Chương 2

Các số cơ bản của đồ thị

2.1 Chu số

Khái niệm mà chúng ta sẽ đề cập ở đây *không phụ thuộc vào sự định hướng:* ta sẽ nói về *cạnh* chứ không phải *cung*. Để tổng quát xét đa đồ thị vô hướng $G := (V, E)$ có n đỉnh, m cạnh và p thành phần liên thông. Đặt

$$\begin{aligned} \rho(G) &:= n - p, \\ \nu(G) &:= m - \rho(G) = m - n + p. \end{aligned}$$

Ta gọi $\nu(G)$ là *chu số* của đồ thị G.

Định lý 2.1.1 *Cho đa đồ thị vô hướng $G = (V, E)$. Giả sử G' là đồ thị nhận được từ G bằng cách nối hai đỉnh a và b của G bởi một cạnh mới; nếu a và b trùng nhau hoặc có thể nối với nhau bởi một dây chuyền của G thì*

$$\rho(G') = \rho(G), \quad \nu(G') = \nu(G) + 1;$$

trong trường hợp ngược lại

$$\rho(G') = \rho(G) + 1, \quad \nu(G') = \nu(G).$$

Chứng minh. Theo cách xây dựng, đa đồ thị G' có $n' = n$ đỉnh, $m' = m + 1$ cạnh và giả sử G' có p' thành phần liên thông.

Nếu $a \equiv b$ hoặc có một dây chuyền nối a với b. Khi đó phép biến đổi G thành G' không thay đổi số thành phần liên thông, tức là $p = p'$. Do đó

$$\begin{aligned} \rho(G') &= n' - p' = n - p = \rho(G), \\ \nu(G') &= m' - \rho(G') = \nu(G) + 1. \end{aligned}$$

Ngược lại, nếu $a \neq b$ và không tồn tại dây chuyền nối a và b, thì do cách xác định G' ta có $p' = p - 1$. Suy ra

$$\begin{aligned}
\rho(G') &= n' - p' = n - (p-1) = n - p + 1 = \rho(G) + 1, \\
\nu(G') &= m' - \rho(G') = (m+1) - (\rho(G)+1) = m - \rho(G) = \nu(G).
\end{aligned}$$

◁

Hệ quả 2.1.2 $\rho(G) \geq 0$ *và* $\nu(G) \geq 0$.

Chứng minh. Thật vậy, xuất phát từ đồ thị thành lập bằng các đỉnh của đa đồ thị vô hướng G, đỉnh nọ cô lập với đỉnh kia, ta xây dựng G' dần dần từng cạnh một; khởi đầu ta có $\rho = 0, \nu = 0$; mỗi khi thêm một cạnh, thì hoặc ρ tăng và lúc đó ν không đổi, hoặc ν tăng và lúc đó ρ không đổi. Như vậy, trong quá trình xây dựng đồ thị G', các số ρ và ν chỉ có thể tăng. ◁

Để có thể vận dụng những kết quả phong phú của đại số vector trong việc nghiên cứu, người ta thường đặt tương ứng mỗi chu trình trong G với một vector theo cách sau đây.

Mỗi cạnh của đa đồ thị G đều được định hướng một cách tùy ý; nếu chu trình μ đi qua cạnh e_k, r_k lần thuận hướng và s_k lần ngược hướng thì ta đặt $c_k := r_k - s_k$ (nếu e_k là một khuyên thì ta luôn qui ước $s_k = 0$). Vector m chiều

$$(c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

gọi là *vector chu trình* tương ứng với μ và ký hiệu là $\vec{\mu}$ (hay là μ nếu không thể gây ra nhầm lẫn).

Các chu trình $\mu, \mu', \mu'', \ldots$ gọi là *độc lập* nếu các vector chu trình tương ứng độc lập tuyến tính. Chú ý rằng, định nghĩa này không phụ thuộc vào hướng gán cho các cạnh.

Định lý 2.1.3 *Chu số* $\nu(G)$ *của* $G = (V, E)$ *bằng số cực đại các chu trình độc lập.*

Chứng minh. Tiến hành như trong Hệ quả 2.1.2: đầu tiên ta lấy đồ thị vô hướng không có cạnh với tập các đỉnh là V. Sau đó ta xây dựng đa đồ thị G' bằng cách thêm từng cạnh một vào. Theo Định lý 2.1.1, chu số sẽ tăng một đơn vị nếu cạnh thêm vào lập ra các chu trình mới, chu số không thay đổi trong trường hợp ngược lại.

Giả sử, trước khi thêm cạnh e_k ta đã có một cơ sở gồm các chu trình độc lập: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$; và sau khi thêm cạnh e_k xuất hiện thêm các chu trình sơ cấp mới $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, nào đó. Hiển nhiên γ_1 không thể biểu diễn tuyến tính qua hệ các chu trình μ_j (vì các vector tương ứng các chu trình μ_j có thành phần thứ k bằng không, trong khi vector tương ứng chu trình γ_1 có thành phần thứ k khác không). Mặt khác các vector $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$ có thể biểu diễn tuyến tính qua $\gamma_1, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$. Tóm lại mỗi khi chu số tăng một đơn vị thì số cực đại các chu trình độc lập tuyến tính cũng tăng lên một đơn vị. Định lý được chứng minh. $\triangleleft$

Từ kết quả này, dễ dàng suy ra:

Hệ quả 2.1.4 (a) *Đa đồ thị vô hướng G không có chu trình nếu và chỉ nếu $\nu(G) = 0$.*

(b) *Đa đồ thị vô hướng G có đúng một chu trình nếu và chỉ nếu $\nu(G) = 1$.*

Định lý 2.1.5 *Trong đồ thị có hướng liên thông mạnh, chu số bằng số cực đại các mạch độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Thật vậy, xét đồ thị vô hướng lập bởi các cung khác nhau của G (mỗi cung tương ứng một cặp cạnh) và một chu trình sơ cấp μ; ta phân hoạch tập các đỉnh trên chu trình này thành: tập S các đỉnh có một cung tới nó và một cung ra khỏi nó, tập S' các đỉnh có hai cung của μ ra khỏi nó và tập S'' các đỉnh có hai cung của μ đi tới nó. Vì số các cung đi ra bằng số các cung đi tới nên $\#S' = \#S''$; giả sử $v'_1, v'_2, \ldots, v'_k$ là các phần tử của S' và $v''_1, v''_2, \ldots, v''_k$ là các phần tử của S''.

Trên chu trình μ, các phần tử của S' và của S'' xen kẽ nhau và ta giả sử rằng sau đỉnh v'_i thì đỉnh đầu tiên bắt gặp (không thuộc S) là v''_i; cuối cùng, nếu μ_0 là một đường đi gặp đỉnh x trước đỉnh y thì ta ký hiệu $\mu_0[x, y]$ là đường đi bộ phận của μ_0 từ x đến y. Vì đồ thị liên thông mạnh nên tồn tại mạch μ_1 đi qua v'_{i+1} và v''_i và dùng các cung của μ để đi từ v'_{i+1} đến v''_i. Chu trình μ là một tổ hợp tuyến tính của các mạch vì ta có thể viết

$$\begin{aligned} \mu &= \mu[v'_1, v''_1] - \mu_1[v'_2, v''_1] + \mu[v'_2, v''_2] + \cdots \\ &= \mu[v'_1, v''_1] + \mu_1[v''_1, v'_2] + \mu[v'_2, v''_2] + \mu_2[v''_2, v'_3] + \cdots - (\mu_1 + \mu_2 + \cdots). \end{aligned}$$

Vậy mọi chu trình sơ cấp đều là tổ hợp tuyến tính của các mạch, đối với các chu trình bất kỳ điều đó cũng đúng (vì nó là tổ hợp tuyến tính của các chu trình sơ cấp).

