

Câu 1. Cho chương trình đệ quy bằng mã Python để tính a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```

1 def a(n):
2     if n == 0:
3         return 2
4     if n == 1:
5         return -8
6
7     x = a(n-1)
8     for i in range(42):
9         x = x + a(n-2)
10    return x

```

- (Trả lời nhanh) Xác định a_8 .
- Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$.
- Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà chương trình cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.
- (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n .

Câu 2. Cho đoạn chương trình giả mã:

```

1 for i = 1 to n do
2     for j = 1 to i do
3         for k = 1 to i do
4             print i, j, k

```

- (Trả lời nhanh) Với $n = 5$, lệnh **print** được thực thi bao nhiêu lần?
- Với $n \in \mathbb{Z}^+$ bất kỳ, số lần thực thi lệnh **print** là một đa thức với biến n . Xác định đa thức đó, từ đó cho biết chương trình có độ phức tạp bậc mấy?

Câu 3. a) Định nghĩa hàm Euler phi $\Phi(n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$.

- Giả sử n có phân tích nguyên tố $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, với p_i nguyên tố, $e_i \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Nêu công thức của $\Phi(n)$ và chứng minh.

- Áp dụng công thức trên để tính $\Phi(1970)$

Câu 4. Cho tập $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ và quan hệ \mathcal{R} trên A :

$$\mathcal{R} = \{(a, b), (a, f), (b, b), (c, c), (d, a), (d, d), (d, f), (e, d), (e, e), (e, f), (f, b), (f, e)\}.$$

- Lập ma trận biểu diễn M của \mathcal{R} .
- Theo thuật toán Warshall:
 - Tìm các ma trận W_k với $k = \overline{1, 5}$.
 - Tìm ma trận biểu diễn M^* của bao đóng bắc cầu \mathcal{R}^* của \mathcal{R} . Từ đó xác định \mathcal{R}^* .

Câu 5. a) Bằng quy nạp toán học, chứng minh

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

- Chứng minh $\sum_{k=1}^n k^4$ chia hết cho $\sum_{k=1}^n k^2$ khi và chỉ khi n có dạng $n = 5m + 1$ hoặc $n = 5m + 3$, $m \in \mathbb{N}$.

Câu 1. a) Phát biểu nguyên lý bù trừ cho n tập.

b) Cho n vật đánh số từ 1 tới n , và n hộp đánh số từ 1 tới n . Xếp n vật vào n hộp sao cho mỗi hộp chỉ chứa 1 vật. Có bao nhiêu cách xếp để có ít nhất một vật cùng số với hộp chứa nó.

c) Với $n = 7$ có bao nhiêu cách xếp như vậy?.

Câu 2. Trên tập $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ cho quan hệ hai ngôi \mathcal{R} gồm các cặp:

$(a, a), (a, e), (c, c), (c, e), (e, d), (f, b),$
 $(a, d), (b, b), (c, d), (d, d), (e, e), (f, f).$

a) Thông qua ma trận quan hệ, chứng minh \mathcal{R} là quan hệ thứ tự.

b) Vẽ biểu đồ Hasse cho \mathcal{R} . Từ đó:

i) Cho biết các phần tử tối đại, tối tiểu của A .

Câu 3. Cho đoạn chương trình giả mã:

```
1 for i = 1 to n do
2     for j = 1 to i do
3         for k = 1 to i do
4             print i, j, k
```

a) (Trả lời nhanh) Với $n = 12$, lệnh **print** được thực thi bao nhiêu lần?

b) Với $n \in \mathbb{Z}^+$ bất kỳ, số lần thực thi lệnh **print** là một đa thức với biến n . Xác định đa thức đó, từ đó cho biết chương trình có độ phức tạp bậc mấy?

Câu 4. Cho chương trình đệ quy bằng mã Python để tính a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```
1 def a(n):
2     if n == 0:
3         return -7
4     if n == 1:
5         return 2
6
7     x = a(n-1)
8     for i in range(56):
9         x = x + a(n-2)
10    return x
```

a) (Trả lời nhanh) Xác định a_4 .

b) Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$.

c) Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà chương trình cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.

d) (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n .

Câu 1. a) Phát biểu nguyên lý bù trừ cho n tập.

b) Cho n vật đánh số từ 1 tới n , và n hộp đánh số từ 1 tới n . Xếp n vật vào n hộp sao cho mỗi hộp chỉ chứa 1 vật. Có bao nhiêu cách xếp để không có hộp nào chứa vật cùng số với nó.

c) Với $n = 8$ có bao nhiêu cách xếp như vậy?.

