# Chương 5

# Bài toán Euler và bài toán Hamilton

Lý thuyết đồ thị phát triển bắt nguồn từ những bài toán cổ điển, trong số đó *bài toán Euler* và *bài toán Hamilton* tìm hành trình đi qua mỗi cạnh đúng một lần và qua mỗi đỉnh đúng một lần tương ứng đóng vai trò quan trọng.

Hai bài toán này có liên quan đến những ứng dụng: các bài toán tìm hành trình tốt nhất (*người đưa thư Trung Hoa, người chào hàng)*, tự động hoá thiết kế bằng máy tính, lập lịch, vân vân.

Mặc dù hai bài toán này được phát biểu rất giống nhau, nhưng mức độ khó trong việc giải quyết chúng là rất khác nhau.

Chúng ta sẽ chứng minh rằng trong đồ thị vô hướng, tồn tại thuật toán đa thức tìm hành trình Euler và bài toán người đưa thư Trung Hoa có thể đưa về tìm cặp ghép hoàn hảo có trọng lượng nhỏ nhất [30] (cũng xem Phần 7.5). Các thuật toán này sẽ được trình bày trong các Phần 5.1 và 5.2.

Mặt khác, vấn đề tồn tại chu trình hay mạch Hamilton là những bài toán không đa thức không được đề cập ở đây. Bạn đọc quan tâm có thể xem, chẳng hạn [30]. Chúng ta chỉ trình bày trong Phần 5.3 những kết quả chính liên quan đến sự tồn tại của các chu trình hay mạch Hamilton. Khi có điều kiện, các chứng minh có tính kiến thiết thuật toán hoặc có thể đề xuất những phương pháp heuristic.

## 5.1 Bài toán Euler

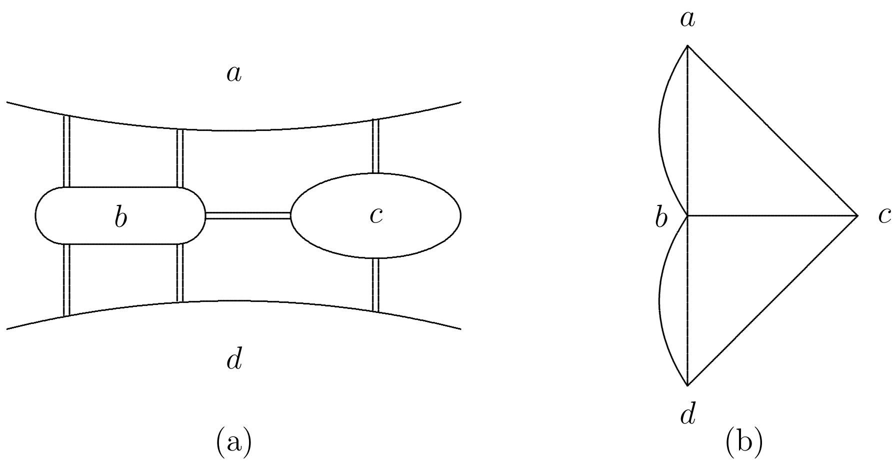
**Định nghĩa 5.1.1** Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng (đơn hoặc đa đồ thị). *Dây chuyền*

*Euler* là dây chuyền chứa tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần. *Chu trình Euler* là dây chuyền Euler mà đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối.

**Ví dụ 5.1.2** (Bài toán Euler) Cách đây khoảng ba trăm năm, nhiều người dân thành phố Königsberg của nước Nga (sau này là thành phố Kaliningrat) đã từng thắc mắc vấn đề như sau: Thành phố có sông Pregel chảy qua, giữa sông có cù lao Kneiphof, và có 7 chiếc cầu bắc qua sông như trên Hình 5.1(a); có thể đi dạo qua khắp các cầu nhưng mỗi cầu chỉ đi một lần thôi không? Nếu ta coi mỗi khu vực $a, b, c, d$ của thành phố như một đỉnh, mỗi cầu qua lại hai khu vực như một cạnh nối hai đỉnh, thì bản đồ thành phố Königsberg là một đồ thị (Hình 5.1(b)). Thắc mắc của người dân thành phố chính là: có thể vẽ được đồ thị bằng một nét bút liền hay không? Nói cách khác: tồn tại chu trình Euler?

Nhà toán học L. Euler (1707-1783) là người đầu tiên đã chứng minh bài toán không có lời giải (năm 1736, xem [22], [23]), và vì vậy bài toán thường được gọi là bài toán Euler về các cầu ở Königsberg.




Hình 5.1: (a) Bản đồ của thành phố Königsberg. (b) Đồ thị tương đương.

**Định lý 5.1.3** [Euler] *Đa đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$ có dây chuyền Euler nếu và chỉ nếu số các đỉnh bậc lẻ bằng 0 hoặc 2.*

*Chứng minh.* Trước hết chú ý rằng đồ thị không liên thông không thể chứa dây chuyền hoặc chu trình Euler.

Bây giờ ta chứng minh điều kiện cần. Nếu $\mu$ là dây chuyền Euler, thì chỉ có hai đỉnh đầu và cuối có bậc lẻ. Nếu ngoài ra, hai đỉnh này trùng nhau (chu trình Euler) thì không có đỉnh bậc lẻ.

Kế tiếp ta chứng minh điều kiện đủ bằng quy nạp theo số cạnh $m$ của $G$. Hiển nhiên định lý đúng nếu $m = 1$. Giả sử định lý đúng cho mọi đồ thị liên thông $m$ cạnh. Nếu $G$ có hai đỉnh bậc lẻ, giả sử các đỉnh này là $a$ và $b$ (nếu tất cả các đỉnh của $G$ có bậc chẵn, chọn đỉnh $a$ bất kỳ và lấy $b = a$). Ký hiệu $\mu$ là dây chuyền mà ta đi trên đồ thị $G$ xuất phát từ $a$ theo hướng tuỳ ý, đi qua mỗi cạnh đúng một lần. Nếu tại thời điểm nào đó ta ở đỉnh $x \neq b$ nghĩa là ta đã sử dụng một số lẻ cạnh liên thuộc với $x$ nên có thể đi theo cạnh khác chưa được sử dụng. Nếu ta không thể đi được nữa, nghĩa là đang ở đỉnh $b$. Nếu tất cả các cạnh đã được sử dụng, $\mu$ là một dây chuyền Euler và định lý đúng. Trong trường hợp ngược lại, đồ thị con $G'$ được xác định bởi các cạnh chưa được sử dụng chỉ có những đỉnh bậc chẵn. Ký hiệu $G'_1, G'_2, \ldots, G'_p$ là các thành phần liên thông của $G'$ chứa ít nhất một cạnh. Khi đó các đồ thị $G'_i$ có số cạnh ít hơn $m$ và do đó theo giả thiết quy nạp, chúng chứa một chu trình Euler $\mu_i$. Vì $G$ liên thông, dây chuyền $\mu$ có chung với các đồ thị $G'_1, G'_2, \ldots, G'_p$ các đỉnh theo thứ tự $i_1, i_2, \ldots, i_p$. Khi đó hành trình: xuất phát từ $a$ đi trên $\mu$ đến đỉnh $i_1$, đi dọc theo chu trình $\mu_1$ từ $i_1$ về $i_1$, đi trên $\mu$ đến đỉnh $i_2$ đi dọc theo chu trình $\mu_2$ từ $i_2$ về $i_2$, và vân vân, là một dây chuyền Euler xuất phát từ $a$ và kết thúc tại $b$. Định lý được chứng minh. $\triangleleft$