Trong $\mathbf{R}^m$, các mạch lập thành một cơ sở của không gian vector con sinh bởi các chu trình, và theo Định lý 2.1.3 thì cơ sở này có số chiều là $\nu(G)$. Vậy số cực đại các mạch độc lập tuyến tính bằng $\nu(G)$. $\triangleleft$

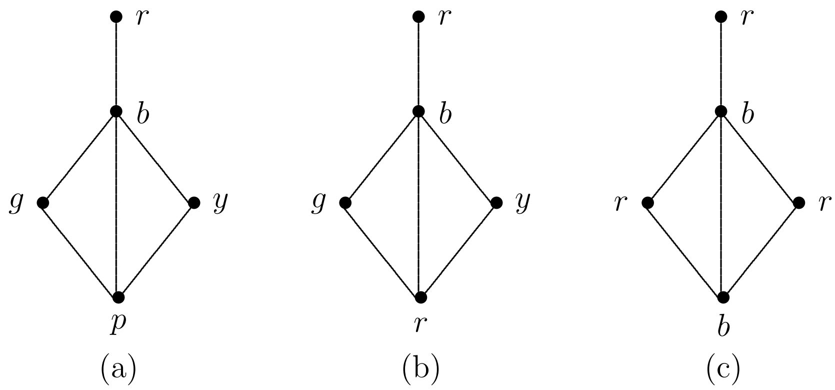
2.2 Sắc số

Giả sử rằng chúng ta có một đồ thị vô hướng G với n đỉnh, và cần tô màu các đỉnh sao cho hai đỉnh kề nhau có màu khác nhau. Hiển nhiên là có thể dùng n màu để tô các đỉnh đó, nhưng như thế vấn đề đặt ra lại không mang tính thực tiễn. Thế thì số màu tối thiểu đòi hỏi là bao nhiêu? Đây chính là bài toán tô màu. Khi các đỉnh được tô, chúng ta có thể nhóm chúng vào các tập khác nhau-một tập gồm các đỉnh được tô màu đỏ, một tập các đỉnh được tô màu xanh, vân vân. Đây chính là bài toán phân hoạch. Bài toán tô màu và phân hoạch dĩ nhiên có thể xét trên các cạnh của đồ thị. Trong trường hợp đồ thị phẳng thậm chí có thể quan tâm đến việc tô màu các diện.

Trong phần này ta chỉ xét các đồ thị vô hướng liên thông.

Định nghĩa 2.2.1 Cho trước một số nguyên p, ta nói rằng đồ thị G là $p-$*sắc* nếu bằng p màu khác nhau ta có thể tô màu các đỉnh, sao cho hai đỉnh kề nhau không cùng một màu. Số p nhỏ nhất, mà đối với số đó G là $p-$sắc gọi là *sắc số* của đồ thị G và ký hiệu là $\gamma(G)$.

Ví dụ 2.2.2 Hình 2.1 minh họa ba cách tô màu khác nhau của đồ thị. Dễ dàng kiểm tra rằng đồ thị này là $2-$sắc.



Hình 2.1:

Ví dụ 2.2.3 *Bản đồ địa lý.* Ta vẽ trên mặt phẳng một bản đồ. Gọi V là tập hợp các nước, đặt $(i, j) \in E$ nếu các nước i và j có biên giới chung. Đồ thị $G = (V, E)$ đối xứng và có tính chất rất đặc biệt là: có thể vẽ nó lên mặt phẳng mà không có hai cạnh nào cắt nhau (trừ tại các đỉnh chung); nói cách khác, G là *đồ thị phẳng*. Người ta đã biết rằng sắc số của mọi đồ thị phẳng đều nhỏ hơn hoặc bằng bốn (Định lý 6.4.7). Như vậy bằng bốn màu cũng đủ để tô màu bản đồ phẳng sao cho hai nước kề nhau không cùng một màu.

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra

1. Một đồ thị chỉ có các đỉnh cô lập là $1-$sắc.
2. Một đồ thị có một hoặc hai cạnh (không phải là một khuyên) có sắc số ít nhất bằng hai.
3. Đồ thị đầy đủ n đỉnh K_n là $n-$sắc.
4. Đồ thị là một chu trình đơn giản với n đỉnh, $n > 3$, là $2-$sắc nếu n chẵn và $3-$sắc nếu n lẻ.
5. Hiển nhiên, mọi đồ thị $2-$sắc là hai phần do chúng ta có thể phân hoạch tập các đỉnh V thành hai tập con theo màu được tô trên các đỉnh. Tương tự, đồ thị hai phần là $2-$sắc, với một trường hợp ngoại lệ tầm thường: đồ thị có ít nhất hai đỉnh cô lập và không có cạnh là hai phần nhưng là $1-$sắc.

Định nghĩa 2.2.4 Ta gọi *sắc lớp* của đồ thị G là số nguyên q có các tính chất sau:

1. Có thể dùng q màu khác nhau để tô màu các cạnh của G sao cho hai cạnh kề nhau không cùng một màu;
2. Điều này không thể làm được với $(q-1)$ màu.

Nhận xét rằng sắc lớp của đồ thị $G = (V, E)$ chính là sắc số của đồ thị $G' = (V', E')$ được xác định như sau: mỗi đỉnh của G' tương ứng một cạnh của G; cạnh $e' = (v'_1, v'_2) \in E'$ nếu các cạnh e_1 và e_2 (tương ứng với hai đỉnh v'_1, v'_2) kề nhau.

Như vậy bài toán sắc lớp đưa về bài toán sắc số. Dưới đây là một vài kết quả cơ bản về sắc số.

Định lý 2.2.5 [König] *Đồ thị vô hướng G là $2-$sắc nếu và chỉ nếu nó không có chu trình có độ dài lẻ.*

Chứng minh *Điều kiện cần.* Nếu đồ thị G là $2-$sắc, thì tất nhiên G không chứa chu trình có độ dài lẻ, vì các đỉnh của một chu trình loại như vậy không thể tô bằng hai màu theo như quy tắc đã chỉ ra ở trên.

Điều kiện đủ. Giả sử đồ thị G không có chu trình có độ dài lẻ, ta chứng minh nó là $2-$sắc. Không giảm tổng quát coi G là liên thông. Ta sẽ tô màu dần các đỉnh của G theo quy tắc sau:

- tô màu xanh cho một đỉnh a nào đó;
- nếu một đỉnh x nào đó đã được tô xanh, thì ta tô đỏ tất cả các đỉnh kề với nó; nếu đỉnh y đã được tô đỏ, thì ta tô xanh tất cả các đỉnh kề với y.

Vì đồ thị G liên thông, nên sớm hay muộn thì mọi đỉnh của nó đều được tô màu hết, và một đỉnh x không thể cùng một lúc được tô xanh và tô đỏ, vì như vậy thì x và a sẽ cùng nằm trên một chu trình có độ dài lẻ. Vậy đồ thị G là $2-$sắc. $\triangleleft$

Chú ý rằng tính chất đồ thị G không có chu trình với độ dài lẻ tương đương với tính chất G không có chu trình sơ cấp với độ dài lẻ. Thật vậy giả sử có một chu trình

$$\mu = \{v_0, v_1, \ldots, v_p = v_0\}$$

có độ dài p lẻ. Mỗi khi gặp hai đỉnh v_j và v_k với $j < k < p$ và $v_j = v_k$, ta phân chia μ thành hai chu trình bộ phận $\mu_1 = \{v_j, \ldots, v_k\}$ và $\mu_2 = \{v_0, \ldots, v_j, v_k, \ldots, v_0\}$; hơn nữa một trong hai chu trình có độ dài lẻ (vì nếu không như thế thì μ sẽ có độ dài chẵn). Ta thấy rằng nếu tiếp tục phân chia chu trình μ theo cách đó cho đến khi còn có thể làm được, thì mỗi lần vẫn còn được một chu trình có độ dài lẻ; vì cuối cùng mọi chu trình đều là sơ cấp, nên xảy ra mâu thuẫn; và ta có điều cần chứng minh.

Định lý sau đây cho ta biết cận trên của sắc số.

Định lý 2.2.6 *Ký hiệu $d_{\max}$ là bậc cực đại của các đỉnh trong G. Khi đó*

$$\gamma(G) \leq 1 + d_{\max}.$$

Chứng minh. Bài tập. $\triangleleft$

Brooks [9] đã chứng minh rằng nếu G là đồ thị không đầy đủ, có $d_{\max}$ đỉnh thì

$$\gamma(G) \leq d_{\max}.$$

2.2.1 Cách tìm sắc số

Xét đồ thị $G = (V, \Gamma)$ có n đỉnh và m cạnh; muốn tìm sắc số của nó ta có thể dùng một phương pháp thực nghiệm rất đơn giản, áp dụng trực tiếp được, nhưng không phải lúc nào cũng có hiệu quả hoặc có thể dùng phương pháp giải tích, nó cho ta một lời giải hệ thống, nhưng nói chung cần máy tính điện tử.

