Định lý Kuratowski

(Toán rời rạc)

Nguyễn Đức Huy [*]
Hà Nội
Đại học Khoa học Tự Nhiên
nguyenduchuy_t64@hus.edu.vn

Trần Thị Như Quỳnh [†]
Hà Nội
Đại học Khoa học Tự Nhiên
tranthinhuquynh_t65@hus.edu.vn

Bùi Khánh Duy [‡]
Nghệ An
Đại học Khoa học Tự Nhiên
buikhanhduy_t65@hus.edu.vn

Ngày 8 tháng 6 năm 2021

Tóm tắt nội dung

Bài viết này giới thiệu các khái niệm và định lý cơ bản trong đồ thị, tập trung vào đồ thị phẳng. Trên nền tảng của những điều cơ bản, chúng tôi phát biểu và trình bày một chứng minh chặt chẽ về định lý Kuratowski, bao gồm điều kiện cần và đủ để có tính chính xác. [1]

[*]K64 Máy tính và Khoa học Thông tin

[†]K65 Khoa học Dữ liệu

[‡]K65 Máy tính và Khoa học Thông tin

Mục lục

1 Mở đầu

Về tính phẳng của đồ thị, liệu đồ thị có thể được vẽ trên một mặt phẳng theo cách không có cạnh nào cắt nhau hay không, là một tính chất thú vị cần khảo sát. Với một vài định lý đơn giản, có thể thấy rằng K_5 và $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng. Kuratowski đã sử dụng quan sát gần như dễ dàng này thành một định lý mạnh mẽ cho thấy điều kiện cần và đủ của tính phẳng. Để chứng minh định lý này, ta cần sử dụng một vài các định lý, hệ quả và bổ đề. Trong bài viết này, chúng tôi bắt đầu với lý thuyết đồ thị cơ bản, sau đó tới các khái niệm và định lý liên quan đến đồ thị phẳng. Trong phần cuối cùng, chúng tôi sẽ đưa ra một cách chứng minh định lý Kuratowski.

2 Lý thuyết đồ thị

Ta sẽ bắt đầu bằng một vài định nghĩa.

2.1 Định nghĩa cơ bản

Định nghĩa 1 (Đồ thị)**.** *Một đồ thị G gồm một cặp thứ tự $(V(G), E(G))$, trong đó tập $V(G) \neq \varnothing$ là tập hợp các đỉnh và tập $E(G)$ được gọi là tập cạnh, mỗi cạnh nối 2 đỉnh là 2 thành phần của $V(G)$. $|V(G)|$ là số đỉnh trong tập kí hiệu bởi ν và $|E(G)|$ là số cạnh kí hiệu bởi ϵ. Chú ý, tập $E(G)$ có thể rỗng, và một cạnh có thể nối 1 đỉnh đến chính nó.*

Định nghĩa 2 (Khuyên)**.** *Khuyên là một cạnh bắt đầu và kết thúc tại cùng 1 đỉnh.*

Định nghĩa 3. *Đồ thị vô hướng $G(V(G), E(G))$ gọi là đơn đồ thị nếu G không có khuyên và mỗi cặp đỉnh khác nhau $a, b \in V(G)$ được nối với nhau bởi không quá một cạnh.*

Định nghĩa 4. *Một đỉnh là liên thuộc với một cạnh nếu đỉnh đó là một trong 2 đầu mút của cạnh; hai đỉnh được gọi là kề nhau nếu chúng được nối bởi 1 cạnh. Bậc của một đỉnh v, kí hiệu bởi $deg(v)$, là số các cạnh liên thuộc với v, trong đó khuyên được tính như hai cạnh. Bậc của đồ thị là tổng bậc tất cả các đỉnh. Ta gọi $\delta = \min_{v \in V}(deg(v))$ và $\Delta = \max_{v \in V}(deg(v))$.*

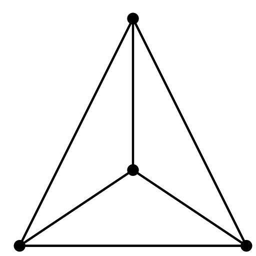
Định nghĩa 5 (Liên thông)**.** *Một đường đi W trong G là một dãy luân phiên các đỉnh và cạnh, biểu thị bởi $W = v_0e_1v_1e_2....e_kv_k$ trong đó $e_i (i \in [1, k], i \in \mathbb{N})$ nối giữa đỉnh v_{i-1} và v_i. Một đường đi mà tất cả cách cạnh e_i khác nhau gọi là đường đi đơn. Hơn nữa, nếu tất các đỉnh v_i phân biệt thì W là đường đi sơ cấp. Đồ thị G liên thông nếu tồn tại một đường đi sơ cấp nối giữa mọi cặp đỉnh trong G.*

Một đường đi là đường đi đóng nếu nó có độ dài dương và điểm đầu trùng điểm cuối.

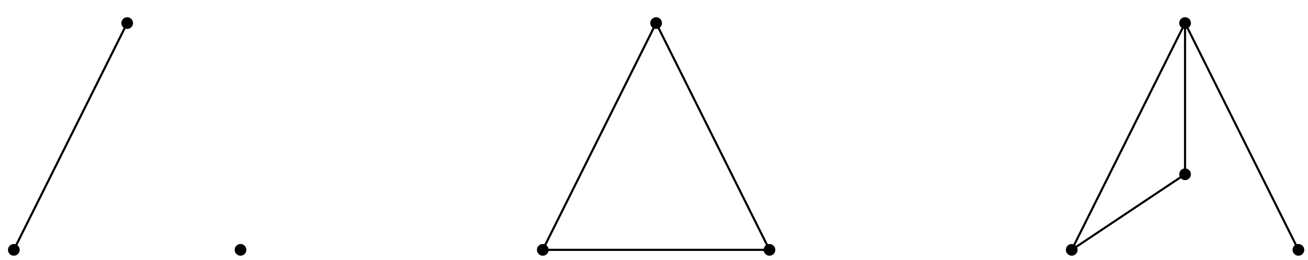
Một đường đi đơn đóng với các đỉnh phân biệt được gọi là chu trình.

