

BÀI 16

9.2. Một số ứng dụng của bài toán luồng lớn nhất

Bài toán luồng lớn nhất có rất nhiều ứng dụng trong việc giải quyết các bài toán khác nhau của lý thuyết đồ thị.

9.2.1. *Bài toán luồng nhỏ nhất*

Ngược lại với bài toán luồng lớn nhất, chúng ta xét bài toán sau đây:

Bài toán: Cho mạng (G, c) . Tìm luồng t qua mạng có giá trị tz nhỏ nhất và thoả mãn điều kiện a') thay cho điều kiện a) như sau:

$$a') \quad \forall e \in E, \quad t(e) \geq c(e).$$

Thuật toán 9.4 (Tìm luồng bé nhất):

Ta dùng phương pháp cải tiến luồng giống như phương pháp giải bài toán luồng lớn nhất.

Xuất phát từ một luồng t nào đó thoả mãn điều kiện c), ta dùng phương pháp sau đây để giảm giá trị của luồng t .

Bước 1: *Đánh dấu các đỉnh*

Đầu tiên đánh dấu cho đỉnh thu z số 0.

Nếu đỉnh y đã được đánh dấu, có cạnh (x, y) với đỉnh đầu chưa được đánh dấu và $t((x, y)) > c((x, y))$ thì đánh dấu cho đỉnh x là $+y$.

Nếu đỉnh x đã được đánh dấu, có cạnh (x, y) thì đánh dấu cho đỉnh y là $-x$.

Với cách đánh dấu này mà đi tới được đỉnh phát x_0 thì ta đã tìm được một đường đi vô hướng từ z tới x_0 được đánh dấu.

Bước 2: *Giảm luồng*

Bây giờ ta có thể giảm luồng đi 1 bằng cách chọn luồng mới t' như sau:

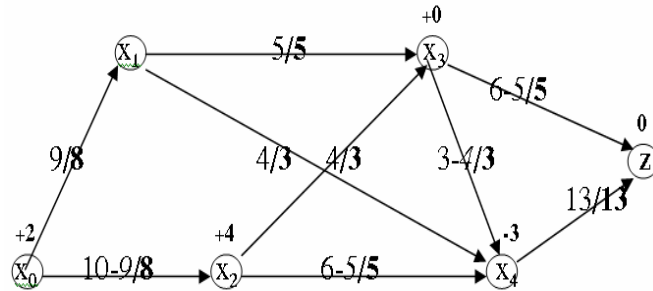
Nếu cạnh e không thuộc đường đi trên thì giữ nguyên luồng, nghĩa là:

$$t'(e) := t(e)$$

Nếu cạnh e thuộc đường đi này và cùng chiều với chiều từ x_0 tới z thì đặt $t'(e) := t(e) - 1$ (vì trên cạnh đó $t(e) > c(e)$) còn nếu cạnh e ngược chiều thì đặt $t'(e) := t(e) + 1$.

Lặp lại quá trình giảm luồng trên cho đến khi không đánh dấu được tới đỉnh phát x_0 . Khi đó luồng nhận được có giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 9.4: Xét mạng vận tải sau đây.



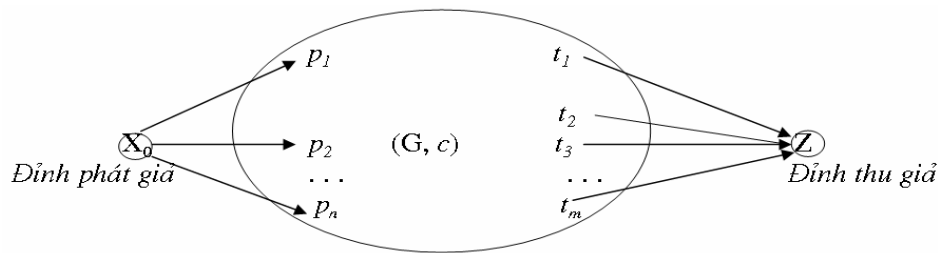
Hình 9.7. Mạng vận tải và luồng đã giảm

Luồng cũ có giá trị là $tz = 19$. Luồng mới sau khi cắt tỉn có giá trị là $tz' = 18$ và là luồng khả thi.

9.2.2. Bài toán luồng trên mạng có nhiều đỉnh phát và đỉnh thu

Giả sử (G, c) là một mạng vận tải với n đỉnh phát: p_1, p_2, \dots, p_n và m đỉnh thu: q_1, q_2, \dots, q_m .

Bài toán tìm luồng lớn nhất từ nhiều đỉnh phát tới nhiều đỉnh thu có thể đưa về bài toán luồng lớn nhất từ một đỉnh phát tới một đỉnh thu bằng cách thêm vào một *đỉnh phát giả* X_0 , một *đỉnh thu giả* Z , các cạnh nối X_0 với tất cả các đỉnh phát và các cạnh nối tất cả các đỉnh thu với Z .



Hình 9.8. Mạng vận tải có nhiều đỉnh phát và nhiều đỉnh thu

Khả năng thông qua của các cạnh mới như sau:

- Nếu lượng phát của đỉnh p_i bị hạn chế bởi l_i thì đặt $c(X_0, p_i) = l_i$, còn nếu không bị hạn chế thì đặt bằng ∞ .
- Tương tự như thế, giới hạn của lượng thu của đỉnh t_j sẽ là khả năng thông qua của cạnh (t_j, Z) .

