

BÀI 05

3.3. Nhân của đồ thị

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị.

Định nghĩa 3.8: Tập $B \subseteq V$ được gọi là *nhân* của đồ thị G nếu nó vừa là tập ổn định trong vừa là tập ổn định ngoài của G , nghĩa là:

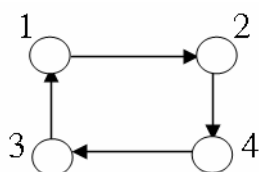
$$\begin{aligned} \forall x \in B : B \cap F(x) &= \emptyset \quad \text{và} \\ \forall y \notin B : B \cap F(y) &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Hai điều kiện trên của nhân tương đương với đẳng thức: $F^{-1}(B) = V \setminus B$.

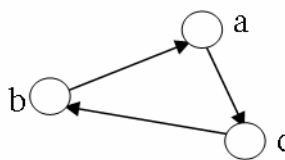
Từ định nghĩa của nhân, ta suy ra:

- Nhân không chứa đỉnh nút.
- Nếu $F(x) = \emptyset$ thì x phải thuộc vào một nhân nào đó của đồ thị.

Ví dụ 3.9: Xét các đồ thị sau đây:



Đồ thị có hai nhân



Đồ thị không có nhân

Hình 3.4. Đồ thị và có nhân và đồ thị không có nhân

Chú ý: Nếu g là một hàm Grundy của đồ thị G thì tập hợp:

$$B = \{x \mid g(x) = 0\} \text{ là một nhân của } G.$$

Quả vậy, nếu x, y đều thuộc B thì $g(x) = g(y) (= 0)$ nên x không thể kề với y . Vậy B là tập ổn định trong.

Mặt khác, nếu $x \notin B$ thì $g(x) > 0$. Khi đó, với $u = 0 < g(x)$ sẽ tồn tại $y \in F(x)$ sao cho $g(y) = u = 0$. Ta có $y \in B$. Vậy B là tập ổn định ngoài.

Định lý 3.4: Nếu B là nhân của đồ thị G thì B cũng là tập ổn định trong cực đại.

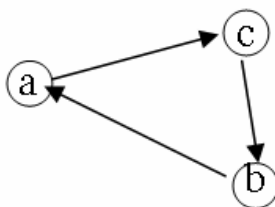
Chứng minh:

Giả sử ngược lại, B không là tập ổn định trong cực đại. Điều này có nghĩa là tồn tại $a \notin B$ mà $B \cup \{a\}$ vẫn là tập ổn định trong. Vì B là nhân nên a sẽ kề với

một đỉnh nào đó trong B . Vậy thì $B \cup \{a\}$ không thể là tập ổn định trong. Suy ra điều vô lý. Định lý được chứng minh xong. \square

Chú ý rằng, mệnh đề ngược lại là không đúng.

Ví dụ 3.10: Xét phản ví dụ sau đây.



Hình 3.5. Tập ổn định trong cực đại không phải là nhân

Tập $B = \{a\}$ là tập ổn định trong cực đại nhưng không phải là nhân của đồ thị.

Nhưng với đồ thị đối xứng thì mệnh đề ngược lại của Định lý 3.4 là đúng.

Định lý 3.5: Trong đồ thị đối xứng không có đỉnh nút, mọi tập ổn định trong cực đại đều là nhân của đồ thị.

Chứng minh:

Giả sử B là tập ổn định trong cực đại của đồ thị $G = (V, E)$. Ta chỉ cần chứng minh rằng B là ổn định ngoài.

Thật vậy, giả sử $x \notin B$. Theo tính chất cực đại của B thì x phải kề với một đỉnh y nào đó ở trong B . Vì đồ thị G đối xứng nên $y \in F(x)$. Suy ra tập B là ổn định ngoài. Định lý được chứng minh xong. \square

Chú ý:

Điều kiện G không có đỉnh nút là cần thiết vì trong trường hợp ngược lại đỉnh x không nhất thiết phải kề với tập B .

Hệ quả 3.6: Mọi đồ thị xứng không có đỉnh nút luôn luôn có nhân.