Chú ý. *Trong phạm vi bài viết này, nếu chỉ nói đường đi mà không nói gì thêm tức là đường đi sơ cấp.*

Định nghĩa 6. *H là đồ thị con của G nếu $V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$ và đầu mút các cạnh trong $E(H)$ thuộc $V(H)$. Một thành phần liên thông của một đồ thị vô hướng là một đồ thị con trong đó giữa bất kì hai đỉnh nào đều có đường đi đến nhau, và nếu nhận thêm bất kỳ đỉnh nào sẽ mất tính liên thông. Số các thành phần liên thông của G được biểu diễn bởi $\omega(G)$. Một cạnh e được gọi là cầu nếu $\omega(G - e) > \omega(G)$*



Đồ thị ban đầu

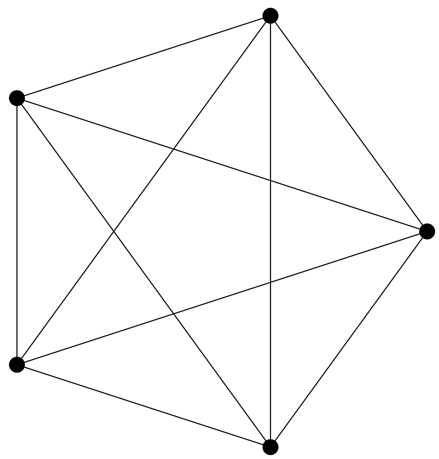


3 đồ thị con

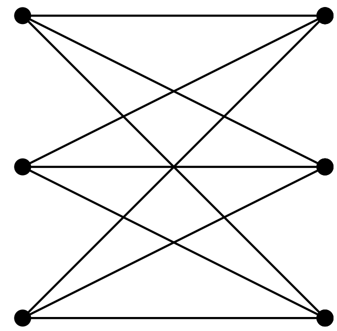
Định nghĩa 7. *Đồ thị đầy đủ là đồ thị đơn mà mỗi cặp đỉnh khác nhau được nối với nhau bởi duy nhất một cạnh. Kí hiệu K_m là đồ thị đầy đủ m đỉnh.*

Đồ thị G là đồ thị phân đôi nếu tập đỉnh V của nó có thể chia thành hai tập con khác rỗng X và Y sao cho mọi cạnh trong G nối một đỉnh trong X với một đỉnh trong Y.

Đồ thị G là đồ thị phân đôi đầy đủ nếu $\forall x \in X, y \in Y$ thì x được nối với y bởi một cạnh duy nhất. Khi X chứa m đỉnh, Y chứa n đỉnh thì G kí hiệu bởi $K_{m,n}$.



K_5



$K_{3,3}$

Định lý 1. *Cho đồ thị G với tập đỉnh V và tập cạnh E,*

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2\epsilon$$

Chứng minh. Giả sử $x, y \in V$ và $(x, y) \in E$

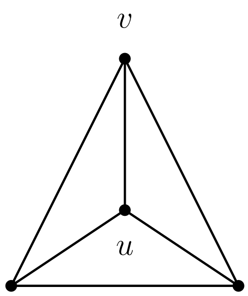
Với $x \neq y$, khi đó nếu xóa cạnh (x, y) thì bậc của đồ thị giảm đi 2. Nếu ta xóa tất cả các cạnh như trên thì đồ thị còn lại chỉ gồm các đỉnh cô lập và các đỉnh có khuyên.

Tại mỗi đỉnh x có khuyên, nếu ta xóa khuyên, thì bậc của đồ thị cũng sẽ giảm đi 2

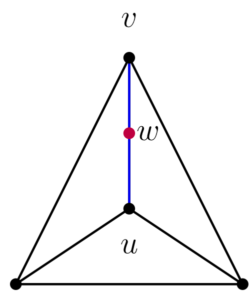
Như vậy, sau khi xóa 1 cạnh nối 2 đỉnh khác nhau hoặc xóa 1 khuyên, thì bậc của đồ thị giảm đi 2. Sau khi xóa tất cả cách cạnh và các khuyên của đồ thị, thì đồ thị chỉ còn lại các đỉnh cô lập nên bậc đồ thị bằng 0.

Từ đó, suy ra điều phải chứng minh $\square$

Định nghĩa 8 (Đồ thị phân chia)**.** *Chia nhỏ cạnh uv là phép toán thay thế cạnh uv bằng 2 cạnh uw và wv, đỉnh mới w được thêm vào đồ thị ban đầu. Một đồ thị phân chia của đồ thị G là đồ thị đạt được bằng cách chia nhỏ cạnh trên G.*

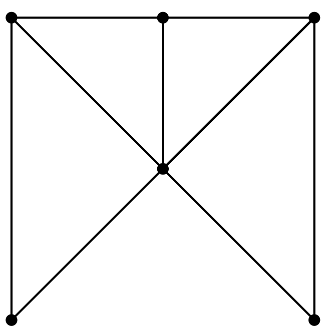


Đồ thị ban đầu

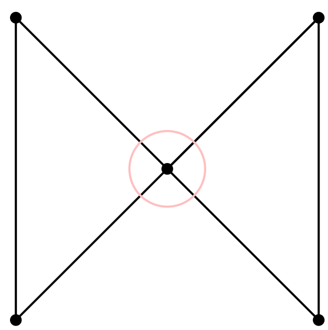


Đồ thị phân chia

Định nghĩa 9. *Cho đồ thị G, tập cắt $V' \subseteq V$ là tập các đỉnh mà khi loại bỏ chúng sẽ làm cho đồ thị mất tính liên thông (khi loại bỏ một đỉnh, ta loại bỏ cả những cạnh liên thuộc đỉnh đó). Bậc liên thông của G, kí hiệu $\kappa(G)$, $\kappa(G) = |V'|$ với V' là tập cắt có ít phần tử nhất. Đồ thị G là k-liên thông nếu $k \leq \kappa(G)$.*



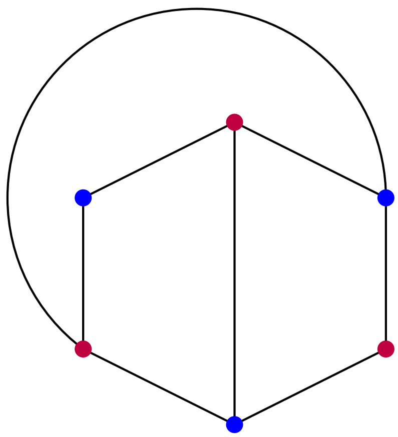
Đồ thị 2-liên thông



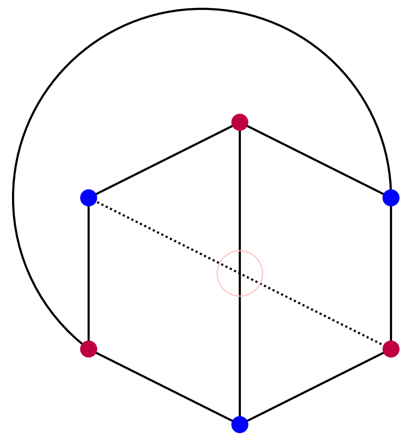
Không phải 2-liên thông

2.2 Đồ thị phẳng

Định nghĩa 10 (Đồ thị phẳng)**.** *Đồ thị phẳng là đồ thị mà ta có thể vẽ nó trên một mặt phẳng, biểu diễn đỉnh bởi các điểm và cạnh bởi các đường nối các điểm, sao cho cho các cạnh chỉ giao nhau tại các đầu mút. Cách vẽ như vậy được gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị.*



