

## Chương 6

# Đồ thị phẳng

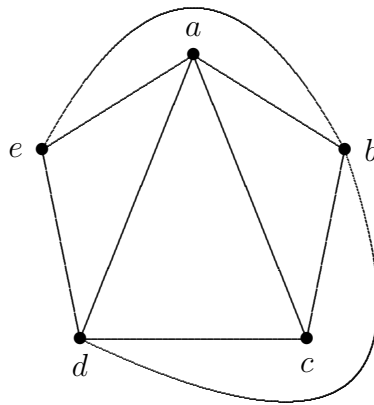
Chúng ta đã nghiên cứu các tính chất của các đồ thị con, chẳng hạn, các dây chuyền, chu trình và các cây bao trùm trong một đồ thị đã cho. Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu toàn bộ đồ thị  $G$  với câu hỏi sau: *khi nào  $G$  là phẳng?*

Chương này bắt đầu với hai ví dụ về đồ thị Kuratowski đóng vai trò trung tâm trong việc kiểm tra tính phẳng của đồ thị. Kế tiếp là các tính chất của đồ thị phẳng, chẳng hạn định lý Euler và giả thuyết bốn màu nổi tiếng “mọi đồ thị phẳng là 4-sắc” (phát biểu năm 1850 và được chứng minh năm 1976). Chúng ta cũng tìm hiểu tiêu chuẩn cần và đủ để đồ thị là phẳng-Định lý Kuratowski. Cuối cùng là đối ngẫu hình học của đồ thị phẳng.

### 6.1 Định nghĩa và các ví dụ

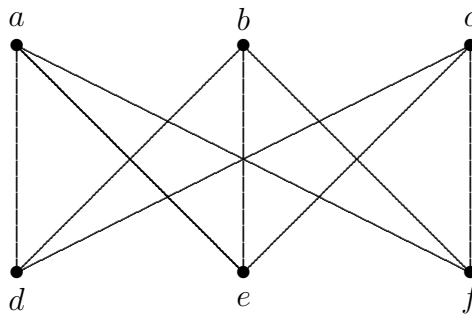
Nhắc lại rằng đồ thị  $G$  được gọi là *phẳng* nếu tồn tại một phép biểu diễn  $G$  lên một mặt phẳng sao cho hai cạnh bất kỳ của đồ thị không cắt nhau ngoại trừ tại đỉnh của chúng. Các đồ thị mà có thể biến đổi cho trùng nhau bằng phép biến dạng co dãn liên tục trên mặt phẳng thì không coi là những đồ thị phẳng khác nhau. Theo định nghĩa, đồ thị trong Hình 6.1 là phẳng.

**Ví dụ 6.1.1** (*Bài toán ba biệt thự và ba nhà máy*). Có ba biệt thự  $a, b, c$  và ba nhà máy: một nhà máy nước  $d$ , một nhà máy hơi đốt  $e$  và một nhà máy điện  $f$ . Mỗi biệt thự nối với các nhà máy bằng những ống dẫn nước, ống dẫn hơi và đường dây điện. Vậy có thể vẽ trên mặt phẳng ba biệt thự và ba nhà máy và tất cả các đường vận chuyển sao cho không có hai đường nào cắt nhau ở một điểm khác các đầu mút của chúng hay không? Ta có mô hình hoá bởi đồ thị hai phần  $K_{3,3}$ : Các đỉnh của đồ thị tương ứng các nhà và các nhà máy



Hình 6.1: Ví dụ về đồ thị phẳng.

(xem Hình 6.2); một cạnh liên thuộc hai đỉnh tương ứng với một nhà và một nhà máy. Bài toán đưa về kiểm tra tính phẳng của đồ thị Kuratowski  $K_{3,3}$ . Bằng thực nghiệm có thể chỉ ra rằng đồ thị này không phẳng.

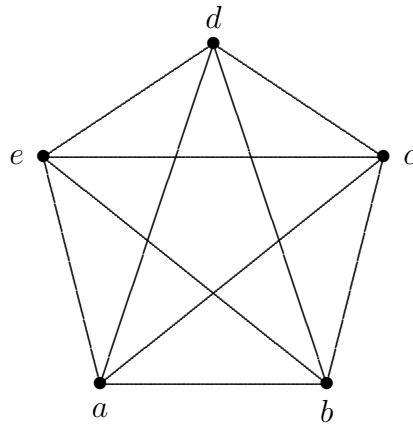


Hình 6.2: Đồ thị Kuratowski  $K_{3,3}$ .

**Ví dụ 6.1.2** Cũng bằng thực nghiệm, có thể chứng tỏ đồ thị đầy đủ  $K_5$  (xem Hình 6.3) là không phẳng.

Về tính không phẳng của các đồ thị  $K_{3,3}$  và  $K_5$  sẽ được giải thích trong những phần sau. Chú ý rằng các đồ thị  $K_5$  và  $K_{3,3}$  có những tính chất:

1. Cả hai là không phẳng;
2. Nếu xoá một cạnh hoặc một đỉnh của đồ thị thì sẽ nhận được một đồ thị phẳng.



Hình 6.3: Đồ thị Kuratowski  $K_5$ .

3.  $K_5$  là đồ thị không phẳng có số đỉnh ít nhất;  $K_{3,3}$  là đồ thị không phẳng có số cạnh ít nhất.

## 6.2 Các biểu diễn khác nhau của một đồ thị phẳng

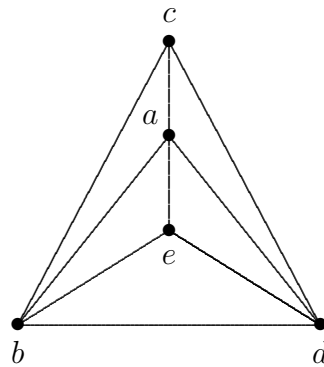
Trước hết ta có kết quả sau.

**Định lý 6.2.1** [Fary] *Mọi đơn đồ thị phẳng có thể biểu diễn trên một mặt phẳng sao cho các cạnh là các đoạn thẳng và chúng chỉ cắt nhau tại các đỉnh chung.*

*Chứng minh.* Chứng minh của định lý này khá phức tạp và không đóng góp nhiều trong việc hiểu tính phẳng của đồ thị. Bạn đọc quan tâm có thể xem [24]. Chẳng hạn, đồ thị trong Hình 6.1 có thể vẽ lại chỉ sử dụng các đoạn thẳng như trong Hình 6.4. Trong định lý này, đồ thị cần phải đơn vì các khuyên hoặc một trong hai cạnh song song không thể vẽ bởi các đoạn thẳng.  $\triangleleft$

### Diện

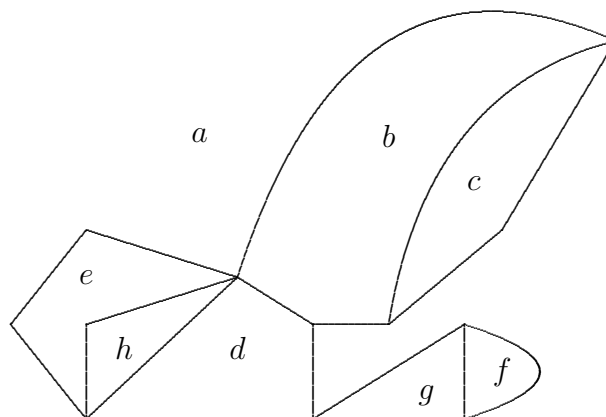
Ký hiệu  $R(G)$  là đồ thị phẳng  $G$  được biểu diễn trên mặt phẳng. Các vùng liên thông (theo tô pô của mặt phẳng  $\mathbf{R}^2$ ) của tập  $\mathbf{R}^2 \setminus R(G)$  gọi là các *diện*. Một diện là một vùng của mặt phẳng được giới hạn bởi các cạnh gọi là *biên*; hai diện gọi là *kề nhau* nếu các đường biên của chúng có ít nhất một cạnh chung.



Hình 6.4:

Nói chung, biên của diện gồm các chu trình đơn giản với các cạnh rời nhau, các *cạnh treo* (cạnh có một đỉnh bậc một), hoặc các cạnh nối hai chu trình. Diện phía ngoài, gọi là *diện vô hạn*, luôn luôn tồn tại một chu trình là đường biên chứa bên trong nó các cạnh khác; đó là chu tuyến của diện vô hạn.

**Ví dụ 6.2.2** Bản đồ địa lý là đồ thị tô pô phẳng không có cầu; đồ thị đó có tính chất đặc biệt là: bậc của mỗi đỉnh  $\geq 3$ . Một diện có thể kề với diện khác ở nhiều cạnh. Trên Hình 6.5 ta chú ý rằng các diện  $d$  và  $g$  không kề nhau mặc dù chúng có một đỉnh chung;  $a$  là diện vô hạn.



Hình 6.5:

## Biểu diễn trên mặt cầu

Để tránh phân biệt giữa các diện hữu hạn và diện vô hạn, chúng ta thường biểu diễn các đồ thị phẳng trên mặt cầu  $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$  dựa vào phép chiếu nổi từ  $\mathbf{S}^2$  lên  $\mathbf{R}^2$ . Ký hiệu  $S$  là điểm tiếp xúc của mặt cầu với mặt phẳng, và  $N$  là điểm thuộc mặt cầu sao cho  $NS$  vuông góc với mặt phẳng. Với mỗi điểm  $P \in \mathbf{S}^2, P \neq N$ , đường thẳng  $NP$  cắt mặt phẳng  $\mathbf{R}^2$  tại đúng một điểm  $Q$ . Như vậy ta có tương ứng một-một từ mặt cầu (bỏ đi điểm  $N$ ) lên mặt phẳng.

