Bài tập Toán rời rạc

Nguyễn Đức Huy

Ngày 28 tháng 5 năm 2021

1 Bài 2

Vì $min(deg(V)) \geq \frac{n}{2}$ nên $\forall x, y \in V$, $deg(x) + deg(y) \geq n$
Giả sử G có một đường đi dài nhất là $x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_q$ có độ dài q
Nếu $q = n - 1$ thì đường đi trên chính là đường đi Hamilton
Nếu $q \leq n - 2$ thì $deg(x_0) + deg(x_q) \geq n \geq q + 2$

Gọi $G' = < V', E' >$ là đồ thị con của G có $V' = \{x_0, x_1, \ldots, x_q\}$

Đặt $deg'(x)$ là bậc của x trong G'

Vì đường đi $x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_q$ là dài nhất nên:

$$deg'(x_0) = deg(x_0)$$

$$deg'(x_q) = deg(x_q)$$

Giả sử $deg(x_0) = k$ và x_0 kề với k đỉnh là $x_1, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_k}$

$\Rightarrow deg(x_q) \geq q - k + 2$

Chia $V' = A \cup B$ với $A = \{x_0, x_{i_2 - 1}, x_{i_3 - 1}, \ldots, x_{i_k - 1}\}$, $B = V' \setminus A$

Vì $|B| = q + 1 - k < deg(x_q)$ nên x_q phải kề với ít nhất 1 đỉnh thuộc A. Gọi đỉnh đó là đỉnh x_{j-1}

Vậy chu trình $x_0 \to x_j \to \ldots \to x_q \to x_{j-1} \to \ldots \to x_0$ là chu trình Hamilton của G'

Lại có $q \leq n - 2$ nên tồn tại đỉnh y của G và nằm ngoài chu trình trên.

Nếu G không liên thông thì không thể có chu trình Hamilton được, nên chắc là G liên thông nhưng thầy quên nói.

Mặt khác, nếu G liên thông thì đỉnh y sẽ phải kề với ít nhất 1 đỉnh trong chu trình trên, do đó sẽ tạo ra đường đi có độ dài $\geq q + 1 \Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết

Nên rõ ràng $q = n - 1$ và đường đi dài nhất trong G là $x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_{n-1}$
Chứng minh tương tự như trên, suy ra $\exists\, j, 1 \leq j \leq n$ để $x_0 \to x_j \to \ldots \to x_{n-1} \to x_{j-1} \to \ldots \to x_0$ là chu trình Hamilton của G

2 Bài 1

Vì bài 1 em dùng kết quả của bài 2 nên em viết xuống dưới này
Giả sử $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$
Không mất tính tổng quát, giả sử $deg(x_0) \leq deg(x_1) \leq \ldots \leq deg(x_{n-1})$
Trường hợp $deg(x_0) \geq \frac{n}{2}$, khi đó thì ta dùng kết quả của bài 2 ở trên.
Với $deg(x_0) \leq \frac{n-1}{2}$

Gọi $G' = < V', E' >$ là đồ thị con của G có $V' = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$

Đặt $deg'(x)$ là bậc của x trong G'

Ta có:

$$|E'| = m - deg(x_0) > C_{n-1}^2 + 1 - \frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-3)}{2} + 1$$

Giả sử $deg'(x_i) = min(deg'(V'))$

Gọi $G'' = < V'', E'' >$ là đồ thị con của G' có $V'' = \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}\}$

Dễ thấy:

$$|E''| \leq C_{n-2}^2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

Suy ra:

$$deg'(x_i) = |E'| - |E''| > \frac{(n-1)(n-3)}{2} + 1 - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n-1}{2}$$

$\Rightarrow min(deg'(V')) > \frac{n-1}{2} \Rightarrow V'$ có chu trình Hamilton

Lại có:

$$|E'| \leq C_{n-1}^2$$

Nên:

$$deg(x_0) = |E| - |E'| > 1$$

Nghĩa là x_0 kề với ít nhất 2 đỉnh trong V' và tạo thành chu trình Hamilton của V