**BÀI 03**

# Hàm Grundy trên đồ thị

Hàm Grundy là một hàm toán học xây dựng trên đồ thị, do P. M. Grundy đề xuất để nghiên cứu một số tính chất lý thú của đồ thị.

Trước tiên, ta ký hiệu tập các số nguyên không âm là N = {0, 1, 2, . . .}.

2.1. Hàm Grundy

***Định nghĩa 2.1:*** Giả sử G = (V, F) là một đồ thị. Hàm $g : V \to N$ được gọi là *hàm Grundy* của đồ thị G nếu:

$$\forall x \in V : \quad g(x) = \min \{N \setminus g(F(x))\}.$$

Từ định nghĩa trên suy ra hai tính chất đặc trưng của hàm Grundy như sau:

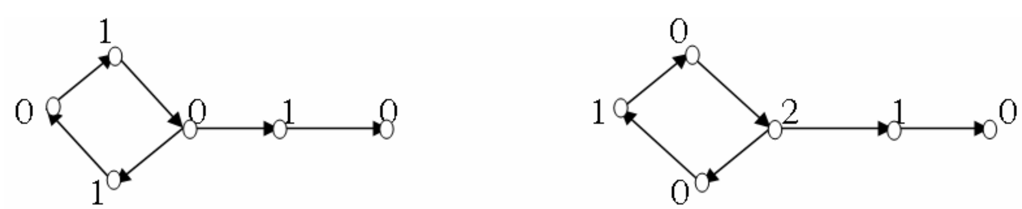
1) $\forall\, x, y \in V$, nếu $y \in F(x)$ thì $g(x) \neq g(y)$.
2) $\forall\, u \in N$, $u < g(x)$ : $u \in g(F(x))$ ; nghĩa là: $\exists\, y \in F(x)$ để $g(y) = u$.

Tính chất 1) chỉ ra rằng g($x$) không nằm trong tập giá trị của g trên F($x$), và tính chất 2) khẳng định g($x$) là số nguyên không âm bé nhất trong số các số không thuộc tập giá trị của hàm g trên F($x$).

Từ định nghĩa của hàm Grundy, ta có một số nhận xét sau đây:

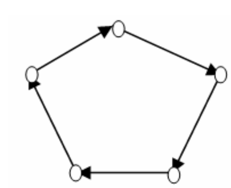
1. Đồ thị có đỉnh nút thì không thể có hàm Grundy.
2. Nếu $F(x) = \varnothing$ thì $g(x) = 0$ .
3. Tập hợp $\{x \mid x \in V, g(x) = 0\}$ luôn luôn khác rỗng.
4. $\forall\, x \in V$ : $g(x) \leq |F(x)|$, nghĩa là hàm Grundy nhận giá trị không lớn.

Ví dụ 2.2: Hàm Grundy có thể không duy nhất.




Hình 2.1. Đồ thị có hai hàm Grundy

Ví dụ 2.3: Hàm Grundy có thể không tồn tại.



Hình 2.2. Đồ thị không có hàm Grundy

Vậy với điều kiện nào thì một đồ thị có hàm Grundy.

***Định lý 2.1:*** Đồ thị G không có chu trình thì có duy nhất một hàm Grundy.

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát, có thể giả thiết rằng đồ thị G liên thông. Ta xây dựng hai dãy tập con các đỉnh: $V_0, V_1, \ldots$ và $P_0, P_1, \ldots$ lần lượt như sau:

$V_0 = V$

$P_0 = \{x \mid F(x) = \varnothing\}$

Tập $P_0$ không rỗng. Vì nếu $P_0$ rỗng có nghĩa là mọi đỉnh trong V luôn có đỉnh kề. Khi đó xuất phát từ một đỉnh có thể tạo một đường đi dài tuỳ ý. Điều này là vô lý vì trong G không có chu trình.

$V_1 = V_0 \setminus P_0$

$P_1 = \{x \mid x \in V_1 \wedge F(x) \subseteq V \setminus V_1\}$

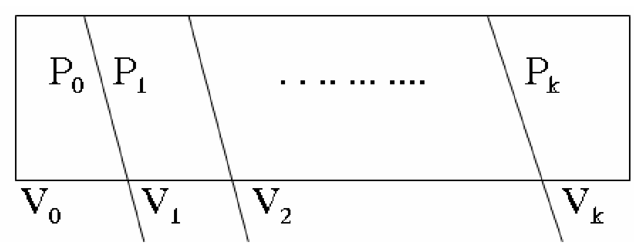
$V_2 = V_1 \setminus P_1$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$P_i = \{x \mid x \in Vi \wedge F(x) \subseteq V \setminus V_i\}$, với $i \geq 2$