Theo cách xây dựng này, hiển nhiên rằng đồ thị là phẳng nếu và chỉ nếu có thể biểu diễn nó trên một mặt cầu sao cho các cạnh của nó không cắt nhau ngoài các đỉnh chung. Do đó, theo Định lý 6.2.1 ta có

**Định lý 6.2.3** *Một đồ thị có thể biểu diễn trên mặt cầu sao cho các cạnh không tự cắt nếu và chỉ nếu nó có thể biểu diễn phẳng trên mặt phẳng.*

Một đồ thị phẳng được biểu diễn trên mặt cầu sẽ phân chia mặt cầu thành nhiều vùng khác nhau. Mỗi vùng trên mặt cầu là miền giới nội, diện vô hạn trên mặt phẳng được ánh xạ thành vùng trên mặt cầu chứa *điểm cực bắc*  $N$ . Hiển nhiên rằng, bằng phép quay thích hợp quả cầu chúng ta có thể ánh xạ một vùng bất kỳ thành diện vô hạn trên mặt phẳng. Từ đó ta nhận được:

**Định lý 6.2.4** *Một đồ thị phẳng có thể biểu diễn trên một mặt phẳng sao cho diện bất kỳ cho trước là diện vô hạn.*

Mối liên quan các vùng trên mặt cầu cho phép chúng ta thấy rằng không có sự phân biệt thực sự giữa diện vô hạn và các diện hữu hạn trên mặt phẳng. Do đó, khi nói về các vùng trong một biểu diễn của đồ thị phẳng trên mặt phẳng, chúng ta xét cả diện vô hạn. Ngoài ra, do không có sự khác nhau cốt yếu giữa các phép biểu diễn đồ thị trên một mặt phẳng hay mặt cầu (mặt phẳng có thể xem là mặt cầu bỏ đi một điểm), thuật ngữ “biểu diễn phẳng” của một đồ thị thường được sử dụng để bao hàm các phép biểu diễn trên mặt cầu cũng như trên mặt phẳng.

## Biểu diễn trên mặt phẳng và tính liên thông

Trong một đồ thị không liên thông, việc biểu diễn mỗi thành phần trên mặt phẳng có thể được khảo sát một cách độc lập. Do đó, đồ thị là phẳng nếu và chỉ nếu các thành phần liên thông của nó là phẳng. Tương tự, trong một đồ thị tách được (tức 1–liên thông) việc

biểu diễn mỗi khối (tức là đồ thị con không tách được cực đại) trên mặt phẳng có thể được khảo sát độc lập. Do đó một đồ thị tách được là phẳng nếu và chỉ nếu mỗi khối là phẳng.

Vậy, kiểm tra tính phẳng của đồ thị chỉ cần xét đối với đồ thị không tách được.

Một đồ thị phẳng không tách được có thể biểu diễn duy nhất lên một mặt cầu không? Trước khi trả lời câu hỏi này, chúng ta cần giải thích ý nghĩa của từ “biểu diễn duy nhất”. Hai biểu diễn của một đồ thị phẳng là *giống nhau* nếu chúng có thể làm trùng nhau bằng phép quay mặt cầu này thành mặt cầu kia và có thể biến dạng các vùng (không di chuyển đỉnh băng qua cạnh). Nếu tất cả các phép biểu diễn lên một mặt cầu là trùng nhau thì ta nói đồ thị *có duy nhất một phép biểu diễn*. Định lý dưới đây, cho chúng ta chính xác câu trả lời khi nào thì một đồ thị được biểu diễn duy nhất trên một mặt cầu.

**Định lý 6.2.5** [Whitney] *Phép biểu diễn lên mặt cầu của mỗi đồ thị phẳng 3—liên thông là duy nhất.*

*Chứng minh.* Xem [54]. ◀

Định lý này đóng một vai trò quan trọng trong việc xác định xem một đồ thị có phẳng hay không: Với các đồ thị 3—liên thông, nếu có thể biểu diễn trên một mặt cầu thì phép biểu diễn này là duy nhất.

## 6.3 Các tính chất của đồ thị phẳng

Phần này liệt kê nghiên cứu một số tính chất cơ bản của đồ thị phẳng. Trước hết ta có

**Định lý 6.3.1** [Berge] *Trong một đồ thị tô pô phẳng, các chu tuyến của diện hữu hạn tạo thành một hệ cơ sở các chu trình độc lập.*

*Chứng minh.* Chúng ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo số diện  $f$  của đồ thị  $G$ .

Hiển nhiên định lý đúng khi  $G$  có một hoặc hai diện hữu hạn. Giả sử định lý đúng cho mọi đồ thị phẳng có số diện hữu hạn là  $(f - 1)$ ; ta chứng minh định lý đúng cho mọi đồ thị phẳng có  $f$  diện hữu hạn.

Thật vậy, giả sử không phải tất cả các chu tuyến đều là các chu trình không giao nhau (theo nghĩa là có cạnh chung) vì với trường hợp đó thì định lý là hiển nhiên. Khi đó ta có thể bỏ bớt một cạnh  $e$  nào đó của  $G$  và được đồ thị  $G'$  có  $(f - 1)$  diện hữu hạn mà các chu

tuyến của nó theo giả thiết quy nạp lập thành một cơ sở gồm các chu trình độc lập. Khi trả lại cạnh  $e$ , ta có một diện hữu hạn mới mà chu tuyến là một chu trình không phụ thuộc vào các chu trình trước (vì nó chứa một cạnh không thuộc vào một chu trình nào trong số các chu trình ấy). Do bổ sung một cạnh không thể làm tăng chu số lên quá một đơn vị, nên số diện hữu hạn của đồ thị  $G$  quả là xác định một cơ sở gồm các chu trình độc lập.  $\triangleleft$

**Hệ quả 6.3.2** [Euler, 1752] *Giả sử  $G$  là đồ thị tô pô phẳng liên thông  $n$  đỉnh,  $m$  cạnh và  $f$  diện. Khi đó*

$$f = m - n + 2.$$

*Chứng minh.* Thật vậy, số các diện hữu hạn bằng chu số  $\nu(G)$ , nên

$$f = \nu(G) + 1 = (m - n + 1) + 1 = m - n + 2.$$

Cũng có thể chứng minh cách khác như sau.

Nhận xét rằng chỉ cần chứng minh cho một đơn đồ thị, vì việc thêm một khuyên hoặc thêm một cạnh song song chỉ đơn giản là tăng số diện và số cạnh của đồ thị lên một đơn vị. Chúng ta cũng có thể xoá tất cả các đỉnh treo và các cạnh liên thuộc nó. Nếu thêm (hoặc bớt) một cạnh và một đỉnh thì hiệu số  $(m - n)$  không đổi.

Vì mỗi đơn đồ thị phẳng có thể biểu diễn trên mặt phẳng sao cho mỗi cạnh là một đoạn thẳng (Định lý 6.2.1), nên một đồ thị phẳng có thể được vẽ trên mặt phẳng sao cho các diện là các đa giác. Ký hiệu  $f$  là số diện và  $k_p$  là số các diện có  $p$  cạnh. Vì mỗi cạnh thuộc biên của đúng hai đa giác, nên

$$3k_3 + 4k_4 + 5k_5 + \cdots + rk_r = 2m,$$

trong đó  $k_r$  là số các đa giác với số cạnh cực đại.

Mặt khác

$$k_3 + k_4 + \cdots + k_r = f.$$

Tổng tất cả các góc tại mỗi đỉnh trong đa giác tương ứng đồ thị là  $2n\pi$ . Nhắc lại rằng tổng tất cả các góc trong một đa giác  $p$  cạnh là  $(p - 2)\pi$  và tổng tất cả các góc ngoài là  $(p + 2)\pi$ . Do đó

$$\begin{aligned} 2n\pi &= (3 - 2)\pi k_3 + (4 - 2)\pi k_4 + \cdots + (r - 2)\pi k_r + 4\pi \\ &= (2m - 2f)\pi + 4\pi. \end{aligned}$$

Từ các đẳng thức trên, ta suy ra

$$2(m - f)\pi + 4\pi = 2n\pi.$$

Vậy  $f = m - n + 2$ .  $\triangleleft$

**Ví dụ 6.3.3** [Euler] Ta xét trong không gian ba chiều một đa diện lồi có  $n$  đỉnh,  $m$  cạnh và  $f$  diện. Hiển nhiên ta có thể vẽ nó trên một mặt cầu sao cho hai cạnh bất kỳ không cắt nhau tại những điểm khác các đầu mút. Sau đó tiến hành phép chiếu nổi với tâm ở giữa một trong các diện ta có thể biểu diễn đa diện đó trên mặt phẳng. Vì đồ thị là phẳng nên ta có hệ thức cơ bản sau đây của các đa diện lồi:

$$n - m + f = 2.$$

**Hệ quả 6.3.4** Trong một đơn đồ thị phẳng, liên thông có  $f$  diện,  $n$  đỉnh,  $m$  cạnh ( $m \geq 2$ ), các bất đẳng thức sau luôn nghiệm đúng

$$\begin{cases} 2m & \geq 3f, \\ 3n - 6 & \geq m. \end{cases}$$

*Chứng minh.* Mỗi diện có biên ít nhất là ba cạnh, mỗi cạnh là chung của chính xác hai diện, do đó

$$2m \geq 3f.$$

Thay thế  $f = m - n + 2$  trong công thức Euler, ta có bất đẳng thức thứ hai. ◁

Chúng ta lưu ý rằng bất đẳng thức thứ hai chỉ là một điều kiện cần mà không đủ về tính phẳng của một đồ thị. Nói cách khác, mọi đơn đồ thị phẳng cần phải thỏa mãn các điều kiện này, nhưng điều ngược lại là không đúng. Chẳng hạn đồ thị Kuratowski  $K_{3,3}$  thỏa

$$3n - 6 = 3 \cdot 6 - 6 = 12 \geq m = 9.$$

Nhưng

**Ví dụ 6.3.5** Đồ thị  $K_{3,3}$  không phẳng. Để chứng minh chúng ta cần chỉ ra rằng trong đồ thị này không tồn tại diện mà biên của nó có số cạnh nhỏ hơn 5. Thật vậy, nếu đồ thị là phẳng thì  $2m \geq 4f$ .