Đồ thị thoả các điều kiện của Định lý Euler gọi là *đồ thị Euler.*

### 5.1.1 Thuật toán tìm dây chuyền Euler

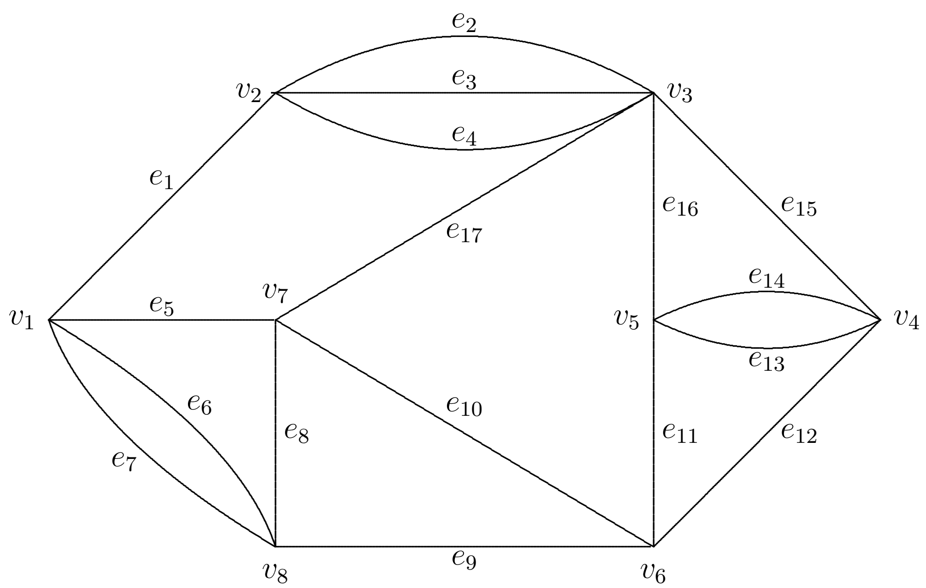
Cách chứng minh Định lý Euler 5.1.3 cho ta một thuật toán xây dựng dây chuyền Euler trong một đồ thị Euler.

1. Xây dựng một dây chuyền đơn giản $\mu$ xuất phát từ $s$.
2. Nếu tất cả các cạnh của $G$ đã được sử dụng thì dừng và ta có $\mu$ là dây chuyền Euler. Ngược lại sang Bước 3.
3. Ký hiệu $G_1$ là đồ thị con của $G$ gồm các cạnh chưa được sử dụng. Chọn đỉnh $c$ của $G_1$ nằm trên dây chuyền $\mu$. Xây dựng chu trình đơn giản $\mu_1$ trong đồ thị $G_1$ xuất phát từ đỉnh $c$.
4. Mở rộng dây chuyền $\mu$ bằng cách gắn thêm chu trình $\mu_1$ tại đỉnh $c$ (tức là dãy các cạnh của $\mu_1$ được chèn vào dãy các cạnh của $\mu$).
5. Thay $G$ bởi $G_1$ và lặp lại bước 2.

**Ví dụ 5.1.4** Đồ thị trong Hình 5.2 có một chu trình Euler

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_2, e_4, v_3, e_{15}, v_4, e_{14}, v_5, e_{13}, v_4, e_{12}, v_6, e_{11},$$




Hình 5.2: Một ví dụ về đồ thị Euler.

$$v_5, e_{16}, v_3, e_{17}, v_7, e_{10}, v_6, e_9, v_8, e_8, v_7, e_5, v_1, e_7, v_8, e_6, v_1).$$

Một dây chuyền hay chu trình Euler có thể được xác định bởi một danh sách có thứ tự các đỉnh của $G$ chứa trong nó. Chẳng hạn, ta có thể sử dụng một cấu trúc danh sách liên kết

```
typedef struct PathNode *PathPtr;
struct PathNode
{
  byte Vertex;
  PathPtr Next;
};
```

để đánh dấu các đỉnh liên tiếp trên dây chuyền, trong đó $Vertex$ là số hiệu đỉnh trên dây chuyền; và con trỏ $Next$ chỉ nút kế tiếp chứa số hiệu của đỉnh kề $Vertex$ trên dây chuyền. Dễ thấy rằng, danh sách này có số nút bằng $(m + 1)$.

Từ đây về sau ta sẽ giả thiết $G$ được cho bởi mảng các danh sách kề $V\_out[]$ (có trọng số), trong đó với mỗi đỉnh $v_i \in V$, $V\_out[i]$ là danh sách các đỉnh liên thuộc đỉnh $v_i$ và trường độ dài *Length* ở nút thứ $j$ (tương ứng đỉnh $v_j$) là số cạnh liên thuộc với đỉnh $v_i$. Trong quá trình thực hiện thuật toán, mỗi khi đi qua cạnh $(v_i, v_j)$ nào đó, ta giảm độ dài *Length* một đơn vị ở nút thứ $j$ trong danh sách $V\_out[i]$ để đánh dấu cạnh đã được sử dụng.

Vì mỗi cạnh của đồ thị được kiểm tra nhiều nhất hai lần nên độ phức tạp của thuật toán là $O(m)$.

## 5.2 Bài toán người đưa thư Trung Hoa

Xét đồ thị vô hướng liên thông $G := (V, E)$ có *trọng số* (tức là mỗi cạnh $e \in E$ ta gán một số $w(e)$ gọi là *trọng lượng* của cạnh $e$).

Bài toán người đưa thư Trung Hoa (không được định hướng) phát biểu rằng tìm một dây chuyền giữa hai đỉnh cho trước $a, b \in V$ sử dụng mỗi cạnh của $G$ ít nhất một lần và có độ dài nhỏ nhất (xem [44]).

Nhiều bài toán về hành trình (người đưa thư, người giao sữa, người chào hàng, v.v) có thể phát biểu ở dạng này. Trong trường hợp đồ thị có hướng, trong đó mỗi cung của $G$ cần được sử dụng ít nhất một lần, bài toán có thể đưa về bài toán luồng với chi phí nhỏ nhất (bài tập).

Từ đây về sau chúng ta chỉ xét đồ thị vô hướng. Không mất tính tổng quát có thể giả thiết đỉnh xuất phát $a$ và đỉnh kết thúc $b$ trên dây chuyền là trùng nhau. Trong trường hợp ngược lại, ta chỉ cần thêm một cạnh $(a, b)$ với độ dài bằng không. Với mỗi chu trình có độ dài nhỏ nhất trên đồ thị mới này, tồn tại một dây chuyền trên $G$ có cùng độ dài và do đó là nhỏ nhất.

Nếu $G$ là đồ thị Euler thì tồn tại một chu trình Euler đi qua mỗi cạnh đúng một lần và vì vậy là một nghiệm tối ưu của bài toán.

Nói chung, $G$ không phải là đồ thị Euler, nên tồn tại một số các đỉnh bậc lẻ. Ký hiệu $V_1$ là tập các đỉnh của $G$ có bậc lẻ. Dễ thấy rằng số phần tử của tập $V_1$ là một số chẵn. Khi đó bài toán người đưa thư Trung Hoa đưa về việc thêm một số cạnh vào $G$ để trở thành đồ thị Euler và cùng lúc, cực tiểu hoá tổng các trọng lượng của các cạnh được thêm vào.

Chúng ta không thêm một cạnh $e' = (v_i, v_j)$ trừ khi đã tồn tại một cạnh $e = (v_i, v_j)$ trong $G$ và gán trọng lượng của cạnh $e'$ là $w(e') := w(e)$. Cạnh $e'$ gọi là *bản sao* của $e$.