Câu 2. Cho đoạn chương trình giả mã:

```
1 for i = 1 to n do
2     for j = 1 to i do
3         for k = 1 to i do
4             print i, j, k
```

a) (Trả lời nhanh) Với $n = 14$, lệnh **print** được thực thi bao nhiêu lần?

b) Với $n \in \mathbb{Z}^+$ bất kỳ, số lần thực thi lệnh **print** là một đa thức với biến n . Xác định đa thức đó, từ đó cho biết chương trình có độ phức tạp bậc mấy?

Câu 3. Cho chương trình đệ quy bằng mã Python để tính a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```
1 def a(n):
2     if n == 0:
3         return 2
4     if n == 1:
5         return 0
6
7     x = a(n-1)
8     for i in range(30):
9         x = x + a(n-2)
10    return x
```

a) (Trả lời nhanh) Xác định a_9 .

b) Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$.

c) Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà chương trình cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.

d) (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n .

Câu 4. Cho tập $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ và quan hệ \mathcal{R} trên A :

$$\mathcal{R} = \{(a, c), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, d), (d, e), (e, b), (e, d), (f, f)\}.$$

a) Lập ma trận biểu diễn M của \mathcal{R} .

b) Tìm các ma trận biểu diễn M^k của \mathcal{R}^k , với $k = \overline{2, 6}$.

c) Tìm ma trận biểu diễn M^* của bao đóng bắc cầu \mathcal{R}^* của \mathcal{R} . Từ đó xác định \mathcal{R}^* .

Câu 5. Cho dãy Fibonacci $\{F_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Bằng quy nạp toán học, chứng minh

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Câu 1. Cho chương trình đệ quy bằng mã Python để tính a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```

1 def a(n):
2     if n == 0:
3         return 4
4     if n == 1:
5         return -2
6
7     x = a(n-1)
8     for i in range(2):
9         x = x + a(n-2)
10    return x

```

- (Trả lời nhanh) Xác định a_5 .
- Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$.
- Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà chương trình cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.
- (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n .

Câu 2. a) Trình bày thuật toán chia đôi liên tiếp để tính a^n với $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Mô tả giá trị của các biến với $n = 26$.

c) Đặt $f(n)$ là số chu trình của thuật toán. Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh $f(n) \leq 1 + \log_2 n$.

Câu 3. Cho đoạn chương trình giả mã:

```

1 for i = 1 to n do
2     for j = i to n do
3         for k = j to n do
4             print i, j, k

```

- (Trả lời nhanh) Với $n = 13$, lệnh **print** được thực thi bao nhiêu lần?
- Với $n \in \mathbb{Z}^+$ bất kỳ, số lần thực thi lệnh **print** là một đa thức với biến n . Xác định đa thức đó, từ đó cho biết chương trình có độ phức tạp bậc mấy?

Câu 4. Cho dãy Fibonacci $\{F_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Bằng quy nạp toán học, chứng minh

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Câu 5. Trên tập $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ cho quan hệ hai ngôi \mathcal{R} gồm các cặp:

$(a, a), (a, f), (b, c), (c, c), (d, d), (e, e),$
 $(a, c), (b, b), (b, f), (c, f), (d, e), (f, f).$

- Thông qua ma trận quan hệ, chứng minh \mathcal{R} là quan hệ thứ tự.
- Vẽ biểu đồ Hasse cho \mathcal{R} . Từ đó:
 - Cho biết các phần tử tối đại, tối tiểu của A .

Câu 1. Cho dãy Fibonacci $\{F_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Bằng quy nạp toán học, chứng minh

$$F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Câu 2. Cho chương trình đệ quy bằng mã Python để tính a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```

1 def a(n):
2     if n == 0:
3         return -3
4     if n == 1:
5         return 7
6
7     x = a(n-1)
8     for i in range(2):
9         x = x + a(n-2)
10    return x

```

- (Trả lời nhanh) Xác định a_6 .
- Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$.
- Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà chương trình cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.
- (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n .

Câu 3. Cho đoạn chương trình giả mã:

```

1 for i = 1 to n do
2     for j = 1 to i do
3         for k = 1 to i do
4             print i, j, k

```

- (Trả lời nhanh) Với $n = 6$, lệnh **print** được thực thi bao nhiêu lần?
- Với $n \in \mathbb{Z}^+$ bất kỳ, số lần thực thi lệnh **print** là một đa thức với biến n . Xác định đa thức đó, từ đó cho biết chương trình có độ phức tạp bậc mấy?

Câu 4. a) Phát biểu nguyên lý bù trừ cho n tập.

- Cho n vật đánh số từ 1 tới n , và n hộp đánh số từ 1 tới n . Xếp n vật vào n hộp sao cho mỗi hộp chỉ chứa 1 vật. Có bao nhiêu cách xếp để không có hộp nào chứa vật cùng số với nó.
- Với $n = 8$ có bao nhiêu cách xếp như vậy?

Câu 5. Cho tập $A = \{a, b, c, d, e\}$ và quan hệ \mathcal{R} trên A :

$$\mathcal{R} = \{(a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (d, d), (e, b), (e, c), (e, e)\}.$$

- Lập ma trận biểu diễn M của \mathcal{R} .
- Theo thuật toán Warshall:
 - Tìm các ma trận W_k với $k = \overline{1, 4}$.
 - Tìm ma trận biểu diễn M^* của bao đóng bắc cầu \mathcal{R}^* của \mathcal{R} . Từ đó xác định \mathcal{R}^* .

Câu 1. Cho đoạn chương trình giả mã:

