

BÀI 02

1.2. Một số tính chất về Đường đi trên đồ thị

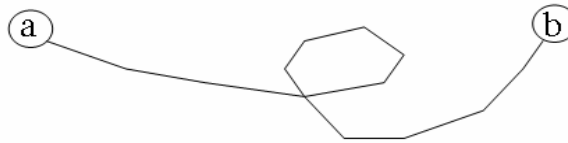
Trong phần này chúng ta xét một số tính chất của đường đi nối hai đỉnh trong một đồ thị cũng như sự tồn tại của chúng.

Định lý 1.2: Giả sử đồ thị G có n đỉnh. Tồn tại đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b trên đồ thị G khi và chỉ khi tồn tại một đường đi từ a đến b trên đồ thị này với độ dài không vượt quá $n-1$.

Chứng minh:

Giả sử có đường đi từ đỉnh a tới đỉnh b . Ta có thể chọn:

$\langle a = x_1, x_2, \dots, x_k = b \rangle$ là đường đi có độ dài ngắn nhất.



Hình 1.6. Một đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b

Độ dài của đường đi là $k-1$. Nếu $k-1 \leq n-1$ thì định lý được chứng minh.

Nếu ngược lại, $k-1 > n-1$, nghĩa là $k > n$, thì trong dãy đỉnh của đường đi sẽ có ít nhất hai đỉnh trùng nhau, chẳng hạn: $x_i = x_j$. Khi đó thì:

$$\langle a = x_1, x_2, \dots, x_i, x_{j+1}, \dots, x_k = b \rangle$$

cũng là đường đi từ a tới b nhưng với độ dài ngắn hơn. Suy ra mâu thuẫn với giả thiết của đường đi ngắn nhất. Định lý được chứng minh xong. \square

Chúng ta xét bài toán đường đi trên đồ thị như sau.

Bài toán: Cho đồ thị G và hai đỉnh a, b thuộc G . Có hay không một đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b trên đồ thị G ?

Dựa vào Định lý 1.1 và 1.2 ta xây dựng thuật toán sau đây để trả lời cho bài toán trên.

Thuật toán 1.3:

- 1) Xây dựng ma trận kề A cho đồ thị G .
- 2) Tính ma trận tổng các lũy thừa $T = A^1 + A^2 + \dots + A^{n-1}$
- 3) Nếu $T[a,b] \geq 1$ thì kết luận là có đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b , ngược lại thì kết luận là không có.

Chú ý:

1. Ma trận tổng T còn được gọi là *bao đóng bắc cầu* của ma trận kề A .

2. Các phần tử của ma trận T có thể rất lớn, hơn nữa chúng ta chỉ quan tâm đến tính chất khác 0 của các phần tử, nên có thể xem ma trận k A như ma trận logic và trong phép nhân ma trận ta thay các phép toán số học $+$, $*$ bằng các phép toán logic OR và AND. Khi đó, ta dùng thuật toán Warshall sau đây để tính ma trận bao đóng bắc cầu logic AS. Các phần tử logic của ma trận AS cho biết có hay không đường đi giữa tất cả các cặp đỉnh của đồ thị đã cho.

Thuật toán 1.4 (Warshall):

Dữ liệu: Ma trận k logic A của đồ thị G .

Kết quả: Ma trận bao đóng bắc cầu logic AS.

```

1  Begin
2    for  $i := 1$  to  $n$  do
3      for  $j := 1$  to  $n$  do  $AS[i,j] := A[i,j]$  ;
4    for  $k := 1$  to  $n-1$  do
5      for  $i := 1$  to  $n$  do
6        for  $j := 1$  to  $n$  do
7          if !  $AS[i,j]$  then  $AS[i,j] := AS[i,k]$  and  $AS[k,j]$ 
8  End .

```

Hiển nhiên, thuật toán có độ phức tạp là $O(n^3)$.

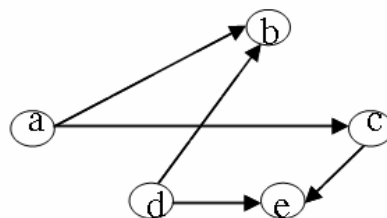
1.3. Bậc của đỉnh và tính liên thông của đồ thị

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị.

Định nghĩa 1.14:

1. Hai đỉnh của đồ thị G được gọi là *liên thông*, nếu trên đồ thị có đường đi vô hướng nối chúng với nhau.
2. Đồ thị được gọi là *liên thông* nếu mọi cặp đỉnh của đồ thị đều liên thông với nhau.