Xét một lời giải tối ưu của bài toán và đặt $E'$ là tập các cạnh được thêm vào $G$. Ký hiệu $G' = (V, E + E')$ là đồ thị Euler nhận được.

**Bổ đề 5.2.1** *Giả sử $v_i$ là một đỉnh bậc lẻ trong $G$. Khi đó tập $E'$ chứa một dây chuyền sơ cấp nối đỉnh $v_i$ với một đỉnh $v_j \neq v_i$ có bậc lẻ trong $G$.*

*Chứng minh.* Với mọi đỉnh $v_k \in V_1$ ta có $d_G(v_k) \equiv 1 \pmod 2$ và $d_{G'}(v_k) \equiv 0 \pmod 2$; ngoài ra, theo cách xây dựng $d_{G'}(v_k) \geq d_G(v_k)$. Do đó tồn tại ít nhất một cạnh $e_1 \in E'$ liên thuộc đỉnh $v_i$.

Ký hiệu $v_{i_1}$ là đỉnh khác $v_i$ mà cạnh $e_1$ liên thuộc. Nếu $d_G(v_{i_1}) \equiv 1 \pmod 2$ thì bổ đề được chứng minh với $v_j = v_{i_1}$. Ngược lại, nếu $d_G(v_{i_1}) \equiv 0 \pmod 2$ thì $d_{G'}(v_{i_1}) \geq d_G(v_{i_1}) + 2$ và tồn tại cạnh $e_2 \in E', e_2 \neq e_1$, liên thuộc đỉnh $v_{i_1}$. Ký hiệu $v_{i_2}$ là đỉnh khác $v_{i_1}$ mà cạnh $e_2$ liên thuộc. Nếu $d_G(v_{i_2}) \equiv 1 \pmod 2$ thì bổ đề được chứng minh với $v_j = v_{i_2}$. Ngược lại, tồn tại cạnh $e_3 \in E', e_3 \neq e_2$, liên thuộc đỉnh $v_{i_2}$, và vân vân.

Do đó ta xây dựng được một dây chuyền sơ cấp dài nhất có thể

$$(v_i, e_1, v_{i_1}, e_2, v_{i_2}, \ldots, e_p, v_{i_p}).$$

Nếu $d_G(v_{i_p}) \equiv 1 \pmod 2$ thì bổ đề được chứng minh với $v_j = v_{i_p}$. Ngược lại, tồn tại cạnh $e_{p+1} \in E', e_p \neq e_{p+1}$, liên thuộc đỉnh $v_{i_p}$ và $v_{i_{p+1}}$. Trong trường hợp này, tồn tại chỉ số $q, 1 \leq q \leq p$, sao cho $v_{i_q} \equiv v_{i_{p+1}}$ và ta có một chu trình xuất hiện. Loại bỏ tất cả các cạnh trong chu trình này ta được một đồ thị con $G''$ của $G'$ sao cho nó vẫn là đồ thị Euler và hơn nữa

$$d_{G''}(v_k) \geq d_G(v_k),$$

với mọi đỉnh $v_k \in V$.

Lặp lại cách xây dựng dây chuyền trên, xuất phát từ đỉnh $v_{i_q}$ chỉ sử dụng các cạnh của $G''$.

Do số các cạnh trong $E'$ là hữu hạn, nên sau một số hữu hạn bước ta được một đỉnh $v_{i_p}$ sao cho $d_G(v_{i_p}) \equiv 1 \pmod 2$ và bổ đề được chứng minh với $v_j = v_{i_p}$. ◃

**Bổ đề 5.2.2** *Giả sử $v_i$ và $v_j$ là hai đỉnh thoả mãn các điều kiện của Bổ đề 5.2.1 và ký hiệu dây chuyền tương ứng là*

$$\mu' := \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_p\}$$

*trong đó $e'_k \in E', k = 1, 2, \ldots, p$. Các cạnh $e'_1, e'_2, \ldots, e'_p$ là các bản sao của các cạnh $e_1, e_2, \ldots, e_p$ trong $G$ và xét dây chuyền $\mu := \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ trong $G$. Khi đó $\mu$ là dây chuyền (trong $G$) có trọng lượng nhỏ nhất nối đỉnh $v_i$ với đỉnh $v_j$.*

*Chứng minh.* Nếu tồn tại một dây chuyền $\bar{\mu} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_q\}$ nối đỉnh $v_i$ với đỉnh $v_j$ trong $G$ có độ dài nhỏ hơn thì bằng cách loại các cạnh $e'_1, e'_2, \ldots, e'_p$ khỏi $G'$ và thêm các bản sao

$\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_q$ của $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_q$ ta nhận được một đồ thị Euler mới có tổng trọng lượng nhỏ hơn, mâu thuẫn. $\triangleleft$

Bây giờ xét đồ thị đầy đủ $\mathcal{K}(V_1)$ trên tập các đỉnh $V_1$ trong đó các cạnh thêm vào $(v_i, v_j)$ có trọng lượng $w_{ij}$ bằng độ dài của dây chuyền nhỏ nhất trong $G$ giữa hai đỉnh $v_i$ và $v_j$. Khi đó mỗi cạnh của $\mathcal{K}(V_1)$ tương ứng với một dây chuyền trong $G$. Vì $w(e) \geq 0$ với mọi cạnh $e \in E$ nên $w_{ij}$ có thể được xác định bằng thuật toán tìm đường đi ngắn nhất, chẳng hạn Floyd (xem 3.3.2) hay Dantzig [16].

**Định lý 5.2.3** *Tồn tại tương ứng một-một giữa lời giải tối ưu của bài toán người đưa thư Trung Hoa với một cặp ghép hoàn hảo có trọng lượng nhỏ nhất trong đồ thị $\mathcal{K}(V_1)$.*

*Chứng minh.* Xét một lời giải tối ưu của bài toán người đưa thư Trung Hoa và đặt $E'$ là tập các cạnh thêm vào $G$. Theo Bổ đề 5.2.1 ta có thể thiết lập tương ứng với mỗi đỉnh $v_i \in V_1$ với một đỉnh $v_j \in V_1$ bằng một dây chuyền sơ cấp $\mu_{ij}$ mà các cạnh thuộc $E'$. Theo Bổ đề 5.2.2, $\mu_{ij}$ có độ dài nhỏ nhất. Trong đồ thị $\mathcal{K}(V_1)$ các dây chuyền $\mu_{ij}$ tương ứng cạnh $(v_i, v_j)$. Do đó tất cả các đỉnh của $V_1$ được kết hợp, hai với hai, và các cạnh $(v_i, v_j)$ tương ứng dây chuyền $\mu_{ij}$ của $G'$, tạo thành một cặp ghép hoàn hảo $K$ của đồ thị $\mathcal{K}(V_1)$. (Trong đồ thị đầy đủ với số chẵn đỉnh luôn luôn tồn tại một cặp ghép hoàn hảo; xem Phần 7.5). Vì trọng lượng của cặp ghép hoàn hảo $K$ bằng tổng các trọng lượng của các cạnh của $E'$ nên lời giải của bài toán người đưa thư Trung Hoa là tối ưu nếu và chỉ nếu $K$ là một cặp ghép hoàn hảo với trọng lượng nhỏ nhất. Ta có điều phải chứng minh. $\triangleleft$

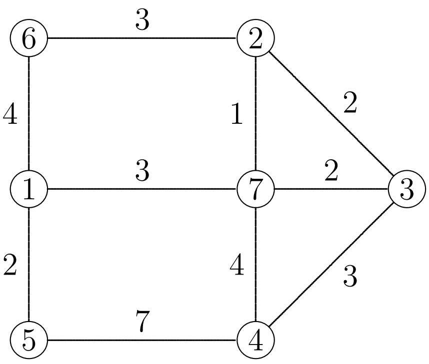
Do đó nghiệm của bài toán người đưa thư Trung Hoa đưa về bài toán tìm một cặp ghép hoàn hảo có trọng lượng nhỏ nhất của đồ thị đầy đủ $K_n$. Việc xác định nghiệm của bài toán sau là một thuật toán khá phức tạp và do đó sẽ không được trình bày ở đây. Bạn đọc quan tâm có thể tham khảo các tài liệu [14], [30].

