BÀI 06

Chương 4
Chu số và sắc số của đồ thị

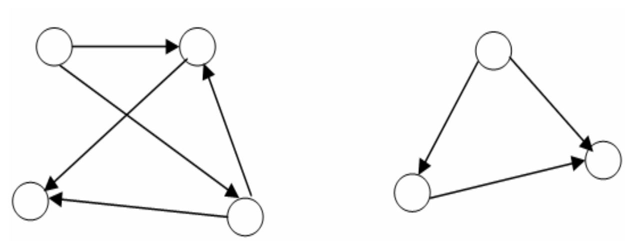
4.1. Chu số của đồ thị

Cho đồ thị G = (V, E) có n đỉnh, m cạnh, p thành phần liên thông.

Định nghĩa 4.1: Đại lượng: $c = m - n + p$ được gọi là *chu số* của đồ thị G.

Trước hết, ta xét các tính chất của đại lượng này.

Ví dụ 4.2: Xét đồ thị sau đây:



Hình 4.1. Đồ thị định hướng không liên thông

Đồ thị trên có $n = 7$, $m = 8$ và $p = 2$. Vậy chu số $c = 8 - 7 + 2 = 3$.

Định lý 4.1: Nếu thêm một cạnh mới vào đồ thị G thì chu số tăng thêm 1 hoặc không thay đổi.

Chứng minh: Giả sử thêm cạnh mới (a, b) vào đồ thị G. Khi đó m tăng thêm 1.

i) Nếu hai đỉnh a, b thuộc cùng một mảng liên thông trong G thì n, p không đổi, do vậy chu số tăng thêm 1.
ii) Nếu hai đỉnh a, b nằm ở hai mảng liên thông khác nhau trong G thì p giảm 1, do vậy chu số không đổi. □

Hệ quả 4.2: Chu số của đồ thị là số nguyên không âm.

Chứng minh:

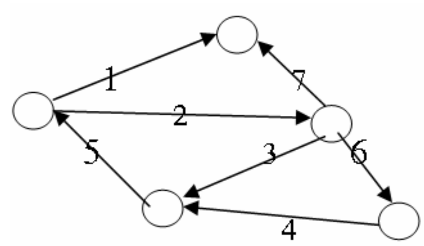
Thật vậy, đồ thị G được xây dựng từ đồ thị G_0 gồm n đỉnh và không có cạnh nào cả. Sau đó, lần lượt thêm các cạnh vào đồ thị G_0 để được đồ thị G.

Chu số của G_0 là $c = 0 - n + n = 0$. Quá trình thêm cạnh không làm giảm chu số. Vậy chu số của G $\geq$ chu số của $G_0 = 0$. □

Bây giờ, ta đi tìm ý nghĩa của chu số.

Ta đánh số các cạnh của đồ thị G theo một thứ tự nào đó: 1, 2, ... , m. Với mỗi chu trình vô hướng trong đồ thị G ta chọn một chiều thuận và biểu diễn nó bằng một vectơ m chiều $(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ mà q_i là số lần xuất hiện của cạnh thứ i trong chu trình theo chiều thuận trừ đi số lần xuất hiện của cạnh đó trong chu trình theo chiều ngược.

Ví dụ 4.3: Xét đồ thị định hướng sau đây.



Hình 4.2. Đánh số các cạnh của đồ thị

Đồ thị có 7 cạnh, được đánh số như hình vẽ. Với chu trình vô hướng $[e_1, e_2, e_7]$ ta chọn chiều thuận là chiều $e_1\ e_2\ e_7$ khi đó vectơ tương ứng sẽ là (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 1).

Do vây, ta có thể đồng nhất mỗi chu trình vô hướng với một vectơ biểu diễn nó.

Các chu trình vô hướng $t_1, t_2, \ldots, t_k$ được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu các vectơ tương ứng với chúng lập thành một hệ độc lập tuyến tính.

Hệ chu trình đơn vô hướng $t_1, t_2, \ldots, t_k$ được gọi là *độc lập tuyến tính cực đại* nếu nó là độc lập tuyến tính và mỗi chu trình vô hướng của đồ thị đều có thể biểu diễn tuyến tính qua các chu trình của hệ.