Ví dụ 1.15: Đồ thị liên thông.



Hình 1.7. Một đồ thị liên thông

Quan hệ liên thông trên tập đỉnh là một quan hệ tương đương. Nó tạo nên một phân hoạch trên tập các đỉnh. Mỗi lớp tương đương của quan hệ này được gọi là một *mảng liên thông* (hay thành phần liên thông) của đồ thị.

Chú ý rằng:

1. Mỗi mảng liên thông của một đồ thị là một đồ thị con không rỗng liên thông.
 2. Hai mảng liên thông khác nhau thì không giao nhau. Do vậy, hai đỉnh ở hai mảng liên thông khác nhau thì không liên thông với nhau.
 3. Hợp các mảng liên thông lại cho ta đồ thị ban đầu.
- Ký hiệu p là số mảng liên thông của một đồ thị.

Ta gọi *bậc* của một đỉnh là số cạnh kề với đỉnh đó và thường ký hiệu $r(a)$ là bậc của đỉnh a trong đồ thị G .

Định lý 1.5: Tổng tất cả các bậc của các đỉnh trong một đồ thị bằng hai lần số cạnh của đồ thị đó.

Chứng minh:

Ta tính bậc của các đỉnh. Mỗi đỉnh thuộc một cạnh nào đó thì bậc của nó tăng thêm 1. Mà mỗi cạnh thì có hai đỉnh. \square

Hệ quả 1.6: Số đỉnh có bậc lẻ trong một đồ thị phải là một số chẵn.

Hệ quả 1.7: Nếu đồ thị G có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh đó phải liên thông với nhau.

Chứng minh:

Giả sử hai đỉnh đó là a và b . Xét mảng liên thông G' chứa a . Bậc của mỗi đỉnh trong G' bằng bậc của đỉnh đó trong G .

Nếu $b \notin G'$ thì trong G' chỉ có một đỉnh bậc lẻ, trái với Hệ quả 1.6. Vậy b phải thuộc mảng liên thông G' chứa a . \square

Định lý 1.8: Đồ thị G có n đỉnh. Nếu bậc của mỗi đỉnh trong G không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ thì đồ thị G liên thông.

Chứng minh:

Chứng minh bằng phản chứng.

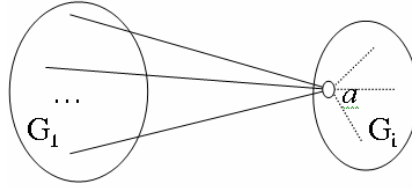
Giả sử đồ thị G không liên thông. Khi đó, có ít nhất hai đỉnh a và b nằm trong hai mảng liên thông khác nhau. Vậy thì, $n \leq r(a) + r(b) \leq n-2$. Suy ra điều mâu thuẫn. \square

Định lý 1.9: Giả sử đồ thị G có n đỉnh, m cạnh, p mảng liên thông và không có đỉnh nút. Thế thì:

$$m \leq \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}.$$

Chứng minh:

Giả sử mảng liên thông G_i có n_i đỉnh, $n_i \geq 1$.



Hình 1.8. Cách dồn đỉnh cho mảng G_1

Không mất tính tổng quát có thể xem G_1 là mảng có nhiều đỉnh nhất.

Khi đó ta có thể "dồn" các đỉnh cho mảng G_1 mà không làm thay đổi số đỉnh, số cạnh và số mảng liên thông của đồ thị cho đến khi $n_2 = n_3 = \dots = n_p = 1$.

Thật vậy, giả sử còn mảng G_i mà $n_1 \geq n_i \geq 2$. Chọn a là một đỉnh của G_i sao cho nếu ta bỏ a và các cạnh kề với nó thì phần còn lại vẫn liên thông. Giả sử a được nối với k đỉnh trong G_i . Hiển nhiên $1 \leq k \leq n_i - 1 < n_1$. Ta chọn k đỉnh bất kỳ trong mảng G_1 và:

- Thêm k cạnh mới nối a với các đỉnh đã chọn trong G_1
- Xoá bỏ k cạnh nối a với các đỉnh ở trong G_i .

Đỉnh a liên thông với đỉnh trong G_1 nên thuộc vào mảng G_1 . Ta được một đồ thị mới với số đỉnh, số cạnh, số mảng liên thông không thay đổi vì mảng G_i bớt a và k cạnh vẫn còn ít nhất một đỉnh, G_1 thêm đỉnh a và k cạnh mới.