**Nhận xét 5.2.4** Nếu tồn tại cạnh $e$ trong $G$ sao cho $w(e) < 0$ thì bài toán không có nghiệm tối ưu: Thật vậy, bằng cách thêm một tập $E'$ hữu hạn các bản sao của các cạnh của $G$ ta có thể thêm cạnh $e$ một số chẵn lần đủ lớn, và do đó nhận được một đồ thị Euler với độ dài nhỏ tuỳ ý. Vậy giả thiết các cạnh có trọng lượng không âm là không mất tính tổng quát để loại trừ trường hợp tầm thường này.

**Ví dụ 5.2.5** Xét đồ thị trong Hình 5.3 với các số trên các cạnh là trọng lượng cạnh. Ta cần tìm một chu trình qua mỗi cạnh ít nhất một lần và có độ dài nhỏ nhất.

Tổng các trọng lượng các cạnh của $G$ bằng 31. Vì $G$ không là đồ thị Euler nên độ dài của chu trình cần tìm sẽ lớn hơn 31.

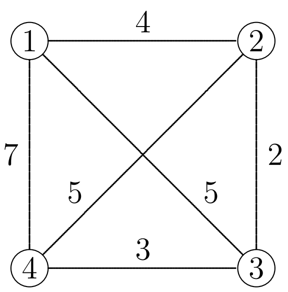


Hình 5.3:

Tập các đỉnh bậc lẻ là $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$. Theo thuật toán tìm đường đi ngắn nhất (xem Chương 3), ta tìm tất cả các dây chuyền có độ dài nhỏ nhất giữa các cặp đỉnh của $V_1$ trong $G$. Ta nhận được mà trận độ dài đường đi ngắn nhất:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

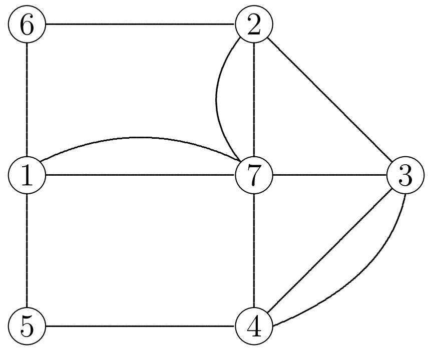
Tiếp đến ta xây dựng đồ thị đầy đủ $\mathcal{K}(V_1)$ trong đó trọng lượng cạnh $(v_i, v_j)$ là độ dài của dây chuyền ngắn nhất giữa $v_i$ và $v_j$ (xem Hình 5.4).



Hình 5.4: Đồ thị đầy đủ $\mathcal{K}(V_1)$.

Cặp ghép hoàn hảo với trọng lượng nhỏ nhất trên $\mathcal{K}(V_1)$ gồm các cạnh $(1, 2)$ và $(3, 4)$ (trọng lượng bằng $4 + 3 = 7$). Các dây chuyền tương ứng là $\{1, 7, 2\}$ và $\{3, 4\}$.

Nghiệm tối ưu của bài toán nhận được bằng cách thêm vào đồ thị ban đầu các cạnh $(1, 7), (7, 2)$ và $(3, 4)$. Đồ thị $G'$ nhận được là đồ thị Euler (Hình 5.5).




Hình 5.5: Đồ thị Euler $G'$ nhận được từ $G$ bằng cách thêm các cạnh tương ứng các dây chuyền nhỏ nhất giữa 1 và 2 và giữa 3 và 4.

Cuối cùng ta chỉ cần tìm một chu trình Euler trong $G'$, chẳng hạn

$$\{6, 2, 3, 7, 2, 7, 1, 7, 4, 5, 1, 6\}$$

là chu trình có độ dài $31 + 7 = 38$ là nghiệm tối ưu cần tìm.

## 5.3 Bài toán Hamilton

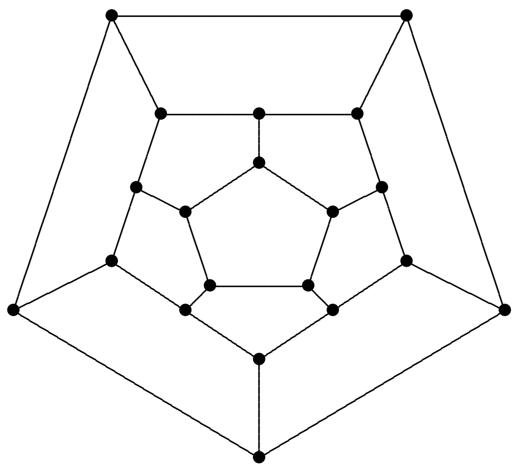
Giả sử $G := (V, E)$ là đồ thị liên thông (hay liên thông mạnh trong trường hợp có hướng) có $n$ đỉnh.

**Định nghĩa 5.3.1** Dây chuyền (hay đường đi) đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị $G$, mỗi đỉnh một lần, gọi là *dây chuyền Hamilton* (*hay đường đi Hamilton*).

Theo định nghĩa, dây chuyền (hay đường đi Hamilton) là sơ cấp, và có độ dài $(n-1)$.

*Chu trình* (hay *mạch*) *Hamilton* là một chu trình (hay mạch) đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị $G$, mỗi đỉnh đúng một lần. Dễ thấy rằng, chu trình Hamilton là chu trình sơ cấp có độ dài $n$. Ta nói rằng, $G$ là *đồ thị Hamilton* nếu nó chứa một chu trình Hamilton (trong trường hợp vô hướng) hoặc một mạch Hamilton (trong trường hợp có hướng).

**Ví dụ 5.3.2** Năm 1859, nhà toán học Hamilton (1805-1865) người Ailen đã cho bán một đồ chơi độc đáo, phần chính là một khối nhị diện đều (khối đa diện có 12 mặt ngũ giác đều và 20 đỉnh, mỗi đỉnh có 3 cạnh) làm bằng gỗ. Ở mỗi đỉnh có ghi tên một thành phố lớn: Beruych, Quảng châu, Deli, Frangfua, v.v... Cách chơi là tìm một đường đi dọc theo các cạnh của thập nhị diện đều và qua mỗi đỉnh (thành phố) vừa đúng một lần. Muốn trò chơi được hấp dẫn hơn có thể quy định trước trình tự qua một vài thành phố đầu tiên, và để giúp nhớ dễ dàng các thành phố đã đi qua, ở mỗi đỉnh của khối thập nhị diện đều có đóng một chiếc đinh mũ to, quanh đó có thể quấn sợi dây nhỏ để chỉ đoạn đường đã đi qua. Về sau để đơn giản, Hamilton đã thay khối thập nhị diện đều bằng một hình phẳng. Bài toán được phát biểu dưới dạng đồ thị như sau. Ta biết rằng hình thập nhị diện đều có 12 mặt, 30 cạnh, 20 đỉnh; mỗi mặt là một ngũ giác đều, mỗi đỉnh là đầu mút của 3 cạnh. Các đỉnh và các cạnh của hình thập nhị diện đều lập thành một đồ thị như Hình 5.6. Bài toán đặt ra là hãy tìm một chu trình Hamilton của đồ thị G.



