

## **BÀI 08**

### **Chương 5** **Cặp ghép và đồ thị hai phần**

#### 5.1. Tập đỉnh tựa và cặp ghép

Để đưa vào các khái niệm mới này, chúng ta xét bài toán phân công nhiệm vụ như sau:

Một cơ quan có  $n$  nhân viên  $x_1, x_2, \dots, x_n$  và  $m$  nhiệm vụ  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Do quá trình đào tạo, mỗi nhân viên có thể đảm nhiệm một hay nhiều nhiệm vụ và mỗi nhiệm vụ có một số nhân viên có thể đảm nhiệm được. Vậy có thể phân công cho mỗi nhân viên đảm nhiệm một nhiệm vụ thích hợp với trình độ của người đó được không?

Bài toán này sẽ giải quyết được nhờ khái niệm cặp ghép mà chúng ta sẽ đưa vào dưới đây.

**Định nghĩa 5.1:** Giả sử  $G$  là một đồ thị vô hướng.

- 1) Tập con các đỉnh  $C$  của  $G$  được gọi là *tập đỉnh tựa* của đồ thị  $G$  nếu mỗi cạnh của  $G$  đều kề với ít nhất một đỉnh nào đó trong  $C$ .
- 2) Tập con các cạnh  $W$  của  $G$  được gọi là *cặp ghép* nếu trong  $W$  không có hai cạnh nào kề nhau.



Hình 5.1. Tập đỉnh tựa và cặp ghép

Tập đỉnh tựa của một đồ thị luôn tồn tại. Tập tất cả các đỉnh là một ví dụ về tập đỉnh tựa của đồ thị.

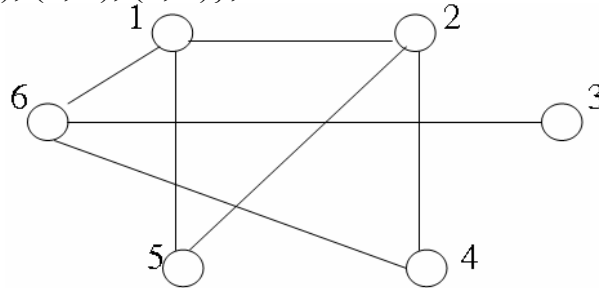
Song ta thường quan tâm đến tập đỉnh tựa có ít đỉnh nhất. Dễ thấy, tập con các đỉnh  $C$  là tập đỉnh tựa khi và chỉ khi tập  $V \setminus C$  là ổn định trong.

Cặp ghép của một đồ thị cũng luôn tồn tại. Mỗi cạnh trong cặp ghép sẽ tạo nên sự ghép giữa một đỉnh với đỉnh kề của nó.

Ta cũng thường quan tâm đến các cặp ghép có nhiều cạnh nhất.

Ví dụ 5.2: Xét đồ thị vô hướng cho ở Hình 5.2 dưới đây.

Đồ thị này có các tập đỉnh tựa là:  $\{1, 2, 6\}$ ,  $\{2, 5, 6\}$ , ... và các cặp ghép:  $\{(1, 2), (3, 6)\}$ ,  $\{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$ , ...



Hình 5.2. Đồ thị vô hướng

## 5.2. Đồ thị hai phần

Ta xét một lớp đồ thị đặc biệt sau đây.

### **Định nghĩa 5.3:**

Đồ thị  $G = (V, F)$  được gọi là *đồ thị hai phần* nếu tập đỉnh  $V$  có thể tách thành hai tập ổn định trong không giao nhau.

Hay nói một cách khác:

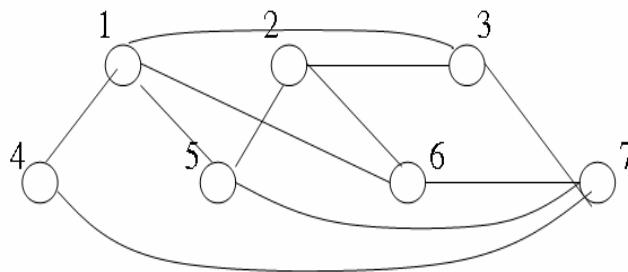
$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2, & V_1 \cap V_2 &= \emptyset, \\ F(V_1) &\subseteq V_2, & F(V_2) &\subseteq V_1. \end{aligned}$$

Khi đó thì mỗi cạnh có một đầu thuộc  $V_1$  và đầu kia thuộc  $V_2$ . Đồng thời,  $V_1$  và  $V_2$  là các tập đỉnh tựa của đồ thị  $G$ .

Nếu đồ thị có ít nhất một cạnh, thì khái niệm đồ thị hai phần trùng với điều kiện sắc số bằng 2.

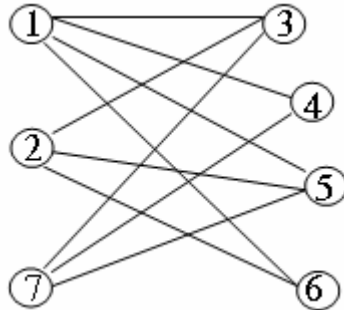
Ta thường ký hiệu đồ thị hai phần là:  $G = (V_1, V_2, F)$ .

Ví dụ 5.4: Cho đồ thị vô hướng.



Hình 5.3. Đồ thị vô hướng

Vẽ lại đồ thị này ta nhận được:



Đồ thị trên là đồ thị hai phần có tập đỉnh tựa bé nhất là  $\{1, 2, 7\}$  và cặp ghép lớn nhất là  $\{(1, 3), (2, 5), (4, 7)\}$ .

Hình 5.4. Đồ thị hai phần tương ứng

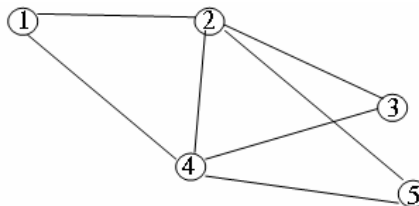
Đồ thị trong Ví dụ 5.2 không phải là đồ thị hai phần.

Để kiểm tra xem một đồ thị vô hướng  $G$  có phải là đồ thị hai phần hay không, ta sử dụng thuật toán sau đây:

**Thuật toán 5.1** (Kiểm tra một đồ thị là đồ thị hai phần):

- 1) Chọn một đỉnh bất kỳ  $a$  trong đồ thị  $G$ .
- 2) Đặt  $V_1 = \{a\}$ .
- 3) Đặt  $V_2$  là tập các đỉnh kề của đỉnh trong  $V_1$ .
- 4) Nếu  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$  thì kết luận đồ thị không phải là đồ thị hai phần, ngược lại thì quay lên bước 3) cho đến khi hết đỉnh để thêm vào.
- 5) Cuối cùng, nếu  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  thì kết luận đồ thị là đồ thị hai phần.

Ví dụ 5.5: Xét đồ thị vô hướng.



Hình 5.5. Đồ thị vô hướng

Bắt đầu chọn:  $V_1 = \{1\}$ ,  $V_2 = \{2, 4\}$ .

Sau đó thêm vào  $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , ta có:  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ .

Vậy đồ thị trên không là đồ thị hai phần.

Nếu bỏ cạnh  $(2, 4)$  thì đồ thị trên trở thành đồ thị hai phần.