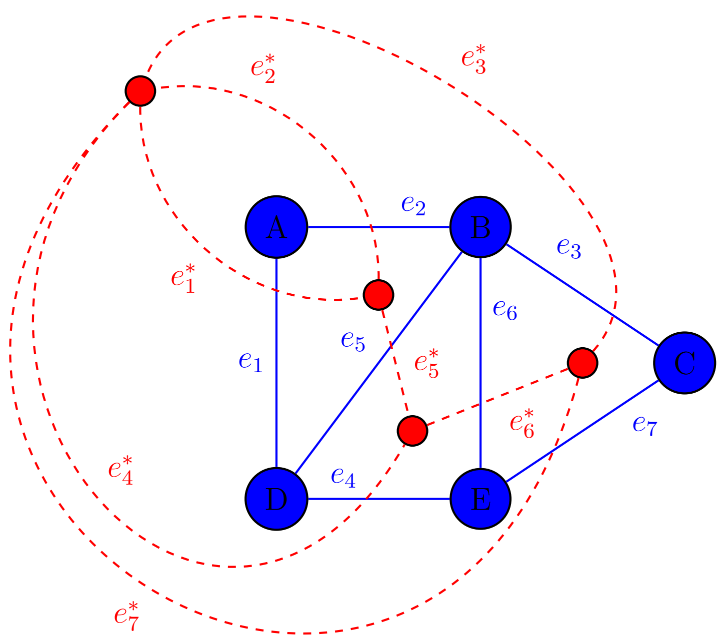
Biểu diễn phẳng



Không phải biểu diễn phẳng

Định nghĩa 11. *Không gian khép kín được phân vùng bởi biểu diễn phẳng được gọi là diện. Số diện của đồ thị kí hiệu bởi ϕ. Trong biểu diễn phẳng của đồ thị, bậc của diện f, kí hiệu $deg(f)$, là số cạnh liên thuộc với f, với cầu được đếm hai lần.*

Định nghĩa 12. *Đồ thị đối ngẫu của đồ thị phẳng G, kí hiệu G^* là đồ thị được xây dựng bằng cách: mỗi đỉnh v^* trong G^* tương ứng với một diện f trong G và mỗi cạnh e^* trong G^* tương ứng với một cạnh e trong G, 2 đỉnh trong G^*, u^* và w^*, được nối bởi cạnh e^* khi và chỉ khi chúng tương ứng với 2 diện trong G, f và g, được phân chia bởi e.*



Đồ thị G^* (Đỏ) là đối ngẫu của đồ thị G (Xanh) và ngược lại

Định lý 2. *Cho đồ thị phẳng G, $F(G)$ là tập hợp các diện của G, biểu thức sau luôn đúng:*

$$\sum_{f \in F(G)} deg(f) = 2\epsilon$$

Chứng minh. Xét đồ thị đối ngẫu G^* của G. Từ định lý 1, ta có:

$$\sum_{v^* \in V^*} deg(v^*) = 2\epsilon^*$$

Từ định nghĩa đồ thị đối ngẫu, $\forall f \in F(G), deg(f) = deg(v^*)$ và $\epsilon = \epsilon^*$. Vậy nên

$$\sum_{f \in F(G)} deg(f) = \sum_{v^* \in V^*} deg(v^*) = 2\epsilon^* = 2\epsilon$$

□

Định lý 3 (Công thức Euler)**.** *Cho G là đồ thị phẳng và liên thông, biểu thức sau luôn đúng:*

$$\nu - \epsilon + \phi = 2$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo số cạnh.

- Bước cơ sở: $\epsilon = 0$

  Vì G liên thông nên $\nu = 1, \phi = 1$, suy ra $\nu - \epsilon + \phi = 1 - 0 + 1 = 2$. Do đó biểu thức đúng với $\epsilon = 0$.

- Bước quy nạp: giả sử $\epsilon(G) = k$ thỏa mãn $\nu(G) - \epsilon(G) + \phi(G) = 2$. Gọi H là đồ thị phẳng thỏa mãn $\epsilon(H) = k + 1$ và H thu được bằng cách thêm cạnh e vào G.

  - Trường hợp 1: e là một khuyên được thêm vào 1 đỉnh của G. Khi đó $\nu(H) = \nu(G)$. Vì H là đồ thị phẳng nên khuyên e không cắt bất kỳ cạnh nào trong G, do đó khuyên e sẽ tạo 1 diện mới, suy ra $\phi(H) = \phi(G) + 1$. Ta có:

    $$\begin{aligned} \nu(H) - \epsilon(H) + \phi(H) &= \nu(H) - (\epsilon(G) + 1) + (\phi(G) + 1) \\ &= \nu(G) - \epsilon(G) + \phi(G) \\ &= 2 \end{aligned}$$

  - Trường hợp 2: cạnh e được thêm bằng cách nối 2 đỉnh v_1, v_2 trong G. Vì G liên thông nên tồn tại đường đi giữa v_1 và v_2. Thêm cạnh e tạo ra chu trình mới, do đó tạo ra diện mới. Vậy nên, $\nu(H) = \nu(G), \phi(H) = \phi(G) + 1, \epsilon(H) = \epsilon(G) + 1$. Tương tự trường hợp 1, suy ra biểu thức vẫn đúng.

– Trường hợp 3: cạnh e nối đỉnh $v_1 \in V(G)$ với đỉnh mới v_2. Khi đó, $\nu(H) = \nu(G) + 1$. Vì v_2 là đỉnh mới, cạnh e nằm trong diện có đường biên chứa v_1, do đó không tạo thêm diện mới, do đó $\phi(H) = \phi(G)$. Ta có:

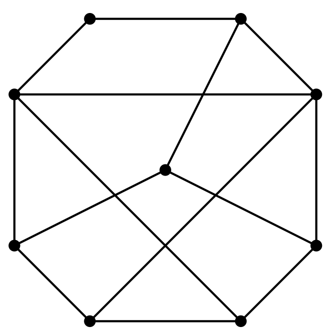
$$\begin{aligned}
\nu(H) - \epsilon(H) + \phi(H) &= (\nu(G) + 1) - (\epsilon(G) + 1) + \phi(G) \\
&= \nu(G) - \epsilon(G) + \phi(G) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Từ 3 trường hợp, biểu thức được chứng minh. □

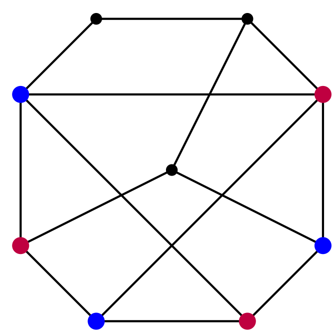
3 Định lý Kuratowski

Năm 1930, Kuratowski công bố định lý đưa ra một điều kiện cần và đủ cho tính phẳng.

