

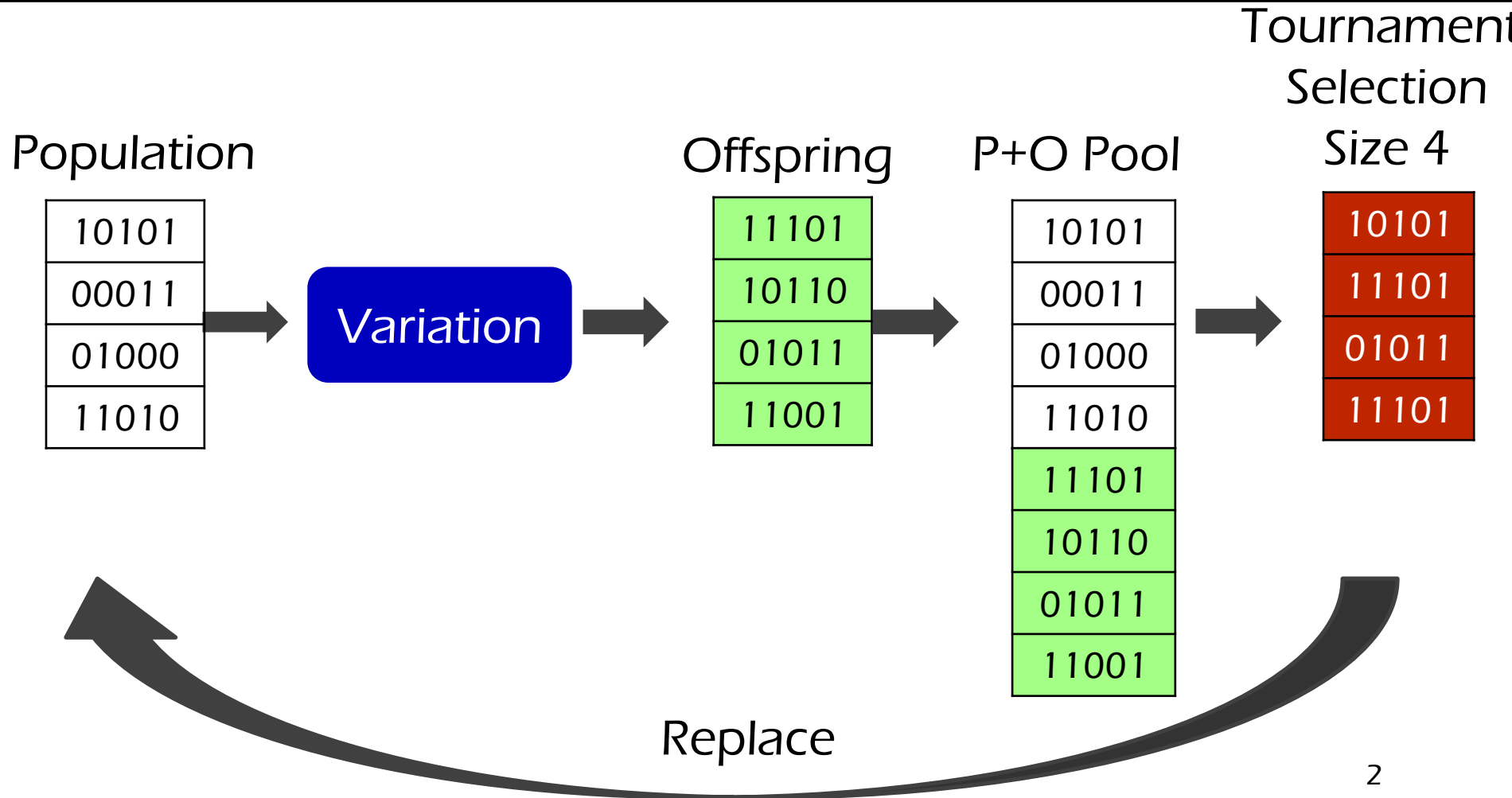


UIT

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

MULTI-OBJECTIVE EVOLUTIONARY ALGORITHMS

Genetic Algorithm (POPOP)



Multi-Objective Optimization

- Multi-Objective Optimization: Tối ưu hoá đa mục tiêu.
- Trong thực tế, ta hay gặp các vấn đề đòi hỏi nhiều (≥ 2) mục tiêu cần được tối ưu hoá cùng lúc.
- Các mục tiêu này thường đối lập nhau (conflicting).
- Ví dụ: ?



Multi-Objective Optimization

- Giải pháp lý tưởng (ideal/utopian solution): là giải pháp tối ưu cho tất cả các mục tiêu liên quan.
- Khi các mục tiêu đối lập nhau, giải pháp lý tưởng **KHÔNG** tồn tại.

Multi-Objective Optimization

- Giải pháp lý tưởng (ideal/utopian solution): là giải pháp tối ưu cho tất cả các mục tiêu liên quan.
 - Khi các mục tiêu đối lập nhau, giải pháp lý tưởng **KHÔNG** tồn tại.
- Tồn tại các giải pháp trade-off tối ưu giữa các mục tiêu.

Trade-off

“Sự đánh đổi mục tiêu này để đạt được mục tiêu khác.”

(wiktionary.org)

Multi-Objective Optimization

Không mất tính tổng quát, giả sử ta cần tối thiểu hoá (minimize) cùng lúc m hàm mục tiêu.

- Pareto dominance (Thống trị Pareto):

x^1 được gọi là thống trị Pareto x^2 (kí hiệu $x^1 > x^2$) nếu và chỉ nếu

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}: f_i(x^1) \leq f_i(x^2)) \wedge$$
$$(\exists i \in \{1, 2, \dots, m\}: f_i(x^1) < f_i(x^2))$$

- Pareto optimal (Tối ưu Pareto):

x^1 được gọi là tối ưu Pareto nếu và chỉ nếu

$$\neg \exists x^2: x^2 > x^1$$

Multi-Objective Optimization

- Pareto set (Tập Pareto):

Tập P_S tất cả các giải pháp/phương án Tối ưu Pareto.

$$P_S = \{x^1 \mid \neg \exists x^2: x^2 \succ x^1\}$$

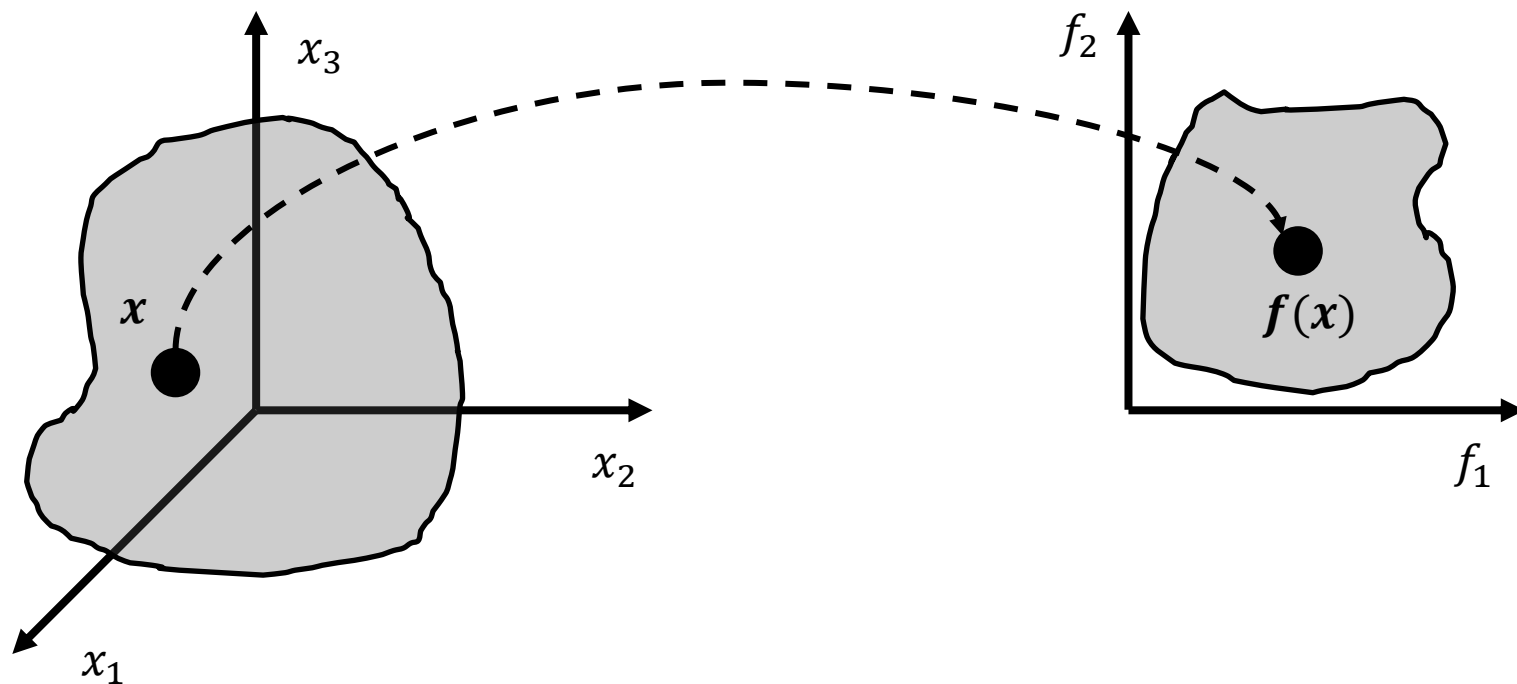
- Pareto front (Biên Pareto):

Tập P_F mọi vector giá trị các hàm mục tiêu của các giải pháp trong P_S .

$$P_F = \{f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \mid x \in P_S\}$$



Multi-Objective Optimization

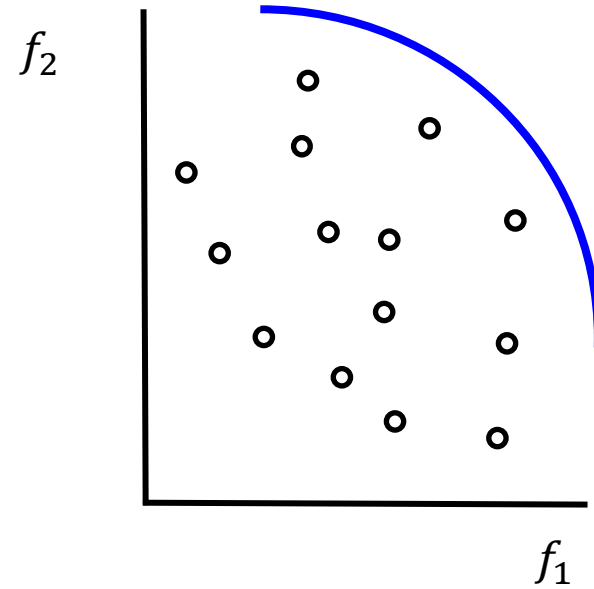
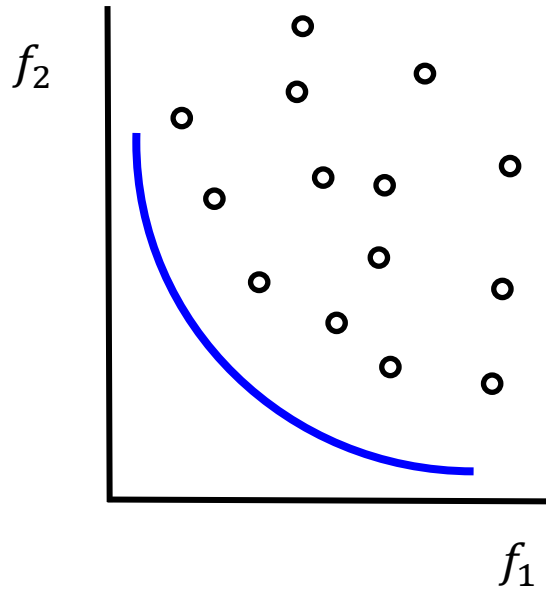


Không gian quyết định (Decision space)
Không gian tham số (Parameter space)
Không gian tìm kiếm (Search space)

Không gian mục tiêu (Objective space)

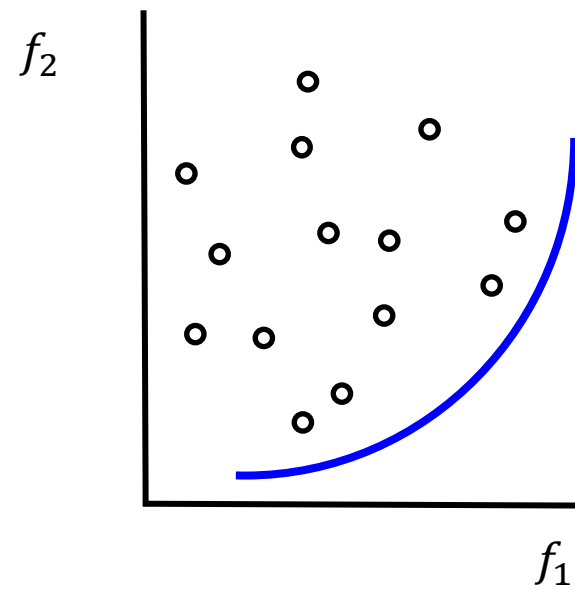
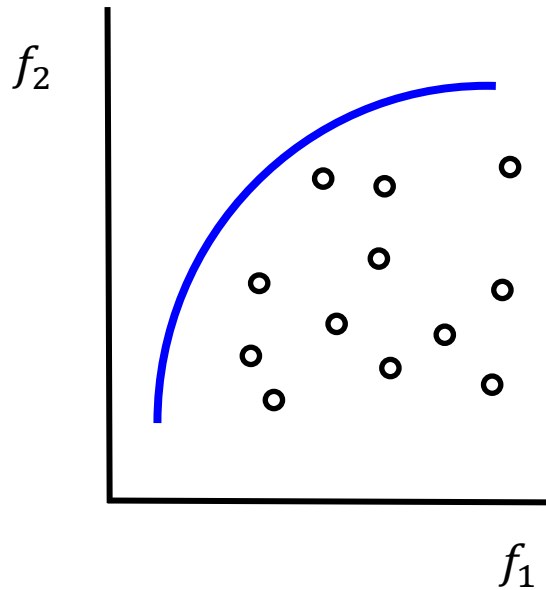
Pareto Front

- Một số ví dụ về biên Pareto.



Pareto Front

- Một số ví dụ về biên Pareto.

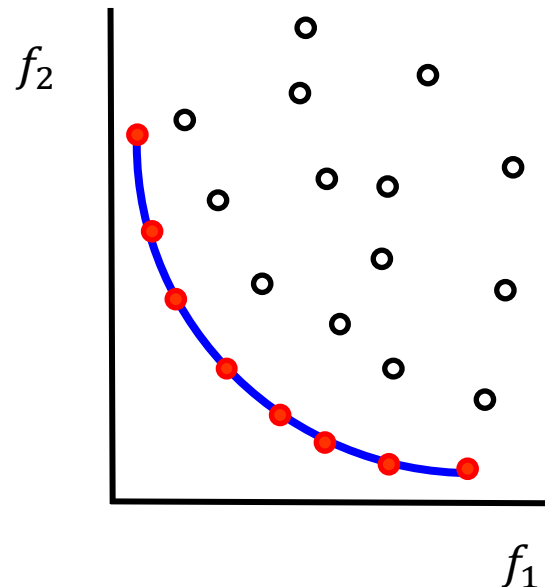


Multi-Objective Optimization

- Kết quả mong đợi khi giải bài toán Tối ưu hoá đa mục tiêu?