Phương pháp thực nghiệm

Bằng cách tô màu tùy ý dùng các màu $1, 2, \ldots, p$ và tìm cách loại dần một màu nào đó (gọi là "màu tới hạn") trong các màu ấy. Muốn vậy, ta xét đỉnh v có màu tới hạn đó và các thành phần liên thông $C_1^{jk}, C_2^{jk}, \ldots$ của đồ thị con sinh ra bởi hai màu không tới hạn j và k. Ta có thể lập tức thay màu của đỉnh v nếu các tập hợp $C_1^{jk} \cap \Gamma(v), C_2^{jk} \cap \Gamma(v), \ldots$ không phải là hai màu: lấy riêng rẽ mỗi thành phần C^{jk} mà với thành phần đó thì các đỉnh của $C^{jk} \cap \Gamma(v)$ có màu j, hoán vị trong các thành phần đó các màu j và k (không thay đổi màu của các đỉnh khác), cuối cùng tô đỉnh v màu j (lúc này đỉnh v không kề với đỉnh nào có màu j).

Phương pháp giải tích

Kiểm tra bằng cách giải tích xem đồ thị G có thể được tô bằng p màu được không. Phương pháp đó như sau: Với mỗi cách tô bằng p màu, ta cho tương ứng với một hệ thống các số $x_{ij}, i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, p$, được xác định như sau:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu đỉnh } i \text{ có màu } j, \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Đặt

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ liên thuộc đỉnh } v_i, \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Lúc đó bài toán trở thành tìm các số nguyên x_{ij} sao cho:

$$\begin{cases} x_{ij} & \geq & 0, & \\ \sum_{q=1}^{p} x_{iq} & \leq & 1, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum_{k=1}^{n} r_{jk} x_{kq} & \leq & 1, & j = 1, 2, \ldots, m; q = 1, 2, \ldots, p. \end{cases}$$

Ta có hệ bất đẳng thức tuyến tính. Dễ ràng thấy rằng hệ đó thích hợp với các phương pháp thông thường của quy hoạch nguyên và do đó có thể dùng phương pháp của Gomory (dựa trên phương pháp đơn hình của Dantzig) để giải.

2.3 Số ổn định trong

Với đồ thị $G = (V, \Gamma)$ cho trước ta thường quan tâm đến tập con của V có những tính chất nào đó. Chẳng hạn, tìm một tập con $S \subset V$ có số phần tử lớn nhất sao cho đồ thị con sinh bởi S là đầy đủ? Hoặc tìm tập con các đỉnh của đồ thị G có số phần tử nhiều nhất sao cho hai đỉnh trong đó không kề nhau. Một bài toán khác là tìm tập con S của V có số phần tử ít nhất sao cho mọi đỉnh thuộc $V \setminus S$ kề với một đỉnh trong S.

Các số và các tập con tương ứng lời giải các bài toán trên cho những tính chất quan trong của đồ thị và có nhiều ứng dụng trực tiếp trong bài toán lập lịch, phân tích cluster, phân loại số, xử lý song song trên máy tính, vị trí thuận lợi và thay thế các thành phần điện tử, v.v.

Định nghĩa 2.3.1 Xét đồ thị vô hướng $G := (V, \Gamma)$; tập hợp $S \subset V$ được gọi là *tập hợp ổn định trong* nếu hai đỉnh bất kỳ của S đều không kề nhau; nói cách khác, với mọi cặp đỉnh $a, b \in S$ thì $b \notin \Gamma(a)$.

Ký hiệu $\mathcal{S}$ là họ các tập ổn định trong của đồ thị G. Khi đó

1. Tập trống $\emptyset$ thuộc $\mathcal{S}$.
2. Nếu $S \in \mathcal{S}$ và $A \subset S$ thì $A \in \mathcal{S}$. Nói cách khác, tập con của một tập ổn định trong cũng là một tập ổn định trong.

Tập ổn định trong là *cực đại* nếu thêm một đỉnh bất kỳ vào nó thì sẽ không còn ổn định trong nữa. Đại lượng

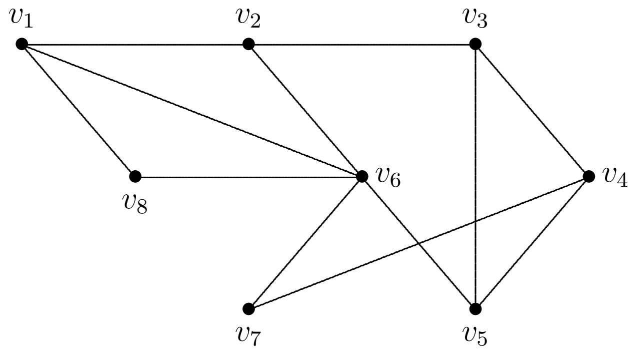
$$\alpha(G) := \max\{\#S \mid S \in \mathcal{S}\}$$

được gọi là *số ổn định trong* của G.

Ví dụ 2.3.2 Xét đồ thị trong Hình 2.2. Tập các đỉnh $\{v_7, v_8, v_2\}$ là ổn định trong nhưng không cực đại; tập $\{v_7, v_8, v_2, v_5\}$ là ổn định trong cực đại. Các tập $\{v_1, v_3, v_7\}$ và $\{v_4, v_6\}$ cũng là tập ổn định trong cực đại và do đó, nói chung có thể có nhiều tập ổn định trong cực đại. Họ các tập ổn định trong cực đại của đồ thị này là

$$\{v_7, v_8, v_2, v_5\}, \{v_1, v_3, v_7\}, \{v_4, v_6\}, \{v_3, v_6\}, \{v_1, v_5, v_7\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3, v_7, v_8\}.$$

Ví dụ 2.3.3 [Gauss] *Bài toán tám con hậu.* Trên bàn cờ có thể bố trí tám con hậu, sao cho không có con nào chém được con nào không? Bài toán nổi tiếng này đưa về tìm một tập hợp ổn định trong cực đại của đồ thị vô hướng có 64 đỉnh (là các ô trên bàn cờ), trong đó $y \in \Gamma(x)$ nếu các ô x và y nằm trên cùng một hàng, một cột hay một đường chéo. Thực tế, khó khăn lại lớn hơn là khi người ta mới thoạt nhìn: lúc đầu Gauss tưởng có 76 lời



Hình 2.2:

giải, còn tờ báo về cờ ở Berlin"Schachzeitung" năm 1854 chỉ mới đưa ra 40 lời giải thế cờ do các nhà ham cờ tìm ra. Sự thật thì có 92 lời giải như 12 sơ đồ dưới đây:

(72631485)	(61528374)	(58417263)
(35841726)	(46152837)	(57263148)
(16837425)	(57263184)	(48157263)
(51468273)	(42751863)	(35281746)

Mỗi sơ đồ trên tương ứng với một hoán vị, và từ một sơ đồ ta suy ra tám lời giải khác nhau: ba lời giải bằng cách quay $90^0, 180^0$ và 270^0; các lời giải khác suy ra bằng cách đối xứng mỗi sơ đồ nhận được qua đường chéo chính; hoán vị cuối cùng (35281746) chỉ có bốn lời giải vì sơ đồ tương ứng sẽ trùng với chính nó sau khi quay 180^0.

Ví dụ 2.3.4 *Bè* của một đồ thị G là tập hợp $C \subset V$ sao cho

$$a \in C, b \in C \quad \text{suy ra} \quad b \in \Gamma(a).$$

Nếu V là một tập hợp người, và $b \in \Gamma(a)$ chỉ sự đồng tình giữa a và b, thì thường yêu cầu tìm bè cực đại, nghĩa là hội có số người tham gia nhiều nhất. Xét đồ thị $G' := (V, \Gamma')$ xác định như sau:

$$b \in \Gamma(a') \quad \text{nếu và chỉ nếu} \quad b \notin \Gamma(a).$$

Bài toán quy về tìm một tập hợp ổn định trong cực đại của đồ thị (V, Γ').

Ví dụ 2.3.5 *Bài toán về các cô gái* là đối tượng của nhiều công trình toán học, có thể phát biểu như sau: một ký túc xá nuôi dưỡng 15 cô gái, ký hiệu là $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o$; hàng ngày các cô đi dạo chơi thành từng bộ ba, có thể đưa các cô đi chơi trong bảy ngày liền sao cho không có hai cô nào cùng đi trong một bộ ba quá một lần được không?