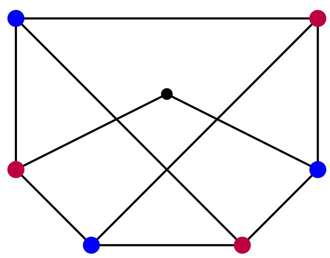
Định lý 4 (Kuratowski)**.** *Một đồ thị phẳng khi và chỉ khi không chứa bất kỳ đồ thị con nào là đồ thị phân chia của* K_5 *hoặc* $K_{3,3}$



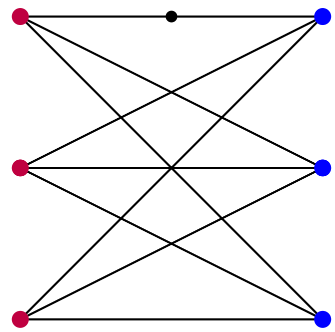
Đồ thị không phẳng G



Đồ thị không phẳng G



$\longrightarrow$



Đồ thị con của G

Đồ thị phân chia của $K_{3,3}$

Để chứng minh định lý này, ta cần chứng minh một số bổ đề cần thiết.

4 Sơ bộ

4.1 Tính chất của đồ thị con và đồ thị phân chia

Bổ đề 1. *Đồ thị con của đồ thị phẳng là đồ thị phẳng*

Chứng minh. Nếu G là đồ thị phẳng, nghĩa là tồn tại một biểu diễn phẳng của G. Với mọi đồ thị con H của G, ta có thể tìm đươc các đỉnh và cạnh của H trong biểu diễn phẳng của G. Từ đó, ta dựng được một biểu diễn phẳng của H. □

Bổ đề 2. *Đồ thị phân chia của một đồ thị không phẳng là một đồ thị không phẳng.*

Chứng minh. Giả sử đồ thị không phẳng G có một đồ thị phân chia G' của G là đồ thị phẳng. Khi ta xóa đỉnh được thêm bởi phép *chia nhỏ* và dựng lại cạnh ban đầu (không thay đổi hình dạng và vị trí của các đường đi). Ta thu được biểu diễn phẳng của G, vô lý. Vậy nên, nếu G không phẳng thì các đồ thị phân chia của G cũng không phẳng. □

4.2 Tính chất đồ thị 2-liên thông

Hệ quả 1. *Xóa một đỉnh khỏi đồ thị 2-liên thông không làm mất tính liên thông của nó.*

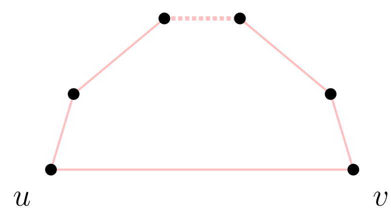
Chứng minh. Vì đồ thị G là 2-liên thông nên $\kappa(G) \geq 2$. Nếu việc loại bỏ 1 điểm khỏi G làm nó mất tính liên thông nghĩa là $\kappa(G) \leq 1$. Vô lý. □

Bổ đề 3. *Đồ thị 2-liên thông khi và chỉ khi mọi cặp đỉnh trong đồ thị đều có một chu trình đi qua chúng.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Cho G là đồ thị 2-liên thông, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp, mọi cặp đỉnh $u, v \in V(G)$ đều có một chu trình đi qua chúng.

Ta định nghĩa *khoảng cách* giữa u và v là độ dài đường đi ngắn nhất giữa u và v

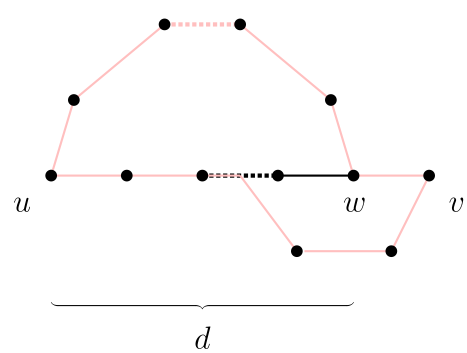
- Trường hợp cơ bản: u kề v (u, v có *khoảng cách* là 1)



  Nếu không có đường đi giữa u và v không chứa cạnh uv thì u hoặc v sẽ là đỉnh cắt, dẫn đến $\kappa(G) \leq 1$. Vậy nên tồn tại đường đi khác giữa u và v mà không chứa cạnh uv, kết hợp với cạnh uv sẽ tạo thành một chu trình chứa u, v.

- Giả sử, tồn tại chu trình đi qua mỗi cặp đỉnh có *khoảng cách* là d. Ta sẽ chứng minh tồn tại chu trình đi qua u và v với u, v có *khoảng cách* $d + 1$.

  Gọi w là đỉnh ngay trước v trên đường đi giữa u, v. Vì *khoảng cách* của u và w là d, dễ dàng suy ra u và w cùng nằm trên một chu trình. Nếu ta *loại bỏ* w khỏi G, vì G là 2-liên thông nên ta biết còn một đường đi khác giữa u và v. Kết hợp đường đi này với chu trình chứa u, w và cạnh wv cho ta chu trình chứa u, v.



($\Leftarrow$) Cho 2 đỉnh bất kỳ trong G đều có chu trình đi qua chúng thì nếu xóa nhiều nhất đỉnh thì phần còn lại vẫn liên thông. Do đó, $\kappa(G) \geq 2 \Rightarrow G$ là 2-liên thông. $\square$

5 Chứng minh định lý

($\Rightarrow$) Nếu đồ thị G chứa đồ thị con là đồ thị phân chia của K_5 hoặc $K_{3,3}$ thì G không phẳng.

Chứng minh. Ta có:

- Đồ thị phân chia của đồ thị không phẳng thì không phẳng (theo bổ đề 2)
- Nếu một đồ thị con của dồ thị không phẳng thì đồ thị đó không phẳng (theo bổ đề 1)

$\Rightarrow$ Nếu một đồ thị con của đồ thị G là đồ thị phân chia của đồ thị không phẳng thì G không phẳng

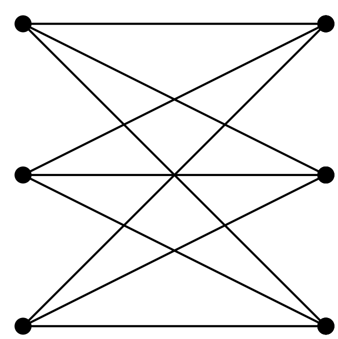
Bổ đề 4. *$K_{3,3}$ không phẳng*

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử tồn tại một biểu diễn phẳng của $K_{3,3}$.

