

Câu 1. Dùng công thức nội suy Lagrange, tìm đa thức nội suy của hàm số có giá trị cho trong bảng

x	-3	0	2
y	8	-4	-2

Câu 2. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 = 0.13x_1 - 0.04x_2 + 0.08x_3 - 4 \\ x_2 = -0.1x_1 + 0.09x_2 + 0.12x_3 \\ x_3 = -0.08x_1 - 0.01x_2 + 0.09x_3 + 3 \end{cases}$$
. Bằng

phương pháp lặp điểm bất động, với xấp xỉ ban đầu $x^{(0)} = (-5, -3, -4)^T$, tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 3 bước lặp.

Câu 3. Bằng phương pháp bình phương tối thiểu, tìm xấp xỉ của hàm số $y = f(x)$ có giá trị trong bảng sau bởi đa thức bậc hai và đánh giá sai số.

x_k	-5.0	1.0	2.5	2.8	4.8
y_k	-76.1	-4.7	-12.4	-15.0	-44.9

Câu 4. Cho biết công thức tính độ dài đường cong $y = \varphi(x)$ với $x \in [a, b]$

là $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} dx$. Bằng phương pháp hình thang, tính gần đúng độ dài đường cong $y = \cos(3x + 4)$ khi x chạy từ -5 đến -4 , khi chia đều đoạn $[-5, -4]$ thành 8 đoạn, và đánh giá sai số.

Câu 1. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x = -0.08x - 0.02y - 0.07z - 0.01t \\ y = -0.01x + 0.08y - 0.15z + 0.09t + 2 \\ z = 0.08x - 0.13y - 0.12z + 0.05t - 4 \\ t = 0.14x + 0.03y + 0.1z - 0.13t + 3 \end{cases}$$

Bằng phương pháp lặp điểm bất động, với xấp xỉ ban đầu $x_0 = -5, y_0 = 5, z_0 = 3, t_0 = 2$, tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 3 bước lặp.

Câu 2. Bằng phương pháp bình phương tối thiểu, tìm xấp xỉ của hàm số $y = f(x)$ có giá trị trong bảng sau bởi đa thức bậc hai và đánh giá sai số.

x_k	-2.1	-1.6	3.7	4.1
y_k	9.3	4.4	74.5	89.1

Câu 3. Dùng công thức nội suy Lagrange, tìm đa thức nội suy của hàm số có giá trị cho trong bảng

x	-4	-1	2
y	16	1	4

Câu 4. Cho biết công thức tính độ dài đường cong $y = \varphi(x)$ với $x \in [a, b]$ là
$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} dx.$$
 Bằng phương pháp Simpson, tính gần đúng độ dài đường cong $y = \cos(x + 4)$ khi x chạy từ 1 đến 2, khi chia đều đoạn $[1, 2]$ thành 6 đoạn, và đánh giá sai số.

Câu 1. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 = 0.32x_1 + 0.03x_2 + 0.01x_3 - 5 \\ x_2 = -0.15x_1 + 0.35x_2 + 0.3x_3 + 3 \\ x_3 = -0.16x_1 - 0.04x_2 + 0.08x_3 - 4 \end{cases}$$
. Bằng phương pháp lặp điểm bất động, với xấp xỉ ban đầu $x^{(0)} = (-2, 3, -1)^T$, tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 3 bước lặp.

Câu 2. Bằng phương pháp bình phương tối thiểu, tìm xấp xỉ của hàm số $y = f(x)$ có giá trị trong bảng sau bởi đa thức bậc hai và đánh giá sai số.

x_k	-0.3	0.1	1.5	3.1	3.3	4.2	4.6
y_k	-2.9	-4.7	-4.1	11.6	15.1	33.2	42.7

Câu 3. Dùng công thức nội suy Lagrange, tìm đa thức nội suy của hàm số có giá trị cho trong bảng

x	-5	1	2
y	1	1	8

Câu 4. Xét phương trình $x = -e^x$ trên đoạn $\left[-3, -\frac{1}{4}\right]$. Bằng phương pháp lặp điểm bất động, với xấp xỉ ban đầu $x_0 = -3$, tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 3 bước lặp.

Câu 1. Dùng công thức nội suy Lagrange, tìm đa thức nội suy của hàm số có giá trị cho trong bảng

x	-3	-1	0	3
y	17	5	2	5

Câu 2. Bằng phương pháp bình phương tối thiểu, tìm xấp xỉ của hàm số $y = f(x)$ có giá trị trong bảng sau bởi đa thức bậc hai và đánh giá sai số.

x_k	-2.2	0.4	4.3	4.7
y_k	25.0	-0.2	51.8	63.1

Câu 3. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 = 0.48x_1 - 0.03x_2 - 0.12x_3 - 5 \\ x_2 = -0.34x_1 - 0.26x_2 - 0.18x_3 + 1 \\ x_3 = 0.25x_1 - 0.12x_2 + 0.25x_3 \end{cases}$$
. Bằng phương pháp lặp điểm bất động, với xấp xỉ ban đầu $x^{(0)} = (0, 1, -3)^T$, tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 3 bước lặp.