Với những nhận xét về đối xứng, Cayley đã tìm ra lời giải như sau:

Chủ Nhật	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu	Thứ Bảy
afk	abe	alm	ado	agn	ahj	aci
bgl	cno	bcf	bik	bdj	bmn	bho
chm	dfl	deh	cjl	cek	cdg	dkm
din	ghk	gio	egm	fmo	fei	eln
ejo	ijm	jkn	fhn	hil	klo	fgj

Bài toán về các cô gái cùng loại với một bài toán thứ hai cũng nổi tiếng gọi là *bài toán bổ trợ:* với 15 cô gái có thể lần lượt lập 35 bộ ba khác nhau sao cho không có hai cô nào cùng trong một bộ ba quá một lần không? Để giải bài toán bổ trợ, chỉ cần lập đồ thị G có các đỉnh là 455 bộ ba có thể có, hai bộ ba được xem là kề nhau nếu chúng có chung hai cô gái: khi đó cần tìm một tập hợp ổn định trong cực đại. Ta có $\alpha(G) \leq 35$ vì một cô gái chỉ có mặt nhiều nhất là trong 7 bộ ba khác nhau, nên tất cả có $15 \times 7 \times \frac{1}{3} = 35$ bộ là nhiều nhất; vì vậy mọi tập hợp ổn định trong có 35 bộ ba đều là cực đại.

Để xét xem một lời giải nào đó của bài toán bổ trợ có cho lời giải của bài toán về các cô gái không, ta lập đồ thị G' có các đỉnh là 35 bộ ba cho nghiệm của bài toán bổ trợ, hai bộ ba được xem là kề nhau nếu có chung một cô gái; nếu sắc số $\gamma(G') > 7$ thì phải chọn tập hợp khác gồm các bộ ba cho nghiệm của bài toán bổ trợ. Dễ dàng kiểm tra rằng tồn tại những lời giải của bài toán bổ trợ không dẫn đến lời giải của bài toán về các cô gái.

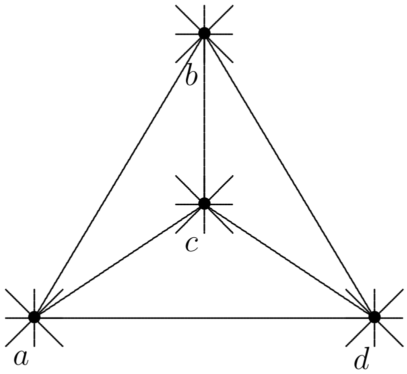
Nhận xét 2.3.6 (a) Sắc số $\gamma(G)$ và số ổn định trong $\alpha(G)$ liên hệ với nhau bằng bất đẳng thức

$$\gamma(G) \times \alpha(G) \geq n.$$

Thật vậy, có thể phân hoạch V thành $\gamma := \gamma(G)$ tập hợp ổn định trong, lập bởi các đỉnh cùng màu và tương ứng chứa $n_1, n_2, \ldots, n_\gamma$ đỉnh. Vậy ta có

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_\gamma \leq \alpha(G) + \alpha(G) + \cdots + \alpha(G) = \gamma(G).\alpha(G).$$

(b) Ta có thể hỏi: phải chăng mối liên hệ giữa hai khái niệm là chưa chặt chẽ. Phải chăng có thể tìm sắc số bằng cách: trước hết dùng màu (1) để tô tập ổn định trong cực đại S_1. Rồi dùng màu (2) để tô tập ổn định trong cực đại S_2 của đồ thị con sinh ra bởi các đỉnh của $V \setminus S_1$, sau đó dùng màu (3) để tô tập hợp ổn định trong cực đại của đồ thị con còn lại, v.v. Thực ra không phải như vậy. Đồ thị trên Hình 2.3 (có sắc số bằng 4) chứng tỏ điều đó: các đỉnh kề với các đỉnh a, b, c và d lập thành tập ổn định trong cực đại duy nhất, nếu ta tô chúng cùng một màu thì ta phải dùng ba màu chỉ để tô các đỉnh a, b, c, d, nhưng rõ ràng điều đó không thể làm được.



Hình 2.3:

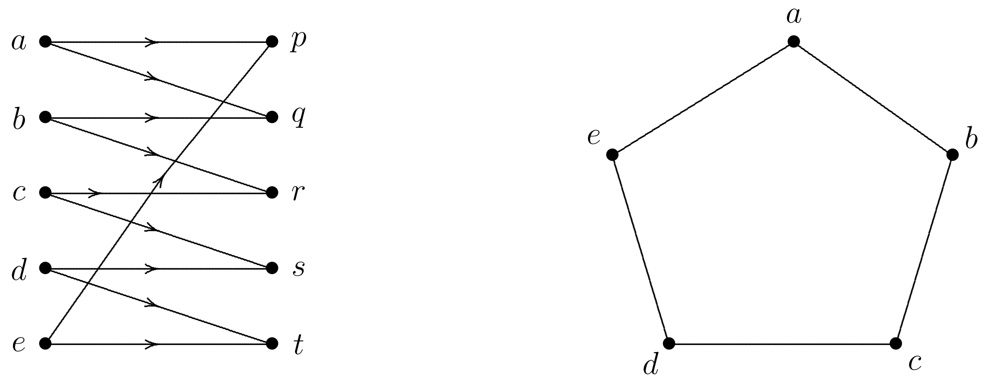
Ví dụ 2.3.7 [Shannon] *Bài toán về dung lượng thông tin của một tập hợp tín hiệu.* Xét trường hợp rất đơn giản là máy phát có thể truyền đi năm tín hiệu: a, b, c, d, e; ở máy thu, mỗi tín hiệu có thể cho hai cách hiểu khác nhau: tín hiệu a có thể hiểu là p hay q, tín hiệu b có thể hiểu là q hay $r, \ldots$ (Hình 2.4 (a)).

Số cực đại các tín hiệu mà ta có thể sử dụng là bao nhiêu để cho ở máy thu không xảy ra nhầm lẫn giữa các tín hiệu được sử dụng. Bài toán quy về tìm một tập ổn định trong cực đại S của đồ thị G (Hình 2.4(b)), trong đó hai đỉnh là kề nhau nếu chúng biểu thị hai tín hiệu có thể lẫn lộn với nhau ở máy thu, ta sẽ lấy $S = \{a, c\}$, và rõ ràng $\alpha(G) = 2$. Thay cho các tín hiệu một chữ cái, ta có thể dùng các "từ" gồm hai chữ cái với điều kiện là các từ này không gây ra lầm lẫn ở máy thu. Với các chữ cái a và c (các chữ cái này không thể lẫn lộn nhau) ta lập mã: aa, ac, ca, cc; như vậy ta được $[\alpha(G)]^2 = 4$ từ. Nhưng ta còn có thể lập mã phong phú hơn: aa, bc, ce, db, ed. (Dễ dàng kiểm tra rằng hai từ bất kỳ trong các từ này không thể lẫn lộn với nhau ở máy thu).

Tìm tất cả các tập ổn định trong cực đại

Phương pháp suy luận sau (không hiệu quả đối với các đồ thị lớn) tìm tất cả các tập ổn định trong cực đại dựa trên đại số Boole. Ta xem mỗi đỉnh của đồ thị tương ứng với một biến Boole. Ký hiệu $x + y, xy$ và x' là các phép toán tuyển, hội và phủ định của các biến Boole x, y.

Với đồ thị G cho trước, ta cần tìm một tập con cực đại các đỉnh không kề nhau trong G. Biểu diễn mỗi cạnh (x, y) bằng một tích Boole xy và sau đó lấy tổng của tất cả các tích



Hình 2.4:

này ta được biểu thức Boole

$$\varphi = \sum_{(x,y)\in E} xy.$$

Kế tiếp biểu diễn phủ định φ' dạng tổng của các tích Boole

$$\varphi' = f_1 + f_2 + \cdots + f_k.$$

Một tập các đỉnh là ổn định trong cực đại nếu và chỉ nếu $\varphi = 0$, nghĩa là $\varphi' = 1$; hay tương đương có ít nhất một $f_i = 1$; tức là nếu mỗi đỉnh xuất hiện trong f_i (ở dạng phủ định) được loại ra khỏi tập đỉnh của G. Do đó mỗi f_i sẽ cho tương ứng một tập ổn định trong cực đại và do đó phương pháp này cho ta tất cả các tập ổn định trong cực đại. Chẳng hạn xét đồ thị trong Hình 2.5 ta có

$$\varphi = ab + bc + bd + be + ce + de + ef + eg + fg.$$

$$\varphi' = (a' + b')(b' + c')(b' + d')(b' + e')(c' + e')(d' + e')(e' + f')(e' + g')(f' + g').$$

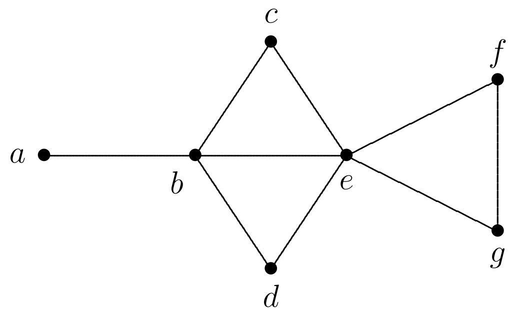
Rút gọn và đưa về dạng tổng của các tích ta được

$$\varphi' = b'e'f' + b'e'g' + a'c'd'e'f' + a'c'd'e'g' + b'c'd'f'g'.$$

Bây giờ nếu loại bỏ khỏi tập đỉnh của G các đỉnh xuất hiện trong bất kỳ một trong năm số hạng của tổng, ta sẽ thu được một tập ổn định trong cực đại. Các tập ổn định trong cực đại tương ứng là

$$\{a, c, d, g\}, \quad \{a, c, d, f\}, \quad \{b, g\}, \quad \{b, f\}, \quad \text{và} \quad \{a, e\}.$$

Và do đó số ổn định trong của đồ thị này bằng 4.



