TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG HÀ NỘI **Đề kiểm tra ĐQT môn: Toán học tính toán,** **Đề số 90**

Bộ môn Toán ứng dụng *Được dùng tài liệu. Không trao đổi, hỏi bài.*

Họ và tên:______________________________**MSSV:**__________**Lớp MH:**__________

Câu 1. Giải gần đúng phương trình vi phân

$$y'' = -2y' + 2y + 2x - 1, \quad y(4) = -4, \quad y'(4) = 0$$

tại các điểm $x_n = 4 + n \times 0.5$ với $1 \leq n \leq 4$ bằng phương pháp RK4.

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} -7x + 2.1y + 2.59z = 35 \\ -1.2x - 4y + 0.8z = 16 \\ -0.93x + 0.21y - 3z = -9 \end{cases}$. Với xấp xỉ ban đầu $x_0 = -3, y_0 = 3, z_0 = 2$, bằng phương pháp lặp điểm bất động, tìm nghiệm gần đúng sau 4 bước lặp.

Câu 3. Bằng phương pháp bình phương tối thiểu, tìm xấp xỉ của hàm số $y = f(x)$ có giá trị trong bảng sau bởi đa thức lượng giác bậc nhất $P(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ và đánh giá sai số.

x_k	-2.1	0.4	2.2	2.6
y_k	-3.6	4.7	3.1	1.5

TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG HÀ NỘI **Đề kiểm tra ĐQT môn: Toán học tính toán,** **Đề số 23**

Bộ môn Toán ứng dụng *Được dùng tài liệu. Không trao đổi, hỏi bài.*

Họ và tên:____________________ **MSSV:**__________ **Lớp MH:**__________

Câu 1. Giải gần đúng bài toán giá trị ban đầu của phương trình vi phân

$$y' = 3y + 3x + 2, \quad y(-1) = -2$$

tại các điểm $x_n = -1 + n \times 0.15$ với $1 \leq n \leq 4$ bằng phương pháp RK4.

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x = 0.1x - 0.06y + 0.04z - 4 \\ y = 0.05x + 0.11y + 0.02z - 5 \\ z = 0.1x + 0.07y - 0.09z + 2 \end{cases}$. Với xấp xỉ ban đầu $x_0 = -4, y_0 = 1, z_0 = 5$, bằng phương pháp Gauss−Seidel, tìm nghiệm gần đúng và đánh giá $\|X_k - X_{k-1}\|_\infty$ sau 3 bước lặp, trong đó $X_k = (x_k, y_k, z_k)^T$.

Câu 3. Bằng phương pháp bình phương tối thiểu, tìm xấp xỉ của hàm số $z = f(x, y)$ có giá trị trong bảng sau bởi đa thức bậc nhất (hai biến) $P(x, y) = a + bx + cy$ và đánh giá sai số.

x_k	−3.4	−1.0	1.8	2.0	3.0
y_k	0.5	1.0	4.7	4.5	−0.8
z_k	6.9	5.7	20.9	19.6	−7.5

TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG HÀ NỘI **Đề kiểm tra ĐQT môn: Toán học tính toán,** $\boxed{\textbf{Đề số 18}}$

Bộ môn Toán ứng dụng *Được dùng tài liệu. Không trao đổi, hỏi bài.*

Họ và tên:____________________ **MSSV:**__________ **Lớp MH:**__________

Câu 1. Giải gần đúng phương trình vi phân

$$y'' = 2y' + 4y - 4x + 2, \quad y(-3) = -2, \quad y'(-3) = -5$$

tại các điểm $x_n = -3 + n \times 0.2$ với $1 \leq n \leq 3$ bằng phương pháp RK4.

