

Câu 1. Dùng công thức nội suy Lagrange, tìm đa thức nội suy của hàm số có giá trị cho trong bảng

x	-3	-2	1	4
y	-9	-3	3	-9

Câu 2. Cho biết công thức tính độ dài đường cong $y = \varphi(x)$ với $x \in [a, b]$ là $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} dx$. Bằng phương pháp hình thang, tính gần đúng độ dài đường cong $y = -\sin(5x)$ khi x chạy từ -2 đến 0 , khi chia đều đoạn $[-2, 0]$ thành 4 đoạn, và đánh giá sai số.

Câu 3. Xét phương trình $x + e^x = 0$ trên đoạn $[-1, 2]$. Bằng phương pháp Newton, tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng trong 5 bước lặp.

Câu 1. Xét phương trình $x = \frac{2 \cos (x)}{3}$ trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Bằng phương pháp lặp điểm bất động, với xấp xỉ ban đầu $x_0 = 0$, tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 3 bước lặp.

Câu 2. Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$

x_i	2.0	2.05	2.1	2.15	2.2	2.25	2.3	2.35
y_i	0.909	0.887	0.863	0.837	0.808	0.778	0.746	0.711

a) Dùng công thức ba điểm, tính gần đúng $f''\left(x_i\right), i=\overline{0,7}$.

b) Tính gần đúng $\int_2^{2.35} f(x) d x$.

Câu 3. Dùng công thức nội suy Lagrange, tìm đa thức nội suy của hàm số có giá trị cho trong bảng

x	-1	1	2
y	11	1	2

Câu 1. Xét phương trình $x = \frac{2 \cos (x)}{3}$ trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Bằng phương pháp lặp điểm bất động, với xấp xỉ ban đầu $x_0 = 0$, tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 3 bước lặp.

Câu 2. Dùng công thức nội suy Lagrange, tìm đa thức nội suy của hàm số có giá trị cho trong bảng

x	−4	0	2
y	17	1	5

Câu 3. Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$

x_i	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
y_i	−0.401	−0.307	−0.211	−0.112	−0.0124	0.0875	0.187	0.284

a) Dùng công thức ba điểm, tính gần đúng $f''(x_i), i = \overline{0,7}$.

b) Tính gần đúng $\int_{4.3}^5 f(x) dx$.

Câu 1. Dùng công thức nội suy Lagrange, tìm đa thức nội suy của hàm số có giá trị cho trong bảng

x	-2	-1	0	1
y	-1	0	-1	8

Câu 2. Xét phương trình $x = \frac{2 \cos(x)}{3}$ trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Bằng phương pháp lặp điểm bất động, với xấp xỉ ban đầu $x_0 = 0$, tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 3 bước lặp.

Câu 3. Cho biết công thức tính độ dài đường cong $y = \varphi(x)$ với $x \in [a, b]$ là $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} dx$. Bằng phương pháp Simpson, tính gần đúng độ dài đường cong $y = \sin(5x - 4)$ khi x chạy từ -2 đến 0 , khi chia đều đoạn $[-2, 0]$ thành 8 đoạn, và đánh giá sai số.

Câu 1. Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$

x_i	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0
y_i	0.717	0.751	0.783	0.813	0.841

a) Dùng công thức ba điểm, tính gần đúng $f'(x_i)$, $i = \overline{0, 4}$.

b) Tính gần đúng $\int_{0.8}^1 f(x) dx$ bằng phương pháp hình thang.

Câu 2. Dùng công thức nội suy Newton lùi, tìm đa thức nội suy của hàm số có giá trị cho trong bảng

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
y	-15	$-\frac{97}{8}$	-9	$-\frac{51}{8}$

Câu 3. Xét phương trình $x = \frac{2 \cos(x)}{3}$ trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Bằng phương pháp lặp điểm bất động, với xấp xỉ ban đầu $x_0 = 0$, tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 3 bước lặp.

Đáp án

38)

1 a) $f'(x_0) \approx \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}$, $f'(x_n) \approx \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}$. . . **0.5đ**

$$f'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad i = \overline{1, n-1}$$

Bảng giá trị **0.5đ**

x_i	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0
$f'(x_i) \approx$	0.69214	0.65918	0.62134	0.58105	0.54321

b) $I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{y_i + y_{i-1}}{2} = 0.15637$. . . **0.5đ + 0.5đ**

2 a) $\Delta^0 y_i \equiv y_i, \quad i = \overline{0, n}; \quad \Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad k = \overline{1, n}, \quad i = \overline{0, n-k}$
0.5đ