Câu 4. Xét phương trình $x = \sqrt[5]{x + \frac{1}{5}}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Bằng phương pháp lặp điểm bất động, với xấp xỉ ban đầu $x_0 = 2$, tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 4 bước lặp.

Đáp án

48)

1 a) $B = \begin{bmatrix} -0.08 & -0.02 & -0.07 & -0.01 \\ -0.01 & 0.08 & -0.15 & 0.09 \\ 0.08 & -0.13 & -0.12 & 0.05 \\ 0.14 & 0.03 & 0.1 & -0.13 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad q = \|B\|_{\infty} =$
 $0.4 < 1 \dots \dots \dots \mathbf{0.25đ}$
 $X_{k+1} = BX_k + g, \quad \|X_k - X^*\|_{\infty} \leq \frac{q}{1-q} \|X_k - X_{k-1}\|_{\infty} \dots \mathbf{0.5 + 0.25đ}$

b) Bảng giá trị $\dots \dots \dots \mathbf{0.5 + 0.5đ}$

k	x_k	y_k	z_k	t_k	ε_k
1	0.07	2.18	-5.31	2.49	5.54
2	0.2976	3.1943	-3.5161	2.2205	1.1959
3	0.13623	2.9798	-3.8585	2.4972	0.22826

2 a) $P(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 \Rightarrow$ cơ sở $f = \{1, x, x^2\} \dots \dots \dots \mathbf{0.25đ}$

$Ac = b, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^m f_i(x_k) f_j(x_k), \quad b_i = \sum_{k=1}^m f_i(x_k) f_i(x_k) \dots \dots \dots \mathbf{0.25đ}$

$\begin{bmatrix} 4.0 & 4.1 & 37.47 \\ 4.1 & 37.47 & 106.22 \\ 37.47 & 106.22 & 495.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 177.3 \\ 614.39 \\ 2570.0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1.7742 \\ c_2 = 4.822 \\ c_3 = 4.0148 \end{cases} \mathbf{0.5 +}$
 $\mathbf{0.25đ}$

b)

x_k	-2.1	-1.6	3.7	4.1	$\mathbf{0.25đ}$
y_k	9.3	4.4	74.5	89.1	
$P_k = P(x_k)$	9.3531	4.3368	74.578	89.032	
$y_k - P_k$	-0.053093	0.063198	-0.077636	0.067531	

Sai số $\|f - P\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - P_k)^2} = 0.13191 \dots \dots \dots \mathbf{0.25 + 0.25đ}$

3 a) $P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \dots \dots \dots \mathbf{0.5 + 0.5đ}$

$$b) L_0(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{18} = \frac{x^2}{18} - \frac{x}{18} - \frac{1}{9} \dots \dots \dots 0.5đ$$

$$L_1(x) = -\frac{(x-2)(x+4)}{9} = -\frac{x^2}{9} - \frac{2x}{9} + \frac{8}{9}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x+4)}{18} = \frac{x^2}{18} + \frac{5x}{18} + \frac{2}{9}$$

$$P(x) = x^2 \dots \dots \dots 0.5đ$$

4 a) $f(x) = \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} = \sqrt{\sin^2(x+4) + 1} \dots \dots \dots 0.25đ$

Bảng giá trị $\dots \dots \dots 0.25đ$

x_i	1.0	1.1667	1.3333	1.5	1.6667	1.8333	2.0
y_i	1.3855	1.3444	1.289	1.2238	1.1551	1.0904	1.0383

$$b) \ell = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (x_{2i} - x_{2i-2}) \frac{y_{2i} + 4y_{2i-1} + y_{2i-2}}{6} = 1.2193 \quad 0.25đ + 0.5đ$$

$$c) |f^{(4)}(x)| \leq M_4, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \text{chọn } M_4 = 3.2843. \dots \dots \dots 0.25đ$$

$$\text{Sai số: } \frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4} = 1.4079 \cdot 10^{-5} \dots \dots \dots 0.25đ + 0.25đ$$

68)