Với $K_{3,3}$, có $\nu = 6, \epsilon = 9$, từ công thức Euler ta có:

$$\begin{aligned} \nu - \epsilon + \phi &= 2 \\ 6 - \epsilon + \phi &= 2 \\ 6 - 9 + \phi &= 2 \\ \phi &= 5 \end{aligned}$$



Trong đồ thị phân đôi đơn, chiều dài nhỏ nhất của chu trình là 4, nghĩa là với mọi $f \in F(K_{3,3})$

$$\begin{aligned} deg(f) &\geq 4 \\ \Rightarrow \sum_{f \in F(K_{3,3})} deg(f) &\geq 4\phi \end{aligned}$$

Lại có, từ định lý 1:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{f \in F(K_{3,3})} deg(f) & = & 2\epsilon \\ \Rightarrow \quad 2\epsilon & \geq & 4\phi \\ \Rightarrow \quad 2 \times 9 & \geq & 4 \times 5 \end{array}$$

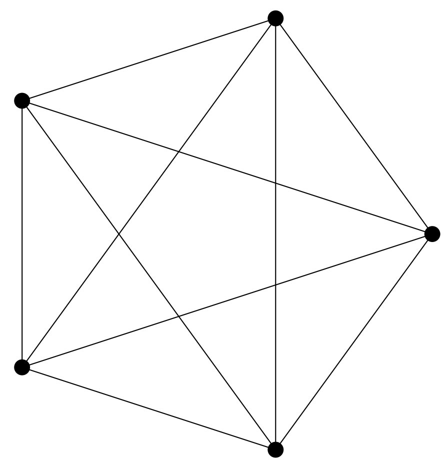
Vô lý. □

Bổ đề 5. *K_5 không phẳng*

Chứng minh. Giả sử tồn tại một biểu diễn phẳng của K_5.

Với K_5, có $\nu = 5, \epsilon = 10$, từ công thức Euler ta có:

$$\begin{array}{rcl} \nu - \epsilon + \phi & = & 2 \\ 5 - \epsilon + \phi & = & 2 \\ 5 - 10 + \phi & = & 2 \\ \phi & = & 7 \end{array}$$



Trong đồ thị đầy đủ, chiều dài nhỏ nhất của chu trình là 3, nghĩa là với mọi $f \in F(K_5)$

$$\begin{array}{rcl} deg(f) & \geq & 3 \\ \Rightarrow \sum_{f \in F(K_5)} deg(f) & \geq & 3\phi \end{array}$$

Lại có, từ định lý 1:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{f \in F(K_5)} deg(f) & = & 2\epsilon \\ \Rightarrow \quad 2\epsilon & \geq & 3\phi \\ \Rightarrow \quad 2 \times 10 & \geq & 3 \times 7 \end{array}$$

Vô lý. □

Tóm lại.

K_5 và $K_{3,3}$ là không phẳng

$\Rightarrow$ Tất cả các đồ thị phân chia của chúng đều không phẳng.

$\Rightarrow$ Nếu đồ thị G chứa đồ thị con là đồ thị phân chia của K_5 hoặc $K_{3,3}$ thì G không phẳng.

$\square$

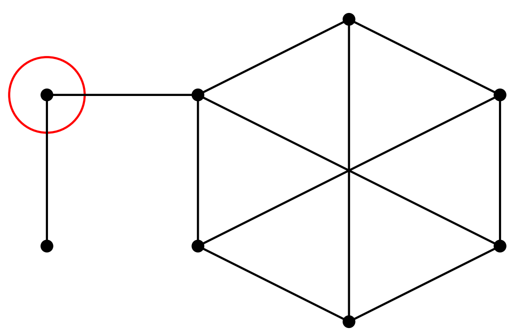
($\Leftarrow$) Nếu đồ thị G không phẳng thì G chứa đồ thị phân chia của K_5 hoặc $K_{3,3}$

Chứng minh. Giả sử tồn tại đồ thị không phẳng mà không chứa đồ thị con là đồ thị phân chia của K_5 và $K_{3,3}$.

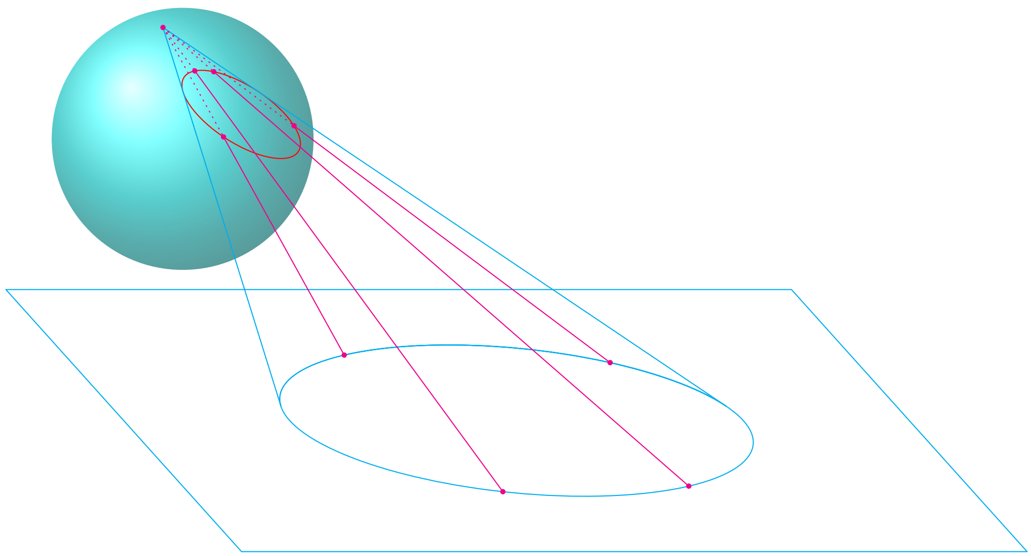
Trong những đồ thị không phẳng không chứa đồ thị con là đồ thị phân chia của K_5 và $K_{3,3}$, giả sử G là đồ thị có *ít cạnh nhất*. Khi loại bỏ một cạnh bất kì của G thì ta được đồ thị *phẳng*.

Giả sử G có nhiều thành phần liên thông, dễ thấy G phải có một thành phần liên thông không phẳng. Gọi thành phần liên thông đó là K. Rõ ràng $\epsilon(K) \leq \epsilon(G)$ và K không chứa đồ thị phân chia của K_5 và $K_{3,3}$. Khi K ít cạnh hơn G, G sẽ không phải đồ thị *ít cạnh nhất*, mâu thuẫn, do đó $\epsilon(K) = \epsilon(G)$ và các thành phần liên thông khác K của G đều chỉ gồm đỉnh cô lập. Không mất tính tổng quát, giả sử G liên thông.