Bảng sai phân **0.5đ**

$k \backslash i$	0	1	2	3
0	-15	$-\frac{97}{8}$	-9	$-\frac{51}{8}$
1	$\frac{23}{8}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{21}{8}$	
2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$		
3	$-\frac{3}{4}$			

b) $P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (t+i), \quad t = \frac{x - x_n}{h}, \quad x_n = -\frac{1}{2}, h = \frac{1}{2}$. . **0.5đ**

$$P(x) = -\frac{t(t+1)(t+2)}{8} - \frac{t(t+1)}{4} + \frac{21t}{8} - \frac{51}{8} \mathbf{0.25đ}$$

$$P(x) = -x^3 - 4x^2 + x - 5 \mathbf{0.25đ}$$

- 3 a) $g(x) = \frac{2 \cos(x)}{3}$; $0 \leq -2.9141 \cdot 10^{-8} \leq g(x) \leq 0.66667 \leq \frac{\pi}{2}$ **0.25đ**
 $|g'(x)| \leq 0.66667 = q < 1 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **0.25**
 $x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, \dots$ **0.25**
 $|x_n - x^*| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|, n \geq 1$ **0.25đ**

b) Bảng giá trị trong đó x_1, ε_n được **0.5đ** **1đ**

n	x_n	ε_n
1	0.66667	1.3333
2	0.52392	0.28548
3	0.57724	0.10663

63)

- 1 a) $g(x) = \frac{2 \cos(x)}{3}$; $0 \leq -2.9141 \cdot 10^{-8} \leq g(x) \leq 0.66667 \leq \frac{\pi}{2}$ **0.25đ**
 $|g'(x)| \leq 0.66667 = q < 1 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **0.25**
 $x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, \dots$ **0.25**
 $|x_n - x^*| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|, n \geq 1$ **0.25đ**

b) Bảng giá trị trong đó x_1, ε_n được **0.5đ** **1đ**

n	x_n	ε_n
1	0.66667	1.3333
2	0.52392	0.28548
3	0.57724	0.10663

- 2 a) $f''(x_0) \approx \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2}, \quad f''(x_n) \approx \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2}$ **0.5đ**
 $f''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad i = \overline{1, n-1}$

Bảng giá trị **0.5đ**

x_i	2.0	2.05	2.1	2.15	2.2	2
$f''(x_i) \approx$	-0.87891	-0.87891	-0.83008	-0.87891	-0.78125	-0

$$b) I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{y_i + y_{i-1}}{2} = 0.28651 \dots \quad \mathbf{0.5đ + 0.5đ}$$

$$3 \quad a) P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \dots \dots \dots \quad \mathbf{0.5 + 0.5đ}$$

$$b) L_0(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{6} = \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \dots \dots \dots \quad \mathbf{0.5đ}$$

$$L_1(x) = -\frac{(x-2)(x+1)}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{3} = \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}$$

$$P(x) = 2x^2 - 5x + 4. \dots \dots \dots \quad \mathbf{0.5đ}$$

70)

$$1 \quad a) g(x) = \frac{2 \cos(x)}{3}; \quad 0 \leq -2.9141 \cdot 10^{-8} \leq g(x) \leq 0.66667 \leq \frac{\pi}{2} \quad \mathbf{0.25đ}$$

$$|g'(x)| \leq 0.66667 = q < 1 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \dots \dots \dots \quad \mathbf{0.25}$$

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \dots \dots \quad \mathbf{0.25}$$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|, \quad n \geq 1 \dots \dots \dots \quad \mathbf{0.25đ}$$

b) Bảng giá trị trong đó x_1, ε_n được **0.5đ** $\dots \dots \dots$ **1đ**

n	x_n	ε_n
1	0.66667	1.3333
2	0.52392	0.28548
3	0.57724	0.10663

$$2 \quad a) P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \dots \dots \dots \quad \mathbf{0.5 + 0.5đ}$$

$$b) L_0(x) = \frac{x(x-2)}{24} = \frac{x^2}{24} - \frac{x}{12} \dots \dots \dots 0.5đ$$

$$L_1(x) = -\frac{(x-2)(x+4)}{8} = -\frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + 1$$

$$L_2(x) = \frac{x(x+4)}{12} = \frac{x^2}{12} + \frac{x}{3}$$

$$P(x) = x^2 + 1. \dots \dots \dots 0.5đ$$

$$3 \quad a) f''(x_0) \approx \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2}, \quad f''(x_n) \approx \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} \dots \dots \dots 0.5đ$$

$$f''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$\text{Bảng giá trị} \dots \dots \dots 0.5đ$$

x_i	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8
$f''(x_i) \approx$	0.30212	0.29907	0.21362	0.11292	0.012207	-0.085258

$$b) I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{y_i + y_{i-1}}{2} = -0.042715 \quad \dots \quad 0.5đ + 0.5đ$$