Theo công thức Euler

$$2m \geq 4(m - n + 2).$$

Vậy

$$2 \cdot 9 \geq 4(9 - 6 + 2).$$

Hay  $18 \geq 20$ ! Mâu thuẫn. Do đó đồ thị  $K_{3,3}$  không phẳng.

**Ví dụ 6.3.6** Đồ thị đầy đủ có năm đỉnh  $K_5$  là không phẳng. Thật vậy, nếu ngược lại thì  $K_5$  sẽ có

$$f = m - n + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$$



diện. Chu tuyến của mỗi diện đều có ít nhất ba cạnh. Nếu lập đơn đồ thị liên thuộc diện-cạnh, thì số cạnh một mặt  $\leq 2m$  và mặt khác lại  $\geq 3f$ . Từ đó

$$20 = 2m \geq 3f = 21.$$

Vô lý, vậy  $K_5$  là không phẳng.

**Hệ quả 6.3.7** *Mỗi bản đồ địa lý có ít nhất một diện mà số cạnh của chu tuyến nhỏ hơn hoặc bằng 5.*

*Chứng minh.* Thật vậy, trong bản đồ địa lý, mỗi đỉnh là đầu mút của ít nhất 3 cạnh; nếu lập đơn đồ thị liên thuộc đỉnh-cạnh thì số cạnh một mặt  $\leq 2m$ , mặt khác lại  $\geq 3n$ , vậy  $n \leq 2m/3$ . Nếu giả thiết rằng mỗi diện có chu tuyến gồm ít nhất 6 cạnh và nếu lập đơn đồ thị liên thuộc diện-cạnh, thì số cạnh của nó, một mặt  $\leq 2m$ , mặt khác lại  $\geq 6f$ . Vậy  $f \leq 2m/6$ . Ta luôn luôn có thể giả thiết là đồ thị liên thông (nếu không thì chứng minh hệ quả cho từng thành phần), và do đó có thể viết

$$2 = n - m + f \leq 2m/3 - m + m/3 = 0.$$

Điều đó không thể xảy ra. ◁

**Hệ quả 6.3.8** *Giả sử  $G$  là đơn đồ thị phẳng liên thông. Khi đó tồn tại đỉnh  $v \in V$  sao cho  $d(v) \leq 5$ .*

*Chứng minh.* Thật vậy, trong đồ thị  $G$ , mỗi diện được bao ít nhất bởi ba cạnh khác nhau; nếu lập đồ thị  $H$  liên thuộc diện-cạnh (tức là đồ thị gồm tập  $X$  các điểm dùng để biểu thị các diện, tập hợp  $Y$  các điểm dùng để biểu thị các cạnh và các cạnh nối điểm  $x \in X$  với  $y \in Y$  nếu diện  $x$  liên thuộc cạnh  $y$ ) thì số cạnh của đồ thị  $H$ , một mặt  $\leq 2m$ , mặt khác lại  $\geq 3f$ , vậy  $f \leq 2m/3$ . Nếu mỗi đỉnh là đầu mút ít nhất của 6 cạnh, thì cũng bằng cách như vậy ta thu được  $n \leq 2m/6$ , nghĩa là (theo công thức Euler)

$$2 = n - m + f \leq m/3 - m + 2m/3 = 0.$$

Vô lý! ◁

## 6.4 Phát hiện tính phẳng

Việc xác định đồ thị  $G$  là phẳng hay không là một bài toán quan trọng, chẳng hạn trong hoá học: ở đó nhiều chất hoá học mà công thức cấu tạo của nó có thể biểu diễn như một

đồ thị phẳng; và trả lời câu hỏi này bằng cách cố gắng thử vẽ nó lên một mặt phẳng rõ ràng không phải là một câu trả lời tốt. Về thuật toán thời gian  $O(n)$  kiểm tra một đồ thị có phẳng hay không, và nếu phẳng thì biểu diễn nó như thế nào có thể xem [34], [18].

Cũng có một thuật toán [33] thời gian  $O(n \log n)$  để kiểm tra tính đẳng cấu của hai đồ thị phẳng. Bài toán này cũng thường nảy sinh trong hoá học khi chúng ta muốn nghiên cứu các phân tử.

Các tiêu chuẩn đơn giản và hiệu quả sau cho phép phát hiện tính phẳng của đồ thị.

### Phép rút gọn cơ sở

1. Do đồ thị là phẳng nếu và chỉ nếu các thành phần liên thông của nó là phẳng, chúng ta chỉ cần xét một thành phần liên thông của nó. Cũng vậy, một đồ thị có điểm khớp là phẳng nếu và chỉ nếu các khối của nó là phẳng. Vì vậy đối với một đồ thị  $G$  cho trước, xác định

$$G = \{G_1, G_2, \dots, G_k\},$$

trong đó  $G_i, i = 1, 2, \dots, k$ , là các đồ thị con không tách được của đồ thị  $G$ . Rồi thì chúng ta chỉ cần kiểm tra tính phẳng của mỗi  $G_i$ .

2. Do việc thêm hay xóa các khuyên không làm mất tính phẳng, ta xóa các khuyên.
3. Tất cả các cạnh song song cũng không ảnh hưởng trong việc xét tính phẳng, vì vậy xóa tất cả các cạnh song song trừ một cạnh còn lại.
4. Loại bỏ tất cả các đỉnh bậc hai và coi hai cạnh nối với đỉnh đó là một không ảnh hưởng đến tính phẳng của đồ thị. Nói cách khác thực hiện “rút gọn chuỗi.”

Lặp lại các Bước 3 và 4 cho đến khi ta được một đồ thị đơn giản nhất cho phép xác định dễ dàng tính phẳng của nó.

Đối với một đồ thị liên thông không có điểm khớp  $G_i$ , sau khi áp dụng các Bước 3 và 4 ta sẽ được một đồ thị  $H_i$  có các đặc trưng:

#### **Định lý 6.4.1** *Đồ thị $H_i$ có một trong ba dạng*

1. Một cạnh đơn; hoặc là
2. Một đồ thị đầy đủ có bốn đỉnh; hoặc là
3. Một đơn đồ thị không tách được có số đỉnh  $n \geq 5$  và số cạnh  $m \geq 7$ .

*Chứng minh.* Định lý có thể được chứng minh bằng cách khảo sát tất cả các đồ thị liên thông không tách được với số cạnh nhỏ hơn hoặc bằng sáu.  $\triangleleft$

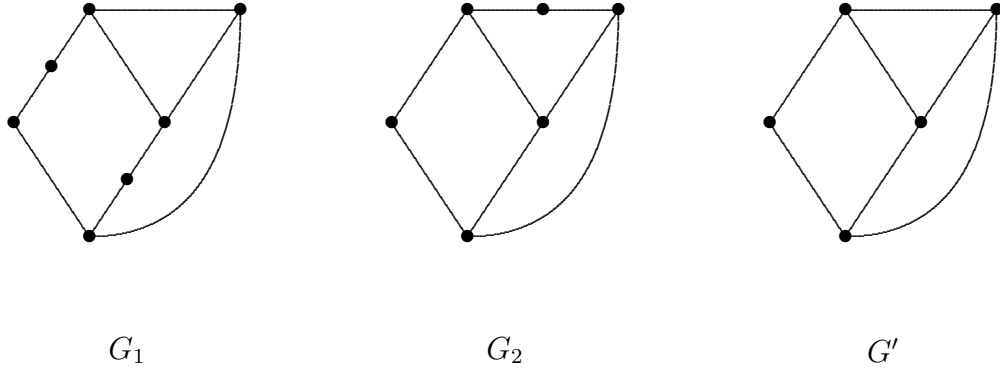
Áp dụng định lý, chúng ta thấy rằng tất cả các đồ thị  $H_i$  rơi vào loại 1 hoặc 2 là phẳng, do đó không cần kiểm tra thêm.

Từ những điều nêu trên, chúng ta cần nghiên cứu các đơn đồ thị liên thông không tách được với ít nhất năm đỉnh, và mỗi đỉnh có bậc lớn hơn hay bằng ba. Kế đến, chúng ta cần kiểm tra bất đẳng thức  $m \leq 3n - 6$ . Nếu bất đẳng thức không thỏa mãn, thì  $H_i$  không phẳng. Ngược lại, chúng ta kiểm tra thêm bằng cách áp dụng định lý Kuratowski dưới đây. Trước hết ta cần định nghĩa sau.

