

Câu 1 (2.5đ). Cho thuật toán đệ quy bằng mã Python để tính dãy a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```
1 def a(n):  
2     if n == 0:  
3         return -9  
4     if n == 1:  
5         return 4  
  
6     x = a(n-1)  
7     for i in range(42):  
8         x = x + a(n-2)  
9     return x
```

- a) (Trả lời nhanh) Xác định a_4 .
- b) Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$. Từ đó kiểm chứng kết quả ở ý (a).
- c) Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà thuật toán cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.
- d) (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n . Từ đó cho biết độ phức tạp của thuật toán.

Câu 2. a) Liệt kê các cách tính tích $a_0 a_1 a_2 \cdots a_n$ bằng cách đặt các dấu ngoặc, với $n = 2, 3$.

Đặt C_n là số cách tính tích $a_0 a_1 a_2 \cdots a_n$.

- b) Lập hệ thức đệ quy cho dãy $\{C_n\}$.
- c) Áp dụng phương pháp hàm sinh để giải hệ thức đệ quy trên.

Câu 3. a) Giải hệ phương trình đồng dư:

$$x \equiv 18 \pmod{19}, \quad x \equiv -4 \pmod{8}.$$

- b) Bob nhận được tin nhắn mã hóa từ Alice là $N = 1134\,2983\,3$. Biết khóa công khai RSA là

$$n = 7569\,1645\,09 \quad \text{và} \quad e = 2518\,0961\,33$$

và khóa bí mật của Bob là $\Phi(n) = 7568\,9904\,60$. Giả sử văn bản được chuyển thành số bởi mã hóa theo thứ tự chữ cái. Xác định nội dung của tin nhắn mà Alice đã gửi.

Câu 1 (2.5đ). Cho thuật toán đệ quy bằng mã Python để tính dãy a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```
1 def a(n):  
2     if n == 0:  
3         return -7  
4     if n == 1:  
5         return 1  
  
6     x = a(n-1)  
7     for i in range(6):  
8         x = x + a(n-2)  
9     return x
```

- a) (Trả lời nhanh) Xác định a_5 .
- b) Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$. Từ đó kiểm chứng kết quả ở ý (a).
- c) Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà thuật toán cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.
- d) (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n . Từ đó cho biết độ phức tạp của thuật toán.

Câu 2. a) Định nghĩa phân hạng của một số nguyên dương.

- b) Liệt kê các phân hạng của 2, 3, và 4.
- c) Áp dụng phương pháp hàm sinh, đếm số phân hạng của số nguyên dương n .

Câu 3. a) Giải hệ phương trình đồng dư:

$$x \equiv -9 \pmod{19}, \quad x \equiv 2 \pmod{5}, \quad x \equiv 4 \pmod{11}.$$

- b) Bob nhận được tin nhắn mã hóa từ Alice là $N = 7174\,9815\,7$. Biết khóa công khai RSA là

$$n = 1286\,5216\,81 \quad \text{và} \quad e = 1217\,4653\,03$$

và khóa bí mật của Bob là $\Phi(n) = 1285\,8541\,92$. Giả sử văn bản được chuyển thành số bởi mã hóa theo thứ tự chữ cái. Xác định nội dung của tin nhắn mà Alice đã gửi.

Câu 1. a) Giải hệ phương trình đồng dư:

$$x \equiv -3 \pmod{7}, \quad x \equiv 14 \pmod{15}, \quad x \equiv -1 \pmod{2}.$$

b) Alice cần gửi tin nhắn DATA, được chuyển thành số bởi mã ASCII, cho Bob bằng khóa công khai RSA

$$n = 8645\,0907\,6796\,7 \quad \text{và} \quad e = 5113\,3304\,2879$$

Xác định tin nhắn mã hóa mà Bob nhận được.