Hình 5.6: Hành trình xung quanh thế giới (khối thập nhị diện đều) của Hamilton.

**Ví dụ 5.3.3** (*Bài toán người chào hàng*). Một người chào hàng viếng thăm $n$ khách hàng $v_1, v_2, \ldots, v_n$, xuất phát từ thành phố $v_0$ và sau đó trở về vị trí xuất phát. Anh ta biết khoảng cách $d_{0j}$ từ $v_0$ đến tất cả các khách hàng $v_j$ và khoảng cách $d_{ij}$ giữa hai khách hàng $v_i$ và $v_j$ (đặt $d_{ij} = d_{ji}$).

Người chào hàng cần đi đến các khách hàng của mình theo thứ tự nào để tổng quãng đường đi là nhỏ nhất? Nói cách khác cần tìm một chu trình Hamilton với độ dài nhỏ nhất trên đồ thị đầy đủ có trọng số được xây dựng từ tập các đỉnh $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$, và trọng lượng cạnh $(v_i, v_j)$ là $d_{ij}$. Về các thuật toán giải bài toán này có thể xem, chẳng hạn [30].

Trong trường hợp đỉnh cuối $v_{n+1}$ khác đỉnh xuất phát $v_0$, bài toán đưa về tìm dây chuyền Hamilton từ $v_0$ đến $v_{n+1}$ có tổng độ dài nhỏ nhất. Bằng cách biến đổi một cách thích hợp trên đồ thị, ta có thể đưa về bài toán tìm chu trình Hamilton có tổng độ dài nhỏ nhất.

**Ví dụ 5.3.4** (*Bài toán lập lịch*). Trong một số bài toán lập lịch, ta cần tìm một thứ tự thực hiện $n$ tiến trình cho trước (hai tiến trình không được thực hiện cùng một lúc) và thoả mãn những ràng buộc nhất định; bằng cách xây dựng đồ thị $G$ trong đó tập các đỉnh của $G$ tương ứng với tập các tiến trình và một cung liên thuộc hai đỉnh $v_i$ và $v_j$ nếu tiến trình $i$ được thực hiện trước tiến trình $j$, bài toán đưa về tìm một đường đi Hamilton trong $G$.

**Ví dụ 5.3.5** (*Lập lịch và bài toán người chào hàng trên đồ thị có hướng*). Trong thực tế ta thường lập kế hoạch mà mỗi cung $(v_i, v_j)$, biểu diễn một ràng buộc nào đó, gắn với một số thực $t_{ij}$ là khoảng thời gian ít nhất có thể bắt đầu thực hiện công việc thứ $j$ khi công việc thứ $i$ đã tiến hành.

Thời gian nhỏ nhất để thực hiện tất cả các tiến trình được xác định bằng cách tìm một đường đi Hamilton có độ dài nhỏ nhất trên đồ thị có hướng. Đây chính là bài toán người chào hàng trên đồ thị có hướng. Về thuật toán giải bài toán này có thể xem, chẳng hạn [30].

Bài toán người chào hàng trên đồ thị vô hướng hoặc có hướng thường gặp trong cuộc sống và có nhiều ứng dụng: lập thời khoá biểu, lập lịch, lắp đặt hệ thống điện, tổng hợp các mạch logic tuần tự, v.v.

Ngoài ra, nhiều bài toán có thể đưa về bài toán người chào hàng: bài toán nhiều người chào hàng, một vài bài toán tìm đường đi ngắn nhất với điều kiện qua tất cả các đỉnh (hay cung) của một tập cho trước chỉ một lần, các chu trình (hay mạch) Euler có chi phí nhỏ nhất.

Cuối cùng, ta có thể chỉ ra rằng, bài toán người chào hàng trên đồ thị có hướng có thể đưa về trường hợp đồ thị vô hướng.

Trái với bài toán người đưa thư Trung Hoa, ngoại trừ những trường hợp đặc biệt, người ta chưa tìm được một thuật toán đa thức để giải bài toán người chào hàng. Các thuật toán hiệu quả nhất sử dụng các phương pháp nhánh và cận [30].

**Định nghĩa 5.3.6** Một chu trình (tương ứng, mạch) đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh ít nhất một lần, gọi là *chu trình* (tương ứng, *mạch*) *tiền Hamilton.* Đồ thị $G$ chứa một chu trình hay mạch như vậy gọi là *đồ thị tiền Hamilton.* Dễ thấy rằng, điều kiện cần và đủ để $G$ là đồ thị tiền Hamilton là $G$ liên thông (liên thông mạnh).

Tìm kiếm một chu trình (hay mạch) Hamilton có độ dài nhỏ nhất trên đồ thị có trọng số đưa về bài toán xác định chu trình (hay mạch) trong đồ thị đầy đủ $G'$ nhận được tập các đỉnh của $G$ và trọng lượng trên cạnh (cung) $(v_i, v_j)$ của $G'$ bằng độ dài của dây chuyền (đường đi) ngắn nhất từ $v_i$ đến $v_j$ trong $G$.

Nhiều dạng bài toán người chào hàng chính là các bài toán tiền Hamilton, và để giải chúng trước hết ta cần tìm ma trận tương ứng các dây chuyền (đường đi) ngắn nhất.

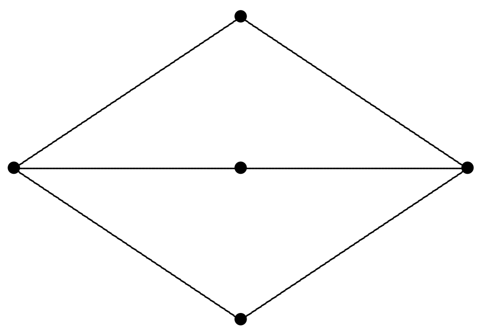
Cuối cùng nhận xét rằng, tồn tại một trường hợp mà bài toán chu trình tiền Hamilton có độ dài nhỏ nhất có thể đưa về bài toán người đưa thư Trung Hoa; điều này xảy ra khi $G$ là *đồ thị đối ngẫu*[1] của đơn đồ thị vô hướng $G^*$ nào đó và khi độ dài của các cạnh $(v_i, v_j)$ có dạng $a_i + a_j$. Trong trường hợp này, bài toán tìm chu trình tiền Hamilton trong $G$ chính là bài toán người đưa thư Trung Hoa trong $G^*$ với độ dài cạnh $e_i^*$ của $G^*$ là $a_i$.

Nhận xét tương tự cho bài toán tìm mạch tiền Hamilton có độ dài nhỏ nhất trong trường hợp đồ thị có hướng $G$ là đồ thị đối ngẫu của đa đồ thị có hướng nào đó.

### 5.3.1 Các điều kiện cần để tồn tại chu trình Hamilton

Hiển nhiên rằng, một điều kiện cần để tồn tại chu trình Hamilton là $G$ 2-liên thông. Tuy nhiên, đây không phải điều kiện đủ.

Hình 5.7 là một ví dụ đồ thị 2-liên thông không chứa chu trình Hamilton (hơn nữa, có thể chỉ ra rằng, đó là đồ thị có số đỉnh ít nhất thoả mãn tính chất này).