Câu 2. Bằng phương pháp bình phương tối thiểu, tìm xấp xỉ của hàm số $z = f(x, y)$ có giá trị trong bảng sau bởi đa thức bậc nhất (hai biến) $P(x, y) = a + bx + cy$ và đánh giá sai số.

x_k	-4.9	-3.7	2.5	2.9	3.1	4.3
y_k	4.9	1.7	-3.1	0.8	4.3	-0.2
z_k	-12.3	-2.3	11.8	-2.1	-14.0	1.4

Câu 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 = -0.02x_1 + 0.01x_2 + 0.06x_3 + 1 \\ x_2 = 0.11x_1 - 0.04x_2 + 0.1x_3 - 4 \\ x_3 = 0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.04x_3 + 3 \end{cases}$. Bằng phương pháp lặp điểm bất động, với xấp xỉ ban đầu $x^{(0)} = (-1, 4, -3)^T$, tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 4 bước lặp.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG HÀ NỘI — **Đề kiểm tra ĐQT môn: Toán học tính toán,** **Đề số 42**

Bộ môn Toán ứng dụng — *Được dùng tài liệu. Không trao đổi, hỏi bài.*

Họ và tên:______________________________ **MSSV:**__________ **Lớp MH:**__________

Câu 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} -3x - 1.47y - 0.66z = -12 \\ 0.1x + 5y - 1.85z = 0 \\ -0.57x - 1.23y - 3z = -6 \end{cases}$. Với xấp xỉ ban đầu $x_0 = 3, y_0 = 0, z_0 = -3$, bằng phương pháp lặp Gauss – Seidel, tìm nghiệm gần đúng sau 4 bước lặp.

Câu 2. Giải gần đúng phương trình vi phân

$$y'' = 5y' - 5y + 2x + 3, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 3$$

tại các điểm $x_n = 1 + n \times 0.5$ với $1 \leq n \leq 3$ bằng phương pháp RK4.

Câu 3. Bằng phương pháp bình phương tối thiểu, tìm xấp xỉ của hàm số $y = f(x)$ có giá trị trong bảng sau bởi đa thức lượng giác bậc nhất $P(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ và đánh giá sai số.

x_k	-4.9	-3.3	1.9	3.3	3.4
y_k	-0.90	-2.9	-1.3	-4.1	-3.9

Đán án

18)

1 a) $y' = z,\ Y = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix},\ f(x, Y) = \begin{bmatrix} z \\ 2z + 4y - 4x + 2 \end{bmatrix},\ x_0 = -3,\ Y_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ **0.25đ**

$k_1 = h_n f(x_n, Y_n)$ **0.25đ**

$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, Y_n + \frac{k_1}{2}\right)$

$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, Y_n + \frac{k_2}{2}\right)$

$k_4 = h_n f(x_n + h_n, Y_n + k_3)$

$Y_{n+1} = Y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}, \quad n = 0, 1, \ldots$ **0.5đ**

b) Bảng giá trị trong đó y_1 được **0.5đ** . . . . **0.5 + 0.5đ**

n	x_n	y_n
1	-2.8	-3.128
2	-2.6	-4.77425
3	-2.4	-7.56086

2 a) Cơ sở $f = \{1, x, y\}$ **0.25đ**

$Ac = b, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} f_i(x_k) f_j(x_k), \quad b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k) f_i(x_k)$ **0.25đ**

$$\begin{bmatrix} 6.0 & 4.2 & 8.4 \\ 4.2 & 80.46 & -23.26 \\ 8.4 & -23.26 & 55.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17.5 \\ 54.81 \\ -162.92 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2.1893 \\ c_2 = -0.42585 \\ c_3 = -3.4342 \end{cases}$$ . . . . **0.5 + 0.25đ**

b) **0.25đ**

x_k	-4.9	-3.7	2.5	2.9	3.1	4.3
y_k	4.9	1.7	-3.1	0.8	4.3	-0.2
z_k	-12.3	-2.3	11.8	-2.1	-14.0	1.4
$P_k = P(x_k, y_k)$	-12.552	-2.0732	11.771	-1.793	-13.898	1.045
$z_k - P_k$	0.25153	-0.22683	0.029375	-0.30697	-0.10215	0.35504

Sai số $\|f - P\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (z_k - P_k)^2} = 0.58848$ . . . . **0.25 + 0.25đ**

3 a) $B = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.01 & 0.06 \\ 0.11 & -0.04 & 0.1 \\ 0.04 & 0.01 & -0.04 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad q = \|B\|_\infty = 0.25 < 1$ **0.25đ**