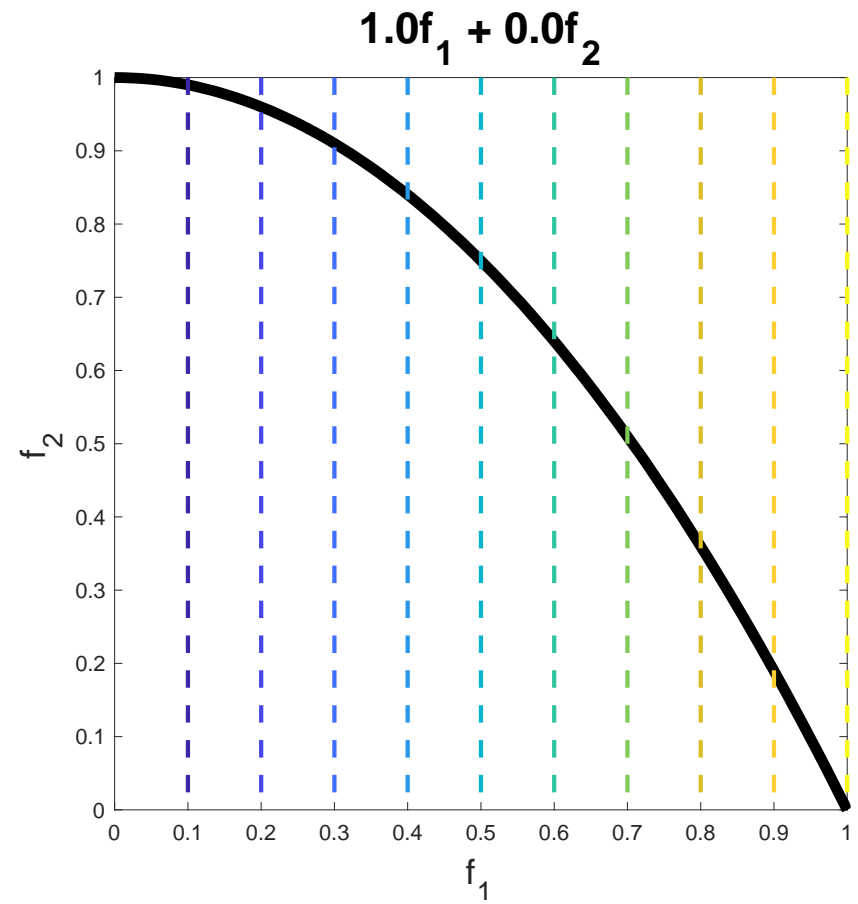
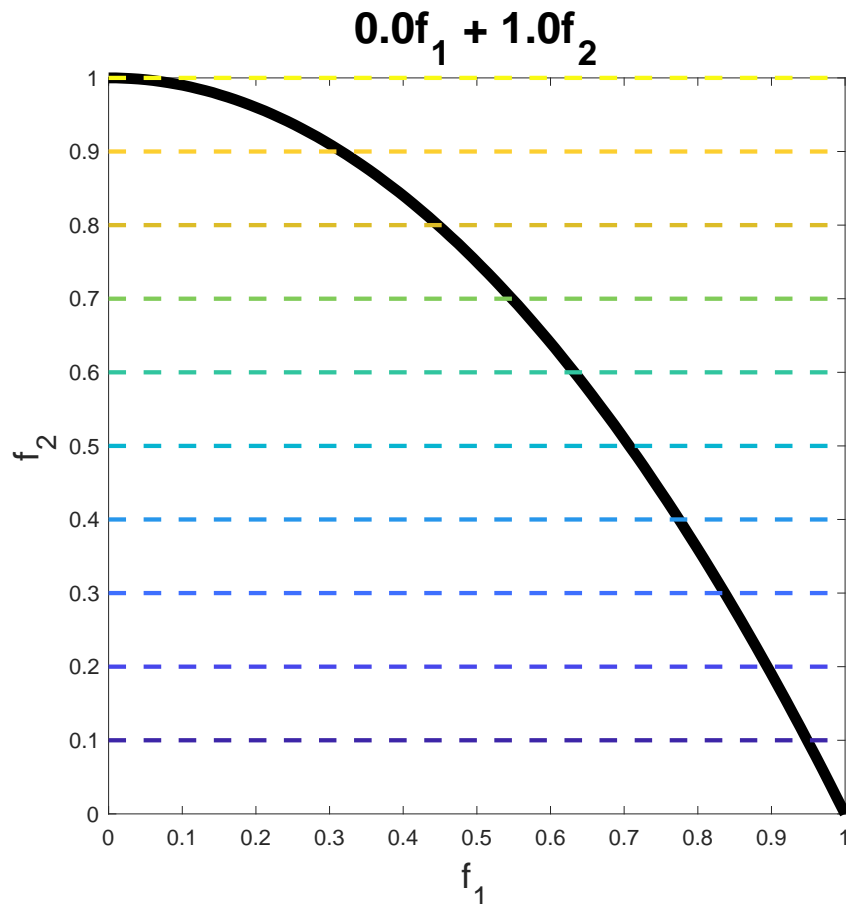
Multi-Objective Optimization

- Kết quả mong đợi khi giải bài toán Tối ưu hoá đa mục tiêu?
→ Tìm một tập xấp xỉ (approximation set) có biên xấp xỉ (approximation front) gần đúng với biên Pareto thực (true Pareto front).

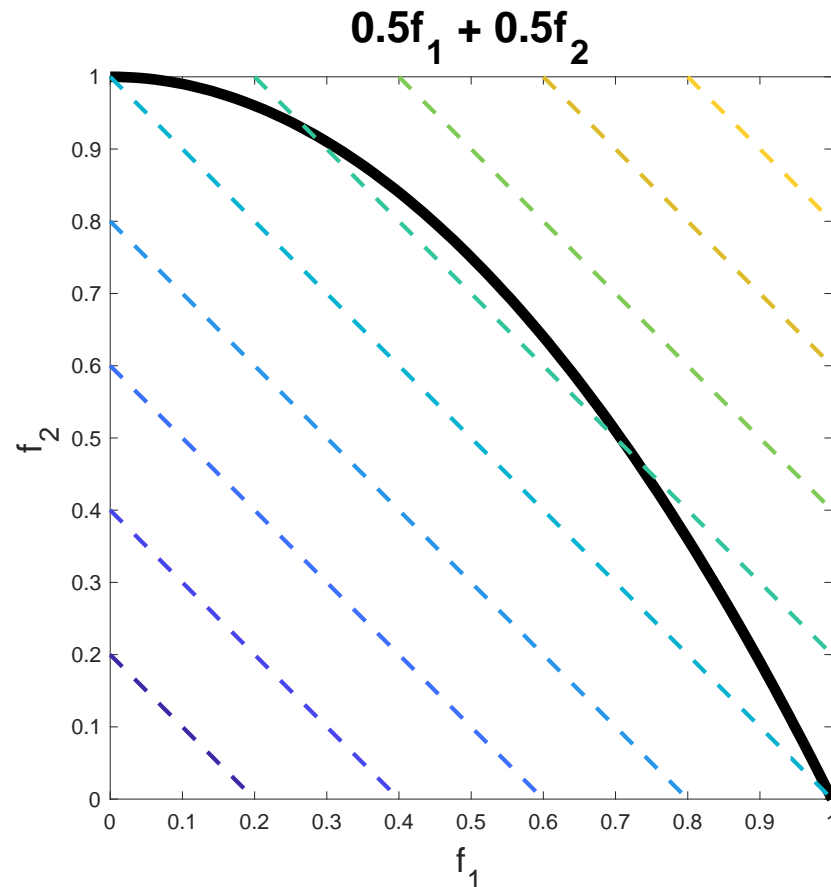




Weighted-Sum Approach

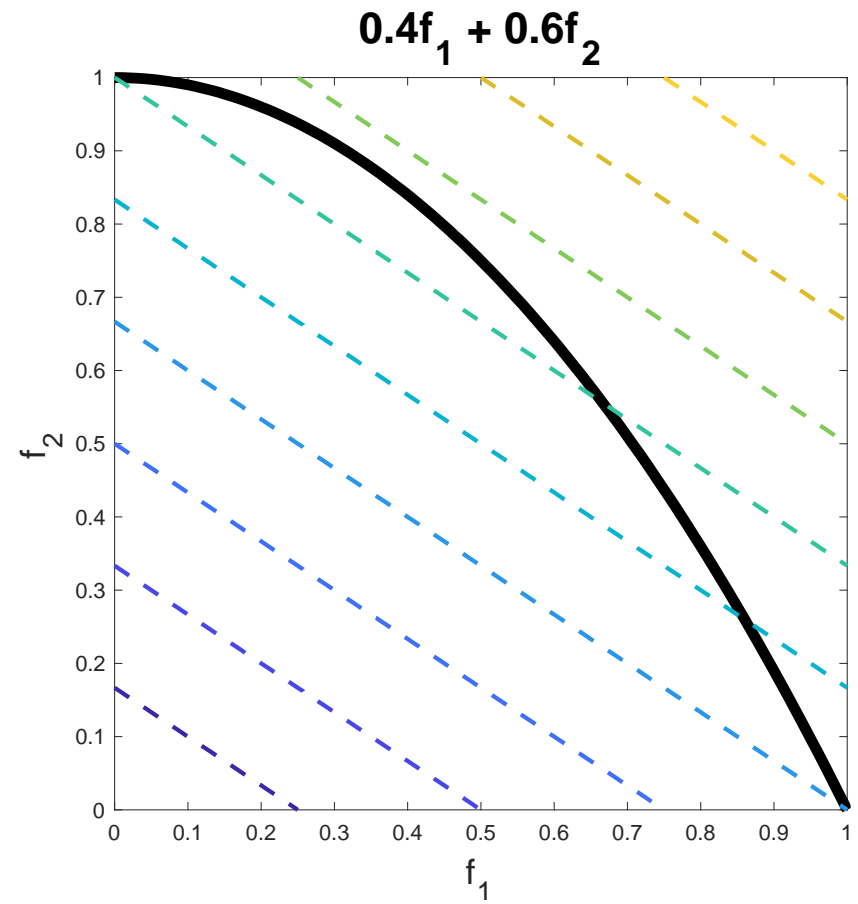
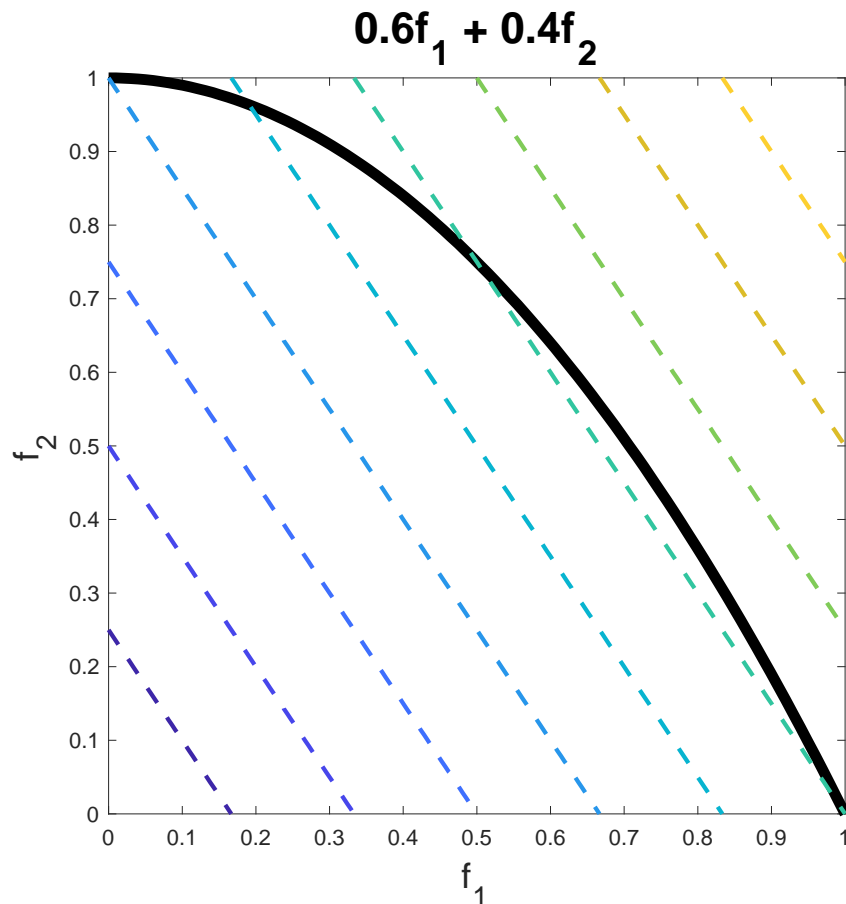


Weighted-Sum Approach





Weighted-Sum Approach

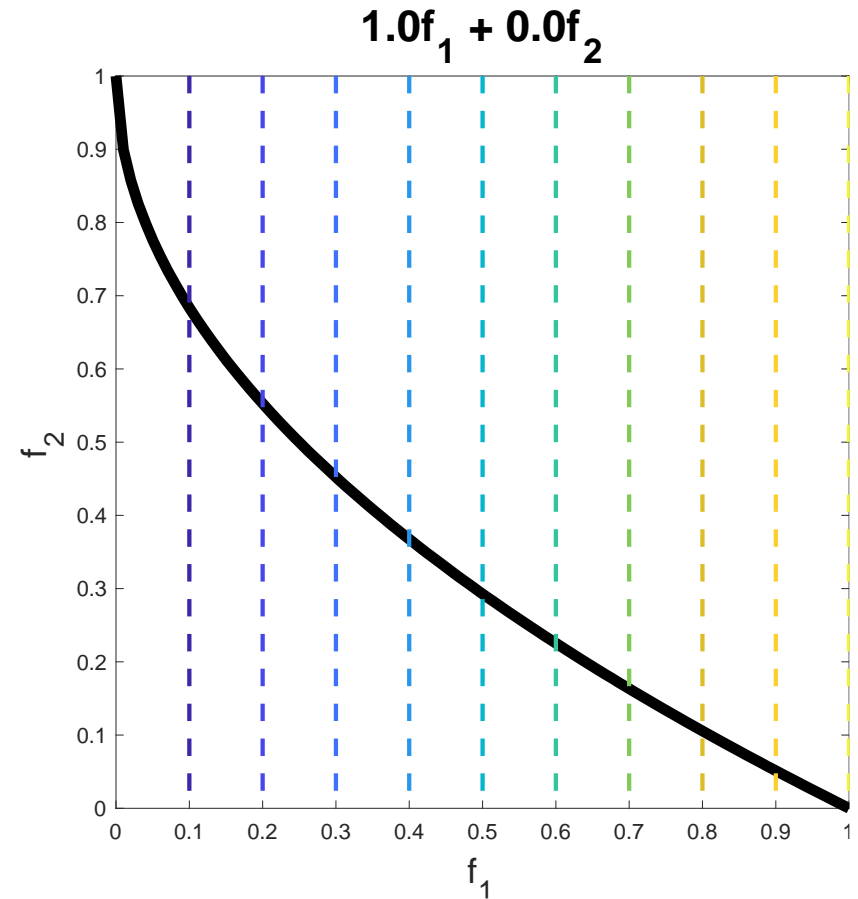
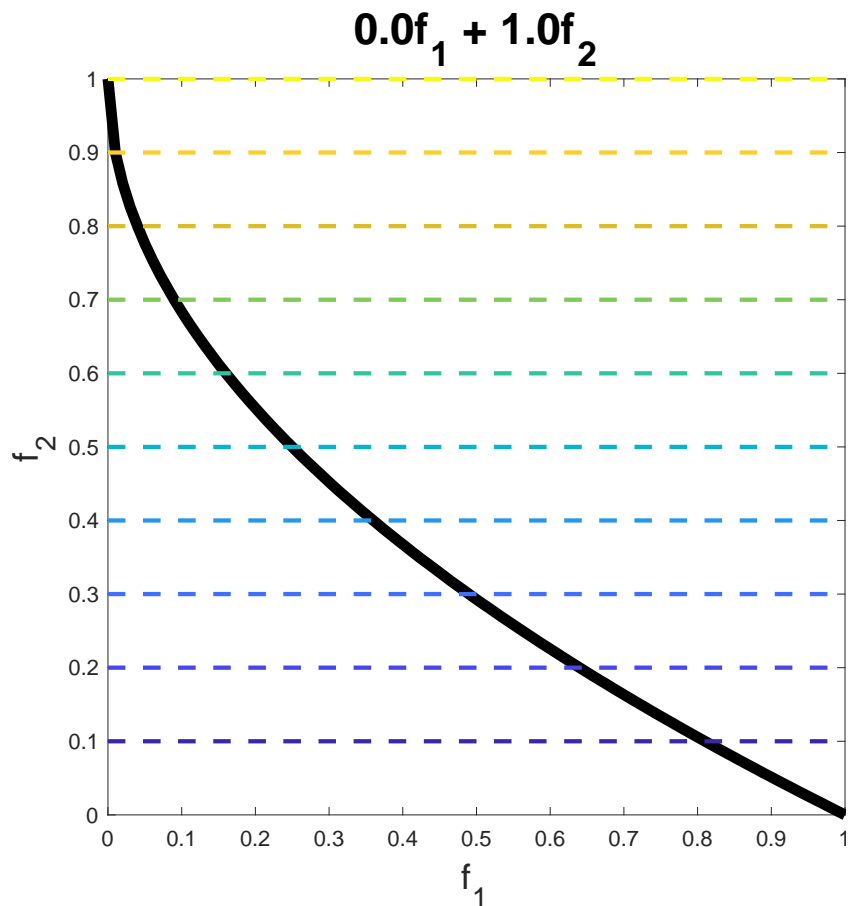


Weighted-Sum Approach

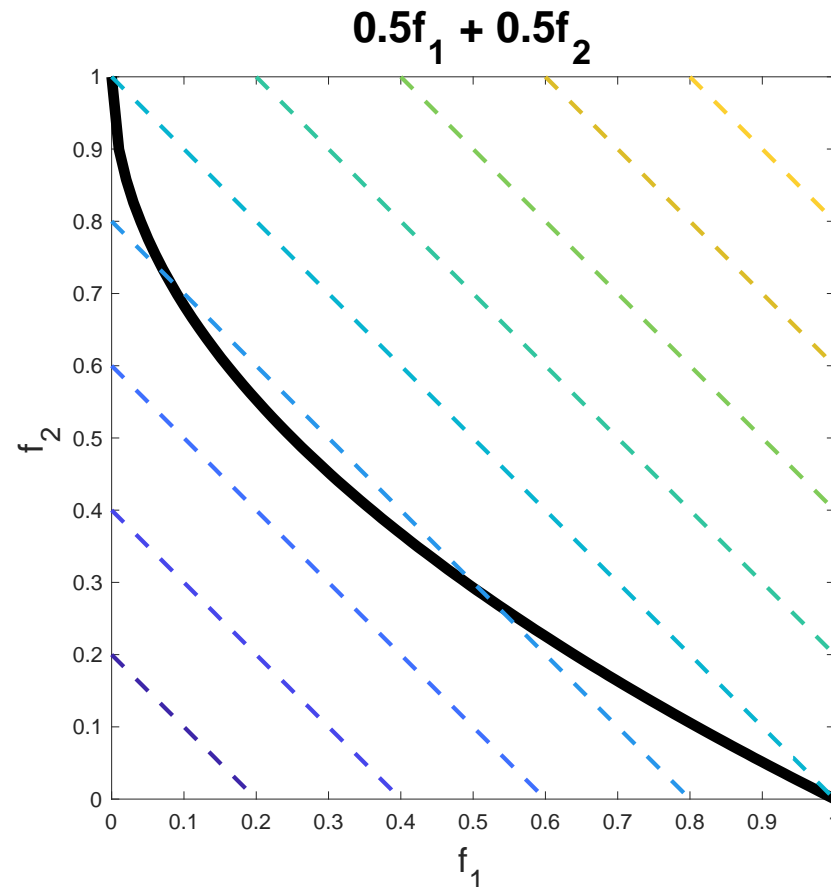
- Nếu biên Pareto là non-convex?