**Định nghĩa 6.4.2** (a) Trong một đồ thị, hai cạnh được gọi là trong một *chuỗi*, nếu chúng có đúng một đỉnh chung bậc hai.

(b) Hai đồ thị được gọi là *đồng phôi* nếu đồ thị này có thể nhận được từ đồ thị kia bằng cách tạo thêm các cạnh trong chuỗi (tức là chèn thêm các đỉnh bậc hai) hay hợp nhất các cạnh trong chuỗi.

**Ví dụ 6.4.3** Các đồ thị  $G_1$  và  $G_2$  trong Hình 6.6 là đồng phôi, do có thể đưa về cùng đồ thị  $G'$ .



Hình 6.6:

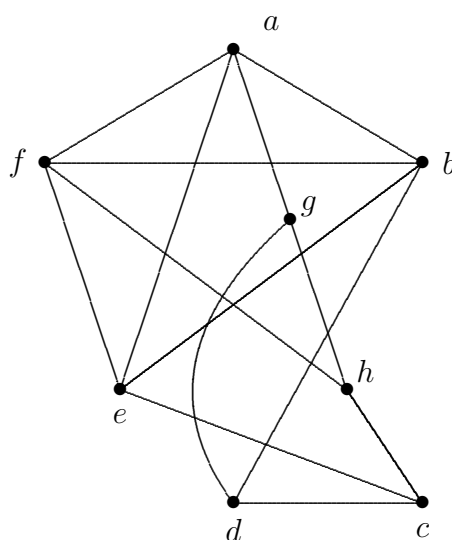
Hiển nhiên rằng đồ thị là phẳng nếu và chỉ nếu mọi đồ thị đồng phôi với nó là phẳng. Hơn nữa, quan hệ  $\mathcal{R}$  trên tập các đồ thị xác định bởi  $G_1 \mathcal{R} G_2$  nếu và chỉ nếu  $G_1$  và  $G_2$  đồng phôi là quan hệ tương đương.

**Định lý 6.4.4** [Kuratowski, 1930] *Đồ thị  $G$  là phẳng nếu và chỉ nếu  $G$  không chứa đồ thị con đồng phôi với hoặc  $K_5$  hoặc  $K_{3,3}$ .*

*Chứng minh. Điều kiện cần.* Rõ ràng, vì  $G$  không thể biểu diễn trên mặt phẳng sao cho các cạnh của chúng không cắt nhau ngoại trừ tại các đỉnh chung của chúng nếu nó chứa đồ thị con đồng phôi với  $K_5$  hoặc  $K_{3,3}$ .

*Điều kiện đủ.* Xem [4]. ◁

**Ví dụ 6.4.5** Bằng cách áp dụng Định lý Kuratowski ta có đồ thị trong Hình 6.7 không phẳng. Thật vậy, trước hết xoá các cạnh  $(a, b)$ ,  $(e, f)$  và  $(g, h)$ ; sau đó “rút gọn” các chuỗi  $(a, g)$ ,  $(g, d)$  và  $(f, h)$ ,  $(h, c)$  để được các cạnh mới  $(a, d)$  và  $(f, c)$ . Đồ thị thu được là  $K_{3,3}$ . Suy ra  $G$  chứa một đồ thị con đồng phôi với  $K_{3,3}$  và do đó không phẳng.



Hình 6.7:

Việc kiểm tra tính phẳng dựa vào Định lý Kuratowski là khó đối với các đồ thị lớn (chẳng hạn, đơn đồ thị không tách được có 25 đỉnh và bậc của mỗi đỉnh  $\geq 3$ ). Có một số tính chất khác đặc trưng cho các đồ thị phẳng. Một trong những đặc trưng đó sẽ được xét trong phần kế tiếp.

**Định lý 6.4.6** Mọi đồ thị phẳng đều 5–sắc.

*Chứng minh.* Hiển nhiên định lý đúng cho các đồ thị phẳng có số đỉnh  $\leq 5$ . Giả sử khẳng định đúng cho mọi đồ thị phẳng có  $(n - 1)$  đỉnh. Ta sẽ chứng minh định lý cũng đúng cho những đồ thị phẳng có  $n$  đỉnh.

Thật vậy, theo Hệ quả 6.3.8, trong  $G$  tồn tại đỉnh  $v$  có bậc  $\leq 5$ . Đồ thị con nhận được từ  $G$  bằng cách xoá đỉnh  $v$  và các cạnh liên thuộc nó là 5-sắc; ta tô các đỉnh của nó bằng năm màu  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ . Ta có thể tô màu đỉnh  $v$ , trừ khi nó kề với năm đỉnh mang năm màu khác nhau.

Trong trường hợp đó, giả sử  $a, b, c, d, e$  là năm đỉnh kề với  $v$  (theo thứ tự vòng quanh  $v$ ) và giả sử  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  là các màu tương ứng. Ký hiệu  $G_{\alpha, \beta}$  là đồ thị con sinh bởi tập hợp các đỉnh có màu  $\alpha$  hay  $\beta$ , v.v. Có hai trường hợp xảy ra:

1. Nếu  $a$  và  $c$  không thuộc những thành phần của đồ thị  $G_{\alpha, \gamma}$  thì trong thành phần chứa  $a$  ta tô màu  $\gamma$  cho các đỉnh có màu  $\alpha$  và ngược lại. Cách tô màu mới cho  $G$  là chấp nhận được, và đỉnh  $v$  bây giờ được bao quanh bởi các đỉnh có màu  $\gamma, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  nên có thể tô nó bằng màu  $\alpha$ .
2. Nếu  $a$  và  $c$  thuộc cùng một thành phần của đồ thị  $G_{\alpha, \gamma}$  thì các đỉnh  $b$  và  $d$  không thể nối với nhau trong đồ thị  $G_{\beta, \delta}$  (vì nếu ngược lại,  $G$  chứa đồ thị  $K_5$ ). Khi hoán vị các màu  $\beta$  và  $\delta$  trong thành phần của đồ thị  $G_{\beta, \delta}$  (chứa đỉnh  $b$ ) ta có thể tô màu  $\beta$  cho đỉnh  $v$  được.

Định lý được chứng minh. ◁

Tuy nhiên, ta còn có thể làm tốt hơn:

**Định lý 6.4.7** [Giả thuyết bốn màu] *Sắc số của mọi đồ thị phẳng bằng bốn.*

*Chứng minh.* Giả thuyết bốn màu xuất hiện lần đầu tiên trong cuộc trao đổi giữa Morgan và người học trò của ông vào năm 1850. Sau đó, Morgan đã đề cập bài toán này với Hamilton trong một bức thư viết ngày 23 tháng 10 năm 1852. Kết quả là rất nhiều “chứng minh” cũng như các “phản ví dụ” và các giả thuyết khác có liên quan xuất hiện (để có thêm những thông tin chi tiết, xem [48]). Tuy nhiên, phải đến năm 1976, hai nhà toán học người Mỹ là Appel và Haken (xem [1]), sử dụng hàng ngàn giờ trên máy tính điện tử, đã chứng minh tính đúng đắn của giả thuyết bốn màu. ◁

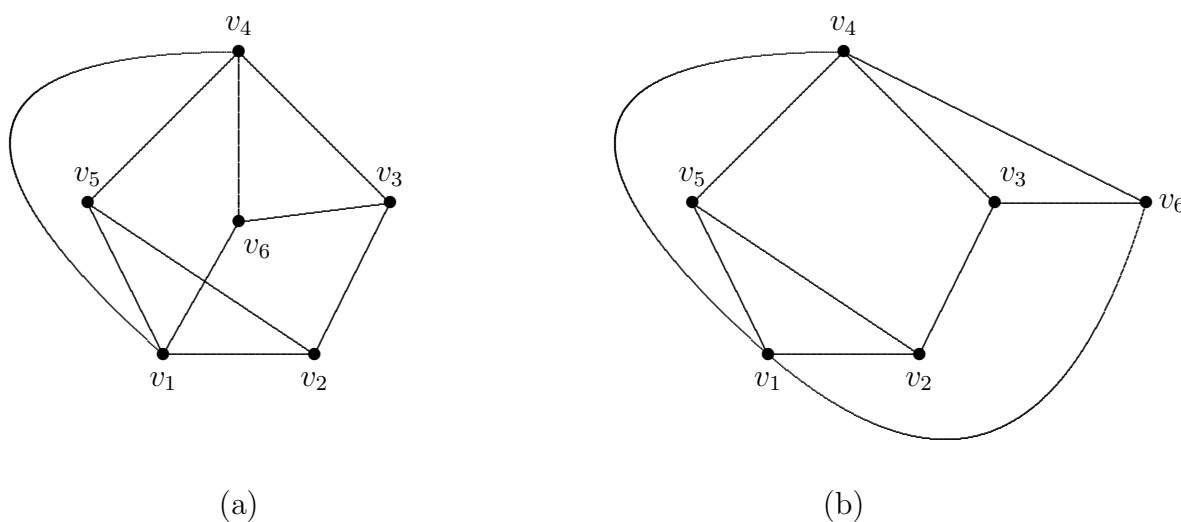
### 6.4.1 Kiểm tra tính phẳng

Việc xác định một đồ thị có phẳng hay không là một bài toán có ý nghĩa. Như đã chỉ ra, các đặc trưng của Kuratowski và Whitney cho phép kiểm tra tính phẳng của đồ thị. Tuy nhiên các đặc trưng này không phù hợp khi thực hiện trên máy tính do khó thể hiện bằng chương trình; ngoài ra nếu đồ thị là phẳng, thì các kết quả này không chỉ ra phương pháp

vẽ nó như thế nào. Người ta biết rằng [52], nếu sử dụng tiêu chuẩn của Kuratowski để kiểm tra tính phẳng của đồ thị  $n$  đỉnh ( $n > 5$ ) thì thời gian thực hiện ít nhất là  $O(n^6)$ .

