

BÀI 07

4.2. Sắc số của đồ thị

Khái niệm sắc số liên quan đến bài toán tô màu đồ thị như sau:

Hãy tô màu các đỉnh của một đồ thị đã cho, sao cho hai đỉnh kề nhau phải được tô bằng hai màu khác nhau.

Ta nói rằng, đồ thị G tô được bằng k màu nếu tồn tại hàm:

$$m : V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$$

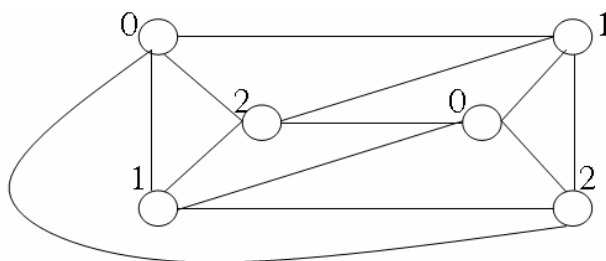
sao cho, nếu hai đỉnh x và y kề nhau thì $m(x) \neq m(y)$.

Dễ thấy rằng, đồ thị G tô màu được khi và chỉ khi nó không có đỉnh nút.

Định nghĩa 4.5: *Sắc số* của một đồ thị chính là số màu ít nhất dùng để tô các đỉnh của đồ thị đó.

Ta ký hiệu số s là sắc số của đồ thị G . Hiển nhiên $s \leq n$, số màu không vượt quá số đỉnh của đồ thị.

Ví dụ 4.6: Hãy tô màu đồ thị sau đây.



Hình 4.6. Tô màu các đỉnh đồ thị

Đồ thị trên có sắc số bằng 3.

Nhận xét: Mỗi cách tô màu m cho đồ thị G sẽ ứng với một cách phân hoạch tập đỉnh V thành các tập ổn định trong không giao nhau, mỗi tập ứng với một màu. Ngược lại, mỗi cách phân hoạch tập đỉnh V thành các tập ổn định trong không giao nhau sẽ cho ta một cách tô màu.

Định lý 4.6: Mọi chu trình độ dài lẻ luôn có sắc số bằng 3.

Chứng minh: Giả sử chu trình có độ dài là $2n+1$.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo số n .

$n = 1$: Chu trình gồm 3 đỉnh, mà hai đỉnh bất kỳ đều kề nhau. Vậy ta phải dùng đúng 3 màu để tô các đỉnh.

$(n) \Rightarrow (n+1)$: Giả sử α là một chu trình có độ dài $2(n+1)+1 = 2n+3$ với dãy các đỉnh là $[x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+3}]$.

Nối x_1 với x_{2n+1} ta được một chu trình α' có độ dài $2n+1$. Theo giả thiết quy nạp, chu trình α' có sắc số bằng 3. Lấy màu của x_1 tô cho x_{2n+2} , còn màu của x_{2n+1} tô cho x_{2n+3} . Chu trình α đã được tô màu mà không phải thêm màu mới. Vậy chu trình α có sắc số bằng 3. \square

Định lý 4.7: Đồ thị đầy đủ n đỉnh K_n có sắc số bằng n .

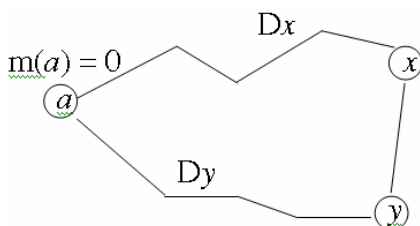
Dưới đây là một tiêu chuẩn đơn giản để kiểm tra xem một đồ thị có hai sắc (sắc số bằng 2) hay không.

Định lý 4.8 (Konig): Giả sử đồ thị G có ít nhất một cạnh. Đồ thị G là hai sắc khi và chỉ khi G không có chu trình đơn vô hướng độ dài lẻ.

Chứng minh:

Giả sử G là đồ thị hai sắc. Theo Định lý 4.6 thì G không thể có chu trình đơn vô hướng độ dài lẻ.

Ngược lại, giả sử G không có chu trình đơn vô hướng độ dài lẻ. Không mất tính tổng quát có thể xem G là liên thông. Chọn một đỉnh a nào đó trong đồ thị.



Hình 4.7. Cách xây dựng hàm tô màu

Đặt $m(a) = 0$.

Với $x \neq a$ ta ký hiệu $d(x)$ là độ dài đường đi vô hướng ngắn nhất nối a với x .

Đặt $m(x) = d(x) \bmod 2$. Ta sẽ chứng minh m là hàm màu của G .

Giả sử x, y kề nhau. Lấy Dx là đường đi vô hướng ngắn nhất nối a với x có độ dài $d(x)$, và Dy là đường đi vô hướng ngắn nhất nối a với y có độ dài $d(y)$. Chu trình đơn $[Dx, (x, y), Dy]$ có độ dài $d(x) + d(y) + 1$ phải là một số chẵn.

Vậy thì $d(x) + d(y)$ là một số lẻ, có nghĩa là $d(x)$ và $d(y)$ khác nhau tính chẵn lẻ.