87)

$$1 \quad a) P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \dots \dots \dots 0.5 + 0.5đ$$

$$b) L_0(x) = -\frac{x(x-1)(x+1)}{6} = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6} \dots \dots \dots 0.5đ$$

$$L_1(x) = \frac{x(x-1)(x+2)}{2} = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - x$$

$$L_2(x) = -\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{2} = -\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2} + 1$$

$$L_3(x) = \frac{x(x+1)(x+2)}{6} = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}$$

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x - 1. \dots \dots \dots 0.5đ$$

2 a) $g(x) = \frac{2 \cos(x)}{3}$; $0 \leq -2.9141 \cdot 10^{-8} \leq g(x) \leq 0.66667 \leq \frac{\pi}{2}$ **0.25đ**

$|g'(x)| \leq 0.66667 = q < 1 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **0.25**

$x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, \dots$ **0.25**

$|x_n - x^*| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|, n \geq 1$ **0.25đ**

b) Bảng giá trị trong đó x_1, ε_n được **0.5đ** **1đ**

n	x_n	ε_n
1	0.66667	1.3333
2	0.52392	0.28548
3	0.57724	0.10663

3 a) $f(x) = \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} = \sqrt{25 \cos^2(5x - 4) + 1}$ **0.25đ**

Bảng giá trị **0.25đ**

x_i	-2.0	-1.75	-1.5	-1.25	-1.0	-0.75	-0.5	-0.25
y_i	1.2114	5.0166	2.6153	3.5363	4.6641	1.1266	4.9843	2.7488

b) $\ell = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (x_{2i} - x_{2i-2}) \frac{y_{2i} + 4y_{2i-1} + y_{2i-2}}{6} = 6.5725$ **0.25đ + 0.5đ**

c) $|f^{(4)}(x)| \leq M_4, \forall x \in [a, b] \Rightarrow$ chọn $M_4 = 2.7208 \cdot 10^5$ **0.25đ**

Sai số: $\frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4} = 11.809$ **0.25đ + 0.25đ**

94)

1 a) $P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ **0.5 + 0.5đ**

$$b) L_0(x) = -\frac{(x-4)(x-1)(x+2)}{28} = -\frac{x^3}{28} + \frac{3x^2}{28} + \frac{3x}{14} - \frac{2}{7} \dots \dots \dots \mathbf{0.5đ}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-4)(x-1)(x+3)}{18} = \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{9} - \frac{11x}{18} + \frac{2}{3}$$

$$L_2(x) = -\frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{36} = -\frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{36} + \frac{7x}{18} + \frac{2}{3}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x+2)(x+3)}{126} = \frac{x^3}{126} + \frac{2x^2}{63} + \frac{x}{126} - \frac{1}{21}$$

$$P(x) = -x^2 + x + 3. \dots \dots \dots \mathbf{0.5đ}$$

2 a) $f(x) = \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} = \sqrt{25 \cos^2(5x) + 1} \dots \dots \dots \mathbf{0.25đ}$

Bảng giá trị $\dots \dots \dots \mathbf{0.25đ}$

x_i	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0
y_i	4.3129	2.001	1.7354	4.1287	5.099

$$b) \ell = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{y_i + y_{i-1}}{2} = 6.2855 \dots \dots \dots \mathbf{0.25đ + 0.5đ}$$

c) $|f''(x)| \leq M_2, \forall x \in [a, b] \Rightarrow$ chọn $M_2 = 122.57. \dots \dots \dots \mathbf{0.25đ}$

Sai số: $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = 5.1072. \dots \dots \dots \mathbf{0.25đ + 0.25đ}$

3 a) $f(x) = x + e^x; f' > 0, f'' > 0, f(-1) < 0, f(2) > 0 \Rightarrow x_0 = 2. \mathbf{0.25đ}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, \dots \dots \dots \mathbf{0.25đ}$$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2 = \varepsilon_n, n \geq 1. \dots \dots \dots \mathbf{0.25đ}$$

$$|f''(x)| \leq M \forall x \in [-1, 2] \Rightarrow \text{chọn } M = 7.3891.$$

$$m = \min \{|f'(-1)|, |f'(2)|\} = 1.3679 \dots \dots \dots \mathbf{0.25đ}$$

b) Bảng giá trị trong đó x_1, ε_n được $\mathbf{0.5đ} \dots \dots \dots \mathbf{1đ}$

n	x_n	ε_n
1	0.8808	3.3832
2	-0.084275	2.5155
3	-0.51931	0.51116
4	-0.56672	0.0060725
5	-0.56714	$4.7652 \cdot 10^{-7}$