Định lý 4.3: Chu số của đồ thị bằng số các chu trình đơn vô hướng độc lập cực đại trong đồ thị đó.

Chứng minh:

Quy nạp theo số cạnh m của đồ thị.

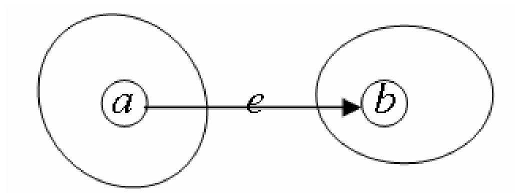
- Nếu $m = 0$ thì chu số bằng 0, đồ thị không có chu trình đơn nào.
- $(m) \Rightarrow (m+1)$: Giả sử đồ thị G' có n đỉnh, $m+1$ cạnh, p mảng liên thông. Có thể xem G' được xây dựng từ đồ thị G gồm m cạnh và bổ sung thêm một cạnh mới $e = (a, b)$. Đánh số cạnh e là cạnh thứ $m+1$ của đồ thị G'.

Theo giả thiết quy nạp, chu số của đồ thị G là $c(G) = m - n + p$ = số chu trình đơn vô hướng độc lập cực đại trong G. Ký hiệu các chu trình đó là: (T) = $t_1, t_2, \ldots, t_c$

Hiển nhiên, mỗi chu trình trong G' không chứa e đều có thể biểu diễn tuyến tính qua hệ các chu trình (T).

Ta xét hai trường hợp:

1) Hai đỉnh *a, b* của cạnh *e* nằm trong hai mảng liên thông khác nhau của G. Vì số cạnh tăng 1 nhưng số mảng liên thông bị giảm 1 nên chu số của G*'* vẫn bằng chu số của G.



Hình 4.3. Hai mảng liên thông

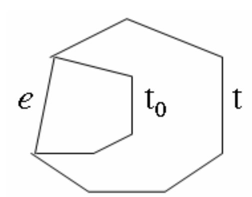
Mặt khác, mỗi chu trình trong G*'* chứa *e* có tính chất sau đây: số lần *e* xuất hiện trong chu trình theo chiều thuận bằng số lần *e* xuất hiện trong chu trình theo chiều ngược vì cạnh *e* là cầu nối duy nhất giữa hai mảng liên thông này của G. Do đó, thành phần thứ m+1 của vectơ biểu diễn chu trình này bằng 0, và chu trình này vẫn có thể biểu diễn qua hệ (T). Suy ra hệ (T) cũng chính là hệ chu trình đơn vô hướng độc lập cực đại của G*'*.

2) Hai đỉnh *a, b* của cạnh *e* thuộc cùng một mảng liên thông của G.

Khi đó chu số c(G*'*) = c(G) + 1. Chọn một đường đi đơn vô hướng trong G nối *a* với *b* rồi ghép thêm cạnh *e* ta được một chu trình đơn vô hướng trong G*'*. Ký hiệu chu trình này là t_0.

Xét hệ (T*'*) = t_0 , (T) = t_0 , t_1 , t_2 , ... , t_c gồm $c(G)$ + 1 chu trình đơn vô hướng trong G*'*.

Hệ (T*'*) là độc lập tuyến tính vì (T) độc lập tuyến tính và t_0 không thể biểu diễn được qua (T), vì toạ độ thứ m+1 của vectơ biểu diễn t_0 bằng 1, còn của các vectơ biểu diễn các chu trình trong (T) thì bằng 0.



Hình 4.4. Hai chu trình chung một cạnh

Giả sử t là một chu trình nào đó của G*'* chứa e. Chọn chiều của t sao cho chu trình tổng $t + t_0$ không chứa e. Vậy thì chu trình tổng $t + t_0$ có thể biểu diễn tuyến tính qua hệ (T). Do đó, chu trình *t* cũng có thể biểu diễn tuyến tính qua hệ (T). Vậy (T*'*) là hệ chu trình đơn vô hướng độc lập cực đại của G*'*. □

Đồ thị có chu số bằng 0 được gọi là đồ thị *phi chu trình*. Lớp đồ thị phi chu trình là lớp đặc biệt nhưng hay gặp trong thực tế ứng dụng. Trước hết ta chỉ ra một đặc trưng của lớp đồ thị này như sau.