1 a) $P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \dots \dots \dots 0.5 + 0.5đ$

$$b) L_0(x) = \frac{x(x-2)}{15} = \frac{x^2}{15} - \frac{2x}{15} \dots \dots \dots 0.5đ$$

$$L_1(x) = -\frac{(x-2)(x+3)}{6} = -\frac{x^2}{6} - \frac{x}{6} + 1$$

$$L_2(x) = \frac{x(x+3)}{10} = \frac{x^2}{10} + \frac{3x}{10}$$

$$P(x) = x^2 - x - 4 \dots \dots \dots 0.5đ$$

2 a) $B = \begin{bmatrix} 0.13 & -0.04 & 0.08 \\ -0.1 & 0.09 & 0.12 \\ -0.08 & -0.01 & 0.09 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad q = \|B\|_{\infty} = 0.31 < 1$

0.25đ

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g, \quad \|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} \quad \mathbf{0.5 + 0.25đ}$$

b) Bảng giá trị **0.5 + 0.5đ**

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	ε_k
1	-4.85	-0.25	3.07	3.1764
2	-4.3749	0.8309	3.6668	0.48562
3	-4.3086	0.95229	3.6717	0.054536

3 a) $P(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 \Rightarrow$ cơ sở $f = \{1, x, x^2\}$ **0.25đ**

$$Ac = b, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^m f_i(x_k) f_j(x_k), \quad b_i = \sum_{k=1}^m f(x_k) f_i(x_k) \quad \mathbf{0.25đ}$$

$$\begin{bmatrix} 5.0 & 6.1 & 63.13 \\ 6.1 & 63.13 & 24.169 \\ 63.13 & 24.169 & 1257.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -153.1 \\ 87.28 \\ -3136.8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -4.9094 \\ c_2 = 2.7378 \\ c_3 = -2.3009 \end{cases}$$

0.5 + 0.25đ

x_k	-5.0	1.0	2.5	2.8	4.8
y_k	-76.1	-4.7	-12.4	-15.0	-44.9
$P_k = P(x_k)$	-76.12	-4.4725	-12.445	-15.282	-44.78
$y_k - P_k$	0.019947	-0.22749	0.045332	0.28236	-0.12015

0.25đ

$$\text{Sai số } \|f - P\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - P_k)^2} = 0.38519 \quad \mathbf{0.25 + 0.25đ}$$

4 a) $f(x) = \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} = \sqrt{9 \sin^2(3x + 4) + 1}$ **0.25đ**

Bảng giá trị **0.25đ**

x_i	-5.0	-4.875	-4.75	-4.625	-4.5	-4.375	-4.25	-4.1
y_i	3.1623	2.9698	2.4203	1.6445	1.0251	1.336	2.1243	2.78

$$b) \ell = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{y_i + y_{i-1}}{2} = 2.1818 \dots \quad \mathbf{0.25d + 0.5d}$$

$$c) |f''(x)| \leq M_2, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \text{chọn } M_2 = 74.324. \dots \quad \mathbf{0.25d}$$

$$\text{Sai số: } \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = 0.096776. \dots \quad \mathbf{0.25d + 0.25d}$$

74)

$$1 \quad a) P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \dots \quad \mathbf{0.5 + 0.5d}$$

$$b) L_0(x) = -\frac{x(x-3)(x+1)}{36} = -\frac{x^3}{36} + \frac{x^2}{18} + \frac{x}{12} \dots \quad \mathbf{0.5d}$$

$$L_1(x) = \frac{x(x-3)(x+3)}{8} = \frac{x^3}{8} - \frac{9x}{8}$$

$$L_2(x) = -\frac{(x-3)(x+1)(x+3)}{9} = -\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{9} + x + 1$$

$$L_3(x) = \frac{x(x+1)(x+3)}{72} = \frac{x^3}{72} + \frac{x^2}{18} + \frac{x}{24}$$

$$P(x) = x^2 - 2x + 2. \dots \quad \mathbf{0.5d}$$

$$2 \quad a) P(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 \Rightarrow \text{cơ sở } f = \{1, x, x^2\} \dots \quad \mathbf{0.25d}$$

$$Ac = b, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^m f_i(x_k) f_j(x_k), \quad b_i = \sum_{k=1}^m f(x_k) f_i(x_k) \dots \quad \mathbf{0.25d}$$

$$\begin{bmatrix} 4.0 & 7.2 & 45.58 \\ 7.2 & 45.58 & 172.75 \\ 45.58 & 172.75 & 853.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139.7 \\ 464.23 \\ 2472.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0.57423 \\ c_2 = -3.3159 \\ c_3 = 3.5383 \end{cases} \quad \mathbf{0.5} \\ \mathbf{+ 0.25d}$$

x_k	-2.2	0.4	4.3	4.7	0.25d
y_k	25.0	-0.2	51.8	63.1	
$P_k = P(x_k)$	24.995	-0.186	51.74	63.151	
$y_k - P_k$	0.0052362	-0.014004	0.060217	-0.051449	