Weighted-Sum Approach

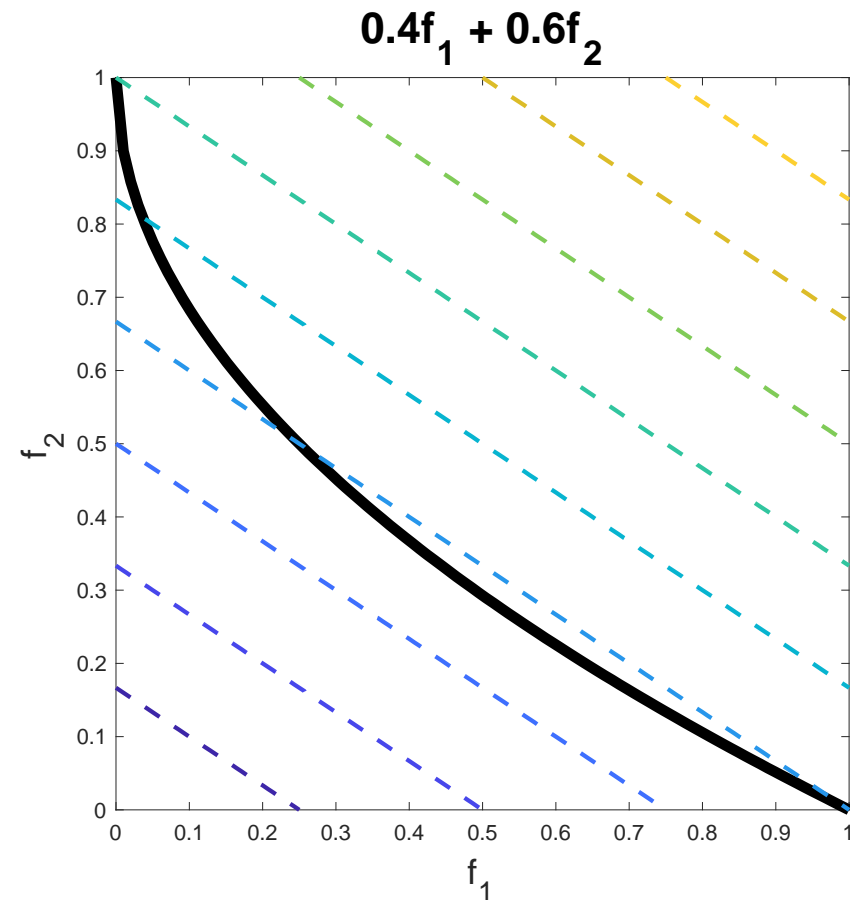
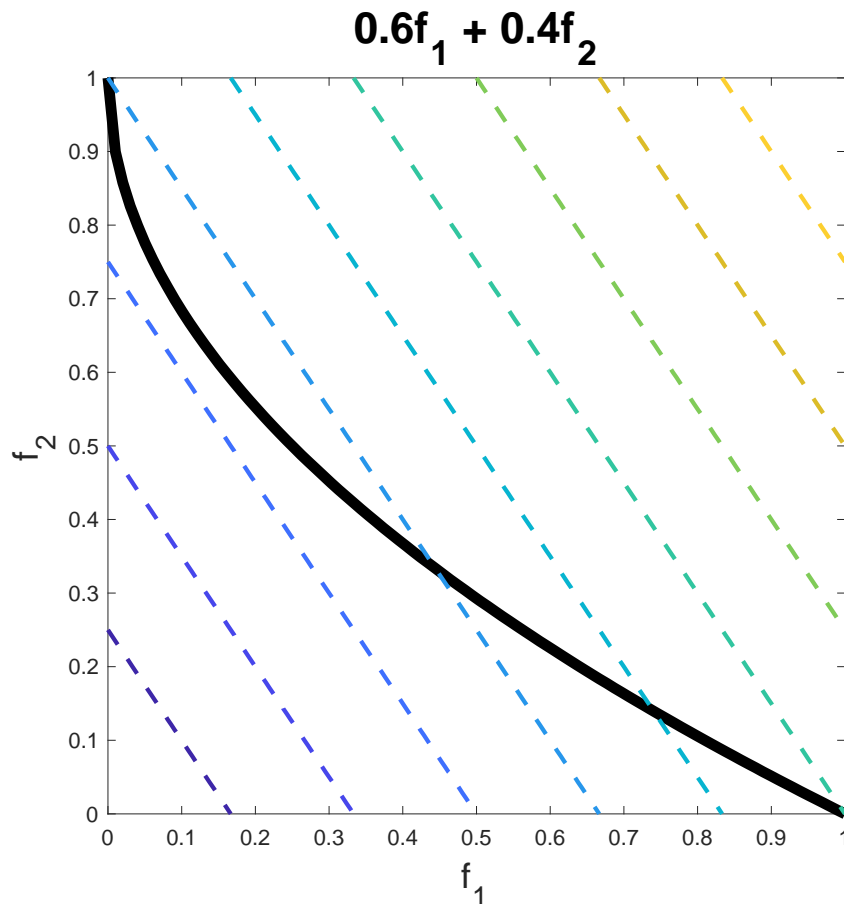


Weighted-Sum Approach



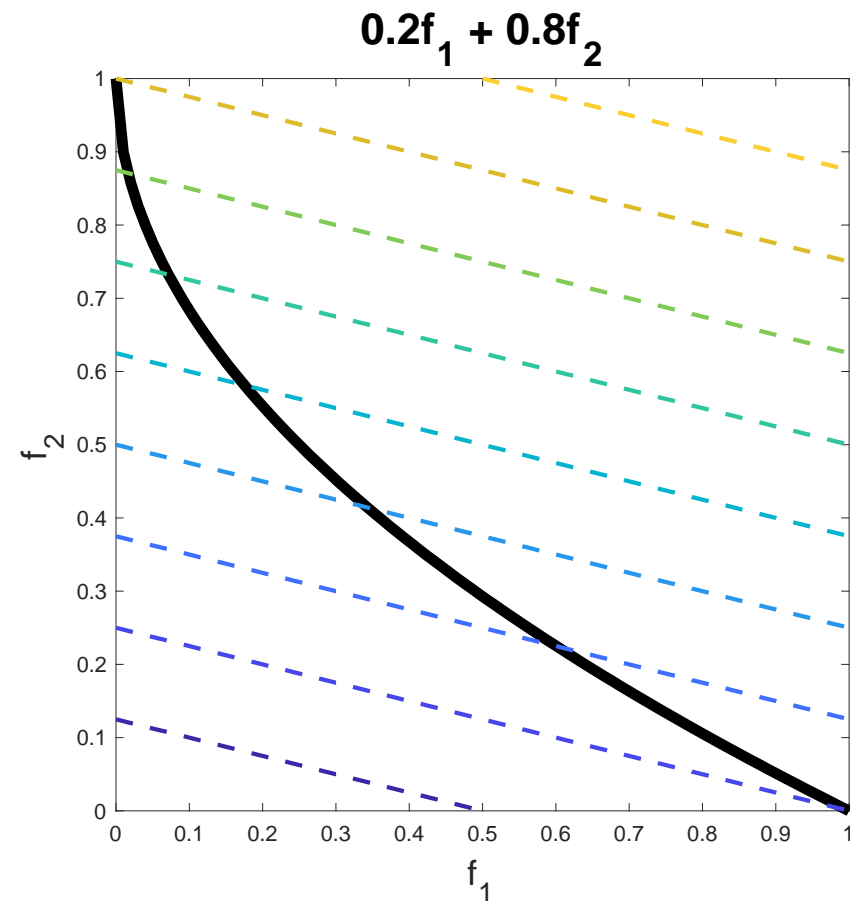
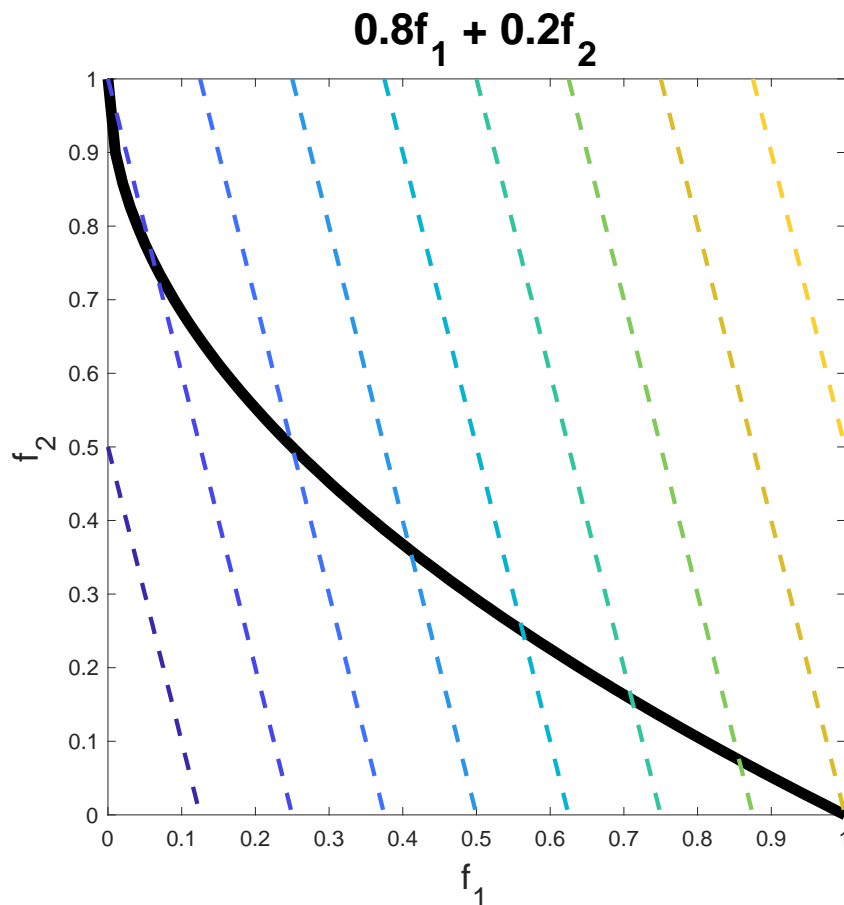