$V_{i+1} = V_i \setminus P_i$

*Chú ý*: Nếu $P_k$ rỗng thì $V_k$ cũng rỗng, nghĩa là ta đã vét hết các đỉnh của đồ thị. Thật vậy, giả sử ngược lại là $P_k$ rỗng nhưng $V_k$ không rỗng, khi đó với mỗi $x \in V_k$ sẽ có $y \in F(x)$ để $y \notin V \setminus V_k$ , nghĩa là $y \in V_k$. Vậy với mọi đỉnh trong $V_k$ luôn có đỉnh kề cũng thuộc $V_k$. Khi đó xuất phát từ một đỉnh trong $V_k$ có thể tạo ra một đường đi dài tuỳ ý. Điều này là vô lý vì đồ thị G không có chu trình.




Hình 2.3. Cách xây dựng dãy tập con $P_0, P_1, \ldots, P_k$

Bây giờ ta xây dựng hàm $g : V \rightarrow N$ như sau:

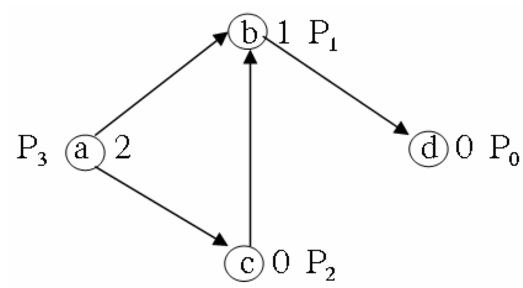
Với mọi $x \in P_0$ ta đặt $g(x) = 0$.

Với mỗi $x \in P_1$ nghĩa là $x \notin P_0$ và $F(x) \subseteq P_0$, do hàm g đã được xác định trên $P_0$, nên hàm g tại $x$ được xác định một cách duy nhất: $g(x) = \min \{N \setminus g(F(x))\}$.

Tiếp tục cách làm trên ta sẽ lần lượt xác định được giá trị hàm g tại mỗi đỉnh của đồ thị một cách duy nhất.

Định lý được chứng minh và cách chứng minh đã cho ta thuật toán tìm hàm Grundy cho đồ thị phi chu trình. □

Ví dụ 2.4: Xét đồ thị có hướng sau đây và cách xây dựng hàm Grundy trên nó.




Hình 2.4. Đồ thị và các tập con $P_i$

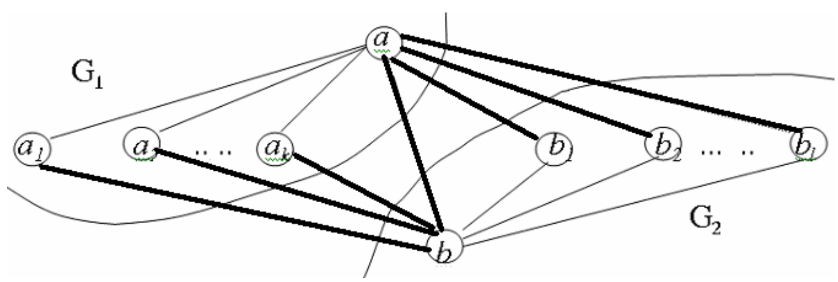
## 2.2. Tổng của các đồ thị

Cho hai đồ thị dưới dạng ánh xạ kề: $G_1 = (V_1, F_1)$ và $G_2 = (V_2, F_2)$.

***Định nghĩa 2.5***:

Đồ thị $G = (V, F)$ được gọi là *tổng* của $G_1$ và $G_2$, ký hiệu $G_1 + G_2$ với:

1) $V = V_1 \times V_2$
2) $(x,y) \in F((a,b)) \iff x = a \wedge y \in F_2(b)$ hoặc
$x \in F_1(a) \wedge y = b$.




Hình 2.5. Cách xây dựng đồ thị tổng

Giả sử đồ thị $G_1$ có hàm Grundy $g_1$, đồ thị $G_2$ có hàm Grundy $g_2$. Liệu đồ thị tổng $G_1 + G_2$ có hàm Grundy hay không và mối quan hệ của nó với các hàm $g_1$, $g_2$ thế nào. Để trả lời câu hỏi này, chúng ta đưa ra phép toán *d-tổng* trên các số nguyên như sau.

Với các số nguyên không âm $u, v \in N$, ta biểu diễn chúng dưới dạng nhị phân như sau:

$u = u_k\, u_{k-1} \dots u_1\, u_0$

$v = v_k\, v_{k-1} \dots v_1\, v_0$ với $u_i$, $v_i$ là các chữ số 0 hoặc 1.