1. G là 2-liên thông



Chứng minh. Vì G liên thông nên $\kappa(G) \geq 1$. Giả sử $\kappa(G) = 1$, theo định nghĩa, tồn tại đỉnh v sao cho $G - v$ không liên thông. Không mất tính tổng quát, giả sử $G - v$ có 2 thành phần liên thông H_1 và H_2. Ta có $H_1 \cup v$ và $H_2 \cup v$ đều phẳng vì chúng là đồ thị con của G và ít cạnh hơn G, đồng thời không chứa đồ thị phân chia của K_5 và $K_{3,3}$. Trong biểu diễn phẳng của chúng, ta có thể tìm một diện f mà biên chứa đỉnh v. Với phép chiếu lập thể, ta có thể thu được biểu diễn phẳng của $H_1 \cup v$ và $H_2 \cup v$ mà v nằm trên đường biên của diện không bị chặn. Bằng cách đặt điểm ở vô cùng. Sau đó, ta gộp $H_1 \cup v$ và $H_2 \cup v$ bằng cách hợp nhất v và thu được một biểu diễn phẳng của G. Vô lý.



Ví dụ phép chiếu lập thể từ mặt cầu đến mặt phẳng

Vậy G là đồ thị 2-liên thông.

□

2. Nếu uv là một cạnh của G thì $G - uv$ là đồ thị 2-liên thông

   Chứng minh. Vì G 2-liên thông nên $\kappa(G) \geq 2$. Giả sử $\kappa(G) = 2$ thì tồn tại 2 đỉnh x, y sao cho $G - \{x, y\}$ không liên thông. Gọi các thành phần liên thông của $G - \{x, y\}$ là $H_1, H_2, \ldots, H_k$. Xây dựng tập $M_1, M_2, \ldots, M_k$ trọng đó $M_i = H_i \cup \{x, y\} + xy$. Ta sẽ chỉ ra tồn tại $M_j (1 \leq j \leq k)$ không phẳng.

   Giả sử tất cả $M_i (1 \leq i \leq k)$ đều phẳng, do đó tồn tại biểu diễn phẳng của mỗi chúng. Với phép chiếu lập thể, ta luôn có một biểu phẳng sao cho xy là biên của diện vô hạn. Vì $\{x, y\}$ và xy là phân chung duy nhất của các M_i, do đó, ta có thể hợp nhất biểu diễn phẳng của chúng, thu được biểu diễn phẳng của $G \cup xy$. Nghĩa là $G \cup xy$ phẳng, nên G cũng phẳng. Vô lý, do đó tồn tại $M_j (1 \leq j \leq k)$ không phẳng.

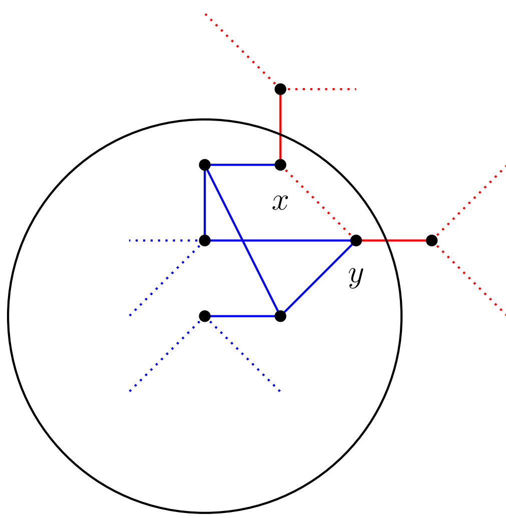
   Giả sử $H_p (1 \leq p \leq k)$ là một thành phần liên thông của $G - \{x, y\}$.

   Xét trong G ban đầu. Nếu trong 2 đỉnh x, y không có đỉnh nào nối với H_p, khi đó, H_p là một thành phần liên thông, hay G không liên thông, vô lý. Nếu trong 2 đỉnh x, y có một đỉnh nối tới H_p, giả sử x, thì x là *đỉnh cắt* hay $\kappa(G) = 1$, vô lý. Vậy cả x và y đều có cạnh nối tới H_p hay có ít nhất 2 cạnh từ $\{x, y\}$ nối đến H_p

Ta có:

$$
\begin{aligned}
\epsilon(G) &\geq \epsilon(H_j + \{x, y\}) + \epsilon(H_p + \{x, y\}) \\
&\geq \epsilon(H_j + \{x, y\}) + 2 \\
&> \epsilon(H_j + \{x, y\}) + 1 \\
&= \epsilon(H_j + \{x, y\} + xy) = \epsilon(M_j)
\end{aligned}
$$

Cuối cùng thì $\epsilon(M_j) < \epsilon(G)$. Vì G là đồ thị ít cạnh nhất không chứa đồ thị phân chia K_5 và $K_{3,3}$, M_j không phẳng và ít cạnh hơn G, nên M_j phải chứa đồ thị phân chia của K_5 hoặc $K_{3,3}$. Suy ra M_j không phải đồ thị con của G. Lại có $M_j - xy$ là đồ thị con của G nghĩa là G không chứa cạnh xy. Ta hợp nhất $M_j - xy$ với $M_p - xy$ bằng cách hợp nhất đỉnh x và đỉnh y, ta thu được một đồ thị con của G. Do $M_p - xy$ liên thông nên tồn tại một đường đi giữa x và y, kết hợp đường đi này với $M_j - xy$ ta được một đồ thị phân chia của K_5 hoặc $K_{3,3}$.



Xanh: $M_j - xy$
Đỏ: $M_p - xy$

Dẫn đến G chứa đồ thị phân chia của K_5 hoặc $K_{3,3}$. Vô lý

$\Rightarrow \kappa(G) \geq 3$ hay G 3-liên thông. □

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra với mọi cặp đỉnh $a, b \in V(G - uv)$, tồn tại một chu trình đi qua chúng. Ta sẽ chứng minh qua 3 trường hợp.

- $\{a, b\} = \{u, v\}$. Vì $\kappa(G) \geq 3$ nên $\nu(G) \geq 4$. Chọn 2 đỉnh c và d bất kỳ trong đồ thị $G - uv$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = u, b = v$. Vì G 3-liên thông nên loại bỏ 2 đỉnh không làm mất tính liên thông của G. Nghĩa là khi loại bỏ v và d, vẫn còn một đường đi nối giữa u và c. Nói cách khác, có một đường đi P_1 giữa u và c không đi qua v và d. Tương tự, có một đường đi P_2 giữa c và v không đi qua u và d, một đường đi P_3 giữa v và d không đi qua u và c, một đường đi P_4 giữa d và u không đi qua v và c. Khi đó, ta có u và v cùng nằm trên một chu trình $u - P_1 - c - P_2 - v - P_3 - d - P_4 - u$.