```

1 for i = 1 to n do
2     for j = i to n do
3         for k = j to n do
4             print i, j, k

```

- a) (Trả lời nhanh) Với $n = 19$, lệnh **print** được thực thi bao nhiêu lần?
- b) Với $n \in \mathbb{Z}^+$ bất kỳ, số lần thực thi lệnh **print** là một đa thức với biến n . Xác định đa thức đó, từ đó cho biết chương trình có độ phức tạp bậc mấy?

Câu 2. Cho tập $A = \{a, b, c, d, e\}$ và quan hệ \mathcal{R} trên A :

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, d), (c, c), (d, e), (e, a), (e, d), (e, e)\}.$$

- a) Lập ma trận biểu diễn M của \mathcal{R} .
- b) Theo thuật toán Warshall:
- Tìm các ma trận W_k với $k = \overline{1, 4}$.
 - Tìm ma trận biểu diễn M^* của bao đóng bắc cầu \mathcal{R}^* của \mathcal{R} . Từ đó xác định \mathcal{R}^* .

Câu 3. a) Bằng quy nạp toán học, chứng minh

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

- b) Chứng minh nếu $n > 1$ thì $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2$ không chia hết cho $\sum_{k=1}^n (2k-1)$.

Câu 4. a) Trình bày thuật toán Euclid tìm ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương. Từ đó:

- b) Xây dựng công thức tìm khai triển Euclid của hai số nguyên dương.
- c) Minh họa công thức trên để tìm khai triển Euclid của 2025 và 1940.

Câu 5. Cho chương trình đệ quy bằng mã Python để tính a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```

1 def a(n):
2     if n == 0:
3         return 8
4
5     x = 9
6     for i in range(6):
7         x = x + a(n-1)
8     for i in range(n):
9         x = x + 9
10    return x

```

- a) (Trả lời nhanh) Xác định a_4 .
- b) Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$.
- c) Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà chương trình cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.
- d) (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n .

Câu 1. a) Phát biểu nguyên lý bù trừ cho n tập.

b) Cho n vật đánh số từ 1 tới n , và n hộp đánh số từ 1 tới n . Xếp n vật vào n hộp sao cho mỗi hộp chỉ chứa 1 vật. Có bao nhiêu cách xếp để không có hộp nào chứa vật cùng số với nó.

c) Với $n = 9$ có bao nhiêu cách xếp như vậy?.

Câu 2. Cho đoạn chương trình giả mã:

```
1 for i = 1 to n do
2     for j = i to n do
3         for k = j to n do
4             print i, j, k
```

a) (Trả lời nhanh) Với $n = 16$, lệnh **print** được thực thi bao nhiêu lần?

b) Với $n \in \mathbb{Z}^+$ bất kỳ, số lần thực thi lệnh **print** là một đa thức với biến n . Xác định đa thức đó, từ đó cho biết chương trình có độ phức tạp bậc mấy?

Câu 3. Cho tập $A = \{a, b, c, d, e\}$ và quan hệ \mathcal{R} trên A :

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, e), (c, a), (c, c), (c, e), (d, d), (e, a), (e, b)\}.$$

a) Lập ma trận biểu diễn M của \mathcal{R} .

b) Tìm các ma trận biểu diễn M^k của \mathcal{R}^k , với $k = \overline{2, 5}$.

c) Tìm ma trận biểu diễn M^* của bao đóng bắc cầu \mathcal{R}^* của \mathcal{R} . Từ đó xác định \mathcal{R}^* .

Câu 4. a) Bằng quy nạp toán học, chứng minh

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

b) Chứng minh nếu $n > 1$ thì $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2$ không chia hết cho $\sum_{k=1}^n (2k-1)$.

Câu 5. Cho chương trình đệ quy bằng mã Python để tính a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```
1 def a(n):
2     if n == 0:
3         return -3
4
5     x = -1
6     for i in range(7):
7         x = x + a(n-1)
8     for i in range(n):
9         x = x - 1
10    return x
```

a) (Trả lời nhanh) Xác định a_4 .

b) Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$.

c) Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà chương trình cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.

d) (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n .

Câu 1. Cho chương trình đệ quy bằng mã Python để tính a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```

1 def a(n):
2     if n == 0:
3         return -8
4     if n == 1:
5         return 8
6
7     x = a(n-1)
8     for i in range(56):
9         x = x + a(n-2)
10    return x

```

- (Trả lời nhanh) Xác định a_9 .
- Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$.
- Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà chương trình cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.
- (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n .

