

BÀI 01

1.1. Khái niệm đồ thị

1.1.1. Định nghĩa đồ thị

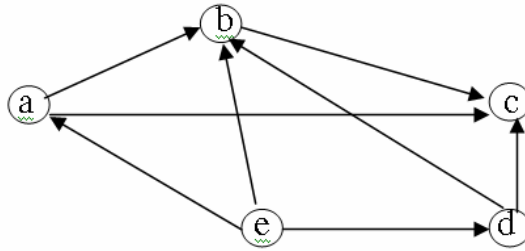
Chúng ta đã nhìn thấy hoặc sử dụng bản đồ các tuyến đường giao thông của một thành phố, sơ đồ tổ chức một cơ quan, sơ đồ khối tính toán của một thuật toán, sơ đồ một mạng máy tính ... Đó là những ví dụ cụ thể về đồ thị.

Đồ thị (*graph*) là một mô hình toán học được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học, kỹ thuật và được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.1: Đồ thị là một cặp $G = (V, E)$, trong đó:

- 1) V là tập hợp các *đỉnh* (*vertex*),
- 2) $E \subseteq V \times V$ là tập hợp các *cạnh* (*edge*).

Ví dụ 1.2:



Hình 1.1: Đồ thị hữu hạn

Đồ thị G cho ở hình vẽ trên với tập các đỉnh $V = \{a, b, c, d, e\}$ và tập các cạnh $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (d, b), (d, c), (e, a), (e, b), (e, d)\}$.

Nếu (a, b) là một cạnh của đồ thị thì ta nói rằng đỉnh b kề với đỉnh a và cả hai đỉnh a và b kề với cạnh (a, b) .

Trong đồ thị ở Ví dụ 1.2 hai đỉnh b và c kề với đỉnh a , ba đỉnh a, b và d kề với đỉnh e . Do vậy, ta có thể định nghĩa đồ thị bằng ánh xạ kề như sau.

Định nghĩa 1.3: Đồ thị là một cặp $G = (V, F)$, trong đó:

- 1) V là tập hợp các đỉnh,
- 2) $F : V \rightarrow 2^V$, được gọi là *ánh xạ kề*.

ánh xạ kề của đồ thị trong Ví dụ 1.2 được xác định như sau:

$$F(a) = \{b, c\}, F(b) = \{c\}, F(c) = \emptyset, F(d) = \{b, c\} \text{ và } F(e) = \{a, b, d\}.$$

Sự tương đương của hai định nghĩa của đồ thị được thể hiện bằng mệnh đề sau đây:

$$\forall x, y \in V : (x, y) \in E \Leftrightarrow y \in F(x).$$

Về bản chất, đồ thị là một tập hợp các đối tượng được biểu diễn bằng các đỉnh và giữa các đối tượng này có một quan hệ nhị nguyên biểu diễn bằng các cạnh.

Cặp đỉnh $(x, y) \in E$ không sắp thứ tự được gọi là *cạnh vô hướng*, còn nếu nó có sắp thứ tự thì được gọi là *cạnh có hướng*. Vì thế, chúng ta thường phân các đồ thị thành hai lớp.

Định nghĩa 1.4: Đồ thị chỉ chứa các cạnh vô hướng được gọi là *đồ thị vô hướng*, còn đồ thị chỉ chứa các cạnh có hướng được gọi là *đồ thị có hướng*.

Hiển nhiên, mỗi đồ thị vô hướng có thể biểu diễn bằng một đồ thị có hướng bằng cách thay mỗi cạnh vô hướng bằng hai cạnh có hướng tương ứng.

Định nghĩa 1.5: Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *đối xứng* nếu:

$$\forall x, y \in V : (x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E.$$

Các đồ thị vô hướng là đối xứng.

Định nghĩa 1.6: Đồ thị $G = (V, E)$ mà mỗi cặp đỉnh được nối với nhau bởi không quá một cạnh được gọi là *đơn đồ thị* (thường gọi tắt là *đồ thị*). Còn nếu đồ thị có những cặp đỉnh được nối với nhau nhiều hơn một cạnh thì được gọi là *đa đồ thị*.

Ta có thể biểu diễn hình học cho đồ thị như sau: Trên mặt phẳng biểu diễn đỉnh bằng các vòng tròn nhỏ, biểu diễn cạnh vô hướng bằng đoạn thẳng, biểu diễn cạnh có hướng bằng mũi tên nối hai đỉnh của đồ thị.