Có một số thuật toán kiểm tra tính phẳng của đồ thị (xem [52] để có tổng quan về các kết quả này). Hầu hết các phương pháp này áp dụng cách “xây dựng bản đồ”: Đầu tiên, chọn một đồ thị con phẳng  $g$  của  $G$  và biểu diễn nó trên mặt phẳng. (Trong hầu hết các thuật toán,  $g$  là một chu trình). Sau đó thêm các cạnh vào đồ thị  $g$  sao cho nó không cắt các cạnh khác (ngoại trừ tại các đỉnh chung). Nếu chúng ta thành công khi biểu diễn lại thì đồ thị  $G$  là phẳng; ngược lại kết luận  $G$  không phẳng.

Khó khăn chính của một thuật toán như vậy ở chỗ trong những giai đoạn trước đó, việc thêm các cạnh vào  $g$  từ những khả năng có thể không để ý đến các giai đoạn sau này. Một cách đặt cạnh ở bước nào đó có thể dẫn đến không thể đặt cạnh ở bước sau, mặc dù đồ thị đã cho là phẳng. Chẳng hạn, trong Hình 6.8(a), giả sử ta bắt đầu với đồ thị con  $g$  là chu trình  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1\}$ . Sau đó ta thêm các cạnh  $(v_1, v_4)$ ,  $(v_4, v_6)$ ,  $(v_3, v_6)$  và  $(v_1, v_6)$  sao cho đồ thị thu được vẫn phẳng. Hiển nhiên là cạnh  $(v_2, v_5)$  không thể đặt được! Từ đó ta cho rằng đồ thị không phẳng. Tuy nhiên, đồ thị này có thể biểu diễn phẳng như trong Hình 6.8(b).



Hình 6.8: Hai cách biểu diễn của cùng một đồ thị.

Đây chính là một trở ngại của phương pháp xây dựng bản đồ; và ta cần một số thủ tục khác giải quyết.

Như đã biết, một đồ thị, nói chung, có thể thu gọn thành đồ thị nhỏ hơn để đơn giản hoá tiến trình kiểm tra. Các bước thu gọn không ảnh hưởng đến tính phẳng (hoặc không phẳng) của đồ thị.

1. Kiểm tra tính liên thông của đồ thị. Nếu đồ thị không liên thông, xét từng thành phần liên thông.
2. Xoá các khuyên, và thay tất cả các cạnh song song bởi đúng một cạnh.
3. Xoá các đỉnh bậc hai và hợp nhất hai cạnh liên thuộc đỉnh này. Lặp lại các Bước 2 và 3 cho đến khi không thể rút gọn thêm.
4. Áp dụng Thuật toán Tremaux-Tarjan để phân hoạch đồ thị thành các thành phần không tách được.
5. Với mỗi thành phần không tách được, thực hiện phép thu gọn sử dụng các Bước 3 và 2 cho đến khi không thể thu gọn thêm.
6. Với mỗi thành phần không tách được có  $n$  đỉnh,  $m$  cạnh, kiểm tra các bất đẳng thức

$$n \geq 5, \quad m \geq 9, \quad m \leq 3n - 6.$$

Nếu các ràng buộc này không thoả mãn, thuật toán kết thúc; ngược lại kiểm tra thành phần không tách được khác. Mọi đồ thị có  $n < 5$  hoặc  $m < 9$  là phẳng, và mọi đơn đồ thị có  $m > 3n - 6$  không phẳng.

Mỗi đồ thị không tách được có thể tách thành các thành phần 3—liên thông. Sử dụng kết quả của Tutte [54]: *Đồ thị là phẳng nếu và chỉ nếu tất cả các thành phần 3—liên thông của nó là phẳng*. Tuy nhiên, phương pháp này không hiệu quả bằng thuật toán của Hopcroft và Tarjan sau đây.

### Thuật toán Hopcroft-Tarjan

Thuật toán kiểm tra tính phẳng của đồ thị rất phức tạp. Do đó chúng ta sẽ chỉ trình bày những đặc trưng cốt yếu. Để hiểu thuật toán chính, xét thủ tục phân rã sau áp dụng cho các đơn đồ thị không tách được  $G$  có  $n$  đỉnh và  $m$  cạnh.

*Phân rã chu trình-dây chuyền:*

1. Tìm chu trình  $\mu$  trong  $G$ . Gán  $g = \mu$ . Gán nhãn các đỉnh và các cạnh của  $g$  là  $v_1, v_2, \dots$ , và  $e_1, e_2, \dots$ , tương ứng. Đặt  $i = 1$ .
2. Nếu có một cạnh nào của  $G$  chưa có nhãn thì tìm một dây chuyền  $\mu_i$  bắt đầu và kết thúc tại các đỉnh được gán nhãn nhưng dây chuyền này chỉ gồm những cạnh chưa được gán nhãn. Lưu trữ  $\mu_i$ . Nếu tất cả các cạnh đã được gán nhãn, chuyển sang Bước 4.

3. Đặt  $g = g \cup \mu_i$ ; và  $i = i + 1$ . Gán nhãn các cạnh và các đỉnh chưa được gán nhãn trong  $g$  và chuyển sang Bước 2.
4. Xuất  $g$  và các dây chuyền  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_e$ . Dừng.

Có thể chứng minh rằng [52] thủ tục trên sẽ phân rã đơn đồ thị không tách được  $G$  thành một chu trình và  $e = m - n$  dây chuyền. Vì chu trình có thể xem là kết nối của hai dây chuyền không có chung cạnh, nên  $G$  được phân rã thành  $m - n + 2$  dây chuyền. Cần chú ý rằng, mặc dù phân rã trên là không duy nhất, nhưng số các dây chuyền được phân rã từ  $G$  là hằng số. Chẳng hạn, Hình 6.8, xét hai phân rã sau thành một chu trình và bốn ( $10 - 6 = 4$ ) dây chuyền:

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1\}, \{(v_1, v_4)\}, \{(v_2, v_5)\}, \{(v_4, v_6), (v_1, v_6)\}, \{(v_3, v_6)\},$$

và

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1\}, \{(v_4, v_6), (v_3, v_6)\}, \{(v_1, v_6)\}, \{(v_1, v_4)\}, \{(v_2, v_5)\}.$$

Trong quá trình phân rã chu trình-dây chuyền, chúng ta có thể biểu diễn chu trình  $\mu$  trên mặt phẳng, và tiếp tục thêm các dây chuyền mới  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , khi chúng được sinh ra. Một dây chuyền  $\mu_i$  mới hoặc sẽ phân chia một diện đang tồn tại thành hai diện mới hoặc sẽ khiến cho  $g \cup \mu_i$  không phẳng khi thêm nó vào  $g$ . Do chúng ta thêm tùy ý, nên có thể xảy ra tình trạng như trong Hình 6.8. Để giải quyết khó khăn này, ta có thể hoặc

1. Tiếp tục thêm các dây chuyền cho đến khi không thể thực hiện được nữa. Sau đó trở lại tìm kiếm chọn lựa cách biểu diễn khác (tức là dùng phương pháp lần ngược) thay cho quá trình trước đó; hoặc là
2. Tiếp tục tìm các dây chuyền khác nhau nhưng không đặt chúng vào  $\mu$ , cho đến khi tìm được diện mà một dây chuyền cần được đặt vào, hoặc là biết chắc rằng không có trở ngại với diện mà đặt dây chuyền vào.

Có một số thuật toán tiếp cận theo hướng thứ nhất, nhưng Hopcroft và Tarjan tiếp cận theo cách thứ hai và đã chứng minh rằng thuật toán của họ là hiệu quả hơn. Ý chính của thuật toán này là giải quyết sự nhập nhằng khi thêm các dây chuyền; cụ thể là:

Giả sử rằng ở bước nào đó, chúng ta có một dây chuyền  $\mu_i$  (trên đỉnh của một danh sách chứa các dây chuyền cần xử lý) mà chúng ta cần giải quyết sự nhập nhằng của nó. Giả sử  $a$  và  $b$  là các đỉnh xuất phát và kết thúc của dây chuyền này. Các trường hợp khác nhau có thể xảy ra và phương pháp xử lý tương ứng sẽ được trình bày dưới đây. Các tình huống này được giải thích dựa vào Hình 6.9.