Câu 2 (2.5đ). Cho thuật toán đệ quy bằng mã Python để tính dãy a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```
1 def a(n):  
2     if n == 0:  
3         return -8  
  
4     x = -3  
5     for i in range(3):  
6         x = x + a(n // 4)  
7     for i in range(n):  
8         x = x - 2  
9     return x
```

a) (Trả lời nhanh) Xác định a_8 .

b) Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$. Từ đó kiểm chứng kết quả ở ý (a).

c) Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà thuật toán cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.

d) (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n . Từ đó cho biết độ phức tạp của thuật toán.

Câu 3. a) Định nghĩa phân hạng của một số nguyên dương.

b) Liệt kê các phân hạng của 2, 3, và 4.

c) Áp dụng phương pháp hàm sinh, đếm số phân hạng của số nguyên dương n .

Câu 1 (2.5đ). Cho thuật toán đệ quy bằng mã Python để tính dãy a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```
1 def a(n):  
2     if n == 0:  
3         return -7  
  
4     x = -2  
5     for i in range(9):  
6         x = x + a(n // 4)  
7     for i in range(n):  
8         x = x + 7  
9     return x
```

- a) (Trả lời nhanh) Xác định a_{12} .
- b) Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$. Từ đó kiểm chứng kết quả ở ý (a).
- c) Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà thuật toán cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.
- d) (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n . Từ đó cho biết độ phức tạp của thuật toán.

Câu 2. a) Liệt kê nghiệm nguyên không âm của phương trình $c_1 + c_2 + c_3 = 4$.

- b) Áp dụng phương pháp hàm sinh để đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình trên.
- c) Tổng quát, áp dụng phương pháp hàm sinh để đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $c_1 + c_2 + \dots + c_n = r$.

Câu 3. a) Giải hệ phương trình đồng dư:

$$x \equiv -3 \pmod{5}, \quad x \equiv -9 \pmod{13}, \quad x \equiv 4 \pmod{14}.$$

- b) Bob nhận được tin nhắn mã hóa từ Alice là $N = 3128\,0944\,6$. Biết khóa công khai RSA là

$$n = 1042\,2270\,23 \quad \text{và} \quad e = 1026\,1311\,07$$

và khóa bí mật của Bob là $\Phi(n) = 1038\,5439\,60$. Giả sử văn bản được chuyển thành số bởi mã hóa theo thứ tự chữ cái. Xác định nội dung của tin nhắn mà Alice đã gửi.

Đáp án

18)

- 1 a) $a_4 = -15914$ 0.5đ
- b) $a_0 = -9, a_1 = 4, a_n = a_{n-1} + 42a_{n-2}$ 0.5đ
- c) $f_0 = 1$ 0.25đ
 $f_1 = 1 + 1 = 2$ 0.25đ
 $f_n = (1) + (1) + (2 + f_{n-1}) + (3 + f_{n-2}) \times 42 = f_{n-1} + 42f_{n-2} + 130$ 0.25 + 0.25đ
- d) $f_n = -\frac{1017(-6)^n + 595 \cdot 7^n + 845}{273}$ 0.5đ

2 $10 < n_0 \leq 30$

- a) 1đ
- b) 0.5đ
- c) 1đ

- 3 a) $M = 71079$ 0.5đ
 $[N]_n = [M]_n^2 \Rightarrow N = M^2 \pmod n = 5052224241$ 1đ
- b) $[d]_{\Phi(n)} = [e]_{\Phi(n)}^{-1} \Rightarrow d = 5387569817$ 0.5đ
 $[M]_n = [N]_n^d \Rightarrow M = N^d \pmod n = 4012001$ 1đ
 Văn bản Alice gửi: DATA 0.5đ

58)

- 1 a) 0.5đ
- b) $a_0 = -7, a_n = -2 + 9a_{n-1} + 4n$ 0.5đ
- c) $f_0 = 1$ 0.25đ
 $f_n = (1) + (1) + (3 + f_{n-1}) \times 9 + 2 \times n = 9f_{n-1} + 2n + 29$ 0.25 + 0.25 + 0.25đ
- d) $f_n = \frac{-9^n + 2n + 31}{30}$ 0.5đ

2 $a_0 = \text{năm}, 10 \leq b_0 < a_0, 2 \leq \gcd(a_0, b_0) \leq 20$, và số phép chia trong thuật toán từ 5 tới 7.