Weighted-Sum Approach





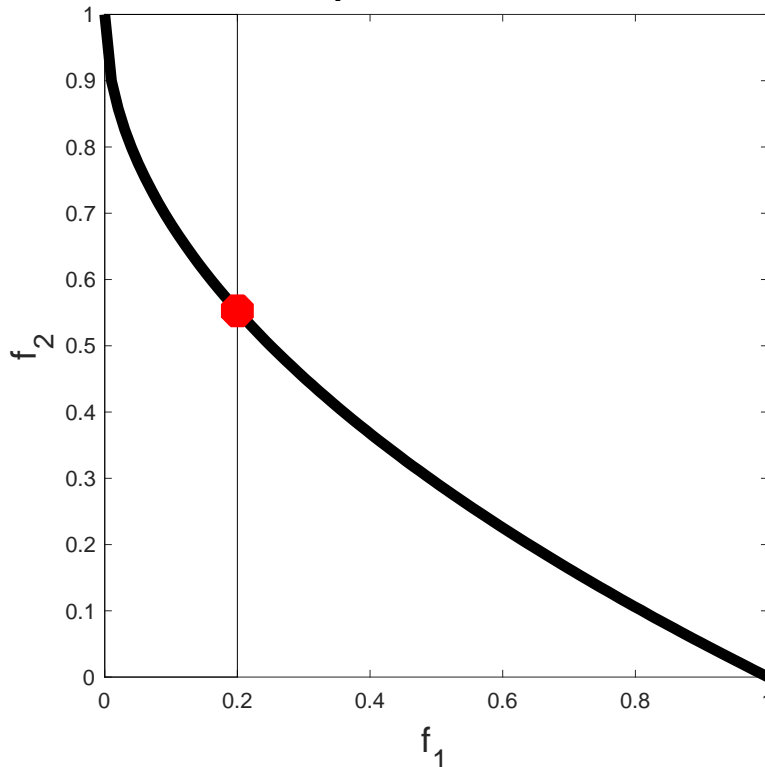
Weighted-Sum Approach



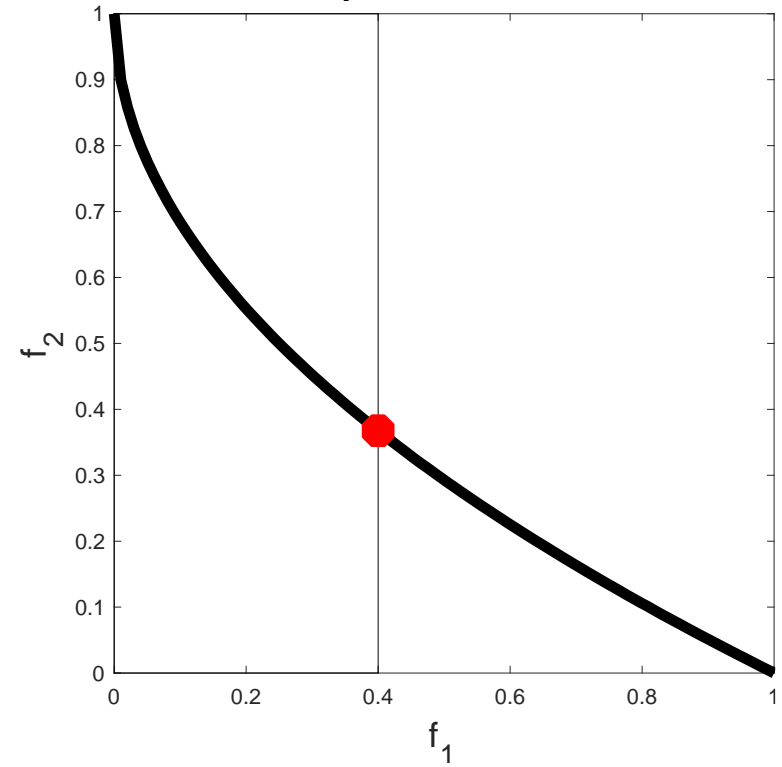


ϵ -Constraint Approach

maximize f_2
 $f_1 \geq \epsilon = 0.2$



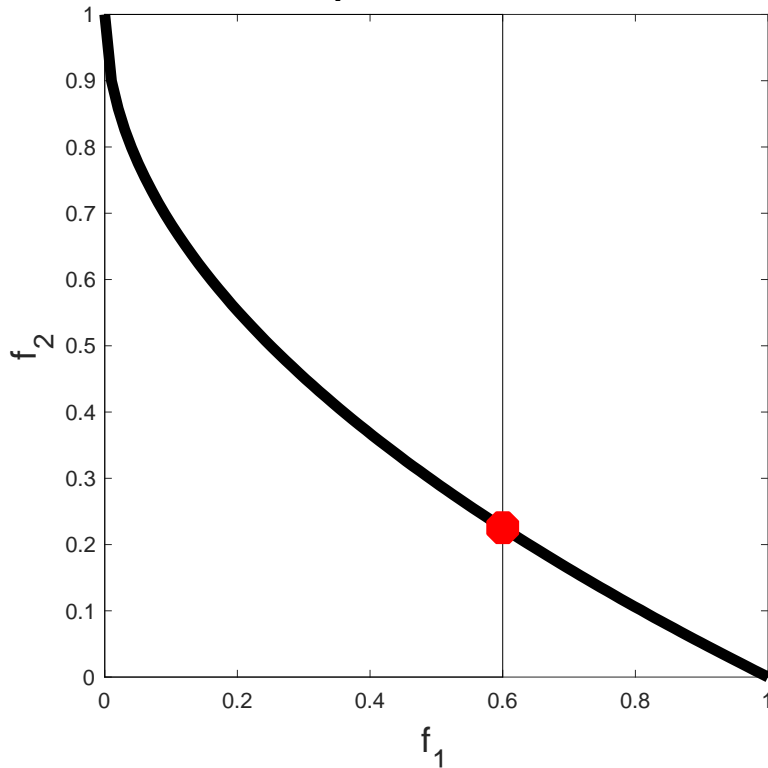
maximize f_2
 $f_1 \geq \epsilon = 0.4$



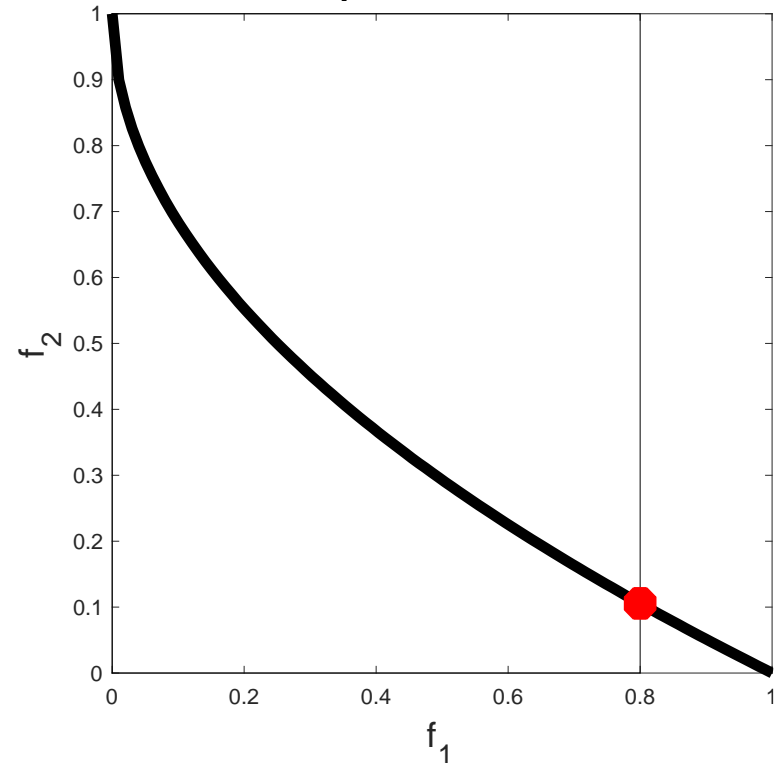


ϵ -Constraint Approach

maximize f_2
 $f_1 \geq \epsilon = 0.6$

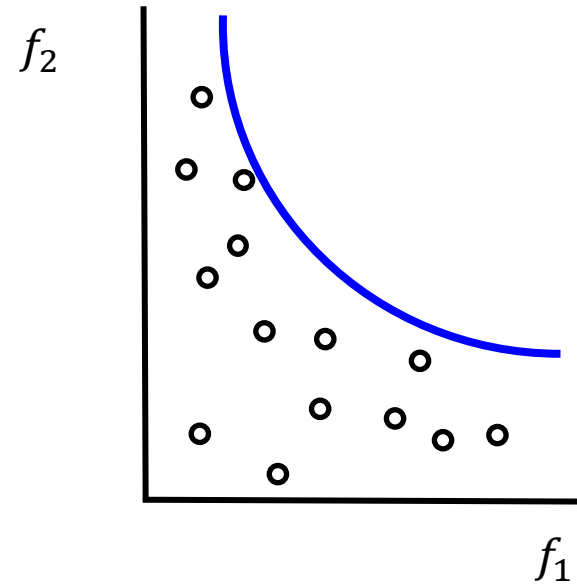
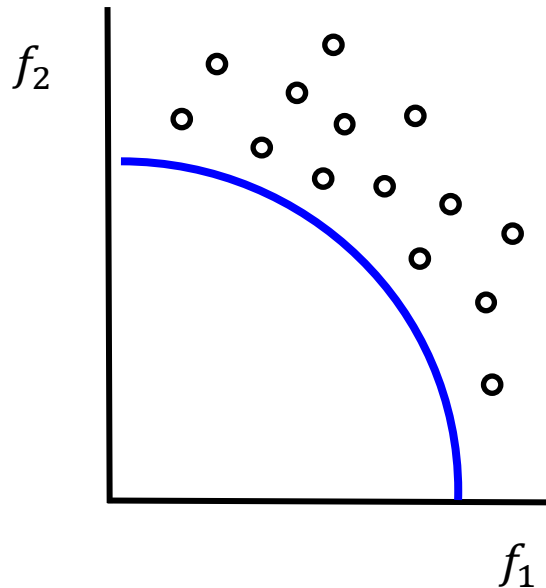


maximize f_2
 $f_1 \geq \epsilon = 0.8$



Pareto Front

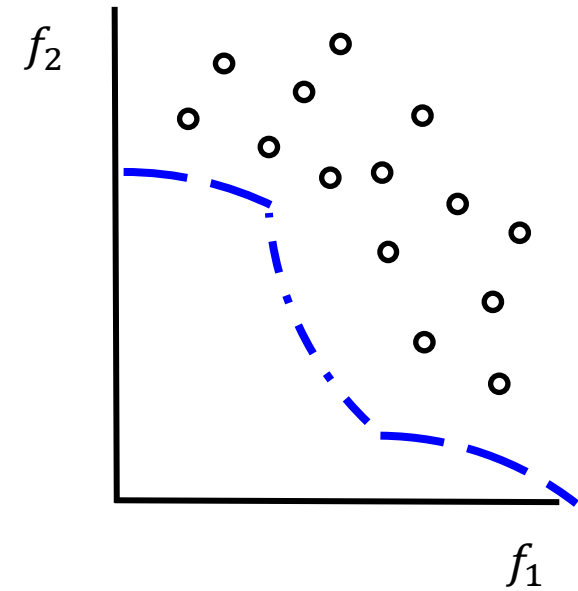
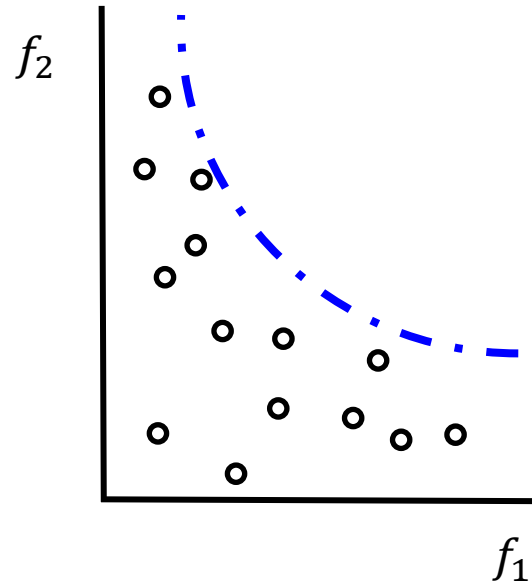
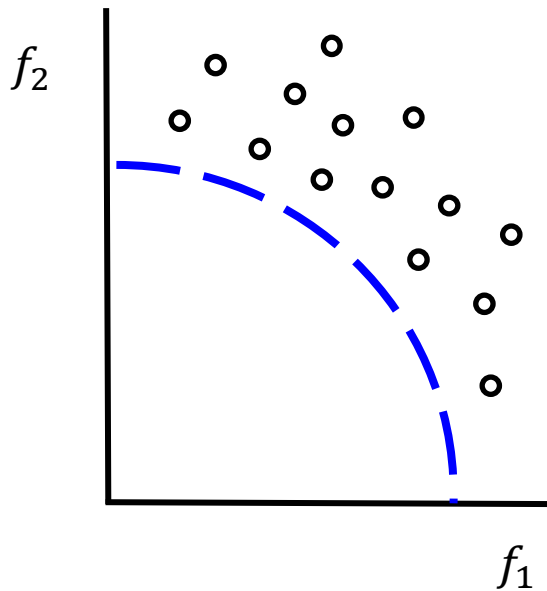
- Lưu ý: Biên Pareto có thể convex, non-convex, hoặc kết hợp nhiều vùng có hình dáng khác nhau.





Pareto Front

- Lưu ý: Biên Pareto có thể convex, non-convex, hoặc kết hợp nhiều vùng có hình dáng khác nhau.



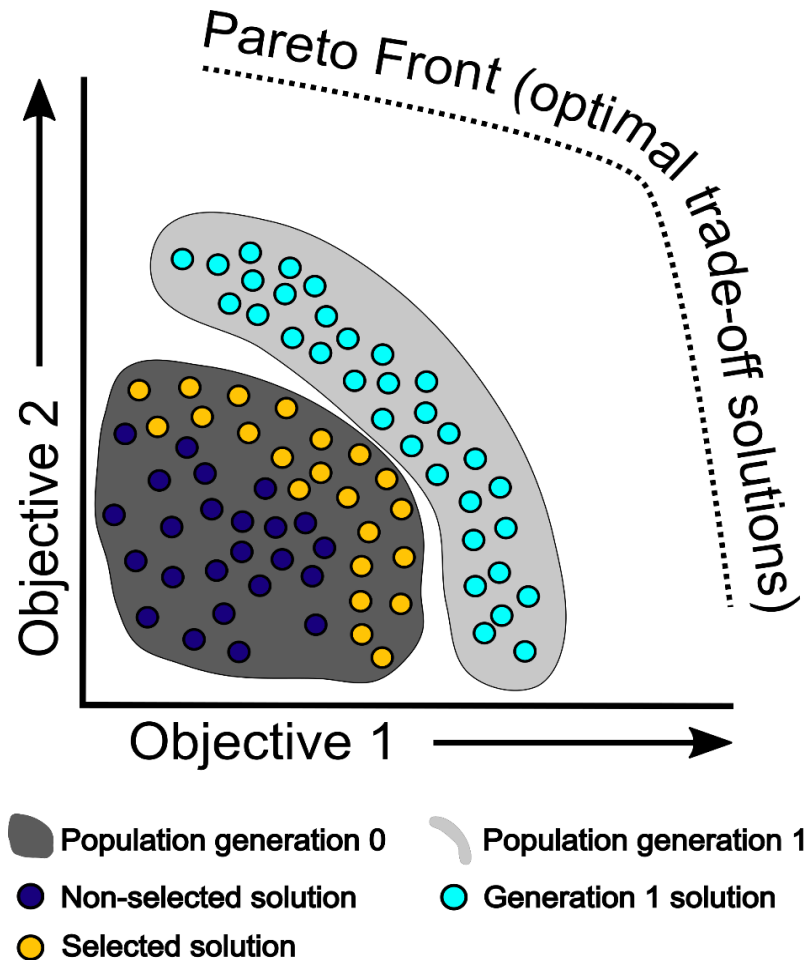


Multi-Objective Evolutionary Algorithms

- Sử dụng các thuật toán đa mục tiêu có ưu điểm gì so với các phương pháp đơn mục tiêu như Weighted Sum hoặc ϵ -Constraint?



Multi-Objective Evolutionary Algorithms



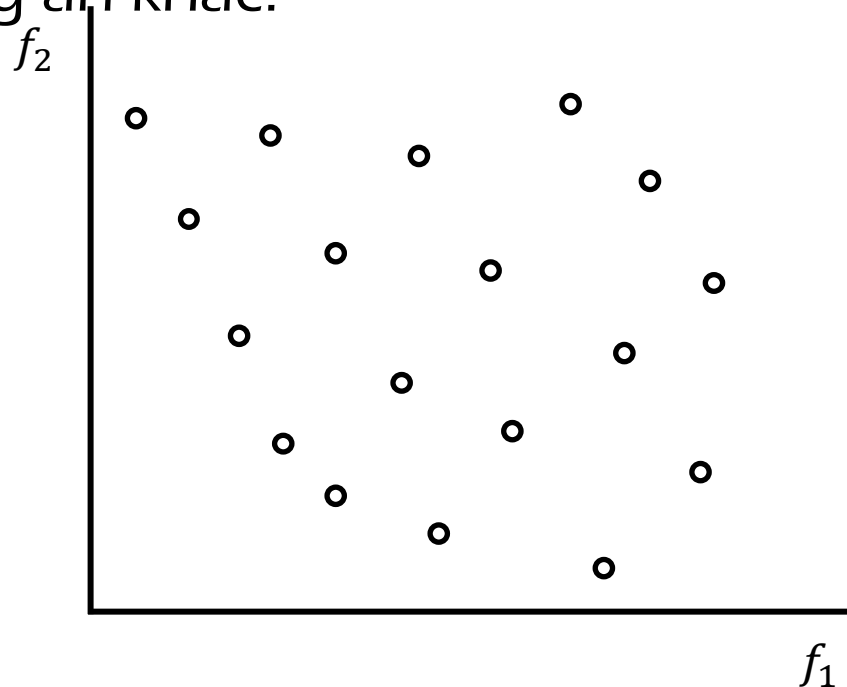


Selection in Multi-Objective Evolutionary Algorithms

- Phép chọn lọc cần được cài đặt thế nào khi giải bài toán tối ưu đa mục tiêu?
- Làm thế nào để so sánh 2 phương án bất kì?

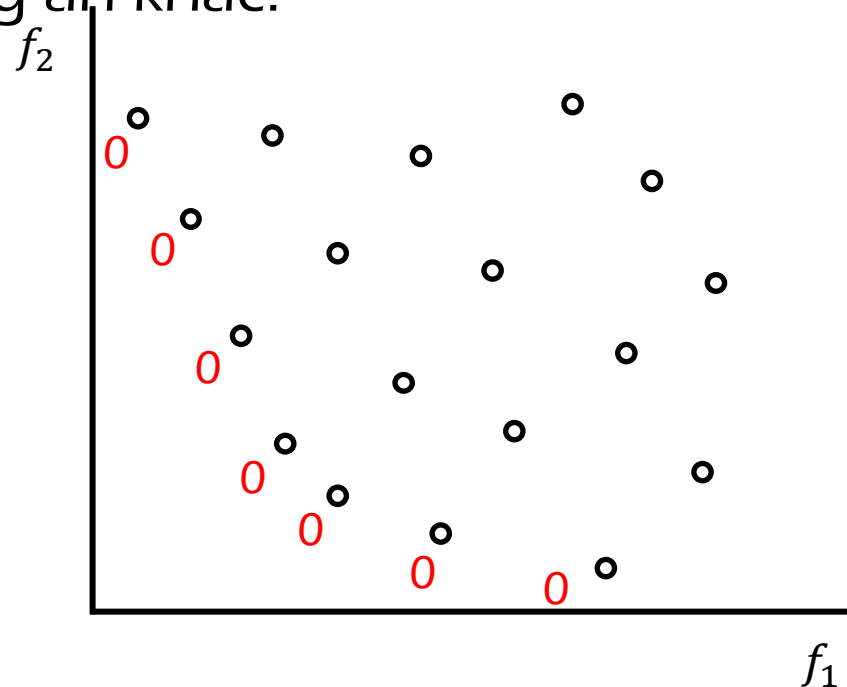
Domination Count

- Domination count: Với mỗi phương án (solution), đếm số lần phương án đó bị thống trị (dominated) bởi phương án khác.



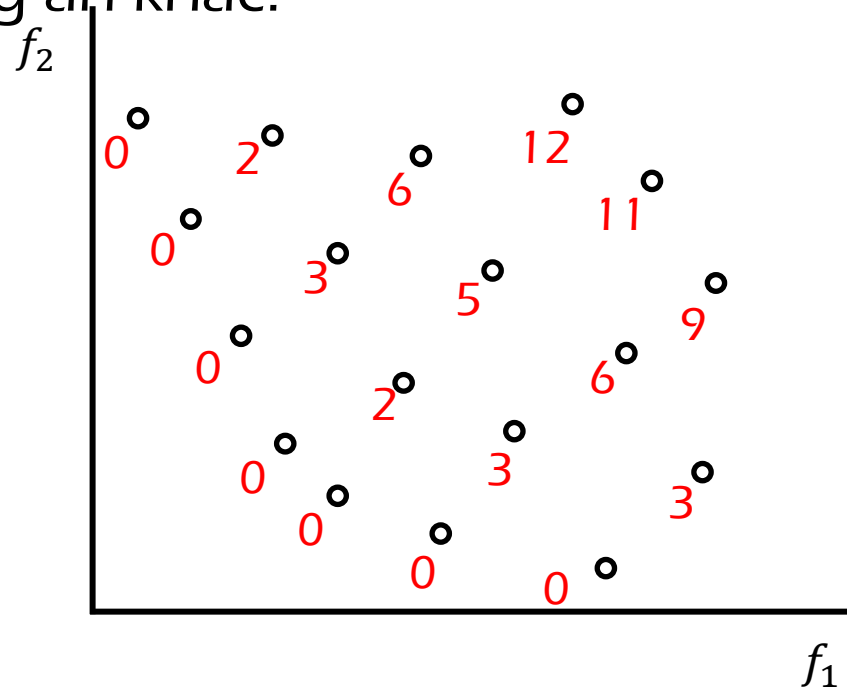
Domination Count

- Domination count: Với mỗi phương án (solution), đếm số lần phương án đó bị thống trị (dominated) bởi phương án khác.



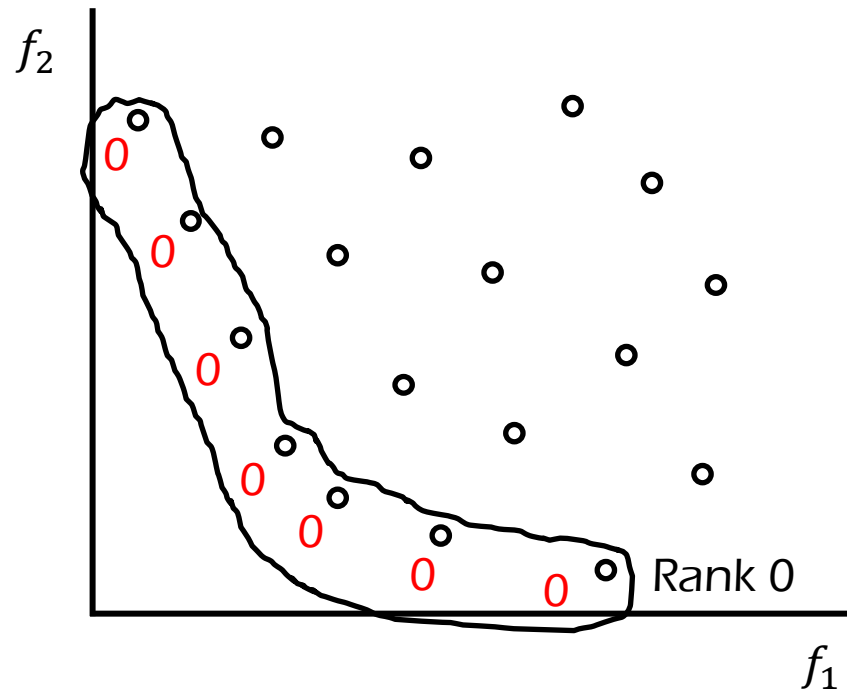
Domination Count

- Domination count: Với mỗi phương án (solution), đếm số lần phương án đó bị thống trị (dominated) bởi phương án khác.