1. Nếu không tồn tại dây chuyền khác  $P_i$  và chứa hai đỉnh  $a$  và  $b$ .



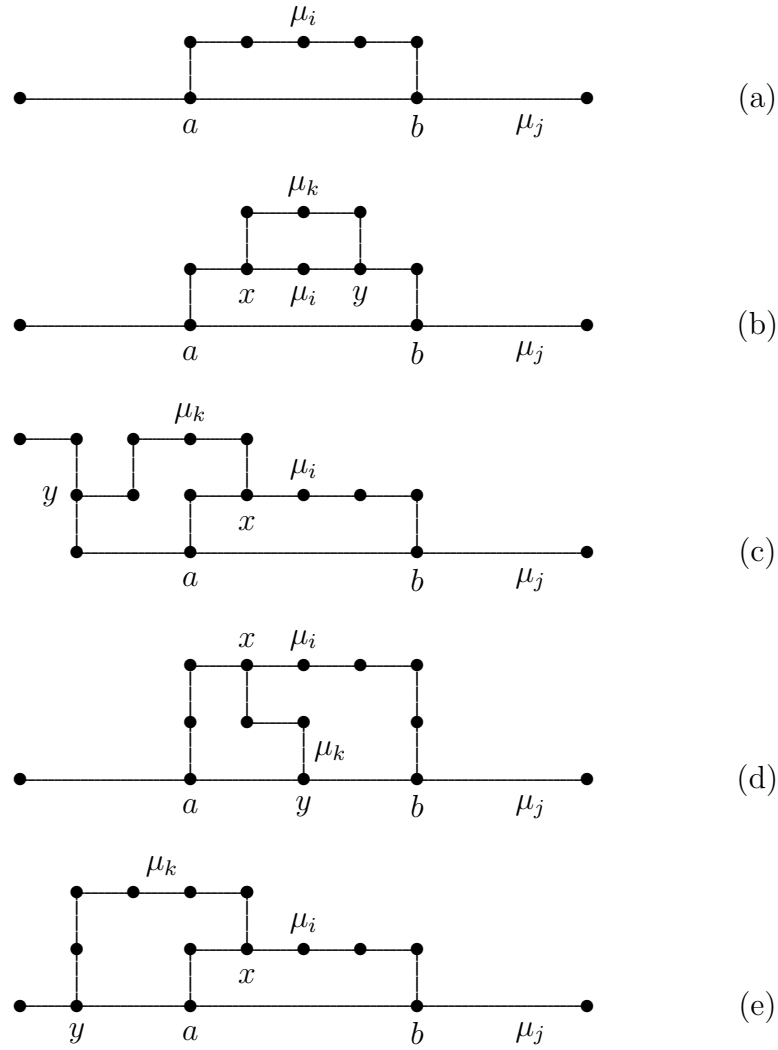
- (a) Nếu stack khác trống thì lưu trữ  $P_i$  và giải quyết sự nhập nhằng của dây chuyền kế tiếp trong stack.
  - (b) Ngược lại (stack bằng trống) thì thêm  $P_i$  vào  $g$ ; giải quyết sự nhập nhằng của dây chuyền kế tiếp trong stack.
2. Ngược lại giả sử  $P_j$  là dây chuyền (khác  $P_i$ ) chứa hai đỉnh  $a$  và  $b$  (xem Hình 6.9(a)). Giữ lại  $P_i$  trong danh sách. Xây dựng dây chuyền  $P_k$  xuất phát từ đỉnh  $x$  nào đó trên  $P_i$  và nằm giữa  $a$  và  $b$  (giả sử  $P_k$  kết thúc tại  $y$ ).
- (a) Nếu  $y$  thuộc  $P_k$  (xem Hình 6.9(b)) thì đặt dây chuyền  $P_k$  trên  $P_i$  vào stack và giải quyết tính nhập nhằng của dây chuyền  $P_k$ .
  - (b) Ngược lại và nếu  $y$  không thuộc  $P_j$  (Hình 6.9(c)) thì dây chuyền  $P_i$  đã được giải. Loại  $P_i$  khỏi stack. Giải sự nhập nhằng của dây chuyền kế tiếp trong stack.
  - (c) Ngược lại nếu  $y$  nằm giữa  $a$  và  $b$  (Hình 6.9(d)) thì lưu trữ  $P_k$ . Tiếp tục giải tính nhập nhằng của dây chuyền  $P_i$  bằng cách tạo dây chuyền khác giữa  $a$  và  $b$ .
  - (d) Ngược lại (Hình 6.9(e)), lưu trữ  $P_k$ . Tiếp tục giải tính nhập nhằng của dây chuyền  $P_i$  bằng cách tạo dây chuyền khác giữa  $y$  và  $b$ .

Trong Hình 6.9(a), dây chuyền  $\mu_i$  có thể xoay tại hai đỉnh  $a$  và  $b$ , và do đó sẽ phân đôi diện “trên” hoặc “dưới” dây chuyền  $\mu_j$ . Sự nhập nhằng này cần được xử lý. Để giải quyết, ta xây dựng một dây chuyền  $\mu_k$  xuất phát từ đỉnh  $x$  nào đó trên dây chuyền  $\mu_i$ . (Dây chuyền  $\mu_k$  chứa các cạnh chưa được gán nhãn và kết thúc ngay khi nó gặp một đỉnh được gán nhãn, chẳng hạn  $y$ ).

Nếu cả hai đỉnh  $x$  và  $y$  của dây chuyền  $\mu_k$  thuộc dây chuyền  $\mu_i$  như trong Hình 6.9(b), thì  $\mu_k$  có thể được xoay tại hai đỉnh  $x$  và  $y$  và do đó sẽ phân đôi diện phía “trên” hoặc phía “dưới” dây chuyền  $\mu_i$ . Vì vậy chúng ta không những cần xử lý cho  $\mu_i$  mà trước hết còn phải giải quyết sự nhập nhằng cho cả dây chuyền mới  $\mu_k$ . Do đó cần cất  $\mu_k$  sau khi cất  $\mu_i$  trong một ngăn xếp, và ta bắt đầu xử lý tương tự  $\mu_i$  đối với  $\mu_k$ .

Khả năng khác là đỉnh  $y$  không nằm trên hai dây chuyền  $\mu_i$  và  $\mu_j$  nhưng lại thuộc một dây chuyền khác như trong Hình 6.9(c). Trong trường hợp này dây chuyền  $\mu_i$  không thể xoay sang phía bên kia, và do đó không có sự nhập nhằng về diện mà dây chuyền này phân chia.

Như trong Hình 6.9(d), nếu đỉnh cuối của dây chuyền  $\mu_k$  nằm trên dây chuyền  $\mu_j$  giữa hai đỉnh  $a$  và  $b$  thì dây chuyền  $\mu_i$  (cùng với  $\mu_k$ ) vẫn có thể xoay tại  $a$  và  $b$ . Do đó vẫn có sự nhập nhằng đối với dây chuyền  $\mu_i$ . Tuy nhiên khi đó dây chuyền  $\mu_k$  phân đôi diện xác định bởi chu tuyến  $(a, x, b, y, a)$  không có sự nhập nhằng. Vì vậy, chúng ta cần một dây chuyền khác xuất phát từ một đỉnh trên  $\mu_i$  để giải quyết sự nhập nhằng với  $\mu_i$ .



Hình 6.9: Phân tích các khả năng xảy ra của dây chuyền  $\mu_i$ .

Cuối cùng, trong trường hợp dây chuyền  $\mu_k$  có đỉnh  $y$  nằm trên dây chuyền  $\mu_j$  nhưng nằm ngoài đoạn xác định bởi  $a$  và  $b$  như trong Hình 6.9(e). Dây chuyền  $\mu_i$  vẫn có thể xoay. Nhưng khác với trường hợp của Hình 6.9(b), không có sự nhập nhằng của dây chuyền  $\mu_k$  tương ứng với  $\mu_i$ . Do đó, cần tìm một dây chuyền mới để giải quyết sự nhập nhằng của dây chuyền  $\mu_i$  và dây chuyền mới này có thể xuất phát từ một đỉnh bất kỳ trên dây chuyền  $y, a, x, b$ ; ngoài ra ta cũng mở rộng dây chuyền  $\mu_i$  đến đỉnh  $y$  trên  $\mu_j$ .

Tóm lại, thuật toán kiểm tra tính phẳng của đồ thị gồm các thủ tục:

1. Tìm các thành phần không tách được;
2. Phân hoạch các thành phần không tách được thành các dây chuyền;

3. Xác định vị trí để thêm các dây chuyền này; và
4. Xây dựng một biểu diễn phẳng.

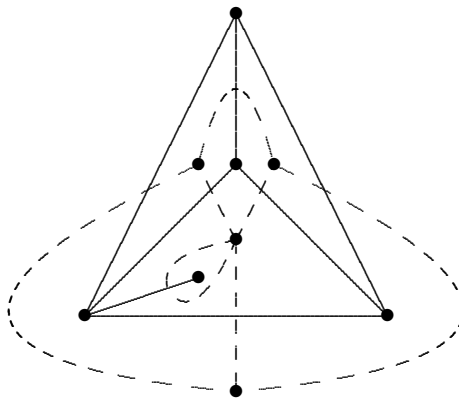
Sử dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu để giải quyết các Bước 1 và 2. Các dây chuyền được tạo bởi hai bước trên có những tính chất thích hợp cho các tiến trình về sau. Thời gian đòi hỏi trong mỗi bước (ngoại trừ Bước 4) tỉ lệ với  $n$ . Thời gian xây dựng một biểu diễn phẳng là  $O(n \log n)$ . Vì vậy thời gian thực hiện của thuật toán là  $O(n \log n)$  (do công thức Euler, số cạnh  $m$  tỉ lệ với số đỉnh  $n$  trong một đồ thị phẳng).

Thuật toán này còn có thể cải thiện tốt hơn với thời gian thực hiện là  $O(n)$  (xem [34]).

## 6.5 Đối ngẫu hình học

Xét đồ thị phẳng liên thông  $G$  không có đỉnh cô lập. Khi đó ta có thể thiết lập một đồ thị phẳng  $G^*$  như sau: bên trong mỗi diện  $s$  của  $R(G)$  đặt một đỉnh  $s^*$  của  $G^*$ ; với mỗi cạnh  $e$  của  $G$  thiết lập tương ứng một cạnh  $e^*$  của  $G^*$  bằng cách nối các đỉnh  $s^*$  và  $t^*$  tương ứng các diện  $s$  và  $t$  trên hai phía của cạnh  $e$  trong  $R(G)$ . Đồ thị  $G^*$  gọi là *đối ngẫu (tô pô)* của  $G$  (hay còn gọi là *đối ngẫu hình học* của  $G$ ).