Sai số $\|f - P\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - P_k)^2} = 0.080601 \dots \dots \dots$ **0.25 + 0.25đ**

3 a) $B = \begin{bmatrix} 0.48 & -0.03 & -0.12 \\ -0.34 & -0.26 & -0.18 \\ 0.25 & -0.12 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q = \|B\|_{\infty} = 0.78 < 1 \dots \dots \dots$ **0.25đ**

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g, \quad \|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty}$ **0.5 + 0.25đ**

b) Bảng giá trị $\dots \dots \dots$ **0.5 + 0.5đ**

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	ε_k
1	-4.67	1.28	-0.87	16.557
2	-7.1756	2.4116	-1.5386	8.8835
3	-8.332	3.0896	-2.4679	4.1

4 a) $g(x) = \sqrt[5]{x + \frac{1}{5}}; \quad \frac{1}{2} \leq 0.93115 \leq g(x) \leq 1.1708 \leq 2 \dots \dots \dots$ **0.25đ**

$|g'(x)| \leq 0.26604 = q < 1 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \dots \dots \dots$ **0.25**

$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \dots \dots$ **0.25**

$|x_n - x^*| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|, \quad n \geq 1 \dots \dots \dots$ **0.25đ**

b) Bảng giá trị trong đó x_1, ε_n được **0.5đ** $\dots \dots \dots$ **1đ**

n	x_n	ε_n
1	1.1708	0.30056
2	1.0651	0.038311
3	1.0482	0.0061462
4	1.0453	0.0010239

79)

1 a) $B = \begin{bmatrix} 0.32 & 0.03 & 0.01 \\ -0.15 & 0.35 & 0.3 \\ -0.16 & -0.04 & 0.08 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad q = \|B\|_{\infty} = 0.8 < 1$
0.25đ

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g, \quad \|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty}$ **0.5 + 0.25đ**

b) Bảng giá trị **0.5 + 0.5đ**

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	ε_k
1	-5.56	4.05	-3.88	14.24
2	-6.6965	4.0875	-3.5828	4.546
3	-7.0561	4.3603	-3.3787	1.4383

2 a) $P(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 \Rightarrow$ cơ sở $f = \{1, x, x^2\}$ **0.25đ**

$$Ac = b, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^m f_i(x_k) f_j(x_k), \quad b_i = \sum_{k=1}^m f(x_k) f_i(x_k) \mathbf{0.25đ}$$

$$\begin{bmatrix} 7.0 & 16.5 & 61.65 \\ 16.5 & 61.65 & 240.5 \\ 61.65 & 240.5 & 974.93 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90.9 \\ 415.9 \\ 1755.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -4.4317 \\ c_2 = -4.9297 \\ c_3 = 3.297 \end{cases} \quad \mathbf{0.5 + 0.25đ}$$

b)

x_k	-0.3	0.1	1.5	3.1	3.3	4
y_k	-2.9	-4.7	-4.1	11.6	15.1	3
$P_k = P(x_k)$	-2.656	-4.8917	-4.4079	11.971	15.205	33
$y_k - P_k$	-0.24397	0.19168	0.30794	-0.37068	-0.10494	0.1

0.25đ

$$\text{Sai số } \|f - P\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - P_k)^2} = 0.61044 \mathbf{0.25 + 0.25đ}$$

3 a) $P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \mathbf{0.5 + 0.5đ}$

b) $L_0(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{42} = \frac{x^2}{42} - \frac{x}{14} + \frac{1}{21} \mathbf{0.5đ}$

$$L_1(x) = -\frac{(x-2)(x+5)}{6} = -\frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} + \frac{5}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x+5)}{7} = \frac{x^2}{7} + \frac{4x}{7} - \frac{5}{7}$$

$$P(x) = x^2 + 4x - 4. \mathbf{0.5đ}$$

4 a) $g(x) = -e^x$; $-3 \leq -0.7788 \leq g(x) \leq -0.049787 \leq -\frac{1}{4}$. **0.25đ**

$|g'(x)| \leq 0.7788 = q < 1 \forall x \in \left[-3, -\frac{1}{4}\right]$ **0.25**

$x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, \dots$ **0.25**

$|x_n - x^*| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|, n \geq 1$ **0.25đ**

b) Bảng giá trị trong đó x_1, ε_n được **0.5đ** **1đ**

n	x_n	ε_n
1	-0.049787	10.387
2	-0.95143	3.1745
3	-0.38619	1.9901