Chứng minh: Chỉ cần tìm một tập ổn định trong cực đại. Mà tập ổn định trong cực đại thì luôn luôn có. \square

Định lý 3.7: Mọi đồ thị không có chu trình luôn có nhân.

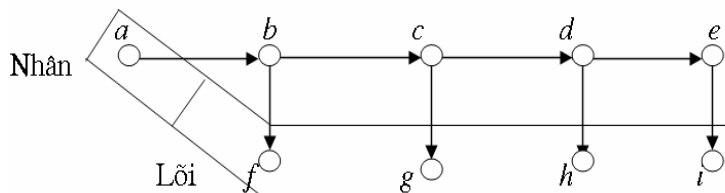
Chứng minh: Vì theo Định lý 2.1 đồ thị này có hàm Grundy, tập các đỉnh mà tại đó hàm Grundy bằng 0 chính là một nhân của đồ thị. \square

Vậy với điều kiện nào thì đồ thị có chu trình có nhân. Để trả lời câu hỏi này ta cần đưa thêm vào khái niệm sau đây.

Định nghĩa 3.11: Tập con các đỉnh B được gọi là *lõi* của đồ thị $G = (V, E)$ nếu:

- 1) $\forall x, y \in B, x \neq y$: không tồn tại đường đi nối x với y .
- 2) $\forall x \notin B$: có tồn tại đường đi từ x đến B .

Ví dụ 3.12: Lõi và nhân của một đồ thị



Hình 3.6. Lõi và nhân của đồ thị

Trước hết ta có bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.9: Mọi đồ thị đều có lõi.

Chứng minh:

Chứng minh quy nạp theo số đỉnh n của đồ thị G .

$n=1$: đỉnh duy nhất cũng là lõi của đồ thị.

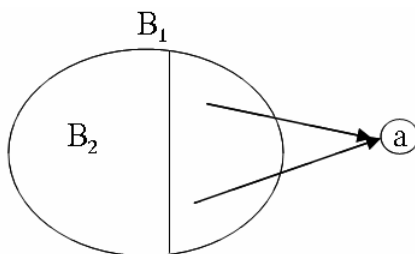
$(n) \Rightarrow (n+1)$: Đồ thị $G = (V, E)$ có $n+1$ đỉnh được xây dựng từ đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ có n đỉnh thêm đỉnh a và một số cạnh kề a . Thế thì, $V = V_1 \cup \{a\}$.

Theo giả thiết quy nạp, đồ thị G_1 có lõi là B_1 .

Nếu có đường đi từ a tới V_1 thì sẽ có đường từ a tới B_1 , do vậy B_1 cũng là lõi của G .

Ngược lại, giả sử không có đường đi từ a tới V_1 . Thế thì, không có cạnh đi ra từ a và a sẽ là đỉnh treo. Ký hiệu:

$$B_2 = \{x \mid x \in B_1 \text{ và không có đường đi từ } x \text{ tới } a\}.$$



Hình 3.7. Xây dựng lõi của đồ thị

Khi đó $B = B_2 \cup \{a\}$ là lõi của G . Quả vậy:

1) Giả sử $x, y \in B$ và $x \neq y$. Ta phải chứng minh rằng không có đường nối x với y .

- Nếu x và y cùng thuộc B_2 thì chúng cùng thuộc B_1 . Mà B_1 là lõi của G_1 nên không có đường nối x với y trong G_1 . Hơn nữa, cũng không thể có đường nối qua đỉnh a vì a là đỉnh treo.

- Nếu $x = a, y \in B_2$ thì theo định nghĩa của B_2 sẽ không có đường đi từ y đến a , và cũng không có đường từ a đến y vì a là đỉnh treo.

2) Với $x \notin B$: thì $x \neq a$ và $x \notin B_2$.

Ta phải chứng tỏ có đường đi từ x đến B .

Giả sử $x \in B_1$. Vì $x \notin B_2$ nên có đường từ x đến a theo định nghĩa của B_2 .

Giả sử $x \notin B_1$. Vì $x \neq a$ nên $x \in V_1$. Suy ra có đường đi từ x đến $y \in B_1$ vì B_1 là lõi của G_1 . Nếu $y \notin B_2$ thì theo định nghĩa của B_2 sẽ có đường đi từ y đến a .