Do vậy: $m(x) \neq m(y)$

Hàm tô màu m có hai giá trị, vậy sắc số ≤ 2 . G có ít nhất một cạnh nên sắc số của nó bằng 2. \square

Từ định lý trên chúng ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 4.9: Tất cả các chu trình độ dài chẵn đều có sắc số bằng 2.

Kết quả dưới đây cho ta một thuật toán tốt để tìm sắc số của một đồ thị vô hướng.

Định lý 4.10: Đồ thị vô hướng G có sắc số bằng s khi và chỉ khi G có hàm Grundy $g \leq s-1$.

Chứng minh:

\Leftarrow) Nếu đồ thị G có hàm Grundy $g \leq s-1$ thì chỉ việc chọn g làm hàm tô màu.

\Rightarrow) Ngược lại, giả sử đồ thị G có sắc số là s , nghĩa là tồn tại hàm tô màu m với tập màu là $\{0, 1, \dots, s-1\}$. Đồ thị G không có đỉnh nút.

Hàm tô màu m sẽ phân hoạch tập đỉnh V thành các tập ổn định trong không rỗng, không giao nhau: $C_i = \{x \mid m(x) = i\}$, $i = 0, 1, \dots, s-1$.

Với mỗi tập ổn định trong của đồ thị vô hướng luôn có thể bổ sung các đỉnh để thành cực đại, và đó cũng là nhân của đồ thị.

Ta xây dựng hai dãy tập con các đỉnh V_0, V_1, V_2, \dots và B_0, B_1, B_2, \dots lần lượt như sau:

$$V_0 = V$$

Vì C_0 là tập ổn định trong của V_0 nên có thể bổ sung để thành tập B_0 là nhân của V_0 . Hiển nhiên $B_0 \subseteq V_0$.

$$V_1 = V_0 \setminus B_0$$

Vì $C_1 \setminus B_0$ là tập ổn định trong của V_1 nên có thể bổ sung để thành tập B_1 là nhân của V_1 . Ta có $C_1 \setminus B_0 \subseteq B_1 \subseteq V_1$

\dots

$$V_{i+1} = V_i \setminus B_i$$

Vì $C_{i+1} \setminus (B_0 \cup \dots \cup B_i)$ là tập ổn định trong của V_{i+1} nên có thể bổ sung để thành tập B_{i+1} là nhân của V_{i+1} . Ta có $C_{i+1} \setminus (B_0 \cup \dots \cup B_i) \subseteq B_{i+1} \subseteq V_{i+1}$

Quá trình tiếp tục cho đến V_{k-1} .

$C_{k-1} \setminus (B_0 \cup \dots \cup B_{k-2})$ là tập ổn định trong của V_{k-1} .

Sau khi bổ sung thành nhân B_{k-1} ta có $C_{k-1} \setminus (B_0 \cup \dots \cup B_{k-2}) \subseteq B_{k-1} \subseteq V_{k-1}$.

Ta có $C_{k-1} = (C_{k-1} \cap (B_0 \cup \dots \cup B_{k-2})) \cup (C_{k-1} \setminus (B_0 \cup \dots \cup B_{k-2})) \subseteq (B_0 \cup \dots \cup B_{k-2}) \cup B_{k-1} = B_0 \cup \dots \cup B_{k-1}$

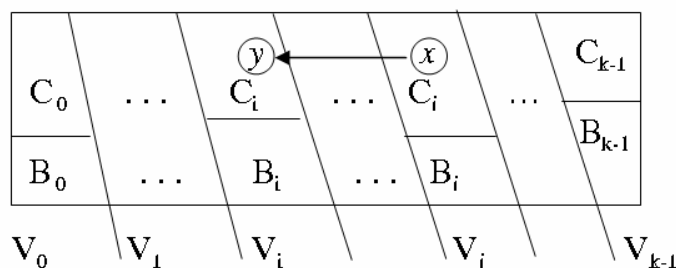
$$V = C_0 \cup \dots \cup C_{k-1} \subseteq B_0 \cup \dots \cup B_{k-1}$$

Vậy đến nhân B_{k-1} thì ta đã vét hết các đỉnh của V .

Ta được dãy: B_0, B_1, \dots, B_{k-1} , trong đó B_i là nhân của V_i .

Bây giờ ta xây dựng hàm Grundy cho đồ thị G .

Với $x \in B_i$ đặt $g(x) = i$ và ta chứng minh rằng g chính là một hàm Grundy của đồ thị G .



Hình 4.8. Cách xây dựng dãy các nhân

1) Nếu x, y kề nhau thì không thể cùng nằm trong một tập B_i vì B_i là nhân, cho nên $g(x) \neq g(y)$.

2) Giả sử có $u < g(x) = j$.