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g, \quad \|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$ . . . . **0.5 + 0.25đ**

b) Bảng giá trị . . . . **0.5 + 0.5đ**

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	ε_k
1	0.88	-4.57	3.12	2.8567
2	1.1239	-3.4084	2.8647	0.3872
3	1.1153	-3.4536	2.8963	0.015055
4	1.1169	-3.4495	2.8942	0.0013404

23)

1 a) $f(x,y) = 3y + 3x + 2,\ x_0 = -1,\ y_0 = -2$ **0.25đ**

$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$ **0.25đ**

$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}, \quad n = 0, 1, \ldots$$ **0.5đ**

b) Bảng giá trị trong đó y_1 được **0.5đ** . . . . **0.5 + 0.5đ**

n	x_n	y_n
1	-0.85	-9.71775
2	-0.7	-43.233
3	-0.55	-190.486
4	-0.4	-839.197

2 a) $B = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.06 & 0.04 \\ 0.05 & 0.11 & 0.02 \\ 0.1 & 0.07 & -0.09 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad q = \|B\|_\infty = 0.26 < 1$ **0.5đ**

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j<i} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j \ge i} b_{ij} x_j^{(k)} + g_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, \ldots$$ **0.5đ**

b) Bảng giá trị . . . . **0.5 + 0.5đ**

k	x_k	y_k	z_k	ε_k
1	-4.26	-5.003	0.77379	6.003
2	-4.0949	-5.7396	1.1191	0.7366
3	-4.0203	-5.81	1.0905	0.074521

3 a) Cơ sở $f = \{1, x, y\}$ **0.25đ**

$$Ac = b, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} f_i(x_k) f_j(x_k), \quad b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k) f_i(x_k)$$ **0.25đ**

$$\begin{bmatrix} 5.0 & 2.4 & 9.9 \\ 2.4 & 28.8 & 12.36 \\ 9.9 & 12.36 & 44.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.6 \\ 25.16 \\ 201.58 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0.010643 \\ c_2 = -1.2297 \\ c_3 = 4.8988 \end{cases}$$ . . . . **0.5 + 0.25đ**

b) **0.25đ**

x_k	-3.4	-1.0	1.8	2.0	3.0
y_k	0.5	1.0	4.7	4.5	-0.8
z_k	6.9	5.7	20.9	19.6	-7.5
$P_k = P(x_k, y_k)$	6.6409	6.1391	20.822	19.596	-7.5974
$z_k - P_k$	0.25908	-0.4391	0.078465	0.0041565	0.097404

Sai số $\|f - P\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (z_k - P_k)^2} = 0.52497$ . . . . **0.25 + 0.25đ**

42)

1 a) $A = \begin{bmatrix} -3 & -1.47 & -0.66 \\ 0.1 & 5 & -1.85 \\ -0.57 & -1.23 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ **0.25đ**

$$b_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{nếu } i \neq j \\ 0, & \text{nếu } i = j \end{cases}, \quad g_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$$ **0.25đ**

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0.49 & -0.22 \\ -0.02 & 0 & 0.37 \\ -0.19 & -0.41 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad q = \|B\|_\infty = 0.71 < 1$$ **0.25đ**

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j<i} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j \geq i} b_{ij} x_j^{(k)} + g_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, \ldots$$ **0.25đ**

b) Bảng giá trị . . . . **0.5 + 0.5đ**

k	x_k	y_k	z_k
1	4.66	−1.2032	1.6079
2	4.2358	0.51021	0.98601
3	3.5331	0.29416	1.2081
4	3.5901	0.3752	1.1641

2 a) $y' = z,\ Y = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix},\ f(x, Y) = \begin{bmatrix} z \\ 5z - 5y + 2x + 3 \end{bmatrix},\ x_0 = 1,\ Y_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ **0.25đ**