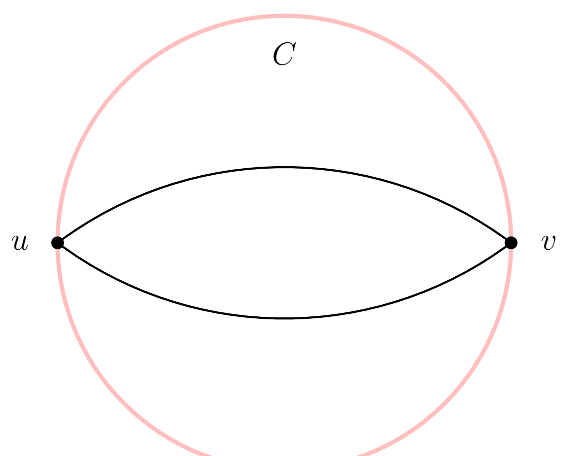
- Có duy nhất 1 đỉnh trong $\{a, b\}$ là u hoặc v. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = u$ và $b \neq v$. Chọn bất kỳ điểm $c \neq b$ không trùng u và v. Tương tự trường hợp trên, tồn tại một đường đi P_1 giữa u và b không đi qua c và v, một đường đi P_2 giữa c và b không đi qua u và v, một đường đi P_3 giữa c và u không đi qua v và b. Ta lại thu được một chu trình $u - P_1 - b - P_2 - c - P_3 - u$, chu trình này chứa cả u và b.

- Cả a, b đều không trùng u, v. Lại một lần nữa, tương tự trường hợp trên, tồn tại một đường đi P_1 giữa a, b không đi qua u, v, một đường đi P_2 giữa b, v không đi qua u, a, một đường đi P_3 giữa v, a không đi qua u, b. Ta thu được chu trình $a - P_1 - b - P_2 - v - P_3 - a$ chứa cả a và b.

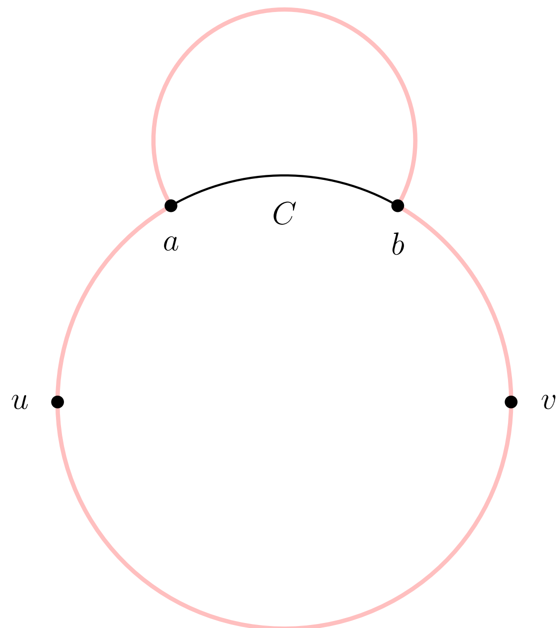
Từ 3 trường hợp trên, luôn có một chu trình đi qua a, b trong $G - uv$, nên $G - uv$ phải 2-liên thông.

Xét đồ thị $G - uv$ thu được bằng cách bỏ cạnh uv từ G
$G - uv$ là đồ thị phẳng
$G - uv$ là 2-liên thông, nên tồn tại chu trình đi qua u và v.

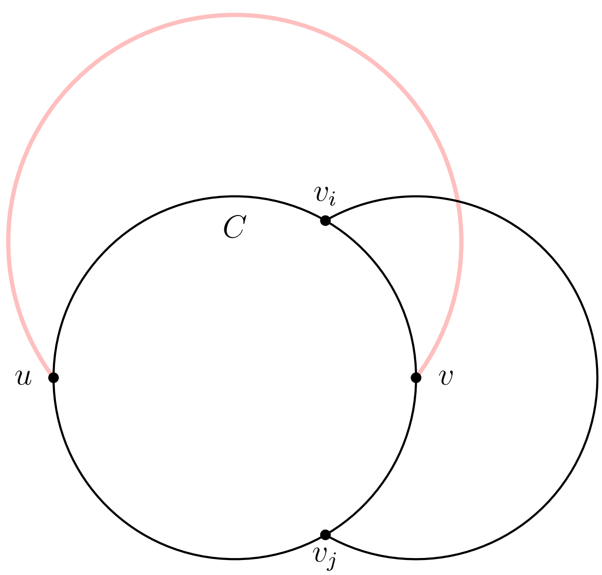
Chú ý. *Những cạnh chúng tôi vẽ dưới đây là những đường đi trong đồ thị.*



Trong tất cả các chu trình đi qua 2 đỉnh u, v thuộc biểu diễn phẳng của $G - uv$. Gọi C là chu trình sao cho số cạnh nằm vùng bên trong nó là lớn nhất.



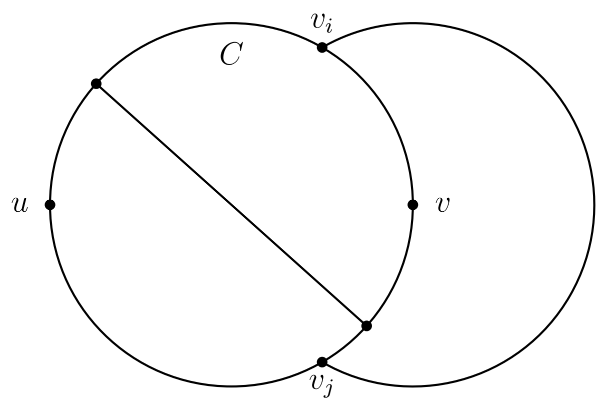
Với mọi đỉnh a, b nằm trên C mà a, b cùng thuộc một đường đi giữa u, v trên C. Ta không thể có đường đi giữa a, b mà nằm ngoài C vì nó sẽ tạo ra chu trình chứa nhiều cạnh ở phía trong hơn C , mâu thuẫn.



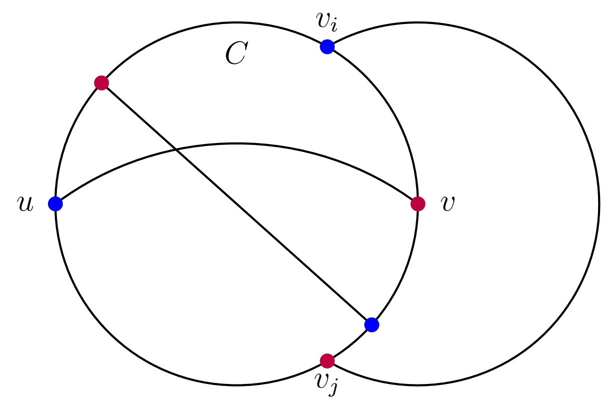
Vì G không phẳng nên ta có một đường đi cắt uv ở phía ngoài của C. Gọi đường đi đó là v_iv_j (v_i, v_j nằm trên C và không cùng nằm trên một đường đi giữa u, v)

Phía trong của C cũng cần có một phần của đồ thị G cắt đường v_iv_j và uv vẽ từ bên trong của C vì nếu không, ta có thể vẽ đường v_iv_j ở trong và vẽ uv ở bên ngoài hoặc ngược lại để nhận được biểu diễn phẳng của G.