Định lý 4.4: Đồ thị định hướng G = (V, E) là phi chu trình khi và chỉ khi các đỉnh của nó luôn có thể đánh số để sao cho mỗi cạnh (i,j) của đồ thị đều thoả mãn $i < j$.
Chứng minh:
a) Nếu có thể đánh số các đỉnh như trên thì hiển nhiên đồ thị không có chu trình.
b) Để chứng minh điều ngược lại, ta xây dựng thuật toán sau đây để đánh số các đỉnh của đồ thị định hướng phi chu trình.

Thuật toán dựa trên một tính chất rất đơn giản: Trong một đồ thị định hướng không rỗng phi chu trình tuỳ ý, luôn tồn tại đỉnh mà không có một cạnh nào đi vào đỉnh đó. Trước hết, thuật toán tính bậc vào cho các đỉnh của đồ thị.

Những đỉnh có bậc vào bằng 0 sẽ được đưa vào stack (ngăn xếp – LIFO). Đánh số cho đỉnh đang ở đỉnh stack, loại bỏ đỉnh này khỏi stack và giảm bậc vào cho các đỉnh kề với đỉnh này. Nếu có đỉnh mà bậc vào đã giảm hết thì nạp nó lên đỉnh của stack.

Tiếp tục quá trình đánh số tăng dần, loại đỉnh, giảm bậc vào ... cho đến khi stack trở thành rỗng. Và ta đã đánh số xong tất cả các đỉnh của đồ thị. □

Dựa vào chứng minh của định lý trên, ta xây dựng thuật toán đánh số các đỉnh cho đồ thị định hướng phi chu trình như sau.

Thuật toán 4.5 (Đánh số các đỉnh của đồ thị phi chu trình):

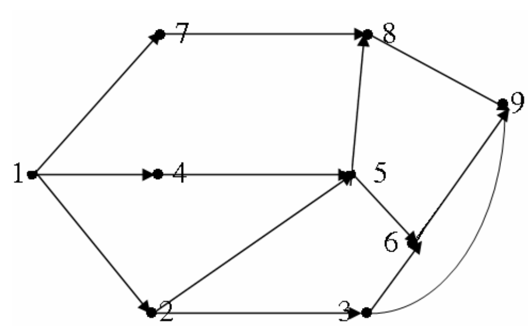
Dữ liệu: Biểu diễn mảng DK các danh sách kề của đồ thị phi chu trình G.
Kết quả: Mảng SO các số nguyên với SO[*v*] là số đánh trên đỉnh *v*.

```
Begin
  for v ∈ V do BAC_V[v] := 0 ;   { BAC_V[v] chứa bậc vào của đỉnh v }
  for u ∈ V do
      for v ∈ DK[u] do BAC_V[v] := BAC_V[v] + 1 ;
  S := ∅ ;
  for v ∈ V do
     if BAC_V[v] = 0 then push v onto S ;
  k := 0 ;
```

```
while  S ≠ ∅  do
  begin  u := top(S) ;  pop(S) ;
         k := k + 1 ;  SO[u] := k ;
         for  v ∈ DK[u]  do
            begin  BAC_V[v] := BAC_V[v] - 1 ;
                if  BAC_V[v] = 0  then push  v  onto S
            end
  end
End.
```

Độ phức tạp của thuật toán là O(m+n).

Ví dụ 4.4: Áp dụng thuật toán trên để đánh số các đỉnh cho đồ thị phi chu trình sau.



Hình 4.5. Các đỉnh của đồ thị phi chu trình đã được đánh số

Việc đánh số các đỉnh trên đồ thị định hướng phi chu trình có nhiều ứng dụng trong sơ đồ PERT, phương pháp đường tới hạn CPM ...