BÀI 13

7.2. Chu trình Hamilton

Năm 1857 W. R. Hamilton, nhà toán học người Ailen đã đưa ra trò chơi sau đây: Trên mỗi đỉnh trong số 20 đỉnh của một khối đa diện 12 mặt ngũ giác đều có ghi tên một thành phố lớn của thế giới. Hãy tìm cách đi bằng các cạnh của khối này để đi qua tất cả các thành phố, mỗi thành phố đúng một lần.

Bài toán này đã dẫn tới những khái niệm sau đây.

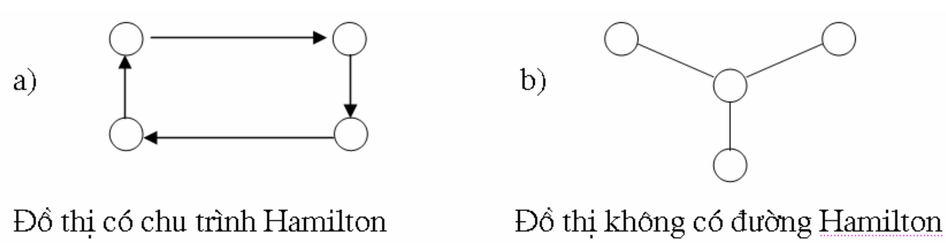
Định nghĩa 7.5: Đường Hamilton là đường đi qua mỗi đỉnh của đồ thị đúng một lần. Chu trình Hamilton là chu trình đi qua mỗi đỉnh của đồ thị đúng một lần.

Ví dụ 7.6:

1. Tổ chức tour du lịch sao cho người du lịch thăm quan mỗi thắng cảnh trong thành phố đúng một lần.
2. Cho quân mã đi trên bàn cờ vua sao cho nó đi qua mỗi ô đúng một lần (*bài toán mã đi tuần*).

Với một đồ thị đã cho, đường (chu trình) Hamilton có thể tồn tại hoặc không.

Ví dụ 7.7:



Hình 7.6. Đồ thị có và đồ thị không có chu trình Hamilton

Định lý 7.6 (Rédei): Đồ thị đầy đủ luôn có đường đi Hamilton.

Chứng minh:

Xét đồ thị có hướng G.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh n của G.

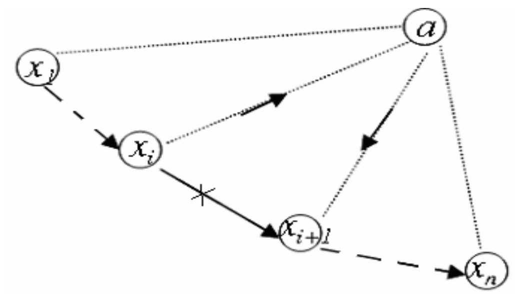
$n = 1, 2$: hiển nhiên.

$(n) \Rightarrow (n+1)$: Giả sử G là đồ thị đầy đủ có $n+1$ đỉnh và đồ thị G' xây dựng từ G bằng cách bớt một đỉnh a và các cạnh kề với a. Đồ thị G' có n đỉnh và cũng đầy đủ nên theo giả thiết quy nạp, nó có đường Hamilton:

$$(H) = < x_1 , x_2 , \ldots , x_n >$$

Nếu trong G có cạnh (x_n, a) thì đường $< (H) , a >$ sẽ là đường Hamilton.

Nếu trong G có cạnh (a, x_1) thì đường $< a, (H) >$ sẽ là đường Hamilton.
Trong trường hợp ngược lại, đồ thị G phải có các cạnh (a, x_n) và (x_1, a) nghĩa là có các cạnh ngược hướng nhau. Khi đó sẽ phải có ít nhất một cặp cạnh sát nhau nhưng ngược hướng nhau là (x_i, a) và (a, x_{i+1}).



Hình 7.7. Cách tìm đường đi Hamilton

Ta có đường $< x_1, ..., x_i, a, x_{i+1}, ..., x_n >$ là một đường đi Hamilton của G. □

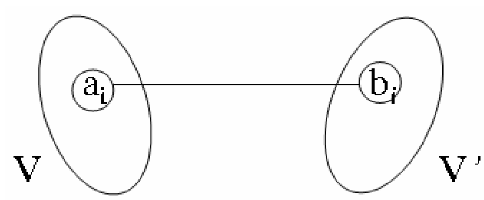
Đồ thị G được gọi là đồ thị có *bậc* 1 nếu tại mỗi đỉnh có đúng một cạnh vào và một cạnh ra. Hiển nhiên, chu trình Hamilton là một đồ thị riêng bậc 1 của đồ thị đã cho.