Trong tất cả các trường hợp đều suy ra là có đường từ x đến B .

Bổ đề được chứng minh. \square

Định lý 3.10: Mọi đồ thị không có chu trình độ dài lẻ luôn có nhân.

Chứng minh:

Phương hướng chứng minh như sau: Ta xây dựng ba dãy tập con các đỉnh của đồ thị: V_0, V_1, V_2, \dots , B_0, B_1, B_2, \dots và C_0, C_1, C_2, \dots lần lượt như sau:

Đặt: $V_0 = V$,

chọn B_0 là lõi của V_0 và

$C_0 = \{x \mid x \in V_0 \setminus B_0 \text{ và có cạnh đi từ } x \text{ đến } B_0\}$.

Lấy $V_1 = V_0 \setminus (B_0 \cup C_0)$

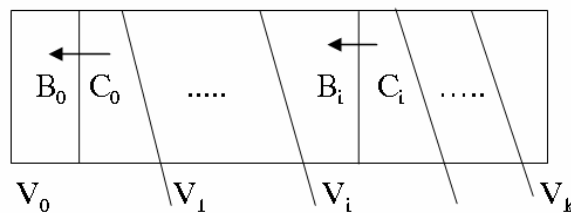
B_1 là lõi của V_1 và

$C_1 = \{x \mid x \in V_1 \setminus B_1 \text{ và có cạnh đi từ } x \text{ đến } B_1\}$.

Tương tự:

$V_2 = V_1 \setminus (B_1 \cup C_1)$

.....



Hình 3.8. Cách xây dựng ba dãy tập con

Giả sử đã chọn được B_i là lõi của V_i .

Đặt $C_i = \{x \mid x \in V_i \setminus B_i \text{ và có cạnh đi từ } x \text{ đến } B_i\}$.

Đến một bước nào đó thì $V_k \setminus B_k = \emptyset$ và ta đã vét hết các đỉnh của đồ thị.

Chọn tập $B = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$. Ta chứng minh được rằng tập B là nhân của đồ thị G . Phần chứng minh tiếp theo xin dành cho độc giả. \square

Định lý 3.11: Nếu mỗi đồ thị con của đồ thị G đều có nhân, thì G có hàm Grundy.

Chứng minh:

Xây dựng hai dãy tập con các đỉnh: V_0, V_1, V_2, \dots và B_0, B_1, B_2, \dots lần lượt như sau:

$$V_0 = V,$$

Chọn B_0 là nhân của G .

$$V_1 = V_0 \setminus B_0$$

B_1 là nhân của đồ thị con tạo bởi V_1

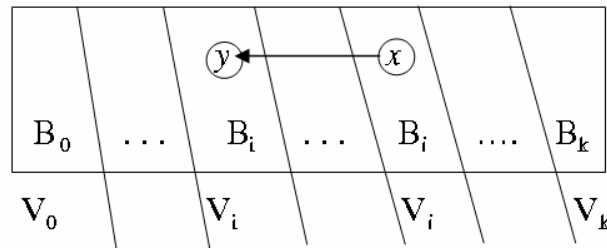
.....

$$V_{i+1} = V_i \setminus B_i$$

B_{i+1} là nhân của đồ thị con tạo bởi V_{i+1} .

Vì mỗi nhân đều khác rỗng nên đến một bước nào đó sẽ vét hết các đỉnh của đồ thị và ta nhận được dãy các nhân B_0, B_1, \dots, B_k .

Xây dựng hàm g như sau: với $x \in B_i$ ta đặt $g(x) = i$. Ta chứng minh g là hàm Grundy của đồ thị.



Hình 3.9. Cách xây dựng dãy các nhân

1) Nếu x, y kề nhau thì chúng không thể thuộc cùng một tập B_i vì B_i là nhân, cho nên $g(x) \neq g(y)$.