Thực hiện phép "dồn" trên cho đến khi:

$$n_1 = n - p + 1, \quad n_2 = n_3 = \dots = n_p = 1 \quad \text{và} \quad G_1 \text{ có } m \text{ cạnh.}$$

Vậy $m = \text{số cạnh của } G_1 \leq \binom{n-p+1}{2}$, nghĩa là:

$$m \leq \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$$

Kết thúc chứng minh định lý. □

Hệ quả 1.10: Đồ thị G có n đỉnh và có số cạnh $m > \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ thì G là liên thông.

Chứng minh:

Theo Định lý 1.9. thì:

$$m \leq \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}, \quad \text{cho nên:} \quad \frac{(n-2)(n-1)}{2} < m \leq \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$$

Bất đẳng thức trên chỉ thỏa mãn khi $p = 1$. Vậy đồ thị G là liên thông. □

Đồ thị được gọi là *đầy đủ* nếu hai đỉnh bất kỳ đều có cạnh nối. Ta thường ký hiệu K_n là đồ thị vô hướng đầy đủ n đỉnh.

Trong đồ thị đầy đủ K_n , mỗi đỉnh đều có bậc là $n-1$ và đồ thị là liên thông. Hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bằng một đường đi ngắn nhất có độ dài bằng 1, đó chính là cạnh nối hai đỉnh ấy.

Một số tính chất

1) Đồ thị vô hướng với n đỉnh ($n \geq 3$), không có đỉnh nút và bậc của mỗi đỉnh đều không nhỏ hơn 2, luôn có chu trình đơn.

Xét đường đi đơn cực đại $\langle x_1, x_2, \dots, (y) \dots, x_k \rangle$. Khi đó đỉnh $y \neq x_2$ kề với x_1 phải nằm trên đường đi. Từ đó ta có một chu trình $[x_1, \dots, y]$.

2) Đồ thị vô hướng với n đỉnh ($n \geq 4$) và bậc của mỗi đỉnh đều không nhỏ hơn 3, luôn có chu trình đơn độ dài chẵn.

Xét đường đi đơn cực đại $\langle x_1, x_2, \dots, (y_1) \dots (y_2) \dots, x_k \rangle$. Khi đó các đỉnh $y_1, y_2 \neq x_2$ kề với x_1 phải nằm trên đường đi. Từ đó ta có ba chu trình: $[x_1, \dots, y_1]$, $[x_1, \dots, y_2]$, $[x_1, y_1, \dots, y_2]$. Nếu hai chu trình đầu có độ dài lẻ thì chu trình thứ ba có độ dài chẵn.

3) Đồ thị với n đỉnh ($n \geq 2$) và không có đỉnh nút, có ít nhất hai đỉnh cùng bậc.

- Nếu có đỉnh bậc 0 thì bậc của các đỉnh có thể là: 0, 1, 2, ..., $n-2$.

- Nếu có đỉnh bậc $n-1$ thì bậc của các đỉnh có thể là: 1, 1, 2, ..., $n-1$.

Suy ra số các bậc khác nhau $\leq n-1$. Vậy có ít nhất hai bậc trùng nhau.

4) Nếu đồ thị với n đỉnh ($n \geq 4$) có đúng hai đỉnh cùng bậc thì hai đỉnh này không thể đồng thời có bậc 0 hoặc bậc $n-1$.

Phản chứng: Loại hai đỉnh cùng bậc 0 hay $n-1$ này, ta được đồ thị G' có hai đỉnh cùng bậc. Hai đỉnh này cũng cùng bậc trong G . Mâu thuẫn với giả thiết.

5) Một đồ thị n đỉnh ($n \geq 4$) mà cứ bốn đỉnh tùy ý thì có ít nhất một đỉnh kề với ba đỉnh còn lại, thì có số đỉnh bậc $n-1$ không ít hơn $n-3$.

- Nếu đồ thị G đầy đủ hoặc chỉ có duy nhất hai đỉnh không kề nhau thì trong G có ít nhất $n-2$ đỉnh bậc $n-1$.

- Nếu đồ thị G có ba đỉnh không kề nhau là a, b, c . Các đỉnh khác phải kề nhau và kề với 3 đỉnh trên. Do vậy số đỉnh có bậc $n-1$ là $n-3$.