Câu 2. Cho đoạn chương trình giả mã:

```

1 for i = 1 to n do
2     for j = 1 to i do
3         for k = 1 to i do
4             print i, j, k

```

- (Trả lời nhanh) Với $n = 14$, lệnh **print** được thực thi bao nhiêu lần?
- Với $n \in \mathbb{Z}^+$ bất kỳ, số lần thực thi lệnh **print** là một đa thức với biến n . Xác định đa thức đó, từ đó cho biết chương trình có độ phức tạp bậc mấy?

Câu 3. a) Định nghĩa hàm Euler phi $\Phi(n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$.

- Giả sử n có phân tích nguyên tố $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, với p_i nguyên tố, $e_i \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Nêu công thức của $\Phi(n)$ và chứng minh.
- Áp dụng công thức trên để tính $\Phi(2025)$

Câu 4. Cho dãy Fibonacci $\{F_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Bằng quy nạp toán học, chứng minh

$$F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Câu 5. Cho tập $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ và quan hệ \mathcal{R} trên A :

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, d), (b, a), (b, e), (c, b), (c, c), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (e, a), (f, f)\}.$$

- Lập ma trận biểu diễn M của \mathcal{R} .
- Tìm các ma trận biểu diễn M^k của \mathcal{R}^k , với $k = \overline{2, 6}$.
- Tìm ma trận biểu diễn M^* của bao đóng bắc cầu \mathcal{R}^* của \mathcal{R} . Từ đó xác định \mathcal{R}^* .

Câu 1. a) Phát biểu nguyên lý bù trừ cho n tập.

b) Cho n vật đánh số từ 1 tới n , và n hộp đánh số từ 1 tới n . Xếp n vật vào n hộp sao cho mỗi hộp chỉ chứa 1 vật. Có bao nhiêu cách xếp để có ít nhất một vật cùng số với hộp chứa nó.

c) Với $n = 10$ có bao nhiêu cách xếp như vậy?

Câu 2. a) Bằng quy nạp toán học, chứng minh

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

b) Chứng minh nếu $n > 1$ thì $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2$ không chia hết cho $\sum_{k=1}^n (2k-1)$.

Câu 3. Cho chương trình đệ quy bằng mã Python để tính a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```
1 def a(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4
5     x = 7
6     for i in range(3):
7         x = x + a(n-1)
8     for i in range(n):
9         x = x - 8
10    return x
```

a) (Trả lời nhanh) Xác định a_5 .

b) Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$.

c) Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà chương trình cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.

d) (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n .

Câu 4. Cho đoạn chương trình giả mã:

```
1 for i = 1 to n do
2     for j = 1 to i do
3         for k = 1 to i do
4             print i, j, k
```

a) (Trả lời nhanh) Với $n = 17$, lệnh **print** được thực thi bao nhiêu lần?

b) Với $n \in \mathbb{Z}^+$ bất kỳ, số lần thực thi lệnh **print** là một đa thức với biến n . Xác định đa thức đó, từ đó cho biết chương trình có độ phức tạp bậc mấy?

Câu 5. Cho tập $A = \{a, b, c, d, e\}$ và quan hệ \mathcal{R} trên A :

$$\mathcal{R} = \{(a, e), (b, b), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (d, d), (d, e), (e, c)\}.$$

a) Lập ma trận biểu diễn M của \mathcal{R} .

b) Theo thuật toán Warshall:

i) Tìm các ma trận W_k với $k = \overline{1, 4}$.

ii) Tìm ma trận biểu diễn M^* của bao đóng bắc cầu \mathcal{R}^* của \mathcal{R} . Từ đó xác định \mathcal{R}^* .

Câu 1. a) Phát biểu nguyên lý bù trừ cho n tập.

b) Cho các số nguyên dương $m \geq n$. Nêu và chứng minh công thức đếm số toàn ánh từ tập cỡ m vào tập cỡ n .

c) Lập bảng tính số toàn ánh với $5 \geq m \geq n \geq 1$.

Câu 2. Cho đoạn chương trình giả mã:

```
1 for i = 1 to n do
2     for j = 1 to i do
3         for k = 1 to i do
4             print i, j, k
```

a) (Trả lời nhanh) Với $n = 16$, lệnh **print** được thực thi bao nhiêu lần?

b) Với $n \in \mathbb{Z}^+$ bất kỳ, số lần thực thi lệnh **print** là một đa thức với biến n . Xác định đa thức đó, từ đó cho biết chương trình có độ phức tạp bậc mấy?

Câu 3. Cho chương trình đệ quy bằng mã Python để tính a_n , với $n = 0, 1, 2, \dots$