***Định lý** 7.7:* Đồ thị $G = (V, F)$ có đồ thị riêng bậc 1 khi và chỉ khi:

$$\forall B \subseteq V, \quad |B| \leq |F(B)|.$$

Chứng minh: Ký hiệu tập đỉnh của đồ thị là $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Lập tập $V' = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ sao cho: $V \cap V' = \varnothing$. Ta xây dựng đồ thị hai phần $H = (V, V', F')$ với:

$$b_j \in F'(a_i) \Leftrightarrow a_j \in F(a_i)$$



Hình 7.8. Cách xây dựng đồ thị hai phần

Nếu đồ thị G có đồ thị riêng bậc 1 là $G^1 = (V, F^1)$ thì xét tập cạnh W của H như sau: $(a_i, b_j) \in W \Leftrightarrow a_j \in F^1(a_i)$. Đó là một cặp ghép n cạnh trong H.
Ngược lại, ứng với một cặp ghép n cạnh W trong H sẽ có một đồ thị riêng bậc 1 của G.

Theo Hệ quả 5.4 thì:

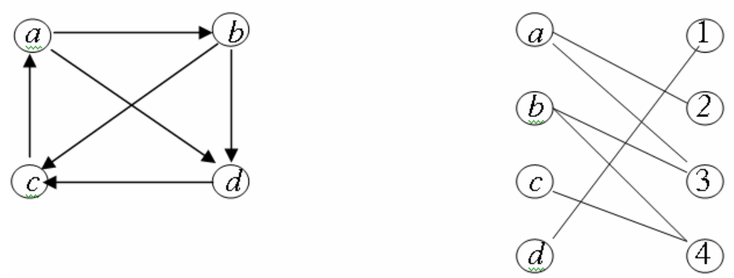
$$|W| = n \leq |V| - d_0 \Rightarrow d_0 = 0$$

mà $d_0 = max\{| B | - | F'(B) | \mid B \subseteq V\} =$

$= max\{| B | - | F(B) | \mid B \subseteq V\} = 0$

Suy ra: $| B | \leq | F(B) |$. Đó là điều phải chứng minh. □

Ví dụ 7.8: Xét đồ thị có hướng G = (V, F) được cho trong hình vẽ dưới đây.



Hình 7.9. Đồ thị định hướng và đồ thị hai phần tương ứng

Đặt V*'* = {1, 2, 3, 4} và xây dựng đồ thị hai phần H. Chọn cặp ghép lớn nhất W = {(*a*, 2), (*b*, 3), (*c*, 4), (*d*, 1)}. Từ đó xây dựng được chu trình Hamilton cho đồ thị G là [*a, b, c, d*].

Hệ quả 7.8: Nếu đồ thị G có chu trình Hamilton thì:

$$\forall B \subseteq V, \quad | B | \leq | F(B) |.$$

Chứng minh:

Vì chu trình Hamilton là đồ thị riêng bậc 1. Điều ngược lại là không đúng vì đồ thị riêng có thể gồm nhiều mảng liên thông rời nhau. □

Từ Hệ quả này chúng ta có thể khẳng định rằng: Nếu trong đồ thị có một tập con B các đỉnh mà $| B | > | F(B) |$ thì đồ thị này không có chu trình Hamilton.

Hệ quả 7.9: Giả sử đồ thị có hướng G có đường đi Hamilton.

Ký hiệu: $d = max\{| B | - | F(B) | \mid B \subseteq V\}$. Khi đó, số $d \in \{0, 1\}$.

Chứng minh:

Giả sử đồ thị có hướng G có đường đi Hamilton $< a, \ldots, b >$.

Nếu trong đồ thị G có cạnh (*b, a*) thì G có chu trình Hamilton và theo Hệ quả 7.8 thì $d = 0$.