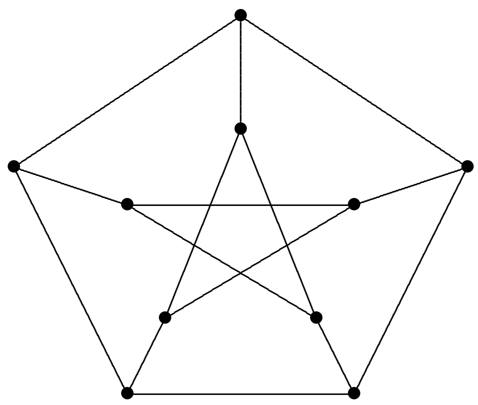


Hình 5.7: Đồ thị 2-liên thông có số đỉnh ít nhất không có chu trình Hamilton.

Đồ thị vô hướng Petersen (Hình 5.8) là ví dụ khác không có chu trình Hamilton. Đây là đồ thị chính quy 3-liên thông nhỏ nhất có tất cả các đỉnh bậc ba. Nhiều phản ví dụ về bài toán Hamilton được xây dựng từ đồ thị Petersen.

[1]Đồ thị vô hướng $G^*$ là *đồ thị đối ngẫu* của $G = (V, E)$ nếu mỗi đỉnh của $G^*$ tương ứng với một cạnh $e \in E$ và hai đỉnh trong $G^*$ kề nhau nếu hai cạnh tương ứng kề nhau. Đồ thị có hướng $G^*$ là *đồ thị đối ngẫu* của $G = (V, E)$ nếu mỗi đỉnh $e^*$ của $G^*$ tương ứng với một cung $e \in E$ và tồn tại cung $(e_1^*, e_2^*)$ trong $G^*$ nếu đỉnh ngọn của cung $e_1$ là đỉnh gốc của cung $e_2$.



Hình 5.8: Đồ thị Petersen.

Có nhiều điều kiện cần khác (xem [30], [14]) nhưng không có một điều kiện cần và đủ về sự tồn tại chu trình (mạch) Hamiton.

Do đó chúng ta sẽ tập trung một số điều kiện đủ dẫn đến các phương pháp có tính xây dựng chu trình Hamilton.

### 5.3.2 Các điều kiện đủ về sự tồn tại chu trình Hamilton

**Mệnh đề 5.3.7** *$K_n$ là đồ thị Hamilton.*

*Chứng minh.* Hiển nhiên. ◁

Xét đồ thị vô hướng $n$ đỉnh $G := (V, E)$. Giả sử $s$ và $t$ là hai đỉnh không kề nhau sao cho

$$d_G(s) + d_G(t) \geq n.$$

Ký hiệu $G + (s, t)$ là đồ thị nhận được từ $G$ bằng cách thêm cạnh $(s, t)$. Khi đó

**Mệnh đề 5.3.8** *Nếu $G + (s, t)$ là đồ thị Hamilton thì $G$ là đồ thị Hamilton. Ta nói tính chất này là ổn định Hamilton qua phép biến đổi $G \to G + (s, t)$.*

*Chứng minh.* Giả sử $G + (s, t)$ chứa chu trình Hamilton $\mu := (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Nếu $\mu$ không đi qua cạnh $(s, t)$ thì $G$ là Hamilton. Ngược lại, $G$ chứa một dây chuyền Hamilton $\mu \setminus (s, t)$ nối $s$ và $t$. (Không mất tính tổng quát, có thể giả thiết $s = v_1, t = v_n$).

Ta chứng minh rằng tồn tại ít nhất một chỉ số $i, 3 \leq i \leq n$, sao cho $s$ kề với $v_i$ và $t$ kề với $v_{i-1}$.

Thật vậy, xét các tập con của tập $Y := \{v_3, v_4, \ldots, v_{n-1}\}$ :

$$\begin{array}{lcl} A & = & \{v_i \mid (s, v_i) \in E \text{ và } 3 \leq i \leq n-1\}, \\ B & = & \{v_i \mid (t, v_{i-1}) \in E \text{ và } 3 \leq i \leq n-1\}. \end{array}$$

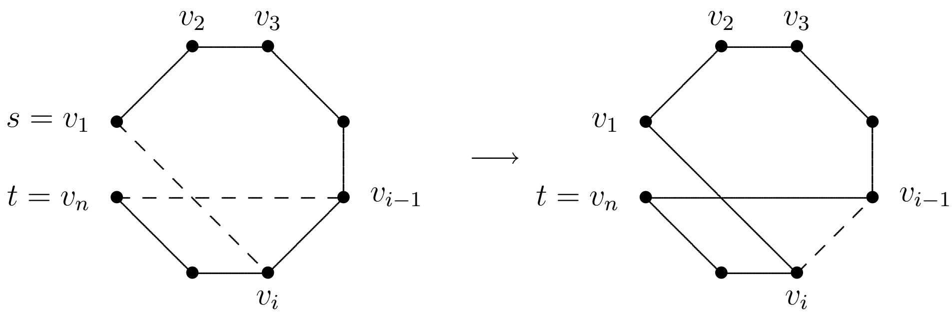
Vì $s$ và $t$ không kề nhau trong $G$ nên

$$\#A + \#B = d_G(s) + d_G(t) - 2 \geq n - 2$$

và nhận xét rằng $\#Y = n - 3$ suy ra tồn tại

$$v_i \in A \cap B \quad (3 \leq i \leq n-1).$$

Do đó, thêm các cạnh $(s, v_i)$ và $(t, v_{i-1})$ và xoá cạnh $(v_i, v_{i-1})$ ta được một chu trình Hamilton trong $G$ (xem Hình 5.9), và mệnh đề được chứng minh. $\triangleleft$




Hình 5.9:

Giả sử $G$ là đơn đồ thị $n$ đỉnh và $k$ là số nguyên thoả $1 \leq k \leq n$. Xét thủ tục đệ quy sau: Xuất phát từ $G$, thêm các cạnh nối các đỉnh không kề nhau mà tổng các bậc của chúng lớn hơn hoặc bằng $k$. (Số phép toán đòi hỏi trong thủ tục này tỉ lệ với $n^4$). Vì các bậc không giảm, đồ thị nhận được không phụ thuộc vào thứ tự các cạnh được thêm. Đồ thị này (chứa $G$) gọi là $k-$*bao đóng* của $G$ và ký hiệu là $[G]_k$. Với $k = n$, từ Mệnh đề 5.3.8 suy ra

**Định lý 5.3.9** [8] *$G$ là đồ thị Hamilton nếu và chỉ nếu $[G]_n$ là đồ thị Hamilton.*

Trong trường hợp tổng quát, tìm chu trình Hamilton trong $[G]_n$ không phải lúc nào cũng dễ hơn trong $G$. Tuy nhiên, với những trường hợp đặc biệt, chẳng hạn khi $[G]_n$ là đồ thị đầy đủ $K_n$ ta có thể dễ dàng xây dựng chu trình Hamilton trong $[G]_n$ :

**Định lý 5.3.10** *Điều kiện đủ để $G$ là đồ thị Hamilton là $[G]_n = K_n$.*

Có thể chỉ ra rằng hầu hết các điều kiện đủ đã biết (được liệt kê dưới đây) liên quan đến bậc của $G$ suy ra $[G]_n = K_n$ và do đó là các hệ quả của Định lý 5.3.10.

Giả sử $G$ là đơn đồ thị liên thông $n$ đỉnh.