Trong giáo trình này chúng ta chỉ xét các đồ thị hữu hạn, nghĩa là các đồ thị có tập đỉnh là hữu hạn.

1.1.2. Đường đi và chu trình

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị.

Định nghĩa 1.7: Đường đi trong đồ thị là một dãy các đỉnh:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, x_k \rangle$$

sao cho, mỗi đỉnh trong dãy (không kể đỉnh đầu tiên) kề với đỉnh trước nó bằng một cạnh nào đó, nghĩa là: $\forall i = 2, 3, \dots, k-1, k : (x_{i-1}, x_i) \in E$.

Ta nói rằng đường đi này đi từ đỉnh đầu x_1 đến đỉnh cuối x_k . Số cạnh của đường đi được gọi là *độ dài* của đường đi đó.

Đường đi đơn là đường đi mà các đỉnh trên nó khác nhau từng đôi.

Định nghĩa 1.8: Chu trình là một đường đi khép kín (tức là đỉnh cuối của đường trùng với đỉnh đầu của đường). Ta thường ký hiệu chu trình là:

$$[x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, x_k], \text{ trong đó } x_1 = x_k.$$

Để cho gọn, trong ký hiệu của chu trình thường không viết đỉnh cuối:

$$[x_1, x_2, \dots, x_i, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}].$$

Khi nói đến một chu trình, ta cũng không cần xác định đỉnh đầu và đỉnh cuối của chu trình đó.

Chu trình được gọi là *chu trình đơn* nếu các đỉnh trên nó khác nhau từng đôi.

Trong một đồ thị, *đỉnh nút* là đỉnh kề với chính nó. Hai cạnh có ít nhất một đỉnh chung được gọi là hai cạnh kề nhau.

Để việc trình bày được ngắn gọn, trong suốt cuốn sách này ta ký hiệu n là số đỉnh, m là số cạnh của một đồ thị.

1.1.3. Đồ thị con và đồ thị riêng

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị.

Định nghĩa 1.9:

1) Đồ thị $G' = (V', E')$ được gọi là *đồ thị con* của đồ thị G nếu:

$$V' \subseteq V \text{ và } E' = E \cap (V' \times V').$$

2) Đồ thị $G'' = (V, E'')$ với $E'' \subseteq E$, được gọi là *đồ thị riêng* của đồ thị G .

Mỗi tập con các đỉnh V' của đồ thị tương ứng duy nhất với một đồ thị con, do vậy để xác định một đồ thị con ta chỉ cần nêu tập đỉnh của nó. Còn đồ thị riêng là đồ thị giữ nguyên tập đỉnh và bỏ bớt một số cạnh.

1.1.4. Sự đẳng hình của các đồ thị

Sự đẳng hình của hai đồ thị dựa trên sự đẳng cấu của hai tập đỉnh sao cho sự đẳng cấu ấy bảo toàn được các cạnh của đồ thị.

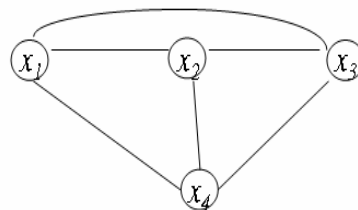
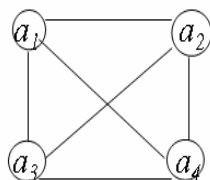
Định nghĩa 1.10: Hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là *đẳng hình* nếu tồn tại một song ánh trên các tập đỉnh, $S : V_1 \rightarrow V_2$ bảo toàn các cạnh:

$$\forall x, y \in V_1, (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (S(x), S(y)) \in E_2.$$

Chúng ta sẽ không phân biệt hai đồ thị đẳng hình với nhau vì về thực chất chúng chỉ khác nhau về tên gọi của các đỉnh và cách biểu diễn bằng hình vẽ.