$k_1 = h_n f(x_n, Y_n)$ **0.25đ**

$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, Y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, Y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, Y_n + k_3)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}, \quad n = 0, 1, \ldots$$ **0.5đ**

b) Bảng giá trị trong đó y_1 được **0.5đ** . . . . **0.5 + 0.5đ**

n	x_n	y_n
1	1.5	5.0599
2	2.0	−1.44027
3	2.5	−64.0665

3 a) Cơ sở $f = \{1, \cos x, \sin x\}$ **0.25đ**

$$Ac = b, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} f_i(x_k) f_j(x_k), \quad b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k) f_i(x_k)$$ **0.25đ**

$$\begin{bmatrix} 5.0 & -3.0785 & 1.6732 \\ -3.0785 & 3.0242 & 0.12437 \\ 1.6732 & 0.12437 & 1.9758 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.094 \\ 10.934 \\ -0.9276 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -3.1709 \\ c_2 = 0.29733 \\ c_3 = 2.1972 \end{cases}$$ . . . . **0.5 + 0.25đ**

b) **0.25đ**

x_k	−4.9	−3.3	1.9	3.3	3.4
y_k	−0.9	−2.9	−1.3	−4.1	−3.9
$P_k = P(x_k)$	−0.95688	−3.118	−1.1879	−3.8111	−4.0199
$y_k - P_k$	0.058442	0.21952	−0.11289	−0.29042	0.12143

Sai số $\|f - P\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (y_k - P_k)^2} = 0.40427$ . . . . **0.25 + 0.25đ**

1 a) $y' = z,\ Y = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix},\ f(x, Y) = \begin{bmatrix} z \\ -2z + 2y + 2x - 1 \end{bmatrix},\ x_0 = 4,\ Y_0 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ **0.25đ**

$k_1 = h_n f(x_n, Y_n)$ **0.25đ**

$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, Y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, Y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, Y_n + k_3)$$

$Y_{n+1} = Y_n + \dfrac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}, \quad n = 0, 1, ...$ **0.5đ**

b) Bảng giá trị trong đó y_1 được **0.5đ** . . . . **0.5 + 0.5đ**

n	x_n	y_n
1	4.5	−4.06771
2	5.0	−4.095
3	5.5	−3.95665
4	6.0	−3.54861

2 a) $A = \begin{bmatrix} -7 & 2.1 & 2.59 \\ -1.2 & -4 & 0.8 \\ -0.93 & 0.21 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 35 \\ 16 \\ -9 \end{bmatrix}$ **0.25đ**

$b_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{nếu } i \neq j \\ 0, & \text{nếu } i = j \end{cases}, \quad g_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$. **0.25đ**

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.37 \\ -0.3 & 0 & 0.2 \\ -0.31 & 0.07 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad q = \|B\|_\infty = 0.67 < 1$ **0.25đ**

$X_{k+1} = BX_k + g$ **0.25đ**

b) Bảng giá trị . . . . **0.5 + 0.5đ**

k	x_k	y_k	z_k
1	−3.36	−2.7	4.14
2	−4.2782	−2.164	3.8526
3	−4.2237	−1.946	4.1748
4	−4.0391	−1.8979	4.1731

3 a) Cơ sở $f = \{1, \cos x, \sin x\}$ **0.25đ**

$Ac = b, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} f_i(x_k) f_j(x_k), \quad b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k) f_i(x_k)$ **0.25đ**

$\begin{bmatrix} 4.0 & -1.0292 & 0.85021 \\ -1.0292 & 2.1838 & -0.12306 \\ 0.85021 & -0.12306 & 1.8162 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.7031 \\ 3.0395 \\ 8.2212 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1.0924 \\ c_2 = 2.1411 \\ c_3 = 4.1604 \end{cases}$ . . . . **0.5 + 0.25đ**

b) **0.25đ**

x_k	−2.1	0.4	2.2	2.6
y_k	−3.6	4.7	3.1	1.5
$P_k = P(x_k)$	−3.5798	4.6846	3.196	1.4024
$y_k - P_k$	−0.021763	0.018562	−0.09442	0.097621

Sai số $\|f - P\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (y_k - P_k)^2} = 0.13879$ . . . . **0.25 + 0.25đ**