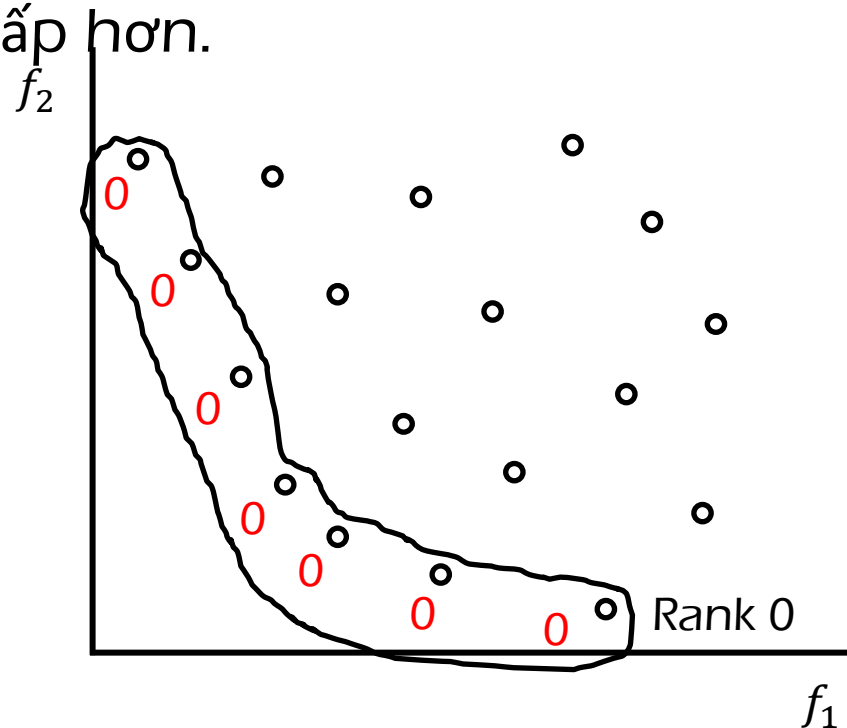
Nondomination Rank

- Nondomination rank 0: là tập các phương án có domination count là 0 \rightarrow Nondomination **front**.



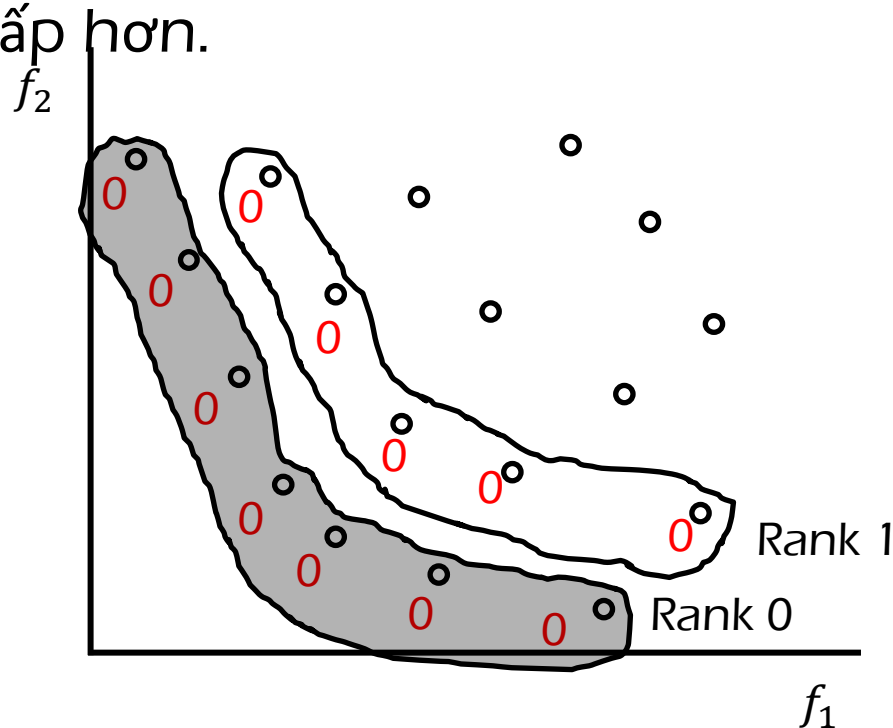
Nondomination Rank

- Nondomination rank i ($i > 0$): là tập các phương án sẽ có domination count 0 khi loại bỏ các phương án ở các rank thấp hơn.



Nondomination Rank

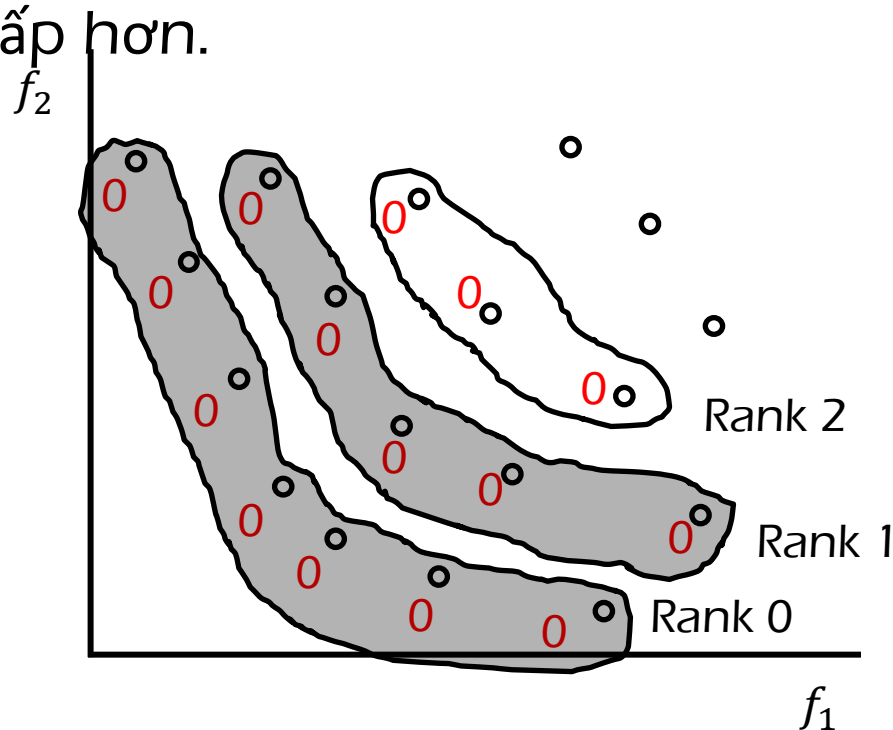
- Nondomination rank i ($i > 0$): là tập các phương án sẽ có domination count 0 khi loại bỏ các phương án ở các rank thấp hơn.





Nondomination Rank

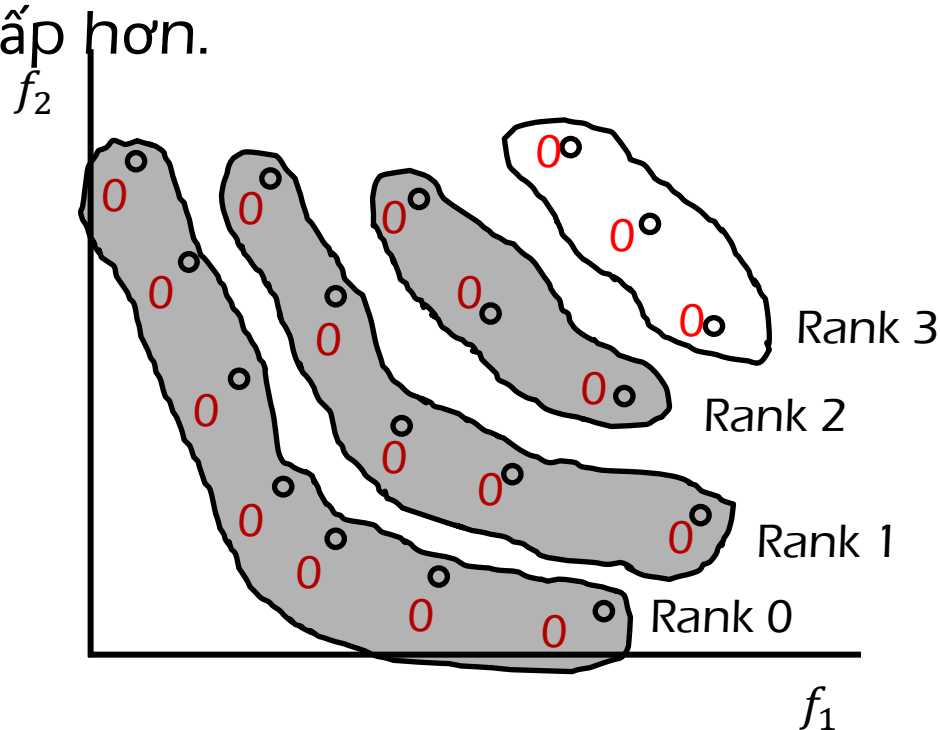
- Nondomination rank i ($i > 0$): là tập các phương án sẽ có domination count 0 khi loại bỏ các phương án ở các rank thấp hơn.





Nondomination Rank

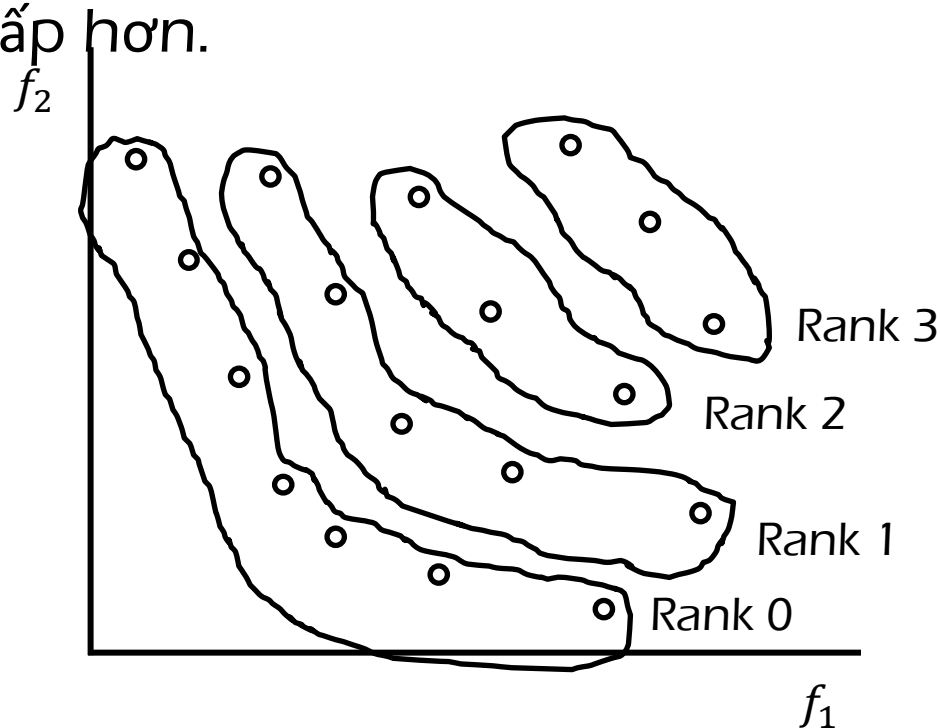
- Nondomination rank i ($i > 0$): là tập các phương án sẽ có domination count 0 khi loại bỏ các phương án ở các rank thấp hơn.





Nondomination Rank

- Nondomination rank i ($i > 0$): là tập các phương án sẽ có domination count 0 khi loại bỏ các phương án ở các rank thấp hơn.

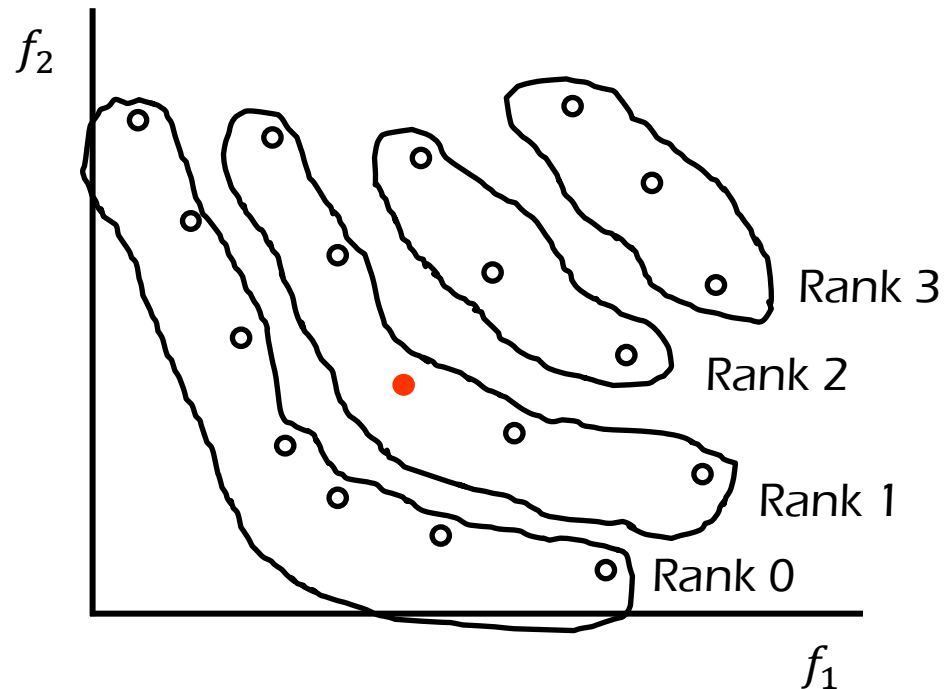


Crowding Distance

- Crowding distance của một phương án x^1 có giá trị lớn crowding distance của $x^2 \rightarrow x^1$ nằm ở khu vực có mật độ thấp hơn x^2 .
- Crowding distance thường được tính dựa trên các phương án thuộc cùng một nondomination rank.

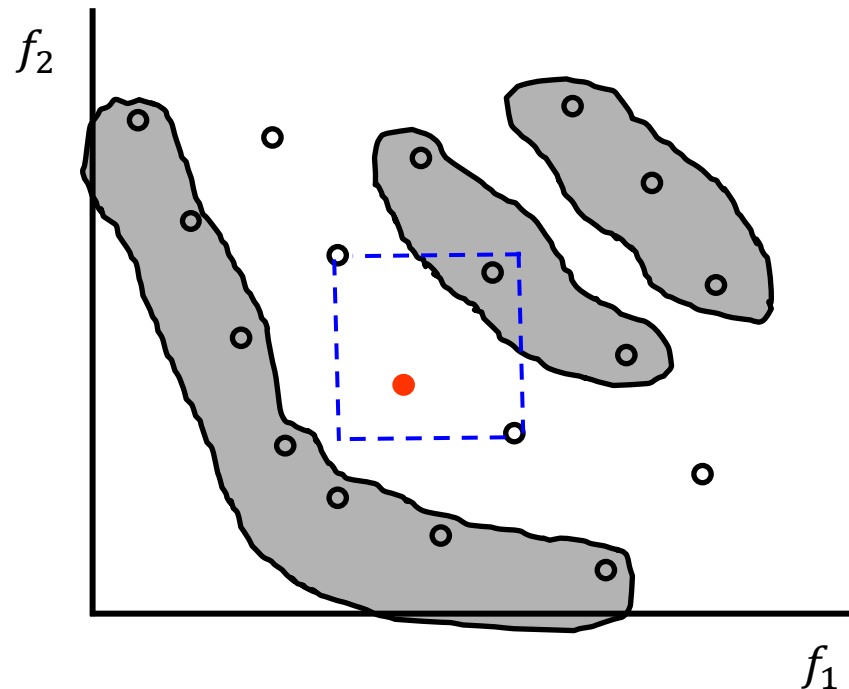
Crowding Distance

- Ví dụ: Tính crowding distance của phương án màu đỏ.



Crowding Distance

- Ví dụ: Tính crowding distance của phương án màu đỏ.



