

BÀI 12

Chương 7 **Chu trình euler và chu trình hamilton**

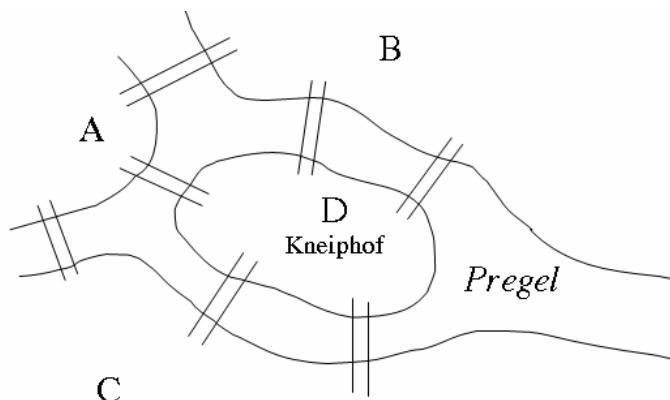
Chu trình Euler và chu trình Hamilton là hai loại chu trình rất nổi tiếng trong Lý thuyết Đồ thị, mà tên gọi của chúng gắn với tên của các nhà khoa học tìm ra nó. Không những thế, chúng còn nổi tiếng vì một số bài toán liên quan vẫn còn là những bài toán mở.

7.1. Chu trình Euler

Khái niệm chu trình Euler được ra đời từ bài toán nổi tiếng sau đây.

Ví dụ 7.1 (*Bài toán 7 cây cầu ở Königsberg*):

Thành phố Königsberg thuộc nước Cộng hoà Litva có con sông Pregel chảy qua, giữa sông có cù lao Kneiphof tạo nên bốn vùng đất. Người ta đã xây dựng 7 cây cầu để nối các vùng đất này lại với nhau như hình vẽ dưới đây.



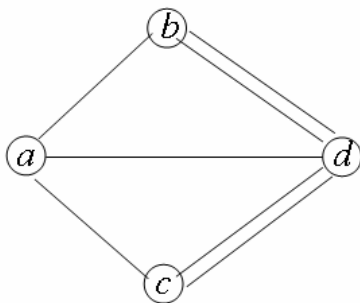
Hình 7.1. Bảy cây cầu trên sông Pregel

Năm 1736 L. Euler, nhà toán học người Thụy sĩ đã đưa ra bài toán sau đây:

Hỏi có thể đi qua cả 7 cây cầu, mỗi cầu chỉ đi qua một lần rồi quay trở về đúng chỗ xuất phát được hay không?

Bài toán đã làm say mê cư dân của thành phố. Họ háo hức đi thử nhưng không thành công. Sau đó, chính L. Euler đã chứng minh được rằng bài toán trên là không giải được.

Nếu biểu diễn mỗi vùng đất: A, B, C, D bằng đỉnh của một đa đồ thị vô hướng và có cạnh nối giữa chúng nếu có cầu nối tương ứng, thì bài toán trên đưa về việc tìm một chu trình đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần.



Hình 7.2. Đa đồ thị biểu diễn thành phố Königsberg

Từ bài toán trên, người ta đã đưa ra các khái niệm sau đây:

Định nghĩa 7.2: Đường Euler của đa đồ thị là đường đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần. Chu trình Euler của đa đồ thị là chu trình đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần.

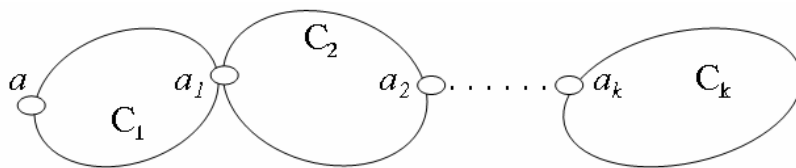
Từ định nghĩa trên, ta có điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của chu trình vô hướng Euler như sau.