Hình 2.5:

2.4 Số ổn định ngoài

Định nghĩa 2.4.1 Cho đồ thị $G := (V, \Gamma)$. Tập hợp con T các đỉnh của V là tập *ổn định ngoài* nếu mọi đỉnh không thuộc T kề với ít nhất một đỉnh trong T; tức là $T \cap \Gamma(v) \neq \emptyset$ với mọi đỉnh $v \notin T$.

Ký hiệu $\mathcal{T}$ là họ các tập hợp ổn định ngoài của đồ thị G thì:

1. $V \in \mathcal{T}$.
2. $T \in \mathcal{T}$ và $T \subset A$ thì $A \in \mathcal{T}$.

Ta định nghĩa *số ổn định ngoài* của đồ thị G là số

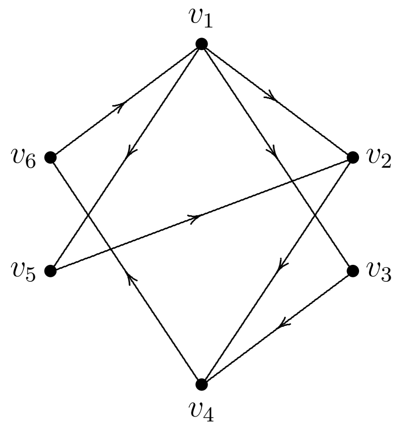
$$\beta(G) := \min\{\#T \mid T \in \mathcal{T}\}.$$

Tập ổn định ngoài cực tiểu là tập ổn định ngoài sao cho bỏ đi một đỉnh thì không còn ổn định ngoài nữa.

Ví dụ 2.4.2 Xét đồ thị G trong Hình 2.5. Các tập $\{b, g\}$ và $\{a, b, c, d, f\}$ là ổn định ngoài. Các tập $\{b, e\}$ và $\{a, c, d, f\}$ là ổn định ngoài cực tiểu. Dễ thấy $\beta(G) = 2$.

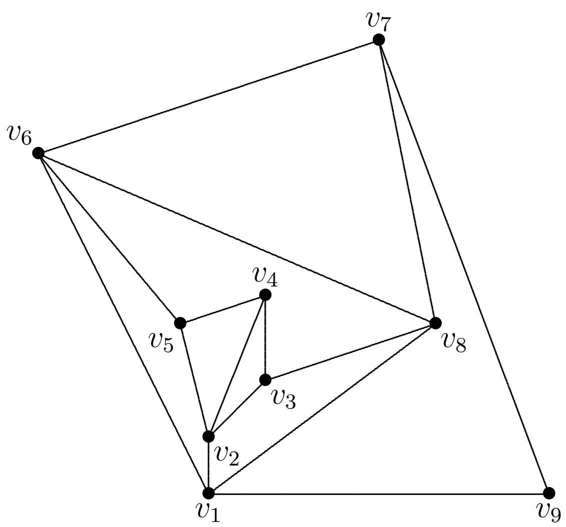
Ví dụ 2.4.3 Với đồ thị trong Hình 2.6, tập ổn định ngoài cực tiểu chứa số nhỏ nhất các phần tử là $\{v_1, v_4\}$ và do đó $\beta(G) = 2$.

Bài toán ta xét ở đây là xây dựng một tập hợp ổn định ngoài với số phần tử ít nhất.



Hình 2.6:

Ví dụ 2.4.4 *Bài toán về những người đứng gác.* Trong một trại giam ở thành phố N, mỗi nhà giam có một trạm gác độc lập, nhưng người đứng gác, chẳng hạn ở nhà giam v_1, cũng có thể nhìn thấy những gì xảy ra ở các nhà giam v_2, v_6, v_8, v_9, những nhà giam này thông với nhà giam v_1 bởi một hành lang thẳng như ta thấy trên Hình 2.7. Hỏi số người đứng gác cần thiết ít nhất là bao nhiêu để quan sát được mọi nhà giam? Ta phải tìm số ổn định ngoài của đồ thị vô hướng trong Hình 2.7, đối với sơ đồ rất đơn giản này thì số ổn định ngoài là 2.



Hình 2.7:

Ví dụ 2.4.5 *Vị trí của các "tâm" để phủ một vùng.* Có nhiều lĩnh vực liên quan đến bài toán này:

1. Vị trí của các máy phát T.V. hay radio truyền đến một số vị trí cho trước.

2. Vị trí của các trạm gác để giám sát một vùng.

3. Trạm làm việc của người bán hàng để phục vụ một vùng.

Giả sử rằng một vùng-cho bởi hình vuông lớn trong Hình 2.8-được phân hoạch thành 16 vùng nhỏ hơn. Giả sử một trạm gác được đặt trong một vùng nhỏ có thể giám sát không chỉ hình vuông nó đặt mà còn những hình vuông có chung biên với nó. Câu hỏi đặt ra là số tối thiểu các trạm gác và vị trí của chúng sao cho có thể điều khiển toàn bộ vùng. Nếu

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Hình 2.8:

ta biểu diễn mỗi vùng nhỏ bởi một đỉnh và một cạnh liên thuộc hai đỉnh nếu hai vùng tương ứng có chung một biên (hãy vẽ hình!). Bài toán đưa về tìm tập ổn định ngoài có số phần tử nhỏ nhất-là $\beta(G)$. Trong ví dụ này, $\beta(G) = 4$ và các trạm gác cần đặt tại các vị trí $\{3, 5, 12, 14\}$ hoặc tại $\{2, 9, 15, 8\}$.

Ví dụ 2.4.6 *Bài toán về 5 con hậu.* Trên bàn cờ quốc tế cần bố trí bao nhiêu con hậu để cho mọi ô trên bàn cờ đều bị ít nhất một con hậu khống chế. Bài toán này đưa về tìm một tập hợp ổn định ngoài cực tiểu cho đồ thị có 64 đỉnh (là các ô của bàn cờ), trong đó hai đỉnh kề nhau nếu và chỉ nếu các ô tương ứng nằm trên cùng một hàng, một cột hoặc cùng một đường chéo.

Số ổn định là +5 đối với các con hậu, chẳng hạn với hai cách sắp xếp:

$$(3, 3), (4, 6), (5, 4), (6, 2), (7, 5)$$

và

$$(5, 1), (8, 3), (4, 4), (3, 6), (7, 8),$$

trong đó (i, j) là vị trí của con hậu ở hàng i và cột j. Cũng dễ thấy số ổn định là: +8 đối với các con tháp; +12 đối với các con mã; +8 đối với các con điên.

Ví dụ 2.4.7 *Bài toán về sáu cái đĩa đỏ.* Trò chơi sau đây rất quen thuộc đối với những người ưa thích hội chợ Pháp: Trên bàn đặt một cái đĩa lớn màu trắng (bán kính 1), hãy tìm cách phủ hoàn toàn đĩa đó bởi sáu đĩa con đỏ (bán kính $r < 1$) lần lượt đặt trên bàn, và khi đã đặt rồi thì không được xê dịch nữa. Hỏi bán kính r nhỏ nhất bằng bao nhiêu để có thể giải được?

Bài toán đưa về tìm một tập ổn định ngoài cực tiểu T cho "đồ thị vô hạn" (V, E), trong đó V là tập hợp các điểm của đĩa trắng, và hai đỉnh kề nhau nếu khoảng cách giữa hai điểm tương ứng nhỏ hơn hoặc bằng r.