Khi đó $x \notin B_u$. Vì B_u là tập ổn định ngoài của V_u nên tồn tại $y \in B_u$ sao cho $y \in F(x)$. Suy ra $g(y) = u$, đó là điều phải chứng minh. \square

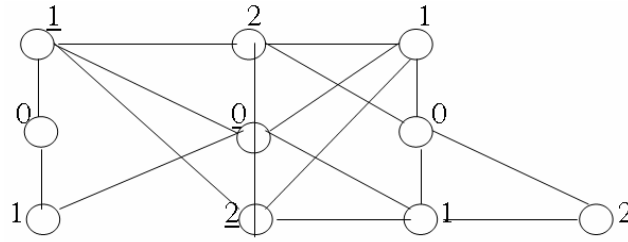
Hệ quả 4.11: Mọi đồ thị vô hướng không có đỉnh nút đều có hàm Grundy và giá trị cực đại của các hàm này phải bằng nhau và bằng sắc số của đồ thị trừ đi 1.

Thuật toán 4.12 (Tô màu đồ thị không có đỉnh nút)

- 1) Liệt kê các đỉnh x_1, x_2, \dots, x_n của đồ thị theo thứ tự giảm dần của bậc: $r(x_1) \geq r(x_2) \geq \dots \geq r(x_n)$ để làm giảm các phép kiểm tra ở bước dưới.
- 2) Tô màu 0 cho đỉnh x_1 (đỉnh có bậc lớn nhất) cùng các đỉnh không kề với x_1 và không kề với các đỉnh đã tô màu 0.
- 3) Lặp lại thủ tục tô màu $i+1$ giống như thủ tục tô màu i cho đến khi tô màu hết các đỉnh của đồ thị.

Số màu đã dùng chính là sắc số của đồ thị.

Ví dụ 4.7: Tô màu đồ thị sau đây.



Hình 4.9. Tô màu một đồ thị

Định lý 4.13: Giả sử đồ thị G tô được bằng $s+1$ màu, đồ thị H tô được bằng $t+1$ màu. Khi đó đồ thị tổng $G + H$ tô được bằng $d+1$ màu, trong đó:

$$d = \max \{ s' \oplus t' \mid s' \leq s, t' \leq t \}.$$

Chứng minh:

Theo Định lý 4.10 đồ thị G có hàm Grundy $g \leq s$, đồ thị H có hàm Grundy $h \leq t$. Ta có $z((x,y)) = g(x) \oplus h(y)$ là hàm Grundy của đồ thị tổng $G + H$. Giá trị lớn nhất của hàm z là d . Từ đó suy ra kết quả. \square

Ví dụ 4.7: Đồ thị G tô được bằng 7 màu, đồ thị H tô được bằng 5 màu thì đồ thị tổng $G + H$ tô được bằng 8 màu.

Định lý 4.14: Nếu đồ thị G có n đỉnh và sắc số s thì số ổn định trong u của đồ thị G sẽ không nhỏ hơn $\frac{n}{s}$.

Chứng minh:

Lập các tập đỉnh cùng màu:

$C_i = \{x \mid x \text{ tô màu } i\}, i = 0, \dots, s-1$ là các tập ổn định trong.

$$|C_i| \leq u$$

$$n = \sum_{i=0}^{s-1} |C_i| \leq s \cdot u. \text{ Suy ra: } u \geq \frac{n}{s}$$

\square

Định lý 4.15: Nếu bậc lớn nhất của các đỉnh trong đồ thị G là r thì sắc số của đồ thị $G \leq r+1$.

Chứng minh:

Chứng minh quy nạp theo số đỉnh n .

$n = 1$: Bậc của đỉnh bằng 0 và sắc số bằng 1.

$n = 2$: Bậc của các đỉnh bằng 0 thì sắc số bằng 1 còn bậc của các đỉnh bằng 1 thì sắc số bằng 2.

$(n) \Rightarrow (n+1)$: Giả sử đồ thị G có n đỉnh, các đỉnh có bậc cao nhất là r . Theo giả thiết quy nạp: $s(G) \leq r+1$.

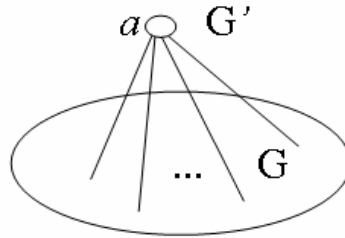
Đồ thị G' có $n+1$ đỉnh được xem là đồ thị G có n đỉnh và thêm một đỉnh mới a và một số cạnh kề nó. Khi đó: $s(G) \leq s(G') \leq s(G) + 1$.

Giả sử bậc cao nhất của các đỉnh trong G' là r' . Hiển nhiên: $r \leq r'$.

Nếu $s(G) \leq r$ thì: $s(G') \leq r+1 \leq r'+1$

Nếu $s(G) = r+1$ thì:

1) Trường hợp: $r < r'$ ta có: $s(G') \leq r+1+1 \leq r'+1$



Hình 4.10. Cách chọn màu cho đỉnh mới

2) Trường hợp: $r = r'$ thì đỉnh mới a được nối với không quá r đỉnh, do vậy chỉ cần giữ nguyên cách tô màu của G thì các đỉnh kề với a được tô không quá r màu và vẫn còn thừa một màu dành cho đỉnh a , suy ra:

$$s(G') = s(G) \leq r+1 = r'+1$$

□