**Ví dụ 6.5.1** Đồ thị  $G$  (đường liền nét) và đối ngẫu của nó (đường đứt nét) cho trong Hình 6.10.



Hình 6.10:

Một chu trình sơ cấp của  $R(G)$  chia mặt phẳng thành hai vùng liên thông khác trống và rời nhau. Bỏ đi tất cả các cạnh đối ngẫu tương ứng các cạnh trên chu trình này sẽ phân

hoạch  $R(G^*)$  thành hai thành phần liên thông. Nói cách khác, mỗi chu trình sơ cấp của  $G$ , qua đối ngẫu, tương ứng một đối chu trình sơ cấp của  $G^*$ , và ngược lại. Tính chất này rất hữu ích vì ta có thể tìm một đối chu trình của  $G$  bằng cách tìm một chu trình của  $G^*$ .

Rõ ràng có một sự tương ứng một-một giữa các cạnh của đồ thị  $G$  và đồ thị đối ngẫu  $G^*$ —một cạnh của  $G^*$  giao với một cạnh của  $G$ . Hơn nữa chúng ta có một vài nhận xét sau:

1. Cạnh là khuyên trong  $G$  tương ứng cạnh treo trong  $G^*$ .
2. Cạnh là cạnh treo trong  $G$  tương ứng khuyên trong  $G^*$ .
3. Nếu  $G$  có điểm khớp thì  $G^*$  cũng có điểm khớp.
4. Các cạnh trong chuỗi của  $G$  tương ứng các cạnh song song trong  $G^*$ .
5. Các cạnh song song trong  $G$  tương ứng các cạnh trong chuỗi của  $G^*$ .
6. Số các cạnh tạo thành biên trong diện  $F$  của  $G$ , bằng bậc của đỉnh tương ứng trong  $G^*$  và ngược lại.
7. Đồ thị  $G^*$  là phẳng.
8. Đồ thị đối ngẫu của  $G^*$  là  $G$ ; tức là  $(G^*)^* = G$ .
9. Nếu ký hiệu  $n, m$  và  $f$  là số các đỉnh, cạnh và diện tương ứng của đồ thị phẳng liên thông  $G$ , và ký hiệu  $n^*, m^*$  và  $f^*$  là số các đỉnh, cạnh và diện của đồ thị đối ngẫu  $G^*$  tương ứng, thì

$$n^* = f, m^* = m, f^* = n.$$

**Ví dụ 6.5.2** Xét một mạng vận tải phẳng (vô hướng)  $G$  mà mỗi cạnh  $e$  có khả năng thông qua  $c(e) \geq 0$ , đỉnh vào  $s$  và đỉnh ra  $t$  được xếp trên cùng một đường nằm ngang. Ta lập đồ thị đối ngẫu  $G^*$  bằng cách cho hai đỉnh khác nhau  $s^*$  và  $t^*$  tương ứng với diện vô hạn của  $G$ : đỉnh  $s^*$  ứng với nửa mặt phẳng dưới, đỉnh  $t^*$  ứng với nửa mặt phẳng trên. Gán trọng lượng  $w(e^*) = c(e)$  cho cạnh  $e^*$  (ứng với  $e$ ). Bây giờ ta xét các bài toán sau:

**Bài toán 1.** Trong  $G$  tìm thiết diện  $A$  có khả năng thông qua nhỏ nhất; tức là làm cực tiểu

$$c(A) = \sum_{v \in A} c(v).$$

**Bài toán 2.** Trong  $G^*$  tìm đường đi ngắn nhất  $\mu^*$  đi từ  $s^*$  đến  $t^*$ ; tức là làm cực tiểu

$$w(\mu^*) = \sum_{v^* \in \mu^*} w(v^*).$$

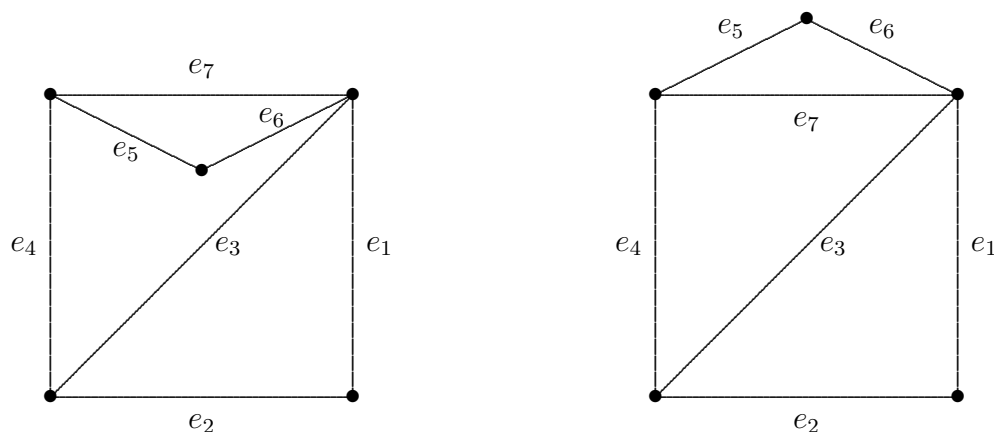
Bài toán 1 tương đương với bài toán tìm luồng lớn nhất; Bài toán 2 tương đương với bài toán tìm đường đi ngắn nhất và rõ ràng đối với đồ thị phẳng thì cả hai bài toán đó là một.

Bài toán bốn màu còn có thể phát biểu dưới dạng đối ngẫu là: *có thể tô các diện của một đồ thị phẳng  $G$  bằng bốn màu sao cho không có hai diện kề nhau có cùng một màu.*

### Tính duy nhất của đồ thị đối ngẫu

Vấn đề đặt ra là đối ngẫu của một đồ thị là duy nhất? Nói cách khác, các đồ thị đối ngẫu của một đồ thị đã cho là đẳng cấu? Từ phương pháp xây dựng của đồ thị đối ngẫu, dường như hợp lý cho rằng một đồ thị phẳng  $G$  có duy nhất đồ thị đối ngẫu nếu và chỉ nếu nó có một biểu diễn phẳng (trên mặt phẳng hoặc mặt cầu) duy nhất.

**Ví dụ 6.5.3** Hai đồ thị trong Hình 6.11 là đẳng cấu với hai biểu diễn phẳng khác nhau. Ngược lại, các đồ thị đối ngẫu của hai đồ thị này không đẳng cấu như trong Hình 6.12.

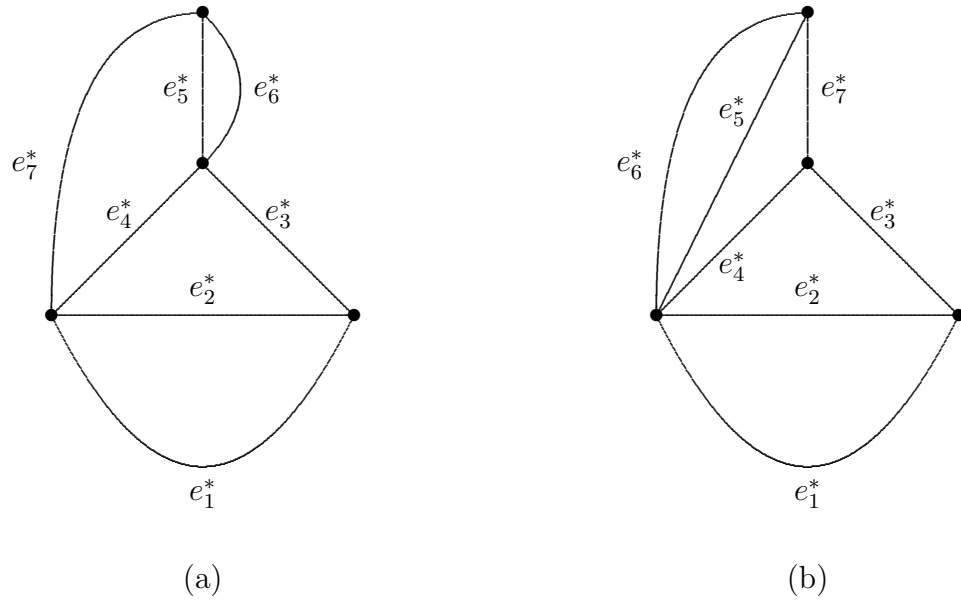


Hình 6.11: Hai biểu diễn khác nhau của cùng một đồ thị.

Tuy nhiên các đồ thị trong Hình 6.12 là 2–đẳng cấu. Định lý sau tổng quát ví dụ này.

**Định lý 6.5.4** *Tất cả các đồ thị đối ngẫu của một đồ thị phẳng  $G$  là 2–đẳng cấu; và mọi đồ thị 2–đẳng cấu với một đối ngẫu của  $G$  cũng là một đối ngẫu của  $G$ .*

Vì một đồ thị phẳng 3–liên thông có biểu diễn duy nhất trên mặt cầu, nên đối ngẫu của nó là duy nhất. Nói cách khác, tất cả các đối ngẫu của đồ thị 3–liên thông là đẳng cấu.