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra

1. Tập gồm đúng một đỉnh trong đồ thị đầy đủ K_n là tập ổn định ngoài cực tiểu.
2. Mọi tập ổn định ngoài chứa ít nhất một tập ổn định ngoài cực tiểu.
3. Một đồ thị có thể có nhiều tập ổn định ngoài cực tiểu với kích thước khác nhau.
4. Tập ổn định ngoài cực tiểu có thể hoặc không là ổn định trong.
5. Mọi tập ổn định trong cực đại là tập ổn định ngoài. Thật vậy, nếu trái lại thì có ít nhất một đỉnh không nằm trong tập này và cũng không kề với một đỉnh bất kỳ trong đó. Một đỉnh như thế có thể thêm vào mà không phá vỡ tính ổn định trong và do đó mâu thuẫn với tính cực đại của nó.
6. Một tập ổn định trong có tính ổn định ngoài chỉ nếu nó là tập ổn định trong cực đại.
7. Với mọi đồ thị G bất đẳng thức sau luôn thoả

$$\beta(G) \leq \alpha(G).$$

Tìm các tập ổn định ngoài cực tiểu

Tương tự cách xác định tập ổn định trong cực đại, ta có thể dùng đại số Boole để xác định các tập ổn định ngoài cực tiểu của đồ thị G.

Để kiểm tra đỉnh v_i ta cần lấy hoặc đỉnh v_i hoặc một đỉnh kề với nó. Tập nhỏ nhất các đỉnh thoả mãn điều kiện này là tập cần tìm. Do đó, với mỗi đỉnh v_i trong G chúng ta xét tích Boole của các tổng $(v_{i_1} + v_{i_2} + \cdots + v_{i_d})$ trong đó $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_d}$ là các đỉnh kề với đỉnh v_i và d là bậc của nó:

$$\theta = \prod_{v_i \in V} (v_{i_1} + v_{i_2} + \cdots + v_{i_d}).$$

Khi θ viết dưới dạng tổng của các tích, mỗi số hạng trong đó sẽ tương ứng với một tập ổn định ngoài cực tiểu. Chúng ta minh họa thuật toán này sử dụng đồ thị trong Hình 2.5. Ta có

$$\theta = (a+b)(b+c+d+e+a)(c+b+e)(d+b+e)(e+b+c+d+f+g)(f+e+g)(g+e+f).$$

Theo luật hấp thụ $(x+y)x = x$ ta suy ra

$$\begin{aligned} \theta &= (a+b)(c+b+e)(d+b+e)(f+e+g) \\ &= ae+be+bf+bg+acdf+acdg. \end{aligned}$$

Mỗi số hạng trong sáu biểu thức này tương ứng một tập ổn định ngoài tối thiểu. Hiển nhiên $\beta(G) = 2$.

Để xác định một tập hợp ổn định trong cực đại, hay một tập hợp ổn định ngoài cực tiểu, ta có thể xét lần lượt mỗi tập hợp con T của V và kiểm tra xem nó có thoả mãn các điều kiện đã đề ra hay không. Tất nhiên phương pháp loại dần này nói chung không dùng được. Người ta cần phải đưa ra các thuật toán. Chẳng hạn, khi giải quyết bài toán về tám con hậu, nếu dùng phương pháp loại dần cần khoảng 10 giờ để tính toán, trong khi đó nếu có một thuật toán tốt, chúng ta chỉ cần ba phút là thừa đủ; ngoài ra cần chú ý rằng: nếu ta đã đạt được việc xếp 8 con hậu trên bàn cờ, thì một lập luận rất đơn giản chỉ cho ta rõ rằng không thể làm tăng số con hậu lên được nữa trong trường hợp tổng quát hơn, cũng cần có một tiêu chuẩn đơn giản để nhận biết một tập hợp ổn định trong cực đại hay không, và chỉ có thuật toán đã được suy nghĩ kỹ mới có thể giúp ta biết điều đó (xem [4]).

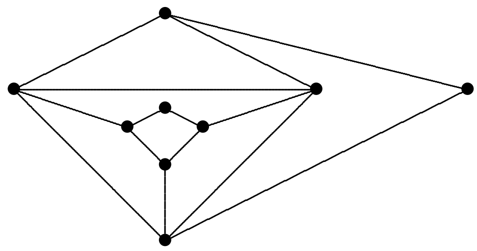
2.5 Phủ

Tập g các cạnh được gọi là *phủ* của đồ thị $G = (V, \Gamma)$ nếu mỗi đỉnh bất kỳ thuộc V liên thuộc với ít nhất một cạnh trong g.

Ví dụ 2.5.1 (a) Cây bao trùm trong đồ thị vô hướng liên thông là một phủ.

(b) Chu trình Hamilton (nếu nó tồn tại) trong đồ thị là một phủ.

Ví dụ 2.5.2 Trong trại giam của thành phố N, sơ đồ vẽ kèm theo đây, mỗi người gác ở hành lang (a, b) phải giám sát hai gian a và b là hai đầu của hành lang; hỏi số người gác ít nhất là bao nhiêu để mỗi gian ít nhất có một người giám sát? Bài toán này đưa về tìm phủ cực tiểu của một đồ thị. Trên đồ thị Hình 2.11, phủ nhỏ nhất có năm đỉnh, vậy năm người gác là đủ.



Hình 2.9:

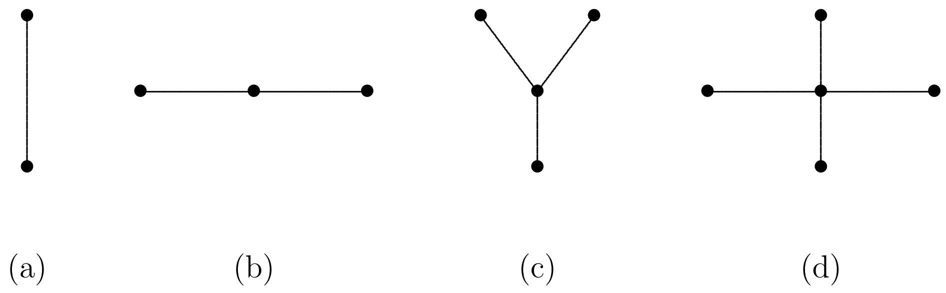
Trong một đồ thị, có thể có nhiều phủ, vấn đề ở đây là cần nghiên cứu phủ mà có một vài tính chất đặc biệt nào đó như cây bao trùm hay chu trình Hamnilton. Ta sẽ nghiên cứu *phủ tối thiểu:* là phủ mà nếu bỏ đi một cạnh thì sẽ phá hủy thuộc tính phủ của nó.

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra

1. Tồn tại phủ trong một đồ thị nếu và chỉ nếu đồ thị không có đỉnh cô lập.
2. Một phủ của đồ thị n đỉnh có ít nhất $[n/2]$ cạnh (ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).
3. Mọi cạnh treo trong đồ thị nằm trong phủ của đồ thị.
4. Mọi phủ đều chứa phủ tối thiểu.
5. Tập các cạnh g là một phủ nếu và chỉ nếu, với mọi đỉnh $v \in V$ ta có $d_{G\setminus g}(v) \leq d_G(v) - 1$, trong đó $G \setminus g$ là đồ thị G xoá đi các cạnh thuộc g.
6. Phủ tối thiểu không chứa chu trình. Do vậy mọi phủ tối thiểu của đồ thị n đỉnh không chứa hơn $(n-1)$ cạnh.
7. Một đồ thị, nói chung, có nhiều phủ tối thiểu, và chúng có thể có kích thước khác nhau (gồm số các cạnh khác nhau). Số các cạnh trong một phủ tối thiểu có cỡ nhỏ nhất được gọi là *số phủ* của đồ thị.

Định lý 2.5.3 *Phủ g của một đồ thị là tối thiểu nếu và chỉ nếu g không chứa các dây chuyền có độ dài lớn hơn hoặc bằng ba.*

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử g là phủ tối thiểu của G mà chứa một dây chuyền có độ dài ba là
$$\mu := \{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4\}.$$
Trong g bỏ cạnh e_2 thì ta vẫn thu được một phủ của G, điều này mâu thuẫn với tính tối thiểu của g.



Hình 2.10: Các đồ thị hình sao.