9.2.3. Bài toán tìm cặp ghép lớn nhất của đồ thị hai phần

Bài toán này là một dạng đặc biệt của bài toán mạng với nhiều đỉnh phát và nhiều đỉnh thu. Ta đưa bài toán này về bài toán luồng lớn nhất qua mạng.

Giả sử đồ thị $G = (V_1, V_2, F)$ là đồ thị hai phần. Ta xây dựng mạng vận tải như sau:

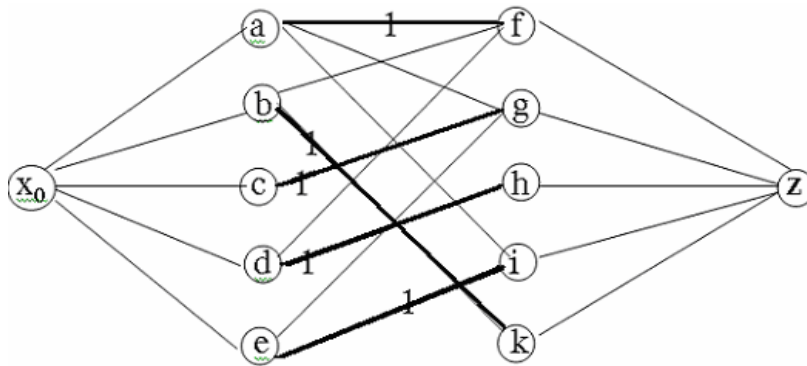
Các đỉnh của mạng là các đỉnh của đồ thị G và thêm vào đỉnh phát x_0 và đỉnh thu z . Mạng sẽ gồm tất cả các cạnh của G có hướng từ V_1 sang V_2 . Ngoài ra còn nối x_0 với tất cả các đỉnh trong V_1 và nối tất cả các đỉnh trong V_2 với z . Trên mọi cạnh e của mạng đều đặt $c(e) = 1$.

Khi đó mỗi luồng t qua mạng sẽ ứng với một cặp ghép W của G mà:

$$e \in W \Leftrightarrow t(e) = 1.$$

Ngược lại, mỗi cặp ghép W sẽ ứng với một luồng t qua mạng của G cũng theo quy tắc trên. Vậy tz đạt lớn nhất khi W có nhiều cạnh nhất.

Ví dụ 9.5: Từ một đồ thị hai phần gồm tập đỉnh $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, k\}$ ta xây dựng mạng vận tải như sau:



Hình 9.9. Mạng vận tải trên đồ thị hai phần

9.2.4. Bài toán vận tải với khả năng thông qua của các cạnh và các đỉnh

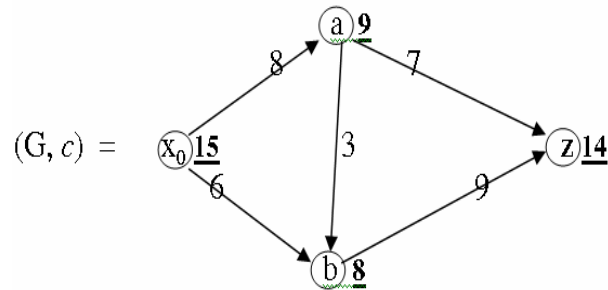
Giả sử trong đồ thị G , ngoài khả năng thông qua của các cạnh thì với mỗi đỉnh $x \in V$ còn có khả năng thông qua của đỉnh là $d(x)$ và đòi hỏi tổng luồng đi vào đỉnh x không được vượt quá $d(x)$, nghĩa là:

$$1) t(W^-(x)) \leq d(x).$$

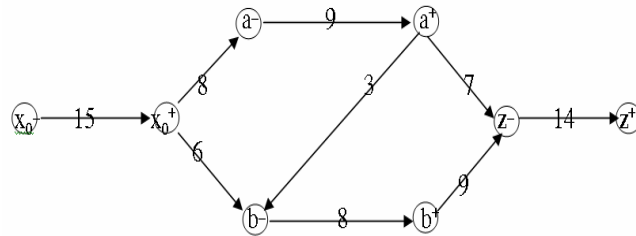
Hãy tìm luồng lớn nhất giữa x_0 và z trong mạng này.

Để đưa bài toán này về bài toán luồng lớn nhất, chúng ta xây dựng mạng G' sao cho: Mỗi đỉnh x trong G tương ứng với hai đỉnh x^- và x^+ trong G' , cạnh (x^-, x^+) thuộc G' và $c((x^-, x^+)) = d(x)$. Mỗi cạnh (x, y) trong G ứng với cạnh (x^+, y^-) trong G' .

Ví dụ 9.6: Xét mạng vận tải sau đây:



Hình 9.10. Mạng vận tải với khả năng thông qua cạnh và đỉnh
 Xây dựng mạng (G', c) như sau:



Hình 9.11. Mạng vận tải tương ứng

Do luồng đi vào đỉnh x^- phải đi qua cạnh (x^-, x^+) với khả năng thông qua $d(x)$ nên luồng lớn nhất trong G' sẽ bằng luồng lớn nhất trong G và thỏa mãn các điều kiện về khả năng thông qua của các cạnh và các đỉnh.