**Hệ quả 5.3.11** [Ore] *[47] Nếu $d_G(v_i) + d_G(v_j) \geq n$ với mọi $(v_i, v_j) \notin E$ thì $G$ là đồ thị Hamilton.*

**Hệ quả 5.3.12** [Dirac] *[17] Nếu $d_G(v_i) \geq \frac{n}{2}$ với mọi đỉnh $v_i \in V$ thì $G$ là đồ thị Hamilton.*

**Hệ quả 5.3.13** [Pósa] *[51] Nếu các đỉnh của $G$ được đánh số thứ tự sao cho*

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \cdots \leq d_G(v_n)$$

*và nếu*

$$\forall k : 1 \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d_G(v_k) > k,$$

*thì $G$ là đồ thị Hamilton.*

**Hệ quả 5.3.14** [Bondy] *[7] Giả sử các đỉnh của $G$ được đánh số thứ tự sao cho*

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \cdots \leq d_G(v_n).$$

*Nếu điều kiện sau đúng:*

$$p < q,\ d_G(v_p) \leq p, d_G(v_q) \leq q - 1 \Rightarrow d_G(v_p) + d_G(v_q) \geq n,$$

*thì $G$ là đồ thị Hamilton.*

**Hệ quả 5.3.15** [Chvátal] *[13] Nếu các đỉnh của $G$ được đánh số thứ tự sao cho*

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \cdots \leq d_G(v_n)$$

*và nếu*

$$d_G(v_k) \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d_G(v_{n-k}) \geq n - k$$

*thì $G$ là đồ thị Hamilton.*

**Hệ quả 5.3.16** [Las Vergnas] *[42] [30] Nếu các đỉnh của G được đánh số thứ tự $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sao cho*

$$\left.\begin{array}{l} j < k, k \geq n - j \\ (v_j, v_k) \notin E \\ d_G(v_j) \leq j, d_G(v_k) \leq k - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow d_G(v_j) + d_G(v_k) \geq n$$

*thì G là đồ thị Hamilton.*

*Các chứng minh.* Chứng minh của Hệ quả 5.3.11 suy trực tiếp từ cách xây dựng $[G]_n$ : tất cả các cạnh $(v_i, v_j) \notin E$ có thể được thêm và do đó ta có $[G]_n = K_n$. Hệ quả 5.3.12 suy trực tiếp từ Hệ quả 5.3.11.

Hơn nữa, dễ dàng thấy rằng, đồ thị thoả mãn các điều kiện của Hệ quả 5.3.13, 5.3.14 hay 5.3.15 cũng thoả mãn các giả thiết của Hệ quả 5.3.16.

Để chứng minh Hệ quả 5.3.16, ta sẽ sử dụng kết quả sau cho điều kiện đủ để $[G]_n = K_n$.

**Định lý 5.3.17** [8] *Nếu các đỉnh của G được đánh số thứ tự $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sao cho*

$$\left.\begin{array}{l} i < j \\ (v_i, v_j) \notin E \\ d_G(v_i) \leq i + k - n \\ d_G(v_j) \leq j + k - n - 1 \\ i + j \geq 2n - k \end{array}\right\} \Rightarrow d_G(v_i) + d_G(v_j) \geq k$$

*thì $k-$bao đóng của G là đồ thị đầy đủ $K_n$.*

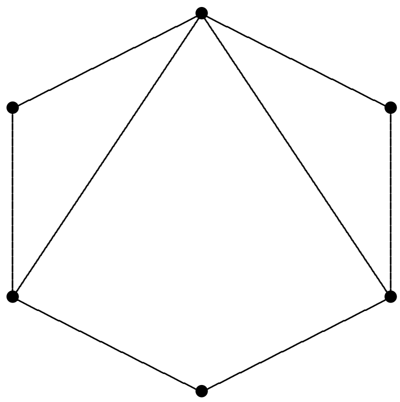
*Chứng minh.* ◁

Hệ quả 5.3.16 suy trực tiếp từ Định lý 5.3.17 với $k = n$. Hệ quả 5.3.16 là tổng quát nhất của tất cả các điều kiện đã biết có liên quan đến bậc của đồ thị. Tuy nhiên, điều kiện đủ của Định lý 5.3.10 là tổng quát hơn: đồ thị trong Hình 5.10 có $[G]_6 = K_6$ nhưng không tồn tại cách đánh số các đỉnh của $G$ thoả các điều kiện của Hệ quả 5.3.16.

### 5.3.3 Các điều kiện đủ về sự tồn tại mạch Hamilton

Trong trường hợp đồ thị có hướng, có một số các điều kiện đủ bảo đảm sự tồn tại của mạch Hamilton. Kết quả tổng quát nhất là:



Hình 5.10: Với đồ thị này, $[G]_6 = K_6$ nhưng không thể áp dụng Hệ quả 5.3.16.

**Định lý 5.3.18** [Meyniel, 1973] *Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng $n$ đỉnh liên thông mạnh không khuyên sao cho*

$$(v_i, v_j) \notin E \quad \text{và} \quad (v_j, v_i) \notin E \Rightarrow d_G(v_i) + d_G(v_j) \geq 2n - 1.$$

*Khi đó $G$ chứa một mạch Hamilton.*

Chúng ta sẽ đưa ra chứng minh có tính kiến thiết định lý này (theo Minoux, 1977) và một thuật toán có độ phức tạp $O(n^4)$ để tìm mạch Hamilton. Chứng minh dựa trên phương pháp (không kiến thiết) của Bondy và Thmassen (1977). Trước hết, chúng ta cần một số khái niệm.

Giả sử $S \subset V$. Với mỗi $v_i \in V$ (có thể $v_i \in S$), ký hiệu $\delta_S(i)$ là số các cung nối (theo hướng bất kỳ) đỉnh $v_i$ với tập con $S$. Vì $G$ không có khuyên nên ta luôn luôn có

$$v_i \in S \Rightarrow \delta_S(i) \leq 2\#S - 2.$$

Với $S$ là tập con thực sự của $V$ ta gọi *$S-$bộ hành* là một đường đi mà các đỉnh đầu và cuối (không nhất thiết phân biệt) thuộc $S$ và các đỉnh trung gian là phân biệt và tạo thành một tập con khác trống của tập $V \setminus S$. Một *$S-$đường đi* là một $S-$bộ hành mà các điểm đầu và cuối khác nhau.

Ta có bổ đề sau:

**Bổ đề 5.3.19** *Giả sử $\mu = (v_0, v_1, \ldots, v_p)$ là đường đi sơ cấp của $G$, $S$ là tập các đỉnh của nó và đặt $v \in V \setminus S$. Nếu không tồn tại hai đỉnh liên tiếp $v_k$ và $v_{k+1}$ $(0 \leq k \leq p-1)$ của $\mu$ sao cho $(v_k, v) \in E$ và $(v, v_{k+1}) \in E$ thì*

$$\delta_S(v) \leq \#S + 1.$$

*Chứng minh.* Xét các tập con của $S \setminus \{v_p\}$ :

$$A := \{v_i \in S \setminus \{v_p\} \mid (v_i, v) \in E\}$$

và

$$A := \{v_i \in S \setminus \{v_p\} \mid (v, v_{i+1}) \in E\}.$$

Theo giả thiết, $A \cap B = \emptyset$ và $\#(A \cup B) \leq \#S - 1$ (do $v_p \notin A, v_p \notin B$). Vậy

$$\delta_S(v) \leq \#A + \#B + 2 = \#(A \cup B) - \#(A \cap B) + 2 \leq \#S + 1,$$

điều phải chứng minh. $\triangleleft$

Bây giờ chúng ta chứng minh Định lý 5.3.18.

*Chứng minh của Định lý 5.3.18.* Xét đồ thị $G$ thoả mãn các điều kiện của định lý.

(1) Vì $G$ liên thông mạnh nên tồn tại một mạch độ dài ít nhất hai.