Crowding Distance

- Thuật toán tính crowding distance cho từng phương án thuộc cùng nondomination rank.
 - $P^r \leftarrow$ Các phương án x có cùng rank r .
 - $n \leftarrow$ Kích thước P^r ($|P^r|$).
 - Với mỗi $x \in P^r$, $CD[x] \leftarrow 0$.
 - Với mỗi hàm mục tiêu f_i :
 - $Q \leftarrow$ Sắp xếp thứ tự các phương án trong P^r dựa trên f_i .
 - $CD[Q[1]] \leftarrow CD[Q[n]] \leftarrow \infty$
 - for $i = 2$ to $n - 2$
 - $CD[Q[i]] \leftarrow CD[Q[i]] + (f_i(Q[i + 1]) - f_i(Q[i - 1])))$

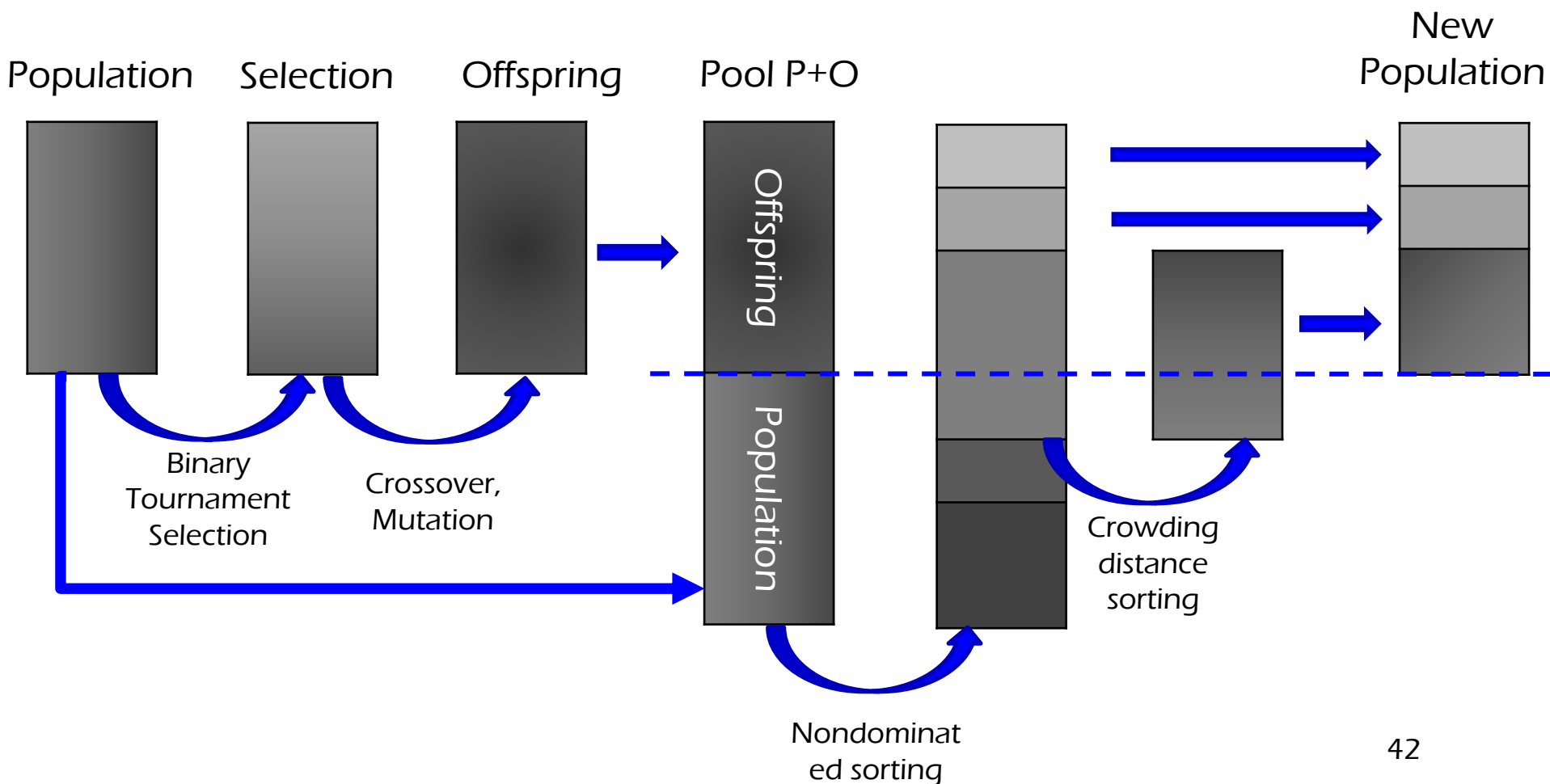
Solution Comparison

So sánh 2 phương án khi giải bài toán tối ưu đa mục tiêu.

1. if $\text{rank}(\mathbf{x}) < \text{rank}(\mathbf{y})$ then return \mathbf{x}
2. if $\text{rank}(\mathbf{x}) > \text{rank}(\mathbf{y})$ then return \mathbf{y}
3. if $\text{rank}(\mathbf{x}) = \text{rank}(\mathbf{y})$ then
 1. if $\text{crowding}(\mathbf{x}) > \text{crowding}(\mathbf{y})$ then return \mathbf{x}
 2. if $\text{crowding}(\mathbf{x}) < \text{crowding}(\mathbf{y})$ then return \mathbf{y}
 3. if $\text{crowding}(\mathbf{x}) = \text{crowding}(\mathbf{y})$ then return $\text{random}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$



Nondominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II)



Tập xấp xỉ

- Kết quả của việc giải bài toán tối ưu hoá đa mục tiêu là một tập xấp xỉ (approximation set).
- Thế nào là một tập xấp xỉ **tốt**?

Tập xấp xỉ

- Kết quả của việc giải bài toán tối ưu hoá đa mục tiêu là một tập xấp xỉ (approximation set).
 - Thế nào là một tập xấp xỉ **tốt**?
- 2 tiêu chí đánh giá tập xấp xỉ:
1. Độ gần (proximity): Biên xấp xỉ càng gần biên Pareto càng tốt.
 2. Độ đa dạng (diversity): Biên xấp xỉ thể hiện được càng nhiều vùng của biên Pareto càng tốt.

Kích thước biên

- Front Occupation (FO): Số lượng các giải pháp nằm trong tập xấp xỉ.

$$\mathbf{FO}(S) = |S|$$

Độ trải

- Front Spread (FS): Tính độ dài/độ trải rộng của biên xấp xỉ

$$\mathbf{FS}(S) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \max_{(x^1, x^2) \in S \times S} (f_i(x^1) - f_i(x^2))^2}$$



Khoảng cách trong không gian mục tiêu

- Khoảng cách Euclidean của 2 giải pháp trong không gian mục tiêu

$$d(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(\mathbf{x}^2) - f_i(\mathbf{x}^1))^2}$$

Khoảng cách $D_{S \rightarrow P_F}$

- Giả sử tập Pareto P_S và biên Pareto P_F có thể được xác định.
- $D_{S \rightarrow P_F}$ là khoảng cách trung bình từ các giải pháp trong tập xấp xỉ S đến tập Pareto P_F .

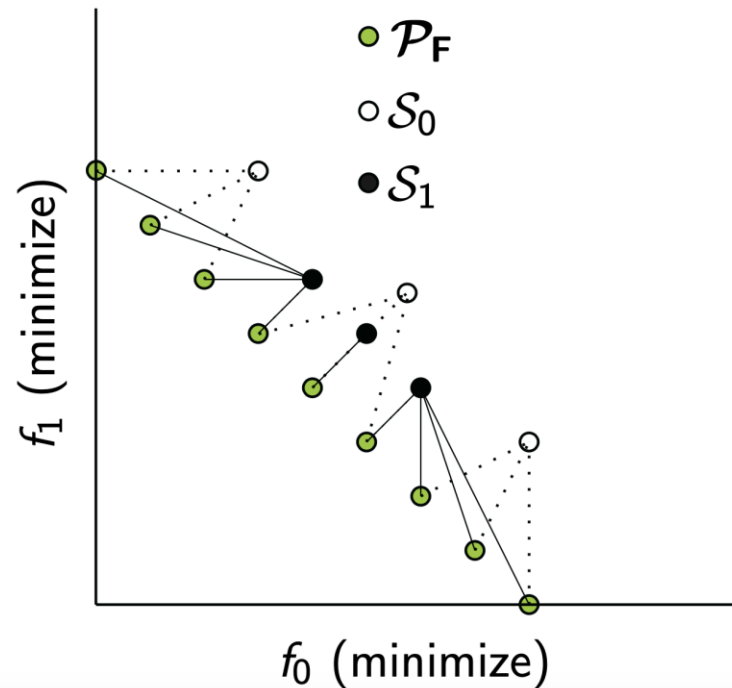
$$D_{S \rightarrow P_F} = \frac{1}{|S|} \sum_{x^1 \in S} \min_{x^2 \in P_S} \{d(x^1, x^2)\}$$

Khoảng cách $D_{P_F \rightarrow S}$

- Giả sử tập Pareto P_S và biên Pareto P_F có thể được xác định.
- $D_{P_F \rightarrow S}$ là khoảng cách trung bình từ các giải pháp trong tập Pareto P_F đến tập xấp xỉ S .

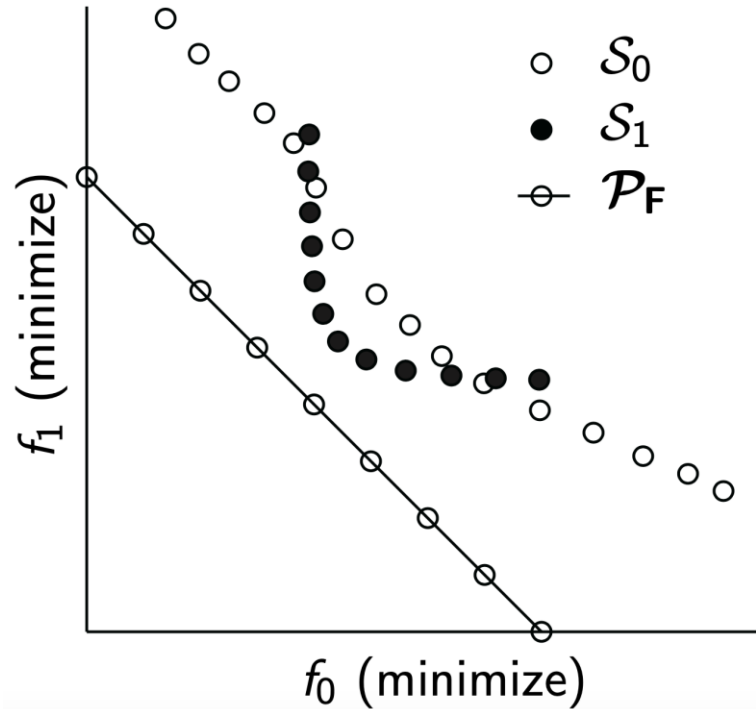
$$D_{P_F \rightarrow S} = \frac{1}{|P_S|} \sum_{x^1 \in P_S} \min_{x^2 \in S} \{d(x^1, x^2)\}$$

Minh họa $D_{P_F \rightarrow S}$



- S_1 gần với biên Pareto P_F hơn S_0 nhưng lại có độ đa dạng thấp hơn.
- $D_{P_F \rightarrow S}$ của S_0 và S_1 tương đương nhau.

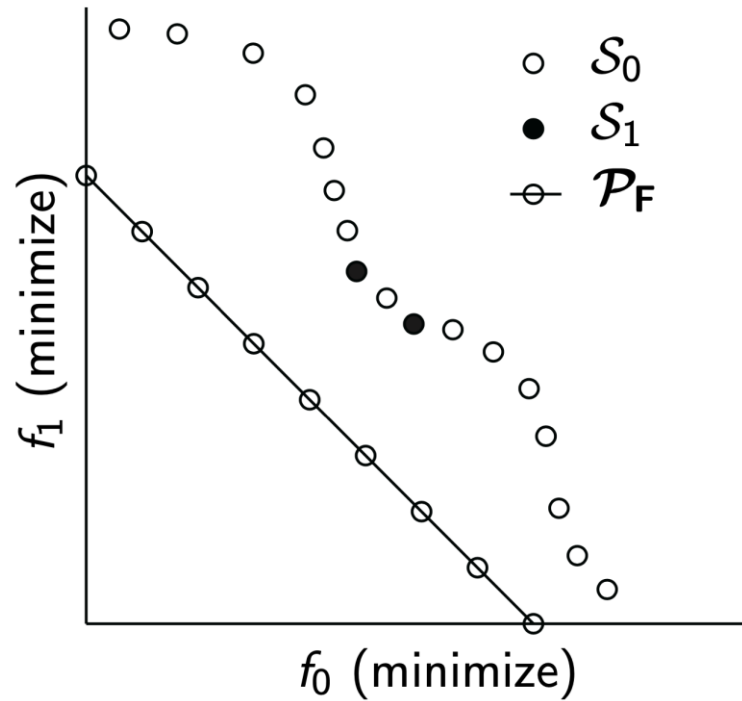
Minh họa $D_{P_F \rightarrow S}$



- FO tương đương, FS của S_0 tốt hơn, $D_{S \rightarrow P_F}$ của S_1 tốt hơn.
- $D_{P_F \rightarrow S}$ của S_0 và S_1 tương đương nhau.
- Khó đánh giá S_0 hay S_1 tốt hơn.



Minh họa $D_{P_F \rightarrow S}$

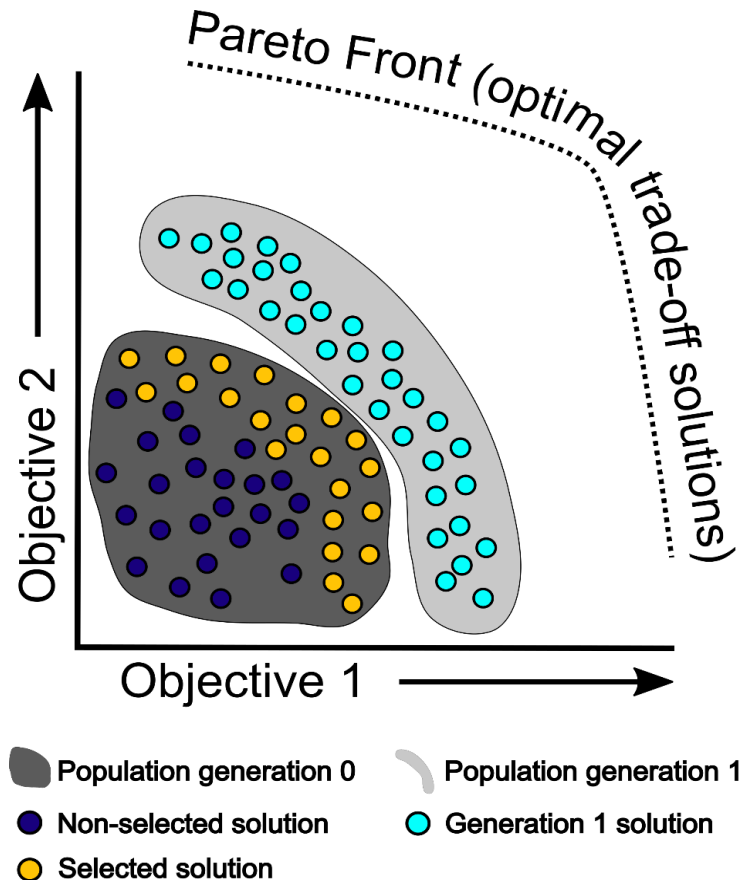


- FO, FS, $D_{P_F \rightarrow S}$ của S_0 tốt hơn S_1 .
- $D_{S \rightarrow P_F}$ của S_1 tốt hơn.
- S_0 tốt hơn S_1 trên nhiều chỉ số nhưng vẫn khó đánh giá.



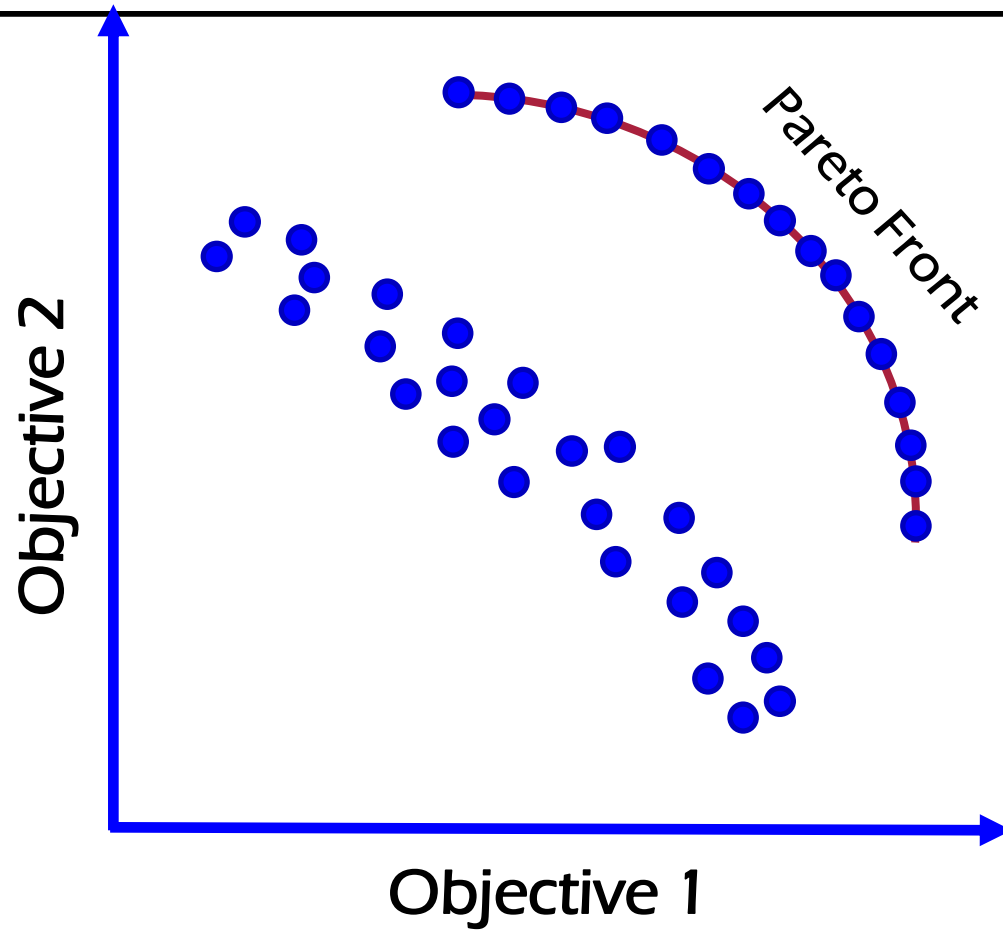
Multi-Objective Evolutionary Algorithms

- Một MOEA truyền thống có những nhược điểm gì?