2) Giả sử có số nguyên $i < g(x) = j$. Khi đó $x \in B_j \subseteq V_i \setminus B_i$. Vậy thì $x \notin B_i$. Vì B_i là tập ổn định ngoài của V_i mà $x \in V_i \setminus B_i$ nên tồn tại $y \in B_i$ sao cho $y \in F(x)$. Suy ra: $g(y) = i$.

Đó là điều phải chứng minh. \square

Hệ quả 3.12: Đồ thị đối xứng có hàm Grundy khi và chỉ khi nó không có đỉnh nút. Chứng minh:

Thật vậy, đồ thị có hàm Grundy thì không có đỉnh nút. Ngược lại, giả sử đồ thị G là đối xứng và không có đỉnh nút. Theo Hệ quả 3.6, mọi đồ thị con của G đều có nhân. Do vậy đồ thị G có hàm Grundy. \square

Thuật toán 3.13 (Tìm nhân của đồ thị):

- 1) Chọn một tập ổn định ngoài bé nhất.
- 2) Kiểm tra xem nó có phải là tập ổn định trong hay không. Nếu đúng thì ta nhận được nhân bé nhất.
- 3) Tăng dần số phần tử của tập ổn định ngoài và lặp lại phép kiểm tra, để nhận được các nhân khác.

Chú ý: Nếu một đồ thị có số ổn định trong bé hơn số ổn định ngoài thì đồ thị ấy không có nhân.

3.4. Ứng dụng nhân vào lý thuyết trò chơi

Ta nghiên cứu loại trò chơi hai đấu thủ, được gọi là trò chơi Nim. Trò chơi này được mô tả như sau:

1. Có một tập hợp hữu hạn các *hình trạng* V .
2. Cho phép chuyển từ một hình trạng sang một số hình trạng khác, gọi là các *nước đi*.
3. Có một tập con các hình trạng được gọi là tập các *hình trạng kết thúc*.
4. Xuất phát từ một hình trạng, hai đấu thủ lần lượt chọn nước đi. Ai rơi vào hình trạng kết thúc là người thua cuộc.

Ta biểu diễn đồ thị $G = (V, F)$ cho trò chơi Nim như sau: Tập các đỉnh chính là tập các hình trạng V . Với mỗi hình trạng x thì $F(x)$ là tập các hình trạng có thể chuyển đến trực tiếp từ x bằng các nước đi.

Nếu đồ thị biểu diễn trò chơi có nhân và tất cả các hình trạng kết thúc đều nằm trong nhân thì ta có chiến lược chắc chắn thắng sau đây:

- 1) Tìm cách đưa đối thủ vào nhân.
- 2) Khi đối thủ đã ở trong nhân thì đối thủ chọn nước đi nào cũng đều đi đến một hình trạng nằm ngoài nhân.
- 3) Đến lượt ta đi, khi đang ở ngoài nhân ta luôn chọn được nước đi để đưa đối thủ trở vào nhân. Đối thủ chắc chắn bị thua.

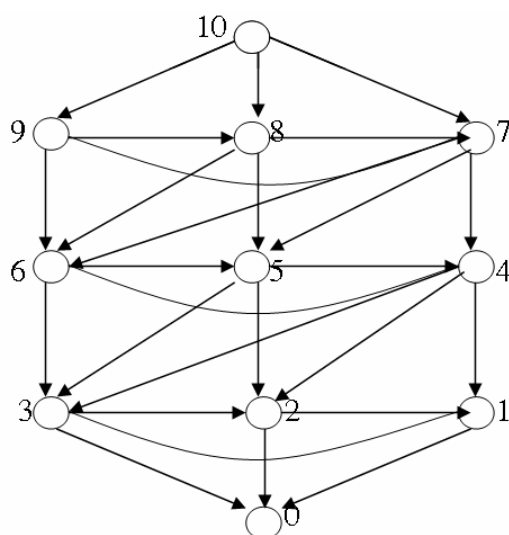
Ví dụ 3.13: Giả sử ta có m que và k là một số nguyên dương cho trước ($k \leq m$). Hai người tham gia cuộc chơi bốc que. Đến lượt đi, người chơi phải bốc một số que không vượt quá k . Ai bốc được chiếc que cuối cùng thì người đó thắng cuộc.