Hình 6.12: (a) Đối ngẫu của đồ thị trong Hình 6.11(a). (b) Đối ngẫu của đồ thị trong Hình 6.11(b).

## 6.6 Đối ngẫu tổ hợp

Trong các phần trước chúng ta đã định nghĩa và thảo luận về đối ngẫu của các đồ thị phẳng theo nghĩa thuần túy hình học. Phần này cung cấp một định nghĩa tương đương của khái niệm đối ngẫu không phụ thuộc vào các khái niệm hình học. Trước hết ta có

**Định lý 6.6.1** *Điều kiện cần và đủ để hai đồ thị phẳng  $G_1$  và  $G_2$  là đối ngẫu của nhau là: Tồn tại tương ứng một-một giữa các cạnh trong  $G_1$  và các cạnh trong  $G_2$  sao cho một tập các cạnh trong  $G_1$  tạo thành một chu trình nếu và chỉ nếu tập tương ứng trong  $G_2$  tạo thành một thiết diện.*

*Chứng minh. Điều kiện cần.* Xét một biểu diễn phẳng của đồ thị  $G$ . Chúng ta cũng vẽ một đối ngẫu (hình học)  $G^*$  của  $G$ . Xét một chu trình  $\mu$  tùy ý trong  $G$ . Hiển nhiên, chu trình  $\mu$  sẽ tạo thành một đường cong đóng đơn nào đó trong mặt phẳng biểu diễn của  $G$  và phân chia mặt phẳng thành hai vùng (Định lý Đường cong Jordan). Do đó các đỉnh của  $G^*$  được phân hoạch thành hai tập con khác trống rỗng nhau-một bên trong  $\mu$  và một bên ngoài  $\mu$ . Nói cách khác, tập các cạnh  $\mu^*$  trong  $G^*$  tương ứng tập  $\mu$  trong  $G$  là một thiết diện trong  $G^*$ . (Không tập con thực sự nào của  $\mu^*$  là thiết diện của  $G^*$ ; tại sao?). Tương tự, hiển nhiên rằng với mỗi thiết diện  $S^*$  trong  $G^*$  tồn tại duy nhất một chu trình gồm tập các cạnh tương ứng  $S$  trong  $G$  sao cho  $S$  là một chu trình.

*Điều kiện đủ.* Giả sử  $G$  là đồ thị phẳng và  $G'$  là đồ thị mà có tương ứng một-một giữa các thiết diện trong  $G$  và các chu trình trong  $G'$  và ngược lại. Giả sử  $G^*$  là đồ thị đối ngẫu của  $G$ . Khi đó có một tương ứng một-một giữa các chu trình trong  $G'$  và các thiết diện trong  $G$ , và giữa các thiết diện trong  $G$  và các chu trình trong  $G^*$ . Do đó tồn tại tương ứng một-một giữa các chu trình của  $G'$  và  $G^*$  mà điều này chỉ ra rằng  $G'$  và  $G^*$  là 2-đẳng cấu (Định lý 1.5.3). Theo Định lý 6.5.4, đồ thị  $G'$  là một đối ngẫu của  $G$ .

### Đối ngẫu của đồ thị con

Giả sử  $G$  là đồ thị phẳng và  $G^*$  là đối ngẫu của nó. Giả sử  $a$  là một cạnh của  $G$  và cạnh tương ứng nó trong  $G^*$  là  $a^*$ . Bây giờ ta xoá cạnh  $a$  khỏi đồ thị  $G$  và tìm đối ngẫu của đồ thị  $G \setminus \{a\}$ . Nếu  $a$  là cạnh biên của hai diện, thì việc xoá cạnh  $a$  sẽ hợp nhất hai diện này làm một. Do đó đồ thị đối ngẫu  $(G \setminus \{a\})^*$  có thể nhận được từ  $G^*$  bằng cách xoá cạnh tương ứng  $a^*$  và sau đó đồng nhất hai đỉnh mà  $a^*$  liên thuộc trong  $G^* \setminus \{a^*\}$ . Mặt khác nếu cạnh  $a$  không nằm trên biên, thì  $a^*$  là một khuyên. Trong trường hợp này  $G^* \setminus \{a^*\}$  chính là  $(G \setminus \{a\})^*$ . Do đó nếu đồ thị  $G$  có một đối ngẫu  $G^*$  thì đối ngẫu của đồ thị con của  $G$  có thể nhận được bằng cách áp dụng một số lần thủ tục này.

### Đối ngẫu của đồ thị đồng phôi

Giả sử  $G$  là đồ thị phẳng và  $G^*$  là đối ngẫu của nó. Giả sử  $a$  là một cạnh của  $G$  và cạnh tương ứng nó trong  $G^*$  là  $a^*$ . Bây giờ ta thêm một đỉnh mới có bậc bằng hai nằm trên cạnh  $a$  vào  $G$  (tức là  $a$  trở thành hai cạnh trong chuỗi). Khi đó đối ngẫu của đồ thị mới nhận được chính là thêm cạnh song song với  $a^*$  vào đồ thị  $G^*$ . Tương tự xử lý ngược lại bằng cách rút gọn chuỗi sẽ tương ứng với xoá một cạnh song song trong  $G^*$ . Do đó nếu  $G$  có một đối ngẫu  $G^*$ , thì mọi đối ngẫu của đồ thị đồng phôi với  $G^*$  có thể nhận được từ  $G^*$  bằng phương pháp trên.

Đến nay chúng ta mới chỉ nghiên cứu đối ngẫu của các đồ thị phẳng. Đó là vì mọi định nghĩa của khái niệm đối ngẫu phụ thuộc vào cách biểu diễn phẳng của đồ thị trên mặt phẳng. Tuy nhiên, Định lý 6.6.1 cho phép chúng ta có thể định nghĩa lại khái niệm này mà không phụ thuộc vào cách biểu diễn trên mặt phẳng; cụ thể là tương ứng giữa các chu trình và các thiết diện. Khái niệm này có thể mở rộng cho các đồ thị không phẳng? Nói cách khác, với đồ thị không phẳng  $G$ , có tồn tại một đồ thị  $G'$  tương ứng một-một giữa các cạnh của chúng sao cho mọi chu trình trong  $G$  tương ứng duy nhất với một thiết diện trong  $G'$ , và ngược lại? Câu trả lời là *không* do kết quả sau

**Định lý 6.6.2** [Whitney] *Đồ thị có đối ngẫu nếu và chỉ nếu nó phẳng.*

*Chứng minh.* Chúng ta chỉ cần chứng minh điều kiện cần. Tức là ta sẽ chứng minh đồ thị không phẳng sẽ không có đối ngẫu. Giả sử  $G$  là đồ thị không phẳng. Khi đó theo Định lý Kuratowski,  $G$  chứa  $K_5$  hoặc  $K_{3,3}$  hoặc một đồ thị con đồng phôi với một trong hai đồ thị này. Ta biết rằng,  $G$  có một đối ngẫu chỉ nếu mọi đồ thị con  $g$  của  $G$  và mọi đồ thị đồng phôi với  $g$  có một đối ngẫu. Do đó nếu chúng ta chứng minh được cả hai đồ thị Kuratowski  $K_5$  và  $K_{3,3}$  đều không có đối ngẫu thì định lý được chứng minh. Ta sẽ chứng minh phản chứng như sau:

(a) Giả sử  $K_{3,3}$  có một đối ngẫu  $D$ . Nhận xét rằng các thiết diện trong  $K_{3,3}$  tương ứng các chu trình trong  $D$  và ngược lại (Định lý 6.6.1). Do  $K_{3,3}$  không có thiết diện gồm hai cạnh nên  $D$  không có chu trình độ dài hai. Tức  $D$  không có các cạnh song song. Do mọi chu trình trong  $K_{3,3}$  có độ dài bốn hoặc sáu nên  $D$  không có thiết diện với số cạnh ít hơn bốn. Vì vậy, bậc của các đỉnh trong  $D$  ít nhất bằng bốn. Nhưng  $D$  không có cạnh song song và bậc của các đỉnh ít nhất bằng bốn nên  $D$  có ít nhất năm đỉnh, mỗi đỉnh có bậc lớn hơn hoặc bằng bốn. Tức là  $D$  có ít nhất  $(5 \times 4)/2 = 10$  cạnh. Điều này mâu thuẫn vì  $K_{3,3}$  có chín cạnh và đối ngẫu của nó cũng phải có chín cạnh. Do đó  $K_{3,3}$  không có đối ngẫu.

(b) Giả sử  $K_5$  có một đối ngẫu là  $H$ . Chú ý rằng  $K_5$  có

1. 10 cạnh;
2. không có cạnh song song;
3. không có thiết diện với hai cạnh; và
4. các thiết diện chỉ có bốn hoặc sáu cạnh.

Suy ra đồ thị  $H$  có

1. 10 cạnh;
2. không có đỉnh bậc nhỏ hơn ba;
3. không có cặp cạnh song song;
4. các chu trình có độ dài bốn hoặc sáu.

Khi đó  $H$  chứa một lục giác (một chu trình có độ dài sáu), và không có hơn ba cạnh mà khi thêm vào lục giác sẽ không tạo thành chu trình độ dài ba hoặc một cặp cạnh song song. Nhưng điều này không thể xảy ra trong  $H$  và  $H$  có 10 cạnh, nên  $H$  có ít nhất bảy đỉnh. Bậc của mỗi đỉnh này ít nhất bằng ba. Điều này dẫn đến  $H$  có ít nhất 11 cạnh-mâu thuẫn. ◁