Có thể xem độ dài biểu diễn của hai số là bằng nhau, nếu không thì ta thêm các số 0 vô nghĩa vào bên trái số ngắn hơn.

Đặt: $w_i = (u_i+v_i) \bmod 2$

***Định nghĩa 2.6***: Số nguyên $w$ có biểu diễn nhị phân là: $w_k\, w_{k-1} \dots w_1\, w_0$ được gọi là *d-tổng* của $u$ và $v$ và ta ký hiệu: $w = u \oplus v$

Chú ý rằng, phép toán này thực hiện giống như câu lệnh gán $w := u$ XOR $v$ ; trong ngôn ngữ lập trình Pascal.

Ví dụ 2.7: $7 \oplus 5 = 2$

$12 \oplus 15 = 3$

Một số tính chất của phép toán d-tổng:

1. Phép toán d-tổng có các tính chất giao hoán và kết hợp:
   $u \oplus v = v \oplus u$ ,
   $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ .
2. Phép toán d-tổng có đơn vị: $u \oplus 0 = 0 \oplus u = u$
3. d-tổng của hai số bằng 0 khi và chỉ khi chúng giống nhau:
   $u \oplus v = 0 \Leftrightarrow u = v$.

Vậy cặp (N, $\oplus$) trở thành một nhóm giao hoán.

***Định lý 2.2:*** Nếu $g_1$ là hàm Grundy của đồ thị $G_1$, $g_2$ là hàm Grundy của đồ thị $G_2$ thì $g((x,y)) = g_1(x) \oplus g_2(y)$ là hàm Grundy của đồ thị tổng $G = G_1 + G_2$.

Chứng minh:

Theo định nghĩa của hàm Grundy, ta cần phải chứng minh:

1. Nếu $(x,y) \in F((a,b))$ thì $g((a,b)) \neq g((x,y))$.
2. Nếu $u \in N$ , $u < g((a,b))$ thì tồn tại $(x,y) \in F((a,b))$ sao cho $g((x,y)) = u$.

Thật vậy, giả sử $(x,y) \in F((a,b))$. Theo định nghĩa của ánh xạ kề F, ta phải xét hai trường hợp sau:

1) $x = a$, $y \in F_2(b)$

Khi đó $g_2(y) \neq g_2(b)$.

$$g((a,b)) = g_1(a) \oplus g_2(b) = g_1(x) \oplus g_2(b) \neq g_1(x) \oplus g_2(y) = g((x,y)).$$

2) $x \in F_1(a)$, $y = b$ : Chứng minh hoàn toàn tương tự. Tính chất 1. được chứng minh xong.

Bây giờ ta chứng minh tính chất 2. Giả sử $u \in N$ và $u < g((a,b))$.

Ký hiệu $v = g_1(a)$ và $w = g_2(b)$. Ta có: $u < v \oplus w$.

Đặt $t = u \oplus v \oplus w$. Hiển nhiên $t \neq 0$ vì $u \neq v \oplus w$.

Hơn nữa $t \oplus u = u \oplus v \oplus w \oplus u = v \oplus w > u$. (*)

Xét biểu diễn nhị phân của các số trên:

$u = \ldots.\ u_k^{=0} \ldots$

$v = \ldots.\ v_k^{=1} \ldots$

$w = \ldots.\ w_k \ldots..$

$t = 0\ldots01_k \ldots..$

Giả sử $k$ là chỉ số của bit đầu tiên bằng 1 trong biểu diễn nhị phân của số t. Nếu $u_k = 1$ thì $(u_k + t_k) \bmod 2 = 0$. Suy ra: $t \oplus u < u$, trái với mệnh đề (*). Vậy thì $u_k = 0$.

Do bit thứ $k$ của $t$ bằng 1 nên hoặc $v_k$ hoặc $w_k$ phải bằng 1. Giả sử $v_k = 1$.

Đặt $s = t \oplus v$. Ta có $s < v = g_1(a)$.

Vì $g_1$ là hàm Grundy của đồ thị $G_1$ nên tồn tại $x \in F_1(a)$ sao cho $s = g_1(x)$. Theo định nghĩa của đồ thị tổng thì đỉnh $(x,b) \in F((a,b))$ và

$g((x,b)) = g_1(x) \oplus g_2(b) = s \oplus w = t \oplus v \oplus w = u$.

Khi $wk = 1$ chứng minh hoàn toàn tương tự.

Phần 2) đã chứng minh xong và cũng là kết thúc chứng minh của định lý. □

Kết quả trên có thể mở rộng cho tổng của nhiều đồ thị.