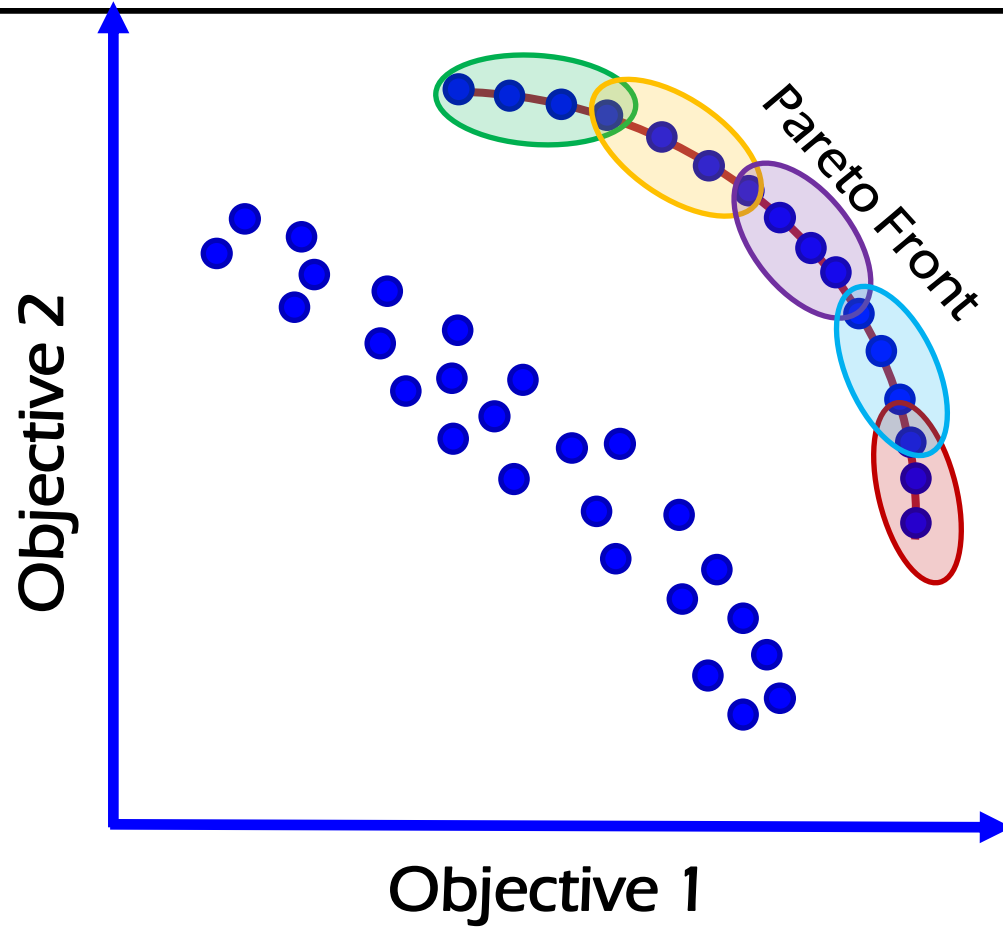


Biên Pareto



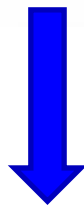


Biên Pareto



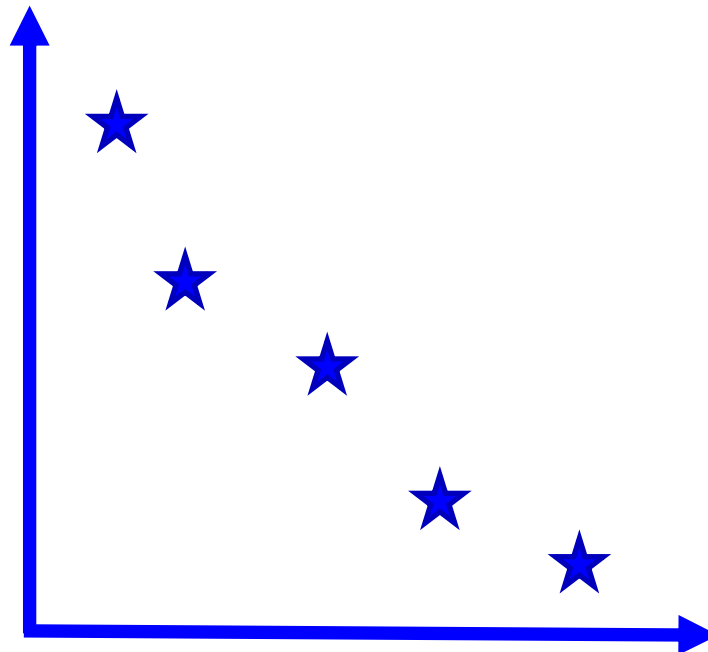


Dire Wolf, *canis dirus*
©1987 Mark Hallet



Elitist Archive

- Elitist archive: Có thể được xem như một quần thể phụ.
- Ghi nhớ những giải pháp không bị thống trị (non-dominated solutions) trong quá trình MOEA chạy.



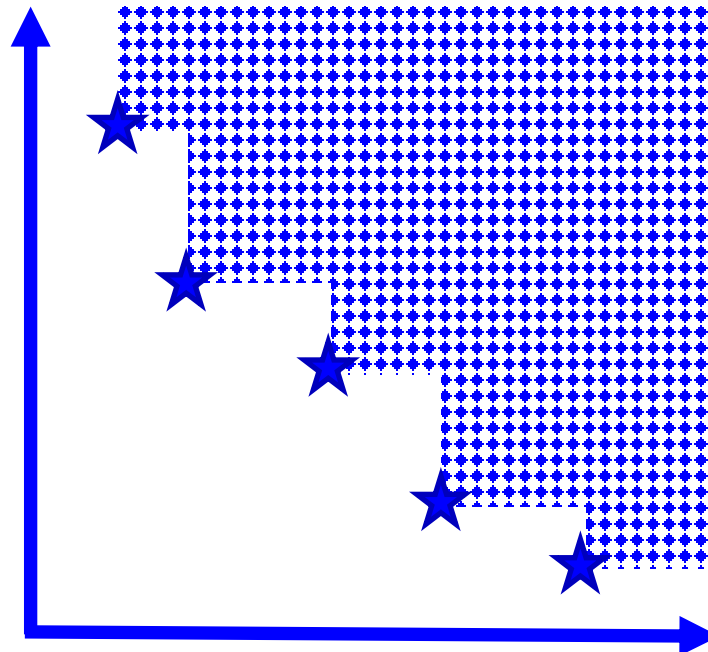


Multi-Objective Evolutionary Algorithms

- Một MOEA truyền thống có những nhược điểm gì?
- Các vùng khác nhau trên biên non-dominated có đặc điểm khác nhau → lai ghép các cá thể từ những vùng khác nhau có thể sẽ không hiệu quả.
- Tương tự như EA trong tối ưu đơn mục tiêu, các phép biến đổi ngẫu nhiên sẽ không hiệu quả khi cấu trúc bài toán không được xét đến trong quá trình tạo ra cá thể con.
- Số lượng các giải pháp non-dominated là rất nhiều trong khi kích thước quần thể là có giới hạn → elitism không được bảo đảm.

Elitist Archive

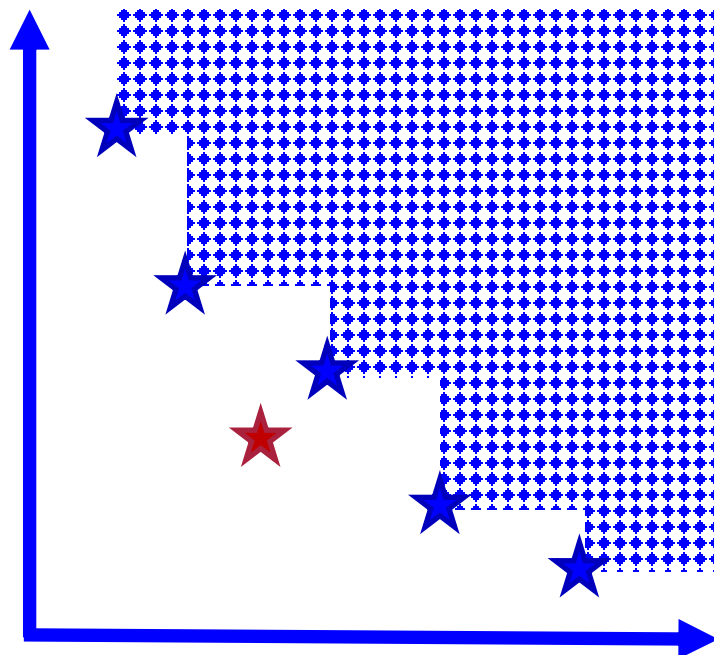
- Elitist archive: Có thể được xem như một quần thể phụ.
- Ghi nhớ những giải pháp không bị thống trị (non-dominated solutions) trong quá trình MOEA chạy.





Elitist Archive

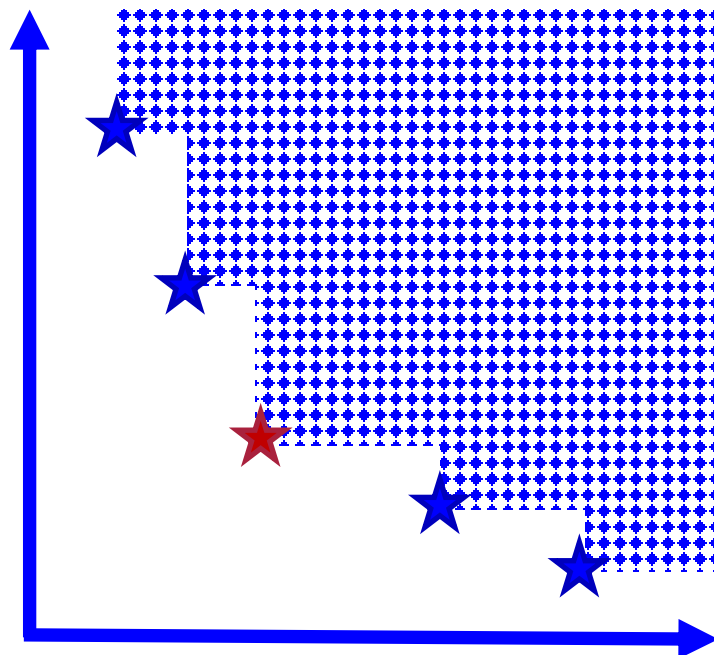
- Nếu giải pháp mới không bị thống trị bởi các giải pháp nằm trong archive thì giải pháp mới có thể được lưu vào archive.
- Các giải pháp cũ trong archive nếu bị giải pháp mới thống trị thì sẽ bị loại bỏ khỏi archive.





Elitist Archive

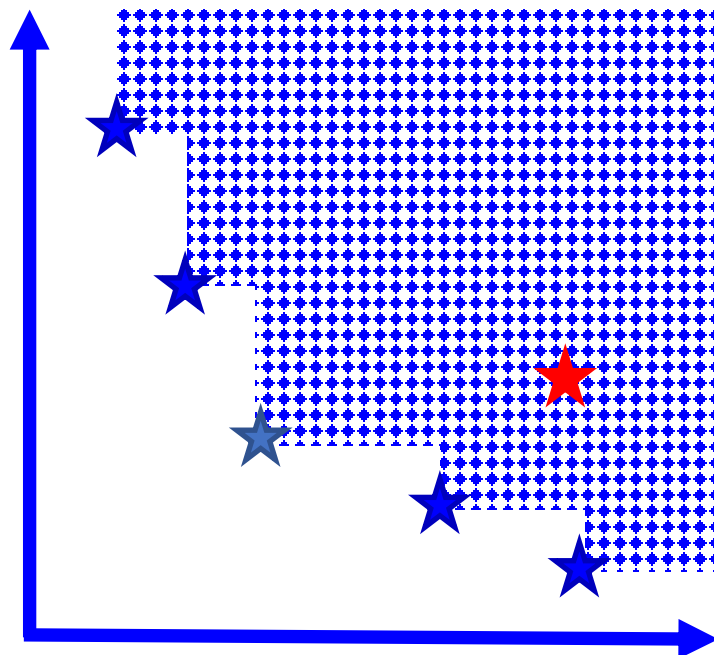
- Nếu giải pháp mới không bị thống trị bởi các giải pháp nằm trong archive thì giải pháp mới có thể được lưu vào archive.
- Các giải pháp cũ trong archive nếu bị giải pháp mới thống trị thì sẽ bị loại bỏ khỏi archive.





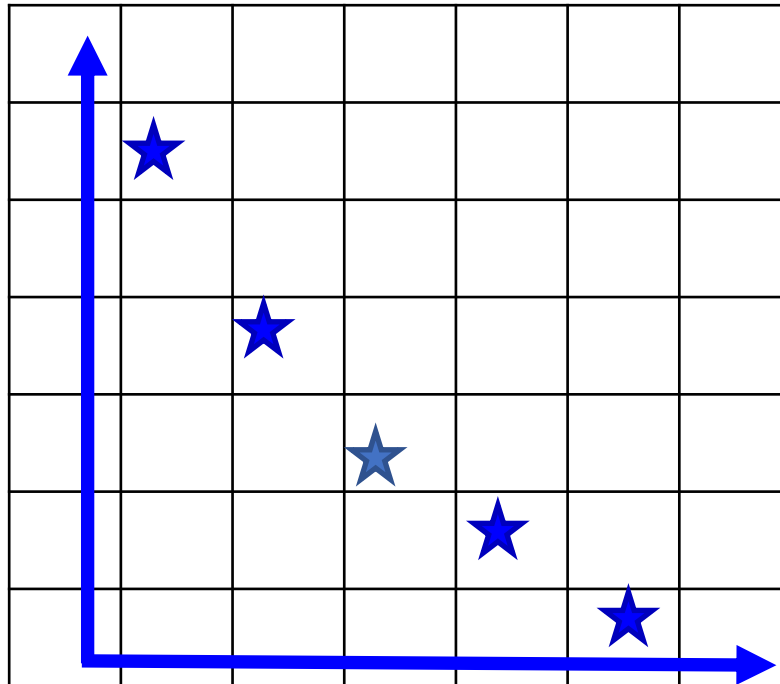
Elitist Archive

- Nếu giải pháp mới không bị thống trị bởi các giải pháp nằm trong archive thì giải pháp mới có thể được lưu vào archive.
- Các giải pháp cũ trong archive nếu bị giải pháp mới thống trị thì sẽ bị loại bỏ khỏi archive.



Elitist Archive

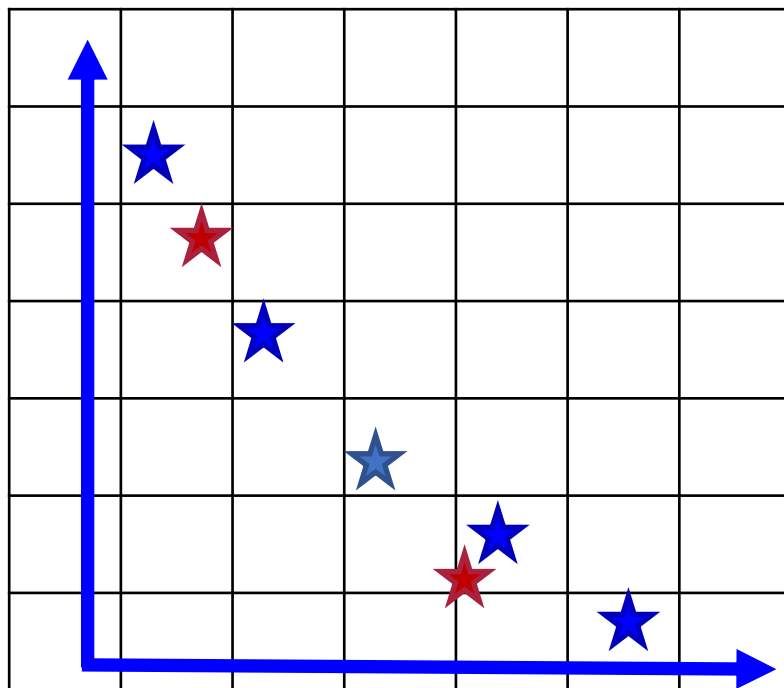
- Khi elitist archive đã đầy chỗ, ta tiến hành chia không gian tìm kiếm thành các hypercubes. Mỗi hypercube chỉ chứa đúng một giải pháp.



Elitist Archive

Giải pháp non-dominated mới được lưu vào archive nếu:

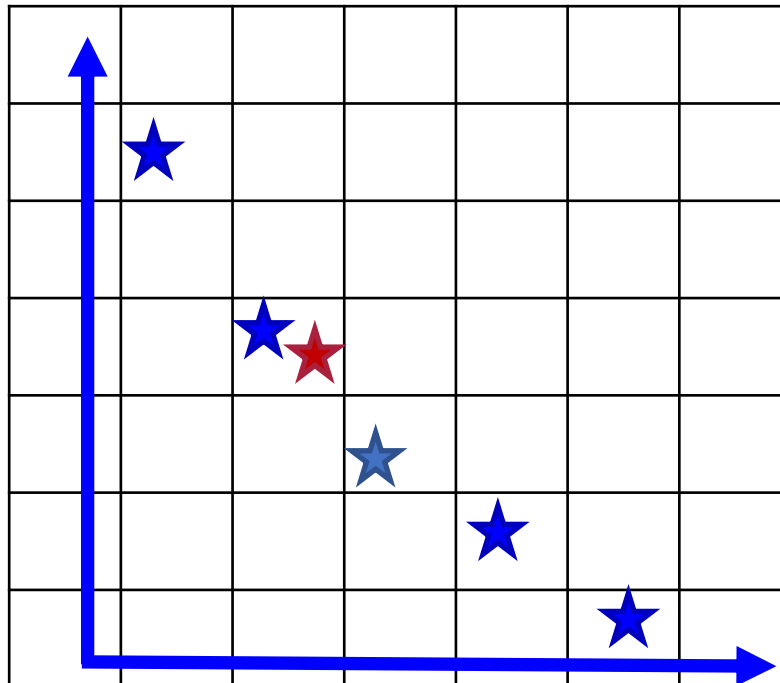
- Nằm trong một hypercube trống, **hoặc**
- Thống trị giải pháp đang được lưu trong archive.