- a) 0.5đ
- b) 0.5đ
- c) 0.5đ

d) 0.5 + 0.5đ

3 a) $M = 7507\ 2077\ 084$ 0.5đ

$[N]_n = [M]_n^2 \Rightarrow N = M^2 \pmod n = 3915\ 4242\ 1568\ 45$ 1đ

b) $[d]_{\phi(n)} = [e]_{\phi(n)}^{-1} \Rightarrow d = 8551\ 7632\ 3$ 0.5đ

$[M]_n = [N]_n^d \Rightarrow M = N^d \pmod n = 2021\ 04$ 1đ

Văn bản Alice gửi: TUD 0.5đ

82)

1 a)

b) $M = 6806\ 5084\ 065$ 0.5đ

$[N]_n = [M]_n^e \Rightarrow N = M^e \pmod n = 3612\ 2497\ 3381\ 7$ 1đ

2 a) 0.5đ

b) $a_0 = -8, a_n = -3 + 3a_{n-1} + 4n$ 0.5đ

c) $f_0 = 1$ 0.25đ

$f_n = (1) + (1) + (3 + f_{n-1}) \times 3 + 2 \times n = 3f_{n-1} + 2n + 11$ 0.25 + 0.25 + 0.25đ

d) $f_n = \frac{-3^n + 2n + 13}{12}$ 0.5đ

3 $a_0 = \text{năm}, 10 \leq b_0 < a_0, 2 \leq \gcd(a_0, b_0) \leq 20$, và số phép chia trong thuật toán từ 5 tới 7.

a) 0.5đ

b) 1đ

c) $r_2 = 314, r_3 = 140, r_4 = 34, r_5 = 4, r_6 = 2$ 0.25đ

$q_1 = 1, x_2 = 1, y_2 = -1; q_2 = 5, x_3 = -5, y_3 = 6; q_3 = 2, x_4 = 11, y_4 = -13; q_4 = 4, x_5 = -49, y_5 = 58; q_5 = 8, x_6 = 403, y_6 = -477$ 0.25 + 0.25đ

$403 \times 2024 - 477 \times 1710 = 2$ 0.25đ

89)

1 a) $a_5 = -491$ 0.5đ

b) $a_0 = -7, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ 0.5đ

c) $f_0 = 1$ 0.25đ

$f_1 = 1 + 1 = 2$ 0.25đ

$f_n = (1) + (1) + (2 + f_{n-1}) + (3 + f_{n-2}) \times 6 = f_{n-1} + 6f_{n-2} + 22$ 0.25 + 0.25đ

d) $f_n = -\frac{44(-2)^n + 6 \cdot 3^n + 55}{15}$ 0.5đ

- 2** $a_0 = \text{năm}$, $10 \leq b_0 < a_0$, $2 \leq \gcd(a_0, b_0) \leq 20$, và số phép chia trong thuật toán từ 5 tới 7.
- a) **0.5đ**
 - b) **1đ**
 - c) $r_2 = 314, r_3 = 140, r_4 = 34, r_5 = 4, r_6 = 2$ **0.25đ**
 $q_1 = 1, x_2 = 1, y_2 = -1; \quad q_2 = 5, x_3 = -5, y_3 = 6; \quad q_3 = 2, x_4 = 11, y_4 = -13; \quad q_4 = 4, x_5 = -49, y_5 = 58; \quad q_5 = 8, x_6 = 403, y_6 = -477$ **0.25 + 0.25đ**
 $403 \times 2024 - 477 \times 1710 = 2$ **0.25đ**
- 3**
- a) $M = 1108\,1320$ **0.5đ**
 $[N]_n = [M]_n^2 \Rightarrow N = M^2 \pmod n = 1255\,4139\,41$ **1đ**
 - b) $[d]_{\Phi(n)} = [e]_{\Phi(n)}^{-1} \Rightarrow d = 6926\,0383\,1$ **0.5đ**
 $[M]_n = [N]_n^d \Rightarrow M = N^d \pmod n = 1421\,0305$ **1đ**
 Văn bản Alice gửi: NUCE **0.5đ**