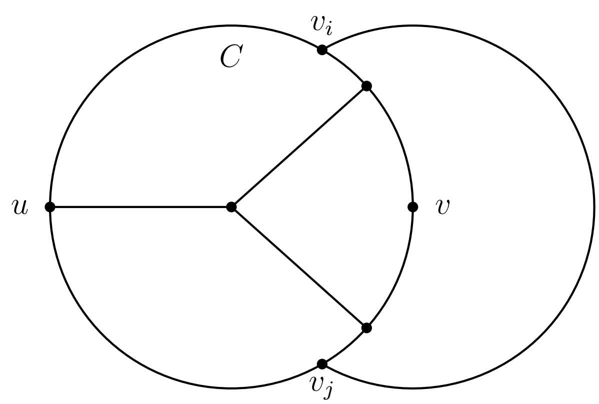
Tương đương, ta có 4 trường hợp tổng quát được miêu tả dưới đây.



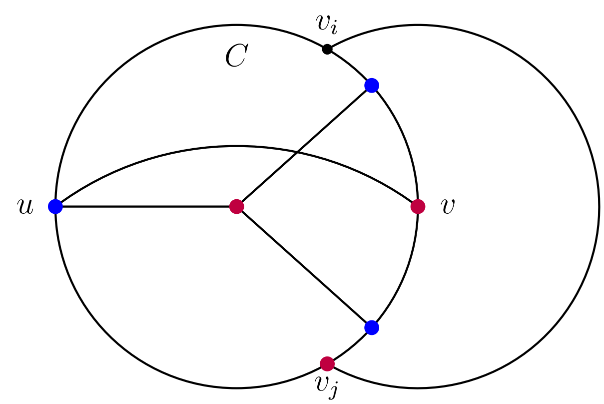
Trường hợp 1



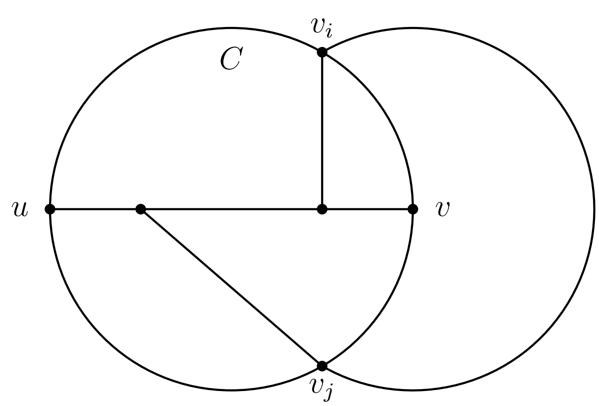
G chứa một đồ thị phân chia của $K_{3,3}$



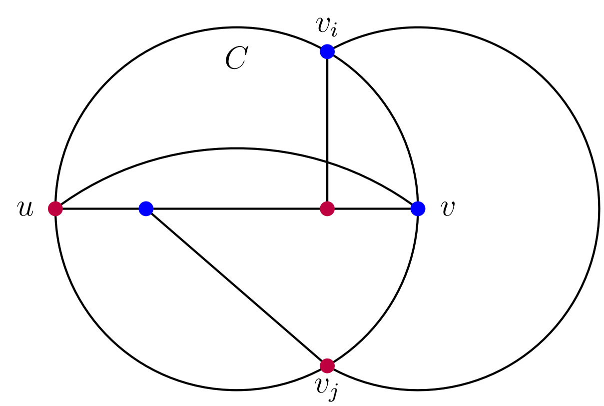
Trường hợp 2



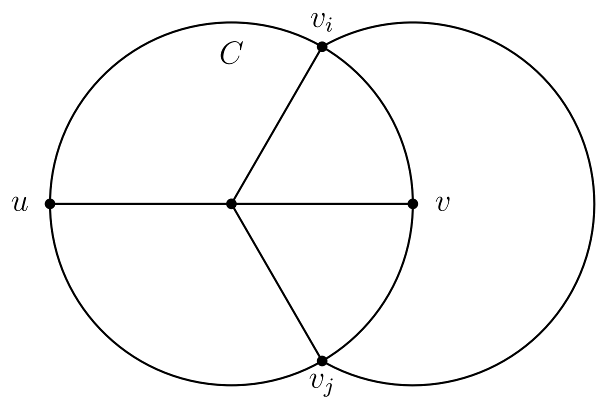
G chứa một đồ thị phân chia của $K_{3,3}$



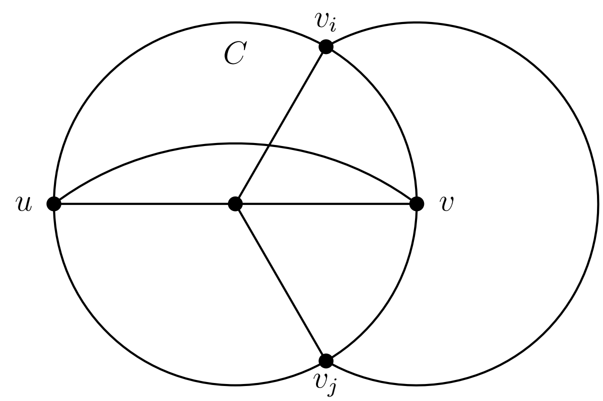
Trường hợp 3



G chứa một đồ thị phân chia của $K_{3,3}$



Trường hợp 4



G chứa một đồ thị phân chia của K_5

Chú ý. *G luôn có một đồ thị con là đồ thị phân chia của K_5 hoặc $K_{3,3}$*

Kết quả của 4 trường hợp trên đều mâu thuẫn với giả thiết. Từ đây, ta kết luận rằng, không tồn tại đồ thị nào như G. Định lý được chứng minh. □

Acknowledgement

Chúng tôi muốn gửi lời cảm ơn đến:

- Giảng viên hướng dẫn, TS. Nguyễn Hải Vinh, vì sự hướng dẫn.
- Giáo sư Antti Laaksonen đã giới thiệu chúng tôi đến với Lý thuyết đồ thị.
- 3Blue1Brown vì thư viện Python manim.
- Nhóm của David Cabatingan vì những lưu ý về Định lý Kuratowski

Tài liệu

[1] Antti Laaksonen. *Guide to Competitive Programming*. July 3, 2018.

[2] 3Blue1Brown. *Python Library manim*. `https://github.com/dcabatin/manim`