Ngược lại, giả sử đồ thị G không có cạnh (*b, a*). Xét đồ thị G*'* xây dựng từ đồ thị G và thêm cạnh (*b, a*). Thế thì đồ thị G*'* sẽ có $d' = 0$. Mặt khác, vì ta chỉ thêm một cạnh mà không thêm đỉnh, nên: $d \leq d' + 1$. Từ đó suy ra $d \leq 1$. □

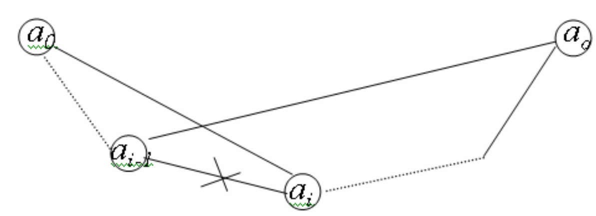
Cũng theo Hệ quả này chúng ta có thể khẳng định rằng: Nếu đồ thị nào đó có $d \geq 2$ thì đồ thị ấy không có đường đi Hamilton.

Bổ đề 7.10: Giả sử đồ thị G có đường đi đơn vô hướng cực đại $< a_0, a_1, \dots, a_q>$. Nếu $r(a_0) + r(a_q) \geq q + 1$ thì đồ thị con G' tạo bởi tập đỉnh $\{a_0, a_1, \dots, a_q\}$ có chu trình vô hướng Hamilton.

Chứng minh:

Ký hiệu $r'(a)$ là bậc của đỉnh a trong G'. Vì đường đon đã cho là cực đại nên:

$$r'(a_0) = r(a_0), \quad r'(a_q) = r(a_q).$$



Hình 7.10. Cách tìm chu trình Hamilton

Giả sử $r(a_0) = k$, nghĩa là đỉnh a_0 kề với k đỉnh trên đường đi là a_1, $a_{i2}, \dots, a_{ik}$.

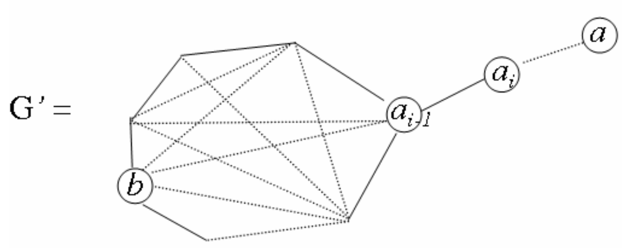
- Nếu a_0 kề với a_q thì G' có chu trình vô hướng Hamilton.
- Nếu như *aq* không kề với $a_0, a_{i2-1}, \dots, a_{ik-1}$. Đó là những đỉnh nằm bên trái của dãy đỉnh trong đường đi nói trên. Thế thì: $r(a_q) \leq q - k$. Do đó: $r(a_0) + r(a_q) \leq q$, trái với giả thiết. Vậy phải có ít nhất một đỉnh a_{i-1} sao cho a_0 kề với a_i và a_q kề với a_{i-1}. Khi đó dãy các đỉnh $[a_0, a_i, \dots, a_q, a_{i-1}, \dots, a_0]$ là một chu trình vô hướng của G'. □

Bổ đề 7.11: Giả sử đồ thị G liên thông.

Nếu các đỉnh của đường đi đơn vô hướng dài nhất tạo nên một đồ thị con G' có chu trình vô hướng Hamilton thì chu trình đó cũng chính là chu trình vô hướng Hamilton của đồ thị G.

Chứng minh:

Ta chỉ cần chứng minh rằng, đồ thị con G' chính là đồ thị G. Giả sử ngược lại, có đỉnh a thuộc G nhưng không thuộc đồ thị con G'. Vì đồ thị G liên thông nên với đỉnh b thuộc G' sẽ có đường đi vô hướng trong G nối đỉnh b với đỉnh a là $< b = a_0, a_1, \dots, a >$.



Hình 7.11. Đường đi nối đỉnh a với chu trình

Đỉnh b thuộc G' còn đỉnh a không thuộc G'. Do vậy, sẽ có đỉnh a_i là đỉnh đầu tiên của đường đi không thuộc G'.
Xét đường đi sau đây trong đồ thị G: Lấy chu trình vô hướng Hamilton của G', bỏ đi một cạnh kề với a_{i-1} và thêm vào cạnh (a_{i-1}, a_i). Đường đi này có độ dài bằng số đỉnh của G', trong khi đó đường đi đơn dài nhất đã cho trong G chỉ có độ dài là số đỉnh của G' bớt đi 1. Vậy trái với giả thiết. □

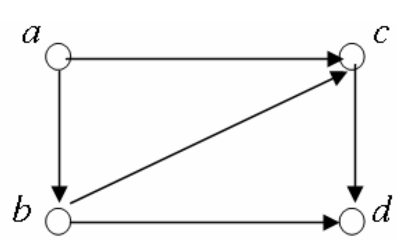
Định lý 7.12: Giả sử đồ thị G có n đỉnh.