Hình trạng của trò chơi là số que có thể còn lại trên mặt đất. Đồ thị của trò chơi là $G = (V, F)$ với $V = \{m, m-1, \dots, 1, 0\}$ và $F(x) = \{x-1, x-2, \dots, x-k\}$ (trong tập này nếu có số âm thì ta bỏ đi). Dễ thấy rằng, hàm Grundy của đồ thị G sẽ là $g(x) = x \bmod (k+1)$ và nhân đồ thị là tập $B = \{x \mid x \bmod (k+1) = 0\}$. Số 0 là hình trạng kết thúc duy nhất cũng nằm trong nhân. Do vậy, nếu $m \notin B$ và ta được đi trước thì áp dụng chiến thuật trên, chắc chắn ta sẽ thắng.

Chẳng hạn, với $m = 10, k = 3$. Trò chơi được biểu diễn bằng đồ thị định hướng như ở Hình 3.10.

Hàm Grundy của đồ thị trò chơi là $g(x) = x \bmod 4$ và nhân của đồ thị là tập hợp $B = \{8, 4, 0\}$.

Nếu được đi trước, để thắng cuộc ta bốc 2 que để còn lại 8 que (thuộc nhân B). Sau đó nếu đối thủ bốc q que ($1 \leq q \leq 3$) thì ta bốc $4-q$ que, để số que còn lại là 4 (vẫn thuộc nhân). Tiếp tục như trên, nếu đối thủ bốc q que ($1 \leq q \leq 3$) thì ta lại bốc $4-q$ que là hết. Đối thủ không còn que để bốc và ta thắng cuộc.



Hình 3.10. Đồ thị của trò chơi bốc que

Ví dụ 3.14: Có ba đồng que với số lượng tương ứng là m_1, m_2, m_3 . Hai người chơi lần lượt bốc que. Đến lượt đi, người chơi bốc một số que tùy ý ở trong một đồng. Ai bốc được chiếc que cuối cùng thì người đó thắng cuộc.

Trước hết, ta xét trò chơi đơn giản sau đây: Có m que. Hai người tham gia cuộc chơi, đến lượt đi người chơi phải bốc một số que tùy ý. Ai bốc được chiếc que cuối cùng thì người đó thắng cuộc. Đồ thị của trò chơi này là một đồ thị định hướng có $m+1$ đỉnh: $m, m-1, \dots, 1, 0$ và cặp (i, j) là một cạnh khi và chỉ khi $i > j$. Hàm Grundy của đồ thị này là $g(x) = x$.

Đồ thị của trò chơi bốc ba đồng que ở trên là đồ thị tổng của ba trò chơi riêng biệt mà ta vừa xét $G = G_1 + G_2 + G_3$.

Hàm Grundy của G là $g((x,y,z)) = g_1(x) \oplus g_2(y) \oplus g_3(z)$.

Nhân của đồ thị là $B = \{(x,y,z) \mid x \oplus y \oplus z = 0\}$. Hình trạng $(0, 0, 0)$ là hình trạng kết thúc duy nhất nằm trong nhân. Do vậy, có thể áp dụng chiến thuật chơi ở trên.

Chẳng hạn, với $m_1 = 6, m_2 = 5, m_3 = 2$.

Nếu được đi trước, ta phải bốc ở đồng thứ hai 1 que để dẫn tới đỉnh $(6, 4, 2) \in B$. Sau đó đối thủ bốc thế nào cũng dẫn tới đỉnh nằm ngoài nhân, ta vẫn có thể bốc để dẫn đến đỉnh nằm trong nhân.

Chẳng hạn, anh ta bốc 3 que ở đồng thứ nhất thì ta bốc 3 que ở đồng thứ hai và dẫn tới hình trạng $(3, 1, 2) \in B$. Anh ta lại bốc 3 que ở đồng thứ nhất thì ta bốc 1 que ở đồng thứ ba để dẫn tới hình trạng $(0, 1, 1) \in B$. Anh ta bốc 1 que ở đồng nào thì ta bốc nốt que ở đồng còn lại và thắng cuộc.

Có thể mở rộng các trò chơi trên thành trò chơi với số đồng que tùy ý.