```
1 def a(n):
2     if n == 0:
3         return 8
4
5     x = -3
6     for i in range(7):
7         x = x + a(n-1)
8     for i in range(n):
9         x = x + 4
10    return x
```

a) (Trả lời nhanh) Xác định a_7 .

b) Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{a_n\}$.

c) Đặt f_n là số phép toán (số học, so sánh, logic, gán) mà chương trình cần để tính a_n . Lập hệ thức đệ quy của dãy $\{f_n\}$.

d) (Trả lời nhanh) Tìm công thức tường minh của f_n .

Câu 4. Cho tập $A = \{a, b, c, d, e\}$ và quan hệ \mathcal{R} trên A :

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, d), (c, d), (d, b), (d, c), (e, e)\}.$$

a) Lập ma trận biểu diễn M của \mathcal{R} .

b) Tìm các ma trận biểu diễn M^k của \mathcal{R}^k , với $k = 2, 5$.

c) Tìm ma trận biểu diễn M^* của bao đóng bắc cầu \mathcal{R}^* của \mathcal{R} . Từ đó xác định \mathcal{R}^* .

Câu 5. Cho dãy Fibonacci $\{F_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Bằng quy nạp toán học, chứng minh

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Đáp án

12)

1 a) 1330. 0.5đ

b) Mỗi lệnh **print** được thực thi tương ứng với một chu trình tối giản của vòng lặp, tức là ứng với một bộ (i, j, k) thỏa mãn $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$. Đó là một tổ hợp lặp chập 3 của n số từ 1 tới n 0.5đ

Vậy số lệnh **print** được thực thi là $\binom{n+3-1}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} \in O(n^3)$ 0.5 + 0.5đ

Chương trình có độ phức tạp bậc 3. 0.5đ

2 a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

b) $W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

Còn lại 0.25đ

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $M^* = W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

\mathcal{R}^* (nên xem M^*). 0.25đ

3 a) $(2 \cdot 1 - 1)^2 = \frac{1(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)}{3}$ 0.5đ

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1)^2 = \sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 + (2n + 1)^2 \quad 0.25đ$$

$$= \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3} + (2n + 1)^2 \quad 0.5đ$$

$$= \frac{(n + 1)(2n + 1)(2n + 3)}{3} \quad 0.25đ$$

Kết luận 0.25đ

- b) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ (kết quả đã học) 0.25đ
- $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 / \sum_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n-1)(2n+1)}{3n} = \frac{1}{3} \left(4n - \frac{1}{n} \right)$ 0.25đ
- $n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{đpcm}$ 0.25đ
- 4 a) 0.5đ
- b) 1đ
- c) $r_2 = 85, r_3 = 70, r_4 = 15, r_5 = 10, r_6 = 5$, 0.25đ
- $q_1 = 1, x_2 = 1, y_2 = -1; \quad q_2 = 22, x_3 = -22, y_3 = 23; \quad q_3 = 1, x_4 = 23, y_4 = -24; \quad q_4 = 4, x_5 = -114, y_5 = 119;$
 $q_5 = 1, x_6 = 137, y_6 = -143;$ 0.25 + 0.25đ
- $137 \times 2025 - 143 \times 1940 = 5;$ 0.25đ
- 5 a) $a_4 = 15489$ 0.5đ
- b) $a_0 = 8, \quad a_n = 9 + 6a_{n-1} + 9n$ 0.5đ
- c) $f_0 = 1$ 0.25đ
- $f_n = (1) + (1) + (3 + f_{n-1}) \times 6 + 2 \times n = 6f_{n-1} + 2n + 20$ 0.25 + 0.25 + 0.25đ
- d) $f_n = \frac{-6^n + 2n + 22}{21}$ 0.5đ
- 17)
- 1 a) $a_5 = 18$ 0.5đ
- b) $a_0 = 4, a_1 = -2, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ 0.5đ
- c) $f_0 = 1$ 0.25đ
- $f_1 = 1 + 1 = 2$ 0.25đ
- $f_n = (1) + (1) + (2 + f_{n-1}) + (3 + f_{n-2}) \times 2 = f_{n-1} + 2f_{n-2} + 10$ 0.25 + 0.25đ
- d) $f_n = 5(-1)^n + 4 \cdot 2^n - 5$ 0.5đ
- 2 a) 1đ
- b) 0.5đ
- c) 1đ
- 3 a) 455. 0.5đ
- b) Mỗi lệnh **print** được thực thi tương ứng với một chu trình tối giản của vòng lặp, tức là ứng với một bộ (i, j, k) thỏa mãn $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$. Đó là một tổ hợp lặp chập 3 của n số từ 1 tới n 0.5đ