Ví dụ 1.11: Hai đồ thị dưới đây là đẳng hình với song ánh:

$$S(a_i) = x_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$



Hình 1.2. Hai đồ thị đẳng hình

1.1.5. Các cách biểu diễn đồ thị trong máy tính

a) Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề

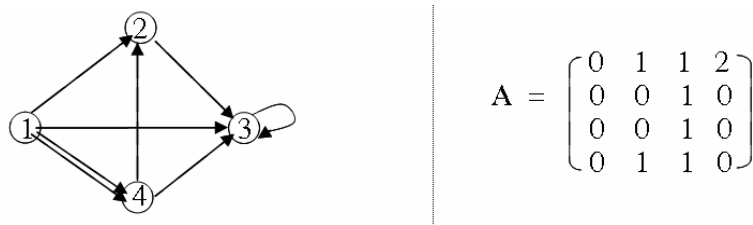
Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị. Ta đánh số các đỉnh của đồ thị bằng các số tự nhiên: $1, 2, \dots, n$. Xây dựng ma trận vuông biểu diễn đồ thị như sau:

Ma trận vuông $A_{n \times n}$ được gọi là *ma trận kề* của đồ thị G nếu:

$\forall i, j \in V, A[i, j] = d$, trong đó d là số cạnh nối đỉnh i với đỉnh j trong G .

Dễ thấy rằng, đồ thị G là đối xứng khi và chỉ khi ma trận kề A là đối xứng.

Ví dụ 1.12: Ma trận kề của đa đồ thị có hướng.



Hình 1.3. Đồ thị có hướng và ma trận kề tương ứng

Cách biểu diễn đơn giản này của đồ thị cho ta kết quả sau đây.

Định lý 1.1: Phần tử ở hàng i và cột j của ma trận lũy thừa A^k là số các đường đi khác nhau có độ dài k nối đỉnh i với đỉnh j trong đồ thị G .

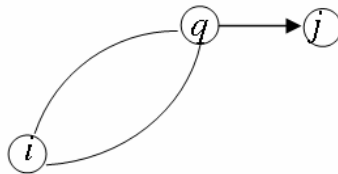
Chứng minh:

Ta chứng minh bằng quy nạp theo độ dài k của đường đi.

$k = 1$: suy từ chính định nghĩa của ma trận kề.

$(k) \Rightarrow (k+1)$: Ký hiệu $A = [a_{ij}]$, $A^k = [b_{ij}]$,
 $C = A^k \cdot A = [c_{ij}]$

Khi đó: $c_{ij} = \sum_{q=1}^n b_{iq} * a_{qj}$



Hình 1.4. Các đường đi từ đỉnh i đến đỉnh j qua đỉnh q

Với q bất kỳ, $1 \leq q \leq n$ thì theo giả thiết quy nạp b_{iq} là số đường đi từ đỉnh i đến đỉnh q có độ dài k . Nếu $a_{qj} = 0$ thì không có cạnh từ q đến j , do đó cũng không có đường đi từ i đến j qua q với độ dài $k+1$.

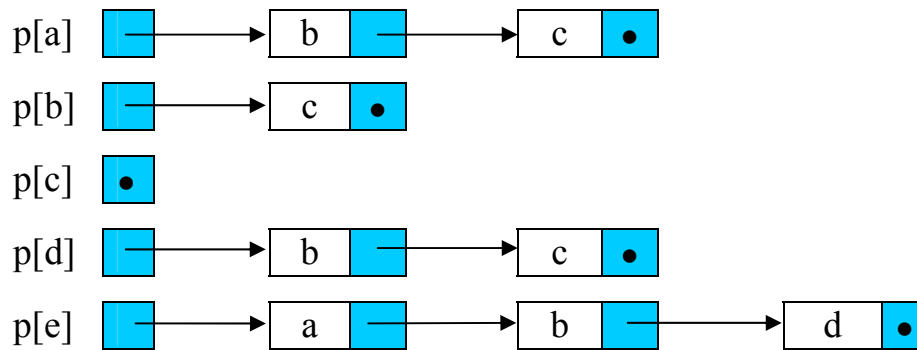
Nếu $a_{qj} = d \geq 1$ thì có cạnh đi từ q đến j . Do đó có các đường đi từ i đến j qua q với độ dài $k+1$, mà số các đường đi đó chính là $d \cdot b_{iq}$.

Vậy tính c_{ij} theo tổng trên, ta sẽ có tất cả các đường đi từ i đến j với độ dài $k+1$. Định lý đã được chứng minh. \square

b) Biểu diễn đồ thị bằng các danh sách kề

Với mỗi đỉnh của đồ thị ta xây dựng một danh sách móc nối chứa các đỉnh kề với đỉnh này. Danh sách này được gọi là danh sách kề. Một đồ thị được biểu diễn bằng một mảng các danh sách kề.

Ví dụ 1.13: Biểu diễn mảng các danh sách kề của đồ thị G trong Ví dụ 1.2.



Hình 1.5. Mảng các danh sách kề biểu diễn đồ thị