1) Nếu $\forall a, b \in V$, $r(a) + r(b) \geq n-1$ thì G có đường đi vô hướng Hamilton.
2) Nếu $\forall a, b \in V$, $r(a) + r(b) \geq n$ thì G có chu trình vô hướng Hamilton.

Chứng minh:
1) Giả sử $< x_0, \dots, x_q >$ là đường đi đơn vô hướng dài nhất của G. Đường đi này có độ dài là q.
- Nếu $q = n-1$ thì đó là đường đi Hamilton của đồ thị G.
- Nếu $q \leq n-2$ thì $r(x_0) + r(x_q) \geq n-1 \geq q+1$ và theo Bổ đề 7.10 đồ thị con G' tạo bởi tập đỉnh $\{x_0, \dots, x_q\}$ có chu trình vô hướng Hamilton. Giả sử chu trình vô hướng Hamilton đó là $[y_0, y_1, \dots, y_q]$.

Vì $q \leq n-2$ nên có ít nhất một đỉnh y của G nằm ngoài chu trình trên.
Từ 1) suy ra đồ thị G liên thông. Vậy đỉnh y phải nối được với một đỉnh y_j nào đó trong chu trình bằng một đường đi đơn vô hướng.
Ta nhận được đường đi $< y, \dots, y_j, y_{j-1}, \dots, y_0, y_q, \dots, y_{j+2}, y_{j+1} >$ có độ dài lớn hơn $q+1$. Vậy mâu thuẫn với tính cực đại của đường đi $< x_0, \dots, x_q >$.
Do vậy $q = n-1$. Đồ thị G luôn có đường đi vô hướng Hamilton.
2) Theo 1) thì trong đồ thị G có đường đi đơn vô hướng dài nhất chứa tất cả n đỉnh là $< y_0, y_1, \dots, y_{n-1} >$.
Hơn nữa, $r(y_0) + r(y_{n-1}) \geq n = (n-1)+1$, nên theo Bổ đề 7.10 thì đồ thị con G' sinh bởi tập đỉnh $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ có chu trình vô hướng Hamilton, và đó cũng chính là chu trình Hamilton của đồ thị G. □

Ví dụ 7.9: Xét đồ thị có hướng sau đây.



Hình 7.12. Đồ thị có hướng có chu trình vô hướng Hamilton

Đồ thị thoả mãn điều kiện 2) nên nó có chu trình vô hướng Hamilton.
Nếu ta bỏ cạnh (c, d) thì điều kiện 1) thoả mãn còn điều kiện 2) không thoả mãn nữa. Đồ thị chỉ có đường đi vô hướng Hamilton.

Hệ quả 7.13 (Dirac): Nếu $\forall a \in V$, $r(a) \geq \frac{n}{2}$ thì đồ thị G có chu trình vô hướng Hamilton.
Chứng minh: Suy ra từ phần 2) của Định lý 7.12. □

Một số nhận xét:

1. Đồ thị có đỉnh có bậc ≤ 1 thì không có chu trình Hamilton.
2. Đồ thị có các đỉnh đều có bậc ≥ 2. Nếu có đỉnh nào có bậc bằng 2 thì mọi chu trình Hamilton (nếu có) phải đi qua hai cạnh kề với đỉnh này.
3. Nếu trong đồ thị có đỉnh có ba đỉnh bậc 2 kề với nó thì đồ thị không có chu trình Hamilton.
4. Nếu đỉnh a có hai đỉnh kề bậc 2 là b và c thì mọi cạnh (a, x), $x \notin \{b, c\}$ sẽ không thuộc bất kỳ chu trình Hamilton nào.
5. Đồ thị có đường đi vô hướng $< a_1, a_2, \ldots, a_k >$. Với chỉ số $k < n$ và các đỉnh trên đường đi (trừ a_1 và a_k) đều có bậc 2 thì cạnh (a_1, a_k) sẽ không thuộc bất kỳ chu trình Hamilton nào.
6. Đồ thị hai phần $G = (V_1, V_2, F)$ với $|V_1| \neq |V_2|$ sẽ không có một chu trình Hamilton nào.