BÀI 04

Các tập hợp đặc biệt trên đồ thị

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu một số tập hợp đặc biệt các đỉnh trên đồ thị. Đó là các tập ổn định trong, tập ổn định ngoài và nhân của một đồ thị.

3.1. Tập ổn định trong

Giả sử G = (V, E) là một đồ thị.

Định nghĩa 3.1:

Tập $B \subseteq V$ được gọi là *tập ổn định trong* của đồ thị G nếu:

$$\forall x \in B : B \cap F(x) = \varnothing.$$

Từ định nghĩa trên ta thấy rằng, trong một tập ổn định trong không có hai đỉnh nào kề nhau. Hơn nữa, nếu tập B ổn định trong thì tập con $B' \subseteq B$ cũng là tập ổn định trong. Khái niệm ổn định trong không phụ thuộc vào hướng các cạnh của đồ thị.

Ví dụ 3.2 (Gauss): - *Bài toán tám quân hậu.*

Hãy đặt 8 quân hậu vào các ô của một bàn cờ vua sao cho chúng không ăn được lẫn nhau.

Để giải quyết bài toán này, ta xây dựng đồ thị vô hướng biểu diễn bàn cờ vua như sau: 64 ô của bàn cờ là 64 đỉnh của đồ thị, hai đỉnh *x* và *y* có cạnh nối với nhau nếu đó là hai ô mà khi đặt hai quân hậu vào, chúng có thể ăn lẫn nhau.

Các ô cần tìm để đặt các quân hậu chính là một tập ổn định trong gồm 8 đỉnh. Bài toán trên có 92 nghiệm suy ra từ 12 tập ổn định trong khác nhau là:

{A7,B2,C6,D3,E1,F4,G8,H5}	{A6,B1,C5,D2,E8,F3,G7,H4}	{A5,B8,C4,D1,E7,F2,G6,H3}
{A3,B5,C8,D4,E1,F7,G2,H6}	{A4,B6,C1,D5,E2,F8,G3,H7}	{A5,B7,C2,D6,E3,F1,G4,H8}
{A1,B6,C8,D3,E7,F4,G2,H5}	{A5,B7,C2,D6,E3,F1,G8,H4}	{A4,B8,C1,D5,E7,F2,G6,H3}
{A5,B1,C4,D6,E8,F2,G7,H3}	{A4,B2,C7,D5,E1,F8,G6,H3}	{A3,B5,C2,D8,E1,F7,G4, H6}

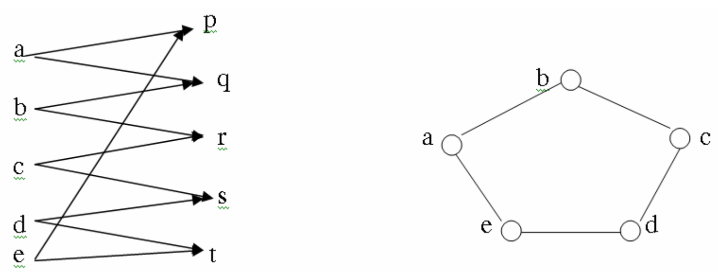
Ví dụ 3.3 (C.E. Shanton): - *Bài toán về dung lượng thông tin.*

Giả sử một máy phát có thể truyền đi 5 tín hiệu: *a, b, c, d, e*. ở máy thu mỗi tín hiệu có thể cho hai cách hiểu khác nhau như sau:

$$a \to p,\ q\ ;\ b \to q,\ r\ ;\ c \to r,\ s\ ;\ d \to s,\ t\ ;\ e \to t,\ p$$

Hỏi số các tín hiệu nhiều nhất có thể sử dụng để máy thu không bị nhầm lẫn là bao nhiêu?

Ta xây dựng một đồ thị vô hướng gồm 5 đỉnh *a, b, c, d, e*. Hai đỉnh là kề nhau nếu chúng biểu thị hai tín hiệu có thể bị nhầm lẫn nhau ở máy thu.



Hình 3.1. Sự nhầm lẫn của các tín hiệu và đồ thị biểu diễn

Khi đó tập các tín hiệu cần chọn là một trong các tập ổn định trong dưới đây:

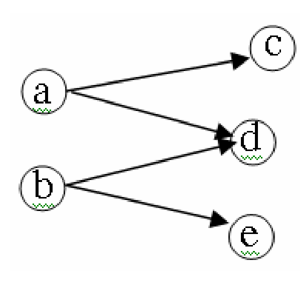
$\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{c, e\}$.

Tập con các đỉnh B được gọi là *tập ổn định trong cực đại* nếu thêm vào bất kỳ đỉnh nào cũng làm mất tính ổn định trong của nó.

Tập B được gọi là *tập ổn định trong lớn nhất* nếu B là tập ổn định trong có nhiều phần tử nhất.

Chú ý: Tập ổn định trong lớn nhất là tập ổn định trong cực đại, nhưng ngược lại thì không đúng.

Ví dụ 3.4:



Hình 3.2. Đồ thị có tập ổn định trong cực đại nhưng không lớn nhất

Các tập $\{a, b\}$ và $\{c, d, e\}$ đều là ổn định trong cực đại.

Lực lượng của tập ổn định trong lớn nhất được gọi là *số ổn định trong* của đồ thị đó. Ta thường ký hiệu số ổn định trong của một đồ thị là *u*.

***Định lý 3.1**:* Đồ thị G có n đỉnh, bậc lớn nhất của các đỉnh là r. Khi đó, số ổn định trong của đồ thị $u \geq \frac{n}{r+1}$.

