1137 \\ 1.6970 \\ 2.6794 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.18016 \\ -0.0623887 \\ 0.0116237 \end{bmatrix}$$

Среднеквадратичное приближение:

$\varphi(x) = 0.0116237x^2 - 0.0623887x + 1.18016$

Выберем 5 равномерно расположенных на отрезке узлов и построим среднеквадратичное приближение параболой по выбранным узлам.

Nodes: [1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0]

φ(x) \ x	**1**	**1.25**	**1.5**	**1.75**	**2.0**	**sum**
$\varphi_0(x)$	1	1	1	1	1	5
$\varphi_1(x)$	1	1.25	1.5	1.75	2	7.5
$\varphi_2(x)$	1	1.5625	2.25	3.0625	4	11.875
$\varphi_3(x)$	1	1.953125	3.375	5.359375	8	19.6875
$\varphi_4(x)$	1	2.44140625	5.0625	9.37890625	16	33.8828125

$$\left(x^m, x^k\right) = \sum_{i=0}^{n} \rho(x_i) x_i^{m+k}, \left(f, x^m\right) = \sum_{i=0}^{n} \rho(x_i) f(x_i) x_i^m$$

$(\varphi_0, \varphi_0) = 5;$
$(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = 7.5;$
$(\varphi_0, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_0) = (\varphi_1, \varphi_1) = 11.875;$
$(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1) = 19.6875;$
$(\varphi_2, \varphi_2) = 33.8828125;$

$(\varphi_0, f) = 5.6186;$
$(\varphi_1, f) = 8.6222;$
$(\varphi_2, f) = 13.9401;$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7.5 & 11.875 \\ 7.5 & 11.875 & 19.6875 \\ 11.875 & 19.6875 & 33.8828125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.6186 \\ 8.6222 \\ 13.9401 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.16351 \\ -0.403634 \\ 0.238171 \end{bmatrix}$$

Среднеквадратичное приближение на 5 узлах:
$\varphi(x) = 0.238171x^2 - 0.403634x + 1.16351$