- Vậy số lệnh **print** được thực thi là $\binom{n+3-1}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} \in O(n^3)$ 0.5 + 0.5đ
- Chương trình có độ phức tạp bậc 3 0.5đ
- 4 $F_1 = F_2$ 0.5đ
- $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n+1} = (F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}) + F_{2n+1}$ 0.5đ
- $= F_{2n} + F_{2n+1}$ 0.5đ
- $= F_{2n+2}$ 0.5đ
- Kết luận 0.5đ

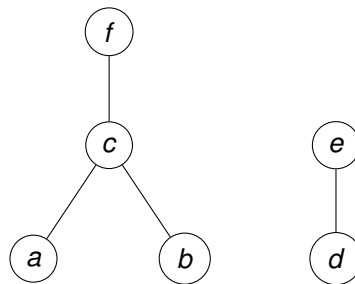
5 a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

$M \geq I_n$ 0.25đ

$M^T \wedge M \leq I_n$ 0.25đ

$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leq M$ 0.5đ

b) Biểu đồ Hasse 0.5đ



i) Phần tử tối đại: f, e , tối tiểu: a, b, d 0.25đ

ii) Sắp xếp tôpô: $f, c, (a, b); e, d$ 0.25đ

22)

1 a) 0.5đ

b) 1.5đ

c) 0.5đ

2 a) $(2 \cdot 1 - 1)^2 = \frac{1(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)}{3}$ 0.5đ

$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1)^2 = \sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 + (2n + 1)^2$ 0.25đ

$= \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3} + (2n + 1)^2$ 0.5đ

$= \frac{(n + 1)(2n + 1)(2n + 3)}{3}$ 0.25đ

Kết luận 0.25đ

b) $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$ (kết quả đã học) 0.25đ

$\sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 / \sum_{k=1}^n (2k - 1) = \frac{(2n - 1)(2n + 1)}{3n} = \frac{1}{3} \left(4n - \frac{1}{n} \right)$ 0.25đ

$n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{đpcm}$ 0.25đ

3 a) $a_5 = -342$ 0.5đ

b) $a_0 = 1, a_n = 7 + 3a_{n-1} - 8n$ 0.5đ

c) $f_0 = 1$ 0.25đ

$f_n = (1) + (1) + (3 + f_{n-1}) \times 3 + 2 \times n = 3f_{n-1} + 2n + 11$ 0.25 + 0.25 + 0.25đ

d) $f_n = \frac{-3^n + 2n + 13}{12}$ 0.5đ

4 a) 1785 0.5đ

b) Với mỗi i cố định, theo quy tắc nhân, dòng 2–4 thực hiện $i \times i = i^2$ lệnh **print** 0.5đ

Theo quy tắc cộng, chương trình thực hiện $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in O(n^3)$ lệnh **print**. 0.5 + 0.5đ

Chương trình có độ phức tạp bậc 3 0.5đ

5 a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 0.5đ

b) $W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 0.5đ

Còn lại 0.25đ

$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $M^* = W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

\mathcal{R}^* (nên xem M^*) 0.25đ

26)

1 a) 0.5đ

b) 1.5đ

c) 0.5đ

2 a) 1496 0.5đ

b) Với mỗi i cố định, theo quy tắc nhân, dòng 2–4 thực hiện $i \times i = i^2$ lệnh **print** 0.5đ

Theo quy tắc cộng, chương trình thực hiện $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in O(n^3)$ lệnh **print**. 0.5 + 0.5đ

Chương trình có độ phức tạp bậc 3 0.5đ

3 a) $a_7 = 6817101$ 0.5đ

b) $a_0 = 8, a_n = -3 + 7a_{n-1} + 4n$ 0.5đ

c) $f_0 = 1$ 0.25đ

$f_n = (1) + (1) + (3 + f_{n-1}) \times 7 + 2 \times n = 7f_{n-1} + 2n + 23$ 0.25 + 0.25 + 0.25đ

d) $f_n = \frac{-7^n + 2n + 25}{24}$ 0.5đ

4 a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

b) $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

Còn lại 0.25đ

$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $M^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

\mathcal{R}^* (nhìn xem M^*) 0.25đ

5 $F_1^2 - F_2 F_0 = 1 = (-1)^0$ 0.5đ

$F_{n+1}^2 - F_{n+2} F_n = F_{n+1}^2 - (F_{n+1} + F_n) F_n$ 0.5đ

$= F_{n+1}^2 - F_{n+1} F_n - F_n^2 = F_{n+1} (F_{n+1} - F_n) - F_n^2$ 0.5đ

$= F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = -(F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1}) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$ 0.5đ