Định lý 7.1: Đa đồ thị liên thông G có chu trình vô hướng Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh đều có bậc chẵn.

Chứng minh:

\Rightarrow : Mỗi lần chu trình đi qua một đỉnh thì đỉnh đó bớt đi hai cạnh kề. Cuối cùng số cạnh kề của mỗi đỉnh bằng 0. Do đó số cạnh kề với mỗi đỉnh phải là một số chẵn.

\Leftarrow : Xuất phát từ một đỉnh a nào đó ta lập dãy cạnh kề liên tiếp cho đến khi hết khả năng đi tiếp. Khi dừng phải ở đỉnh a vì bậc các đỉnh đều chẵn, ta được chu trình C_1 . Nếu đã vét hết các cạnh thì đó chính là chu trình cần tìm. Nếu vẫn còn cạnh thì do tính liên thông của đồ thị thì phải có một cạnh nào đó chưa được chọn và kề với đỉnh a_1 nào đó của chu trình đã có. Lại xuất phát từ a_1 và tiếp tục quá trình như trên cho đến khi hết khả năng đi tiếp, ta được chu trình C_2, \dots



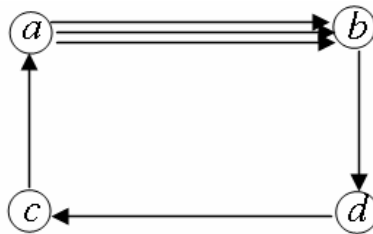
Hình 7.3. Các chu trình kề nhau

Khi đã vét hết các cạnh ta lập chu trình Euler cho đồ thị này như sau:

Từ đỉnh a đi theo nửa trên của C_1 cho đến a_1 , lại tiếp tục từ a_1 đi theo nửa trên của C_2 cho đến a_2, \dots Khi đã đến chu trình con cuối cùng ta đi ngược lại theo các nửa dưới của các chu trình con \dots và cuối cùng trở về đỉnh a . Ta nhận được một chu trình Euler. \square

Đa đồ thị có hướng có thể có chu trình Euler vô hướng nhưng không có chu trình Euler có hướng.

Ví dụ 7.3:



Hình 7.4. Đa đồ thị có hướng

Hệ quả 7.2: Đa đồ thị liên thông G có đường đi Euler vô hướng khi và chỉ khi số đỉnh bậc lẻ bằng 2.

Chứng minh:

\Rightarrow : Nếu có đường đi Euler vô hướng nối a với b thì a, b là hai đỉnh duy nhất có bậc lẻ.

\Leftarrow : Giả sử a, b là hai đỉnh duy nhất có bậc lẻ. Xây dựng đồ thị G' từ G bằng cách thêm vào cạnh (a, b) . G' sẽ không có đỉnh bậc lẻ, nên theo Định lý 7.1 G' sẽ có chu trình Euler vô hướng. Bỏ cạnh (a, b) đi ta có đường đi Euler vô hướng trong đồ thị G . \square

Với đồ thị có hướng, ta có điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của chu trình có hướng Euler như sau.

Định lý 7.3: Đa đồ thị có hướng liên thông có chu trình Euler có hướng khi và chỉ khi tại mỗi đỉnh của đồ thị số cạnh đi vào bằng số cạnh đi ra (đỉnh cân bằng), nghĩa là:

$$\forall x \in V, \quad r^-(x) = r^+(x)$$

trong đó, $r^-(x)$ là số cạnh đi vào đỉnh x và $r^+(x)$ là số cạnh đi ra khỏi đỉnh x .

Hệ quả 7.4: Đa đồ thị có hướng liên thông G có đường đi Euler có hướng khi và chỉ khi trong G có hai đỉnh a, b thỏa mãn:

$$r^-(a) = r^+(a) - 1$$

$$r^-(b) = r^+(b) + 1$$

và các đỉnh còn lại đều cân bằng.