Điều kiện đủ. Ngược lại, nếu g không chứa một dây chuyền nào có độ dài lớn hơn hoặc bằng ba thì các thành phần của nó phải có một trong các dạng "hình sao" như trong Hình 2.10. Hiển nhiên nếu xoá bất kỳ một cạnh của đồ thị hình sao thì sẽ có ít nhất một đỉnh không liên thuộc với cạnh còn lại của g. Vậy g là phủ tối thiểu. $\triangleleft$

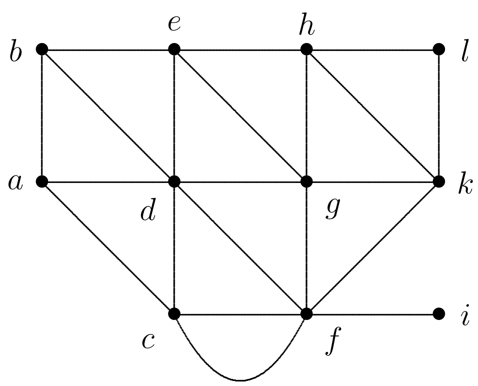
Ví dụ 2.5.4 Giả sử đồ thị trong Hình 2.11 biểu diễn bản đồ giao thông của một thành phố. Mỗi đỉnh là một nút giao thông thường xảy ra tắc nghẽn và mỗi cạnh tương ứng một đại lộ nối hai nút giao thông. Cần đặt các đội tuần tra trên các đại lộ sao cho có thể giám sát tất cả các nút giao thông. Vấn đề đặt ra là số tối thiểu các đội tuần tra là bao nhiêu? Câu trả lời chính là tìm phủ tối thiểu với số phần tử ít nhất của đồ thị. Dễ kiểm tra hai tập sau là phủ tối thiểu:

$$\{(a,d),(b,e),(c,f),(f,i),(g,h),(k,l)\}$$

và

$$\{(a,b),(b,d),(b,e),(c,f),(f,g),(f,i),(h,l)\}.$$

Do có 11 đỉnh và mỗi cạnh phủ nhiều nhất hai đỉnh nên không thể phủ đồ thị ít hơn sáu cạnh.



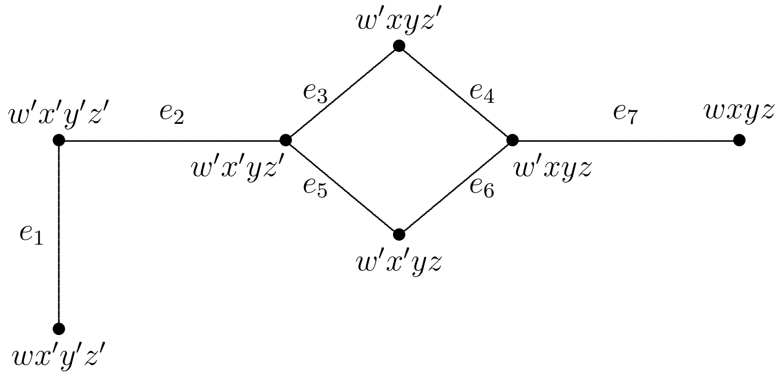
Hình 2.11:

Cực tiểu hoá hàm Boole

Một phần quan trọng trong việc thiết kế các mạch số là cực tiểu hoá hàm Boole trước khi thiết kế nó. Giả sử ta muốn xây dựng mạch logic cho bởi hàm Boole bốn biến

$$f(x, y, z, w) = w'x'y'z' + w'x'yz' + w'x'yz + w'xyz' + w'xyz + wxyz.$$

Chúng ta hãy biểu diễn mỗi một trong bảy thành phần của f bởi một đỉnh và một cạnh liên thuộc hai đỉnh nếu và chỉ nếu hai thành phần chỉ khác nhau đúng một biến. Đồ thị tương ứng hàm f cho trong Hình 2.12.



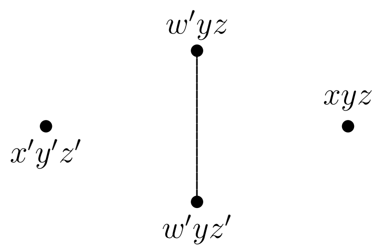
Hình 2.12:

Một cạnh liên thuộc hai đỉnh tương ứng một thành phần với ba biến.

Một phủ tối thiểu của đồ thị cho ta một đơn giản hoá hàm Boole f, với cùng chức năng như f nhưng thiết kế sử dụng ít cổng logic hơn.

Các cạnh treo e_1 và e_7 cần thuộc mọi phủ của đồ thị. Bởi vậy các thành phần $x'y'z'$ và xyz là không thể khử được. Hai cạnh e_3 và e_6 (hoặc e_4 và e_5, hoặc e_3 và e_5) sẽ phủ các đỉnh còn lại. Do đó ta có thể viết lại

$$f = x'y'z' + xyz + w'yz' + w'yz.$$



Hình 2.13:

Biểu thức này lại có thể biểu diễn bởi đồ thị trong Hình 2.13.

Các thành phần $x'y'z'$ và xyz không thể phủ bởi một cạnh do đó không thể cực tiểu thêm với chúng. Ngoài ra có một cạnh phủ hai đỉnh còn lại $w'yz$ và $w'yz'$. Do đó biểu thức Boole tối thiểu là

$$f = x'y'z' + xyz + w'y.$$

2.6 Nhân của đồ thị

2.6.1 Các định lý về tồn tại và duy nhất

Xét đồ thị $G := (V, \Gamma)$. Ta nói tập hợp $S \subset V$ là *nhân* của đồ thị G nếu S là tập ổn định trong và ngoài của G; tức là nếu

1. Nếu $v \in S$ thì $\Gamma(v) \cap S = \emptyset$; và
2. Nếu $v \notin S$ thì $\Gamma(v) \cap S \neq \emptyset$.

Điều kiện (1) suy ra rằng nhân S không có khuyên; điều kiện (2) suy ra nhân S chứa mọi đỉnh $v \in V$ có $\Gamma(v) = \emptyset$; ngoài ra, rõ ràng tập trống $\emptyset$ không phải là nhân.

Ví dụ 2.6.1 [Von Neumann-Morgenstern] Khái niệm nhân đầu tiên được đưa vào lý thuyết trò chơi với tên gọi là "lời giải".

Giả sử có n đấu thủ, ký hiệu là $(1), (2), \ldots, (n)$, họ có thể thoả thuận với nhau để chọn tình thế v trong tập hợp V; nếu đấu thủ (i) ưng tình thế a hơn tình thế b thì ta viết $a \succeq b$. Hiển nhiên $\succeq$ là quan hệ tiền thứ tự toàn phần[1]. Vì những sự thích ứng của các cá nhân $\succeq$ có thể không phù hợp nhau nên ta phải đưa thêm khái niệm *thích ứng hiệu quả* $\succ$. Nếu tình huống a được thích ứng hiệu quả hơn tình huống b (ký hiệu $a \succ b$) thì nghĩa là: có một tập đấu thủ, do cho rằng a hơn b nên họ có thể cho quan điểm của mình thắng thế; nếu ngoài ra lại có $b \succ c$ thì có một tập các đấu thủ có khả năng làm cho tình huống b thắng thế; nhưng vì tập hợp thứ hai không bắt buộc phải trùng với tập hợp thứ nhất nên có thể không bắt buộc $a \succ c$: quan hệ $\succ$ không có tính bắc cầu[2]!

[1] Quan hệ $\succeq$ trên tập V là *tiền thứ tự toàn phần* nếu nó thoả mãn: tính phản xạ, tính bắc cầu và hai phần tử bất kỳ $a, b \in V$ thì hoặc $a \succeq b$ hoặc $b \succeq a$.

[2] Thuật ngữ *thích ứng hiệu quả* do G. T. Guilbaud đưa ra trong [40]; Von Neumann và Morgenstern lại dùng danh từ *áp đảo*. Về các cách phát biểu toán học khác của sự thích ứng hiệu quả, xem [5].

Bây giờ xét đồ thị $G = (V, \Gamma)$ trong đó $\Gamma(x)$ là tập các tình huống được thích ứng hiệu quả hơn x. Gọi S là nhân (nếu có) của đồ thị. Von Neumann và Morgenstern đề nghị chỉ hạn chế trò chơi với các phần tử của S thôi. Sự ổn định trong của S biểu thị rằng: không có một tình huống nào của S được thích ứng hiệu quả hơn một tình huống khác x; sự ổn định ngoài của S biểu thị rằng: mọi tình huống x không thuộc S không được thích ứng hiệu quả hơn một tình huống nào đó của S, do đó tình huống x lập tức được loại trừ.