Kết luận 0.5đ

- 1 a) 0.5đ
- b) 1.5đ
- c) 0.5đ

- 2 a) 1015 0.5đ

- b) Với mỗi i cố định, theo quy tắc nhân, dòng 2–4 thực hiện $i \times i = i^2$ lệnh **print** 0.5đ

Theo quy tắc cộng, chương trình thực hiện $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in O(n^3)$ lệnh **print**. 0.5 + 0.5đ

Chương trình có độ phức tạp bậc 3 0.5đ

- 3 a) $a_9 = 7030860$ 0.5đ

- b) $a_0 = 2, a_1 = 0, a_n = a_{n-1} + 30a_{n-2}$ 0.5đ

- c) $f_0 = 1$ 0.25đ

$f_1 = 1 + 1 = 2$ 0.25đ

$f_n = (1) + (1) + (2 + f_{n-1}) + (3 + f_{n-2}) \times 30 = f_{n-1} + 30f_{n-2} + 94$ 0.25 + 0.25đ

d) $f_n = \frac{415(-5)^n + 432 \cdot 6^n - 517}{165}$ 0.5đ

4 a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

b) $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

Còn lại 0.25đ

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) M^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots 0.5đ$$

\mathcal{R}^* (nhìn xem M^*) 0.25đ

5 $F_1 = F_2$ 0.5đ

$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n+1} = (F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}) + F_{2n+1}$ 0.5đ

$= F_{2n} + F_{2n+1}$ 0.5đ

$= F_{2n+2}$ 0.5đ

Kết luận 0.5đ

63)

1 $F_0 = F_1 - 1$ 0.5đ

$F_0 + F_2 + F_4 + \dots + F_{2n+2} = (F_0 + F_2 + \dots + F_{2n}) + F_{2n+2}$ 0.5đ

$= (F_{2n+1} - 1) + F_{2n+2} = (F_{2n+1} + F_{2n+2}) - 1$ 0.5đ

$= F_{2n+3} - 1$ 0.5đ

Kết luận 0.5đ

2 a) $a_6 = 81$ 0.5đ

b) $a_0 = -3, a_1 = 7, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ 0.5đ

c) $f_0 = 1$ 0.25đ

$f_1 = 1 + 1 = 2$ 0.25đ

$f_n = (1) + (1) + (2 + f_{n-1}) + (3 + f_{n-2}) \times 2 = f_{n-1} + 2f_{n-2} + 10$ 0.25 + 0.25đ

d) $f_n = -\frac{8(-1)^n - 14 \cdot 2^n + 15}{3}$ 0.5đ

3 a) 91 0.5đ

b) Với mỗi i cố định, theo quy tắc nhân, dòng 2–4 thực hiện $i \times i = i^2$ lệnh **print** 0.5đ

Theo quy tắc cộng, chương trình thực hiện $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in O(n^3)$ lệnh **print**. 0.5 + 0.5đ

Chương trình có độ phức tạp bậc 3 0.5đ

4 a) 0.5đ

b) 1.5đ

c) 0.5đ

5 a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

b) $W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

Còn lại 0.25đ

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $M^* = W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots 0.5đ$

\mathcal{R}^* (nhìn xem M^*) $\dots \dots \dots 0.25đ$

69)

1 a) $a_9 = -235799416 \dots \dots \dots 0.5đ$

b) $a_0 = -8, a_1 = 8, a_n = a_{n-1} + 56a_{n-2} \dots \dots \dots 0.5đ$

c) $f_0 = 1 \dots \dots \dots 0.25đ$

$f_1 = 1 + 1 = 2 \dots \dots \dots 0.25đ$

$f_n = (1) + (1) + (2 + f_{n-1}) + (3 + f_{n-2}) \times 56 = f_{n-1} + 56f_{n-2} + 172 \dots \dots \dots 0.25 + 0.25đ$

d) $f_n = -\frac{707(-7)^n + 328 \cdot 8^n + 645}{210} \dots \dots \dots 0.5đ$

2 a) 1015 $\dots \dots \dots 0.5đ$

b) Với mỗi i cố định, theo quy tắc nhân, dòng 2–4 thực hiện $i \times i = i^2$ lệnh **print** $\dots \dots \dots 0.5đ$

Theo quy tắc cộng, chương trình thực hiện $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in O(n^3)$ lệnh **print** $\dots \dots \dots 0.5 + 0.5đ$

Chương trình có độ phức tạp bậc 3 $\dots \dots \dots 0.5đ$

3 a) $\dots \dots \dots 0.5đ$

b) $\dots \dots \dots 0.5 + 1đ$

c) $2025 = 3^4 \times 5^2 \dots \dots \dots 0.25đ$

$\Phi(2025) = 1080 \dots \dots \dots 0.25đ$

4 $F_0 = F_1 - 1 \dots \dots \dots 0.5đ$

$F_0 + F_2 + F_4 + \dots + F_{2n+2} = (F_0 + F_2 + \dots + F_{2n}) + F_{2n+2} \dots \dots \dots 0.5đ$

$= (F_{2n+1} - 1) + F_{2n+2} = (F_{2n+1} + F_{2n+2}) - 1 \dots \dots \dots 0.5đ$

$= F_{2n+3} - 1 \dots \dots \dots 0.5đ$

Kết luận $\dots \dots \dots 0.5đ$