Chứng minh:

Giả sử B là tập ổn định trong lớn nhất với u phần tử. Với mỗi đỉnh $y \notin$ B có ít nhất một đỉnh của B kề với y. Vì nếu ngược lại thì có thể bổ sung y vào B, mâu thuẫn với tính ổn định trong cực đại của B. Từ đó suy ra số cạnh đi ra khỏi B (không kể hướng) $\geq |V \setminus B| = n - u$.

Mặt khác, số cạnh đó $\leq r.u$. Vậy $r.u \geq n-u$.

Từ đó suy ra: $u \geq \frac{n}{r+1}$ □

Thuật toán 3.2 (Tìm tập ổn định trong lớn nhất):

1) Chọn một đỉnh nào đó của đồ thị.
2) Bổ sung dần các đỉnh để được một tập ổn định trong cực đại.
3) Nếu ta tìm được một tập ổn định trong có u đỉnh mà mọi tập con u+1 đỉnh đều không là tập ổn định trong, thì kết luận tập tìm được là tập ổn định trong lớn nhất và u chính là số ổn định trong của đồ thị này.

Trong một đơn vị nào đó, giả sử có quan hệ "*xích mích*" giữa người với người. Thế thì, tập ổn định trong cực đại ở đây được hiểu theo đúng nghĩa xã hội của nó. Đó là một nhóm nhiều người nhất không xích mích với nhau. Để giữ được đoàn kết trong đơn vị thì cần phải xây dựng nhóm này càng lớn càng tốt.

3.2. Tập ổn định ngoài

Giả sử G = (V, E) là một đồ thị.

Định nghĩa 3.5: Tập C $\subseteq$ V được gọi là *tập ổn định ngoài* của đồ thị G nếu:

$$\forall x \notin C \;:\; C \cap F(x) \neq \varnothing.$$

Hay nói một cách khác:

$$\forall x \notin C, \exists y \in C \;:\; y \in F(x).$$

Điều này có nghĩa là, từ mỗi đỉnh ở ngoài C luôn có cạnh đi vào C.

Hiển nhiên, nếu C là tập ổn định ngoài thì $C' \supseteq C$ cũng là một tập ổn định ngoài.

Ví dụ 3.6: Hãy đặt 5 quân hậu lên các ô của một bàn cờ vua sao cho chúng kiểm soát được toàn bộ bàn cờ.

Biểu diễn đồ thị cho bàn cờ vua như ở Ví dụ 3.2. Khi đó, các ô cần tìm chính là một tập ổn định ngoài gồm 5 đỉnh.

Một tập nghiệm của bài toán là {C6 , D3 , E5 , F7 , G4}.

Tập C được gọi là *tập ổn định ngoài cực tiểu* nếu bớt đi bất kỳ đỉnh nào của nó cũng làm mất tính ổn định ngoài.

Tập C được gọi là *tập ổn định ngoài bé nhất* nếu C là tập ổn định ngoài có ít phần tử nhất. Lực lượng của tập ổn định ngoài bé nhất được gọi là *số ổn định ngoài* của đồ thị.

Thuật toán 3.3 (Tìm tập ổn định ngoài bé nhất):

Giả sử đồ thị $G = (V, E)$ với tập đỉnh $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Thuật toán:

1) Xây dựng ánh xạ $T : V \rightarrow 2^V$ như sau:

$\forall a \in V, \quad T(a) = \{a\} \cup F^{-1}(a)$

2) Tìm tập con $C \subseteq V$ có số phần tử ít nhất sao cho $T(C) = V$.

Khi đó, C là một tập ổn định ngoài bé nhất của đồ thị G.

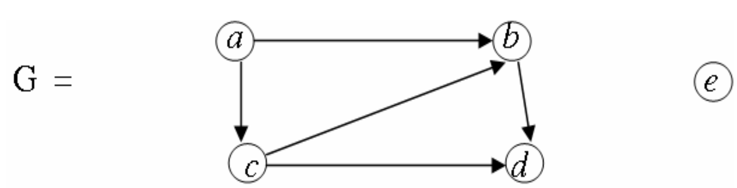
Chú ý: Bước 2) có thể thực hiện nhanh nhờ các nhận xét sau đây:

- Đỉnh cô lập luôn luôn thuộc tập ổn định ngoài bé nhất của đồ thị G, nghĩa là đỉnh cô lập phải được giữ lại.

- Nếu tập con D các đỉnh có tập con C mà: $T(D) \subseteq T(C)$ thì bỏ không xét tập D này.

Thực hiện việc loại bỏ cho đến khi chỉ còn các đỉnh không thể loại bỏ được nữa. Tập đỉnh này chính là một tập ổn định ngoài bé nhất của đồ thị G.

Ví dụ 3.7: Xét đồ thị có hướng sau đây:



Hình 3.3. Đồ thị và tập ổn định ngoài

$T(a) = \{a\}$ $\qquad$ $T(d) = \{b, c, d\}$

$T(b) = \{a, b, c\}$ $\qquad$ $T(e) = \{e\}$

$T(c) = \{a, c\}$

e là đỉnh cô lập phải giữ lại.

Loại bỏ *a, c* ta được tập {*b, d, e*} là một tập ổn định ngoài bé nhất của G. Loại bỏ *a, b* ta được tập {*c, d, e*} là một tập ổn định ngoài bé nhất khác của đồ thị G.

Giả sử chúng ta cần phải xây dựng một hệ thống trạm bảo vệ cho tất cả các đối tượng trong một khu vực nào đó (nhà máy, kho hàng, trận địa …). Hiển nhiên, hệ thống trạm tối thiểu làm tròn được trách nhiệm chính là một tập ổn định ngoài bé nhất nào đó của đồ thị biểu diễn khu vực này.