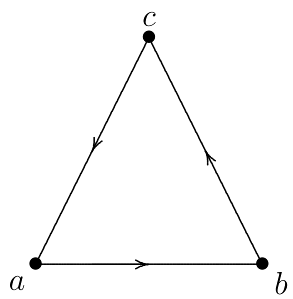
Ví dụ 2.6.2 Không phải mọi đồ thị đều có nhân. Nếu đồ thị có nhân S_0 thì các số ổn định của nó thoả mãn điều kiện:

$$\alpha(G) = \max_{S \in \mathcal{S}} \#S \geq \#S_0 \geq \min_{T \in \mathcal{T}} = \beta(G).$$

Đồ thị trong Hình 2.14 không có nhân vì

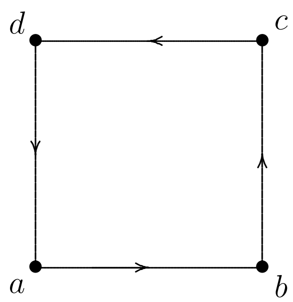
$$\alpha(G) = 1 < 2 = \beta(G).$$

Trái lại, đồ thị trong Hình 2.15 có hai nhân là $S' = \{b, d\}$ và $S'' = \{a, c\}$.



Hình 2.14:

Bây giờ ta đưa ra tiêu chuẩn để nhận biết một đồ thị có nhân hay không, và nhân có duy nhất không?



Hình 2.15:

Định lý 2.6.3 *Nếu S là nhân của đồ thị (V, Γ) thì S là tập hợp cực đại trong họ $\mathcal{S}$ các tập ổn định trong; tức là*

$$A \in \mathcal{S}, S \subset A \quad \Rightarrow \quad A = S.$$

Chứng minh. Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại tập ổn định trong A chứa nhân S và $A \neq S$. Khi đó tồn tại $a \in A$ sao cho $a \neq S$; từ đó suy ra $\Gamma(a) \cap S \neq \emptyset$. Vậy $\Gamma(a) \cap A \neq \emptyset$, mâu thuẫn với $A \in \mathcal{S}$. ◁

Định lý 2.6.4 *Trong đồ thị đối xứng không khuyên, mọi tập hợp cực đại của họ $\mathcal{S}$ các tập hợp ổn định trong đều là nhân*

Chứng minh. Giả sử S là tập hợp cực đại trong $\mathcal{S}$, ta phải chứng minh rằng mọi đỉnh $a \notin S$ đều thoả mãn $\Gamma(a) \cap S \neq \emptyset$. Thật vậy, nếu $\Gamma(a) \cap S \neq \emptyset$ với đỉnh $a \in S$ thì tập $A = S \cup \{a\}$ ổn định trong (vì $a \notin \Gamma(a)$, đồng thời $S \subset A, A \neq S$, mâu thuẫn với giả thiết S là tập ổn định trong cực đại. ◁

Hệ quả 2.6.5 *Mọi đồ thị đối xứng không khuyên đều có nhân.*

Chứng minh. Thật vậy, lập đồ thị phụ $(\mathcal{S}, \bar{\Gamma})$ có các đỉnh là các tập ổn định trong của đồ thị đối xứng đã cho, và $S \in \bar{\Gamma}_{S'}$ nếu và chỉ nếu $S' \subset S$. Đồ thị phụ là cảm ứng, vậy theo Bổ đề Zorn, tồn tại đỉnh $S \in \mathcal{S}$ không có dòng dõi nên S là tập ổn định trong cực đại và theo Định lý 2.6.4 S là nhân của đồ thị đã cho. ◁

Trong đồ thị đối xứng không khuyên, quá trình tìm nhân là như sau:

Lấy một đỉnh bất kỳ v_0 và đặt $S_0 = \{v_0\}$; sau đó lấy một đỉnh $v_1 \notin \Gamma(S_0)$ và đặt $S_1 = S_0 \cup \{v_1\}$; tiếp theo lấy $v_2 \notin \Gamma(S_1)$ và đặt $S_2 = S_1 \cup \{v_2\}$; và vân vân. Vì đồ thị hữu hạn nên sớm hay muộn ta sẽ được $\Gamma(S_k) = V$, và vì S_k là tập hợp cực đại của $\mathcal{S}$ nên nó là nhân.

Định lý 2.6.6 *Điều kiện cần và đủ để tập S là nhân là hàm đặc trưng của nó*

$$\varphi_S(x) := \begin{cases} 1 & \textit{nếu } x \in S, \\ 0 & \textit{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

thoả mãn hệ thức

$$\varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma(x)} \varphi_S(y).$$

Nếu $\Gamma(x) = \emptyset$ thì ta quy ước

$$\max_{y \in \Gamma(x)} \varphi_S(y) = 0.$$

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử S là nhân. Do tính ổn định trong nên $\varphi_S(x) = 1$ suy ra $x \in S$ và do đó

$$\max_{y \in \Gamma(x)} \varphi_S(y) = 0.$$

Mặt khác, do tính ổn định ngoài nên $\varphi_S(x) = 0$ suy ra $x \notin S$ và do đó

$$\max_{y \in \Gamma(x)} \varphi_S(y) = 1.$$

Từ đó suy ra hệ thức đã phát biểu.

Điều kiện đủ. Giả sử $\varphi_S(x)$ là hàm đặc trưng của một tập hợp S nào đó. Nếu hệ thức của định lý thoả mãn thì ta có

1. $x \in S$ suy ra $\varphi_S(x) = 1$ nên $\max_{y \in \Gamma(x)} \varphi_S(y) = 0$. Vậy $\Gamma(x) \cap S = \emptyset$.
2. $x \notin S$ suy ra $\varphi_S(x) = 0$ nên $\max_{y \in \Gamma(x)} \varphi_S(y) = 1$. Vậy $\Gamma(x) \cap S \neq \emptyset$.

Do đó S là nhân. ◃

Định lý 2.6.7 [Richardson] *Nếu đồ thị hữu hạn không có mạch với độ dài lẻ, thì nó có nhân (nhưng không nhất thiết duy nhất).*

Chứng minh. Xem, chẳng hạn [4]. ◃

2.6.2 Trò chơi Nim

Giữa hai đấu thủ mà chúng ta ký hiệu là (A) và (B) có một đồ thị (V, Γ) cho phép xác định một trò chơi nào đó, trong trò chơi ấy mỗi thế là một đỉnh của đồ thị; đỉnh khởi đầu v_0 được chọn bằng cách rút thăm, và các đấu thủ lần lượt đi: đầu tiên đấu thủ (A) chọn đỉnh v_1 trong tập hợp $\Gamma(v_0)$; sau đó (B) chọn đỉnh v_2 trong tập $\Gamma(v_1)$; tiếp theo (A) lại chọn đỉnh v_3 trong tập $\Gamma(v_2), \ldots$. Nếu một đấu thủ chọn được đỉnh v_k mà $\Gamma(v_k) = \emptyset$ thì ván đó kết thúc; đấu thủ nào chọn được đỉnh cuối cùng thì thắng cuộc và đấu thủ kia thua. Hiển nhiên do ta chỉ xét đồ thị hữu hạn nên cuộc chơi sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước.

Để kỷ niệm một trò chơi tiêu khiển quen thuộc mà Nim đã tổng quát hoá, ta gọi trò chơi vừa mô tả là *trò chơi Nim* và ký hiệu là (V, Γ) cũng như đồ thị xác định nó. Bài toán đặt ra là phát hiện các thế thắng; nghĩa là các đỉnh của đồ thị mà ta phải chọn để bảo đảm chắc thắng mặc dù đối phương chống trả ra sao. Kết quả chủ yếu như sau:

Định lý 2.6.8 *Nếu đồ thị có nhân S và nếu một đối thủ đã chọn một đỉnh trong nhân S, thì việc chọn này bảo đảm cho anh ta thắng hoặc hoà.*

Chứng minh. Thật vậy, nếu đấu thủ (A) chọn đỉnh $v_1 \in S$ thì hoặc $\Gamma(v_1) = \emptyset$ lúc đó anh ta thắng; hoặc đối phương buộc phải chọn một đỉnh v_2 trong $V \setminus S$, do đó đến lượt mình, đấu thủ (A) lại có thể chọn một đỉnh $v_3 \in S$ và cứ như thế mãi. Nếu đến một lúc nào đó, một trong các đấu thủ thắng bằng cách chọn một đỉnh v_k mà $\Gamma(v_k) = \emptyset$ thì ta có $v_k \in S$. Vậy đấu thủ thắng nhất định phải là (A). Ta có điều phải chứng minh. $\triangleleft$

Một phương pháp cơ bản để chơi tốt là tìm *hàm Grundy* (nếu nó tồn tại) (xem [4]) và từ đó suy ra nhân của đồ thị đã cho. Bạn đọc quan tâm về các trò chơi trên đồ thị có thể xem [4] (Chương 6).