5 a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots 0.5đ$

$$b) M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots 0.5đ$$

Còn lại 0.25đ

$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) M^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots 0.5đ$$

\mathcal{R}^* (nên xem M^*) 0.25đ

91)

1 a) 0.5đ

b) 1.5đ

c) 0.5đ

2 a) 816. 0.5đ

b) Mỗi lệnh **print** được thực thi tương ứng với một chu trình tối giản của vòng lặp, tức là ứng với một bộ (i, j, k) thỏa mãn $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$. Đó là một tổ hợp lặp chập 3 của n số từ 1 tới n 0.5đ

Vậy số lệnh **print** được thực thi là $\binom{n+3-1}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} \in O(n^3)$ 0.5 + 0.5đ

Chương trình có độ phức tạp bậc 3. 0.5đ

$$3 a) M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots 0.5đ$$

$$b) M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots 0.5đ$$

Còn lại 0.25đ

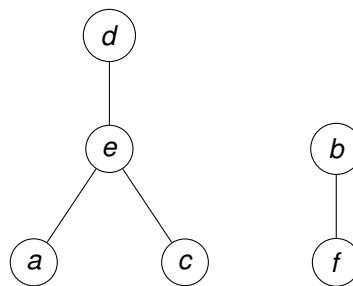
2 a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

$M \geq I_n$ 0.25đ

$M^T \wedge M \leq I_n$ 0.25đ

$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leq M$ 0.5đ

b) Biểu đồ Hasse 0.5đ



i) Phần tử tối đại: d, b , tối tiểu: a, c, f 0.25đ

ii) Sắp xếp tô pô: $d, e, (a, c); b, f$ 0.25đ

3 a) 650 0.5đ

b) Với mỗi i cố định, theo quy tắc nhân, dòng 2–4 thực hiện $i \times i = i^2$ lệnh **print** 0.5đ

Theo quy tắc cộng, chương trình thực hiện $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in O(n^3)$ lệnh **print**. 0.5 + 0.5đ

Chương trình có độ phức tạp bậc 3 0.5đ

4 a) $a_4 = -22118$ 0.5đ

b) $a_0 = -7, a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 56a_{n-2}$ 0.5đ

c) $f_0 = 1$ 0.25đ

$f_1 = 1 + 1 = 2$ 0.25đ

$f_n = (1) + (1) + (2 + f_{n-1}) + (3 + f_{n-2}) \times 56 = f_{n-1} + 56f_{n-2} + 172$ 0.25 + 0.25đ

d) $f_n = -\frac{511(-7)^n + 314 \cdot 8^n + 645}{210}$ 0.5đ

98)

1 a) $a_8 = 4616212$ 0.5đ

b) $a_0 = 2, a_1 = -8, a_n = a_{n-1} + 42a_{n-2}$ 0.5đ

c) $f_0 = 1$ 0.25đ

$f_1 = 1 + 1 = 2$ 0.25đ

$f_n = (1) + (1) + (2 + f_{n-1}) + (3 + f_{n-2}) \times 42 = f_{n-1} + 42f_{n-2} + 130$ 0.25 + 0.25đ

d) $f_n = \frac{852(-6)^n + 539 \cdot 7^n - 845}{273}$ 0.5đ

2 a) 55 0.5đ

b) Với mỗi i cố định, theo quy tắc nhân, dòng 2–4 thực hiện $i \times i = i^2$ lệnh **print** 0.5đ

Theo quy tắc cộng, chương trình thực hiện $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in O(n^3)$ lệnh **print**. 0.5 + 0.5đ

Chương trình có độ phức tạp bậc 3 0.5đ

3 a) 0.5đ

b) 0.5 + 1đ

c) $1970 = 2^1 \times 5^1 \times 197^1$ 0.25đ

$\Phi(1970) = 784$ 0.25đ

4 a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 0.5đ

b) $W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 0.5đ

Còn lại 0.25đ

$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$W_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $M^* = W_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5đ

\mathcal{R}^* (nên xem M^*) 0.25đ

5 a) $1^4 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)(3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1)}{30}$ 0.5đ

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^4 = \sum_{k=1}^n k^4 + (n+1)^4$$
 0.25đ

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} + (n+1)^4$$
 0.5đ

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)[3(n+1)^2+3(n+1)-1]}{30}$$
 0.25đ

Kết luận 0.25đ

b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (kết quả đã học) 0.25đ

$$\sum_{k=1}^n k^4 / \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{3n^2+3n-1}{5}$$
 0.25đ

Xét các trường hợp $n = 5m + r, 0 \leq r \leq 4$, và kết luận 0.25đ