Elitist Archive

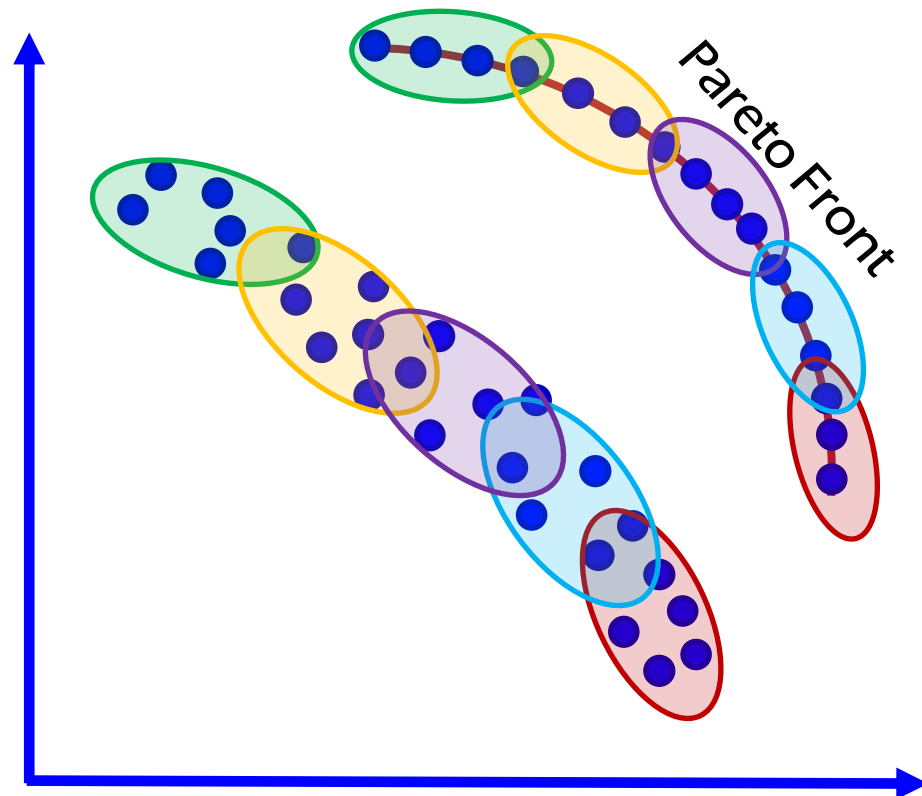
Giải pháp non-dominated mới KHÔNG được lưu vào archive nếu:

- Nằm trong một hypercube đã chứa một giải pháp khác, và
- Không thống trị được giải pháp đang lưu trong archive đó.



Phân cụm (Clustering)

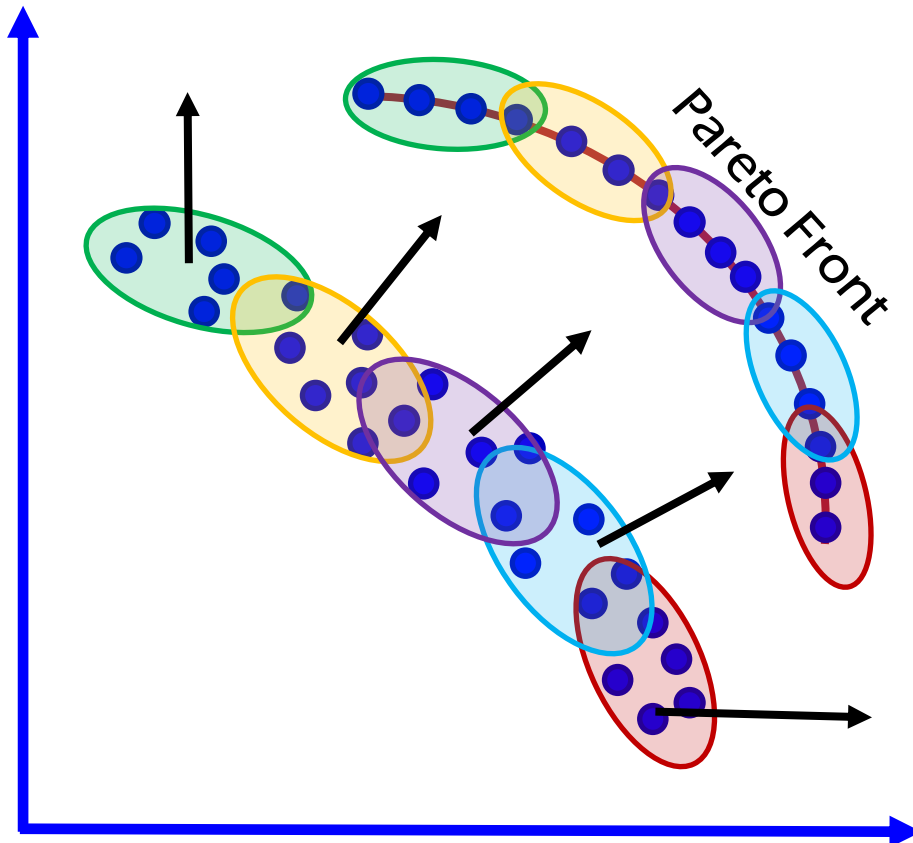
- Phân chia quần thể thành các cụm trong không gian mục tiêu.
- Các cụm có kích thước bằng nhau: các vùng khác nhau của biên Pareto có thể được tìm thấy một cách đồng đều.





Phân cụm (Clustering)

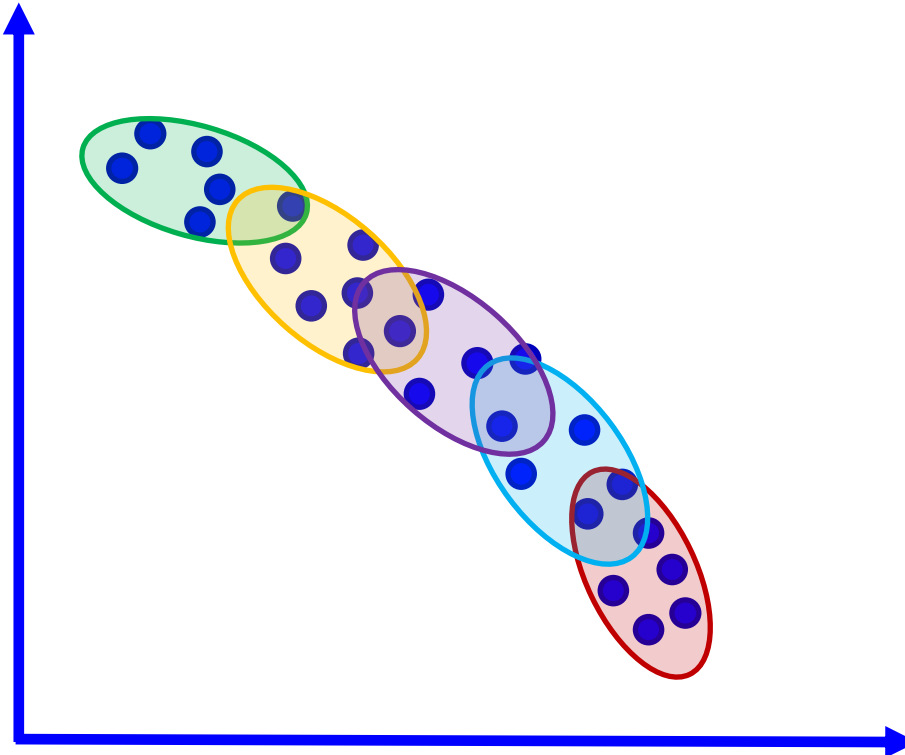
- Niching: Các phép biến đổi được giới hạn thực hiện trong từng cụm.



Xây dựng mô hình

Phép biến đổi hiệu quả nếu phù hợp với cấu trúc của vấn đề.

- Phép biến đổi dựa trên mô hình.
- Mô hình có thể được học trong từng cluster.



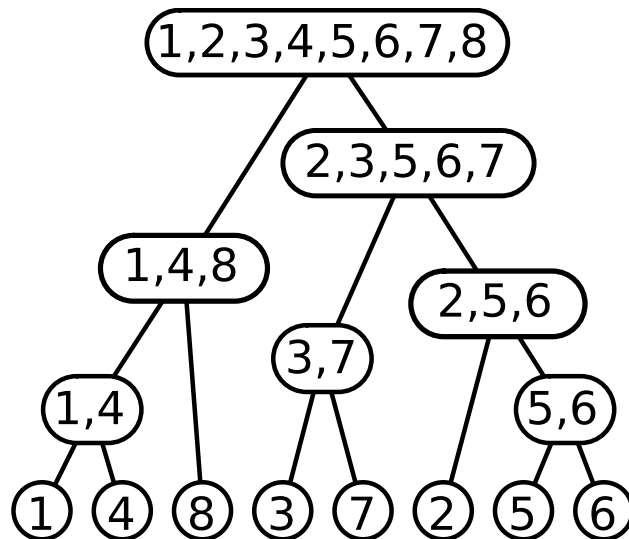
Xây dựng mô hình

- Các kiểu mô hình đã học?

Xây dựng mô hình liên kết

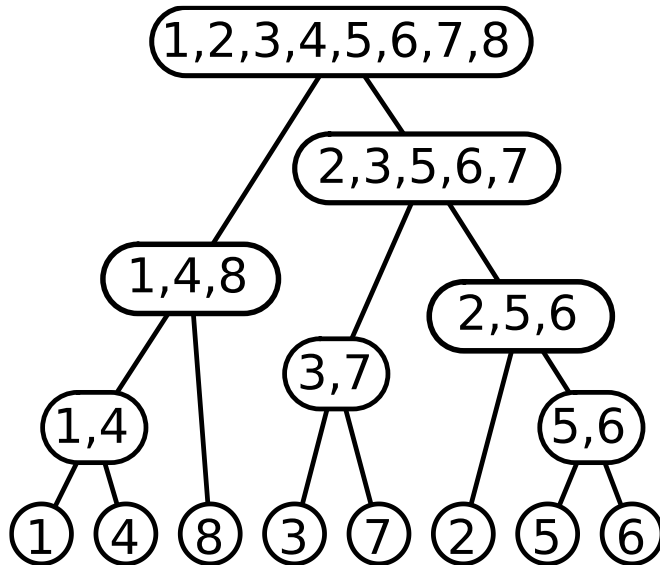
- Các kiểu mô hình đã học:
 - Univariate Model (Mô hình đơn biến).
 - Marginal Product Model (MPM).
 - Linkage Tree (Cây liên kết).

Xây dựng mô hình



- Cây liên kết có thể biểu diễn nhiều loại quan hệ giữa các biến: đơn biến độc lập (univariate) → đa biến phụ thuộc lẫn nhau (multivariate).

Phép biến đổi theo mô hình

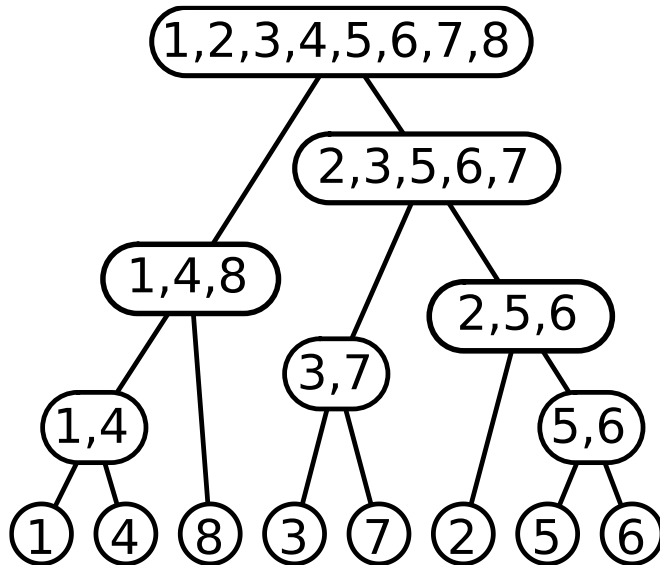


1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	0	1	1	0	0

Mỗi bước biến đổi được đánh giá và được chấp nhận nếu:

- Giải pháp mới thống trị Pareto giải pháp cũ.

Phép biến đổi theo mô hình



1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	0	1	1	0	0

(1,4,8)

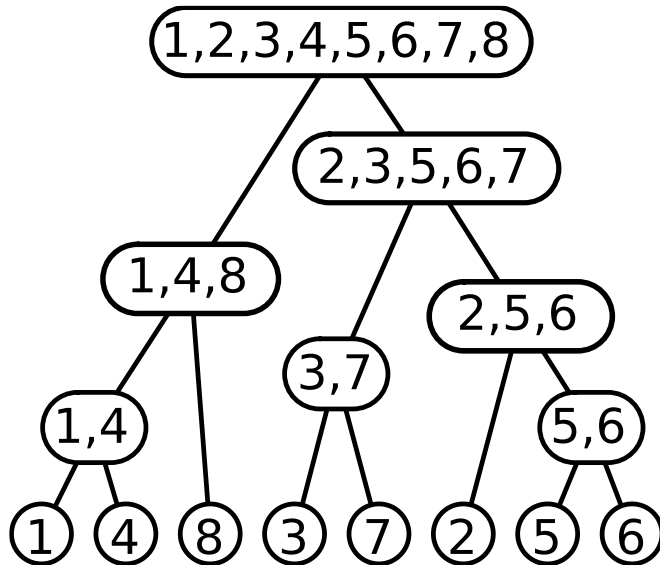
↓

1	2	3	4	5	6	7	8
1			1				1
1	1	1	1	1	1	0	0

Mỗi bước biến đổi được đánh giá và được chấp nhận nếu:

- Giải pháp mới thống trị Pareto giải pháp cũ.
- Giải pháp mới có thể được lưu vào elitist archive.

Phép biến đổi theo mô hình



1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	0	1	1	0	0

1,4,8

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	0	0

3,7

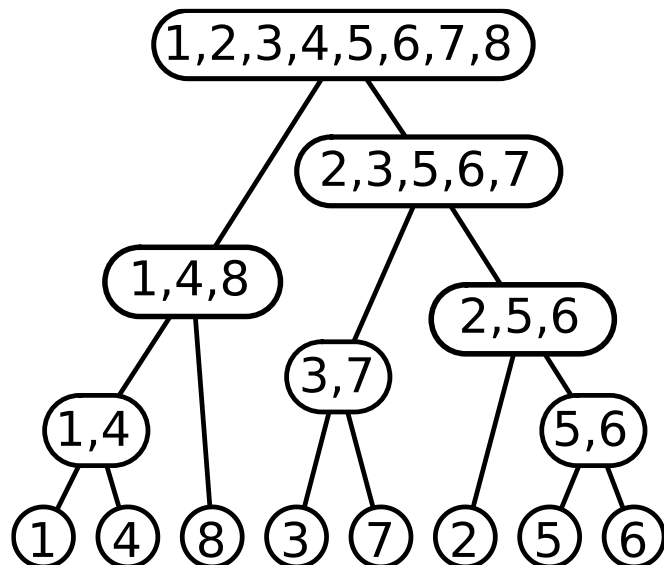
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	0

Mỗi bước biến đổi được đánh giá và được chấp nhận nếu:

- Giải pháp mới thống trị Pareto giải pháp cũ.
- Giải pháp mới có thể được lưu vào elitist archive.



Phép biến đổi theo mô hình



1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	0	1	1	0	0

1,4,8

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	0	0

3,7

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	0

5,6

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	0	0	1	0



Mỗi bước biến đổi được đánh giá và được chấp nhận nếu:

- Giải pháp mới thống trị Pareto giải pháp cũ.
- Giải pháp mới có thể được lưu vào elitist archive.

MO-GOMEA

- MO-GOMEA: Multi-Objective Gene-pool Optimal Mixing Evolutionary Algorithm
 - Elitist Archive: lưu trữ các giải pháp non-dominated.
 - Phân cụm quần thể trong không gian mục tiêu.
 - Xây dựng mô hình với cây liên kết.
 - Sử dụng Gene-pool Optimal Mixing để thực hiện phép biến đổi.

Một số MOEA

- **NSGA-II: Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (the most popular MOEA)**
Deb et al. (2002)
- **MOEA/D: Multi-objective Evolutionary Algorithm based on Decomposition**
Zhang et al. (2007)
- **MAMaLGaM: Multi-objective Adapted Maximum-Likelihood Gaussian Model**
Bosman et al. (2010)
- **MO-(RV-)GOMEA: Multi-objective (Real-Valued) Gene-pool Optimal Mixing Evolutionary Algorithm**
Luong et al. (2014) & Bouter et al. (2017)