Chứng minh:

i) Giả sử đồ thị G có đường Euler α đi qua tất cả các cạnh của đồ thị. Khi đó thì:

- Với đỉnh xuất phát a của α : trừ cạnh đầu tiên của α đi ra từ a , cứ có một cạnh đi vào a thì phải có một cạnh đi ra khỏi a vì α kết thúc ở đỉnh khác. Do vậy:

$$r^-(a) = r^+(a) - 1.$$

- Với đỉnh kết thúc b của α : trừ cạnh cuối cùng của α đi tới b , cứ có một cạnh đi ra khỏi b thì phải có một cạnh đi vào b vì α kết thúc ở đỉnh b . Vậy thì:

$$r^-(b) = r^+(b) + 1.$$

- Với các đỉnh khác: số cạnh đi vào bằng số cạnh đi ra nên chúng là cân bằng.

ii) Giả sử đồ thị G liên thông và có hai đỉnh a, b có tính chất trên. Ta thêm vào một cạnh mới (b, a) . Khi đó mọi đỉnh là cân bằng nên theo Định lý 7.3 đồ thị có chu trình Euler có hướng. Bây giờ, bỏ cạnh (b, a) khỏi chu trình thì ta được một đường đi Euler có hướng. □

Dựa trên chứng minh của Định lý 7.1, ta xây dựng thuật toán tìm chu trình Euler cho đồ thị liên thông không có đỉnh bậc lẻ như sau.

Thuật toán 7.5 (Tìm chu trình Euler)

Dữ liệu: Đồ thị liên thông $G = (V, E)$ không có đỉnh bậc lẻ được biểu diễn bởi mảng các danh sách kề DK.

Kết quả: Chu trình vô hướng Euler với danh sách các đỉnh nằm trong stack CE.

```

1  Begin
2    S := ∅ ; CE := ∅ ;
3    v := đỉnh tùy ý của đồ thị ;
4    push v onto S ;
5    while S ≠ ∅ do
6      begin
7        v := top(S) ;
8        if DK(v) ≠ ∅ then
9          begin
```

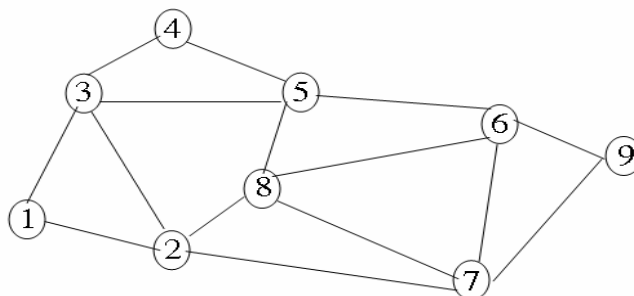
```

10       $u := \text{đỉnh đầu tiên trong danh sách } DK[v] ;$ 
11      push  $u$  onto  $S$  ;
12       $DK[v] := DK[v] \setminus \{u\} ;$ 
13       $DK[u] := DK[u] \setminus \{v\} ;$       { Xoá cạnh  $(v,u)$  trong đồ thị  $G$  }
14       $v := u$ 
15  end
16  else
17  begin
18       $v := \text{top}(S) ;$ 
19      push  $v$  onto  $CE$ 
20  end
21  end
22  End .

```

Ta thấy rằng, mỗi lần lặp của chu trình (5 - 20) trong thuật toán hoặc là đặt đỉnh lên stack S và xoá cạnh hoặc chuyển đỉnh từ stack S sang stack CE . Số lần lặp của chu trình không vượt quá số cạnh m . Vậy độ phức tạp tổng thể của thuật toán là $O(m)$. Đây là một thuật toán tối ưu để tìm chu trình Euler.

Ví dụ 7.4: Áp dụng thuật toán trên cho đồ thị vô hướng với các đỉnh bậc chẵn dưới đây.



Hình 7.5. Đồ thị vô hướng với các đỉnh bậc chẵn

Ta nhận được chu trình Euler là: $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2, 8, 6, 9, 7, 8, 5, 3, 1]$.