Ta nói mạch $\mu$ trong $G$ là *tựa cực đại* nếu với mọi đỉnh $v \notin \mu$ không tồn tại hai đỉnh $v_k$ và $v_{k+1}$ liên tiếp trên mạch $\mu$ sao cho

$$(v_k, v) \in U \quad \text{và} \quad (v_{k+1}, v) \in U.$$

Hiển nhiên rằng để kiểm tra một mạch có phải tựa cực đại hay không, hoặc để phát hiện một mạch độ dài lớn hơn 1 ta cần thực hiện $O(n^2)$ phép toán sơ cấp.

Do đó, thuật toán xây dựng một mạch tựa cực đại trong $G$ bắt đầu từ một mạch tuỳ ý đòi hỏi $O(n^3)$ phép toán sơ cấp.

Giả sử $\mu$ là mạch tựa cực đại, và ký hiệu $S$ là tập các đỉnh của nó. Nếu $S = V$ ta dừng: $\mu$ là mạch Hamilton. Ngược lại, ta sẽ chỉ ra rằng có thể mở rộng mạch $\mu$ để nhận được một mạch $\mu'$ có độ dài lớn hơn, và do đó, theo quy nạp, ta sẽ có một mạch Hamilton.

(2) Chúng ta chứng minh tồn tại một $S-$đường đi trong $G$.

Bằng phản chứng, giả sử không tồn tại $S-$đường đi. Vì $G$ liên thông mạnh, tồn tại ít nhất một $S-$bộ hành $P$ mà các đỉnh đầu cuối của nó là $v \in S$.

Đặt $R$ là tập các đỉnh thuộc $P$ và khác $v$; đặt $T$ là tập các đỉnh của $G$ không thuộc $S \cup R$.

Theo giả thiết không tồn tại $S-$đường đi nên không tồn tại đỉnh thuộc $R$ và kề với một đỉnh trong $S \setminus \{v\}$.

Do đó với mỗi đỉnh $v_i \in R$ và đỉnh $v_j \in S \setminus \{v\}$ ta có

$$\begin{array}{ll} \delta_R(v_i) \leq 2\#R - 2, & \delta_R(v_j) = 0, \\ \delta_S(v_i) \leq 2, & \delta_S(v_j) \leq 2\#S - 2. \end{array}$$

Hơn nữa ta cần có

$$\delta_T(v_i) + \delta_T(v_j) \leq 2\#T.$$

(Nếu không, tồn tại ít nhất một đường đi độ dài 2 hoặc giữa $v_i$ và $v_j$, hoặc giữa $v_j$ và $v_i$; đường đi này (có một phần nằm trên $P$) tạo thành một $S-$đường đi).

Có thể chứng minh rằng các đỉnh $v_i$ và $v_j$ là hai đỉnh không kề nhau sao cho

$$\begin{array}{rcl} \delta(v_i) + \delta(v_j) & = & \delta_S(v_i) + \delta_R(v_i) + \delta_T(v_i) + \delta_S(v_j) + \delta_R(v_j) + \delta_T(v_j) \\ & \leq & 2(\#R + \#S + \#T) - 2 = 2n - 2, \end{array}$$

mâu thuẫn với giả thiết.

(3) Vì tồn tại ít nhất một $S-$đường đi, ta sẽ tìm một $S-$đường đi $P$ xuất phát từ $x$ và kết thúc tại $y$ sao cho độ dài của đường đi con $\mu(x, y)$ từ $x$ đến $y$ trên $\mu$ là nhỏ nhất (theo số các cung).

Với một đỉnh $x \in S$ cho trước, chúng ta có thể sử dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng trên đồ thị $G$ như đã trình bày trong Chương 3. Phương pháp này đòi hỏi $O(m)$ phép toán sơ cấp. Do đó thuật toán tìm một $S-$đường đi $P$ với tính chất đòi hỏi cần nhiều nhất $O(mn)$ phép toán sơ cấp.

Ký hiệu $R$ là tập các đỉnh trung gian của $P$, và $S_1$ là tập các đỉnh trung gian trên đường đi $\mu(x, y)$ của $\mu$.

Nếu $S_1 = \emptyset$ thì thay cung $(x, y)$ bởi $S-$đường đi $P$ và chúng ta nhận được một mạch $\mu'$ có độ dài lớn hơn hoặc bằng $(\#S + 1)$.

(4) Kế tiếp ta giả sử $S_1 \neq \emptyset$, và đặt $S_2 := S \setminus S_1$ và $T$ là tập các đỉnh của $G$ không thuộc $R$ và $S$.

Chúng ta xây dựng một đường đi sơ cấp tựa cực đại $Q$ giữa $y$ và $x$ mà tập các đỉnh của nó là $S'$ thoả mãn $S' \subset S$ và $S_2 \subset S'$ bằng phương pháp lặp như sau:

1. Khởi tạo với $Q := \mu(x, y), S' := S_2, S'' := S_1$.
2. Tìm đỉnh $s \in S''$ sao cho $(k, s) \in U$ và $(s, l) \in U$ với hai đỉnh $k$ và $l$ liên tiếp trên $Q$. (Nhận xét rằng, điều này đòi hỏi nhiều nhất $O(n)$ phép toán sơ cấp). Nếu không tồn tại đỉnh $s$ như vậy (hoặc là $S'' = \emptyset$) thì dừng: đường đi $Q$ là tựa cực đại (hoặc cực đại).

3. Giả sử tồn tại đỉnh $s$ thì chèn nó vào giữa hai đỉnh $k$ và $l$ để nhận được một đường đi mới $Q'$ có độ dài lớn hơn đường đi trước đó một. Thay $S'$ bởi $S' \cup \{s\}, S''$ bởi $S'' \setminus \{s\}, Q$ bởi $Q'$ và lặp lại Bước 2.

Chú ý rằng, số phép toán cần thực hiện trong thuật toán này không vượt quá $O(n^3)$.

Ta sẽ chỉ ra rằng, kết thúc thuật toán thì $S'' = \emptyset$.

Thật vậy, giả sử ngược lại $S'' \neq \emptyset$.

Theo cách xây dựng của $P$, các đỉnh của $R$ không kề với một đỉnh của $S_1$ (vì nếu ngược lại, ta có thể tìm một $S-$đường đi mà các đỉnh đầu cuối của nó gần $\mu$ hơn $P$). Do đó, với mọi đỉnh $v_i \in R$ và mọi đỉnh $v_j \in S_1$ ta có

$$\delta_R(v_j) = \delta_{S_1}(v_i) = 0.$$

Mặt khác, vì $\mu$ là mạch tựa cực đại, đỉnh $v_i$ thoả mãn các giả thiết của Bổ đề 5.3.19 với đường đi con $\mu(x, y)$ sao cho

$$\delta_{S_2}(v_i) \leq \#S_2 + 1.$$

Chọn $v_j \in S'' \subset S_1$. Theo cách xây dựng của $Q$, áp dụng lại Bổ đề 5.3.19 với đỉnh $v_j$ và đường đi $Q$, ta được

$$\delta_{S'}(v_j) \leq \#S' + 1.$$

Mặt khác, ta cần có (như đã chứng minh trong Phần (2))

$$\delta_T(v_i) + \delta_T(v_j) \leq 2\#T$$

(ngược lại, ta có thể tìm một $S-$đường đi mà các đỉnh đầu cuối của nó gần $\mu$ hơn $P$).

Cuối cùng, ta luôn luôn có

$$\delta_{S''}(v_j) \leq 2\#S'' - 2, \quad \text{và} \quad \delta_R(v_i) \leq 2\#R - 2.$$

Suy ra

$$\delta(v_i) + \delta(v_j) \leq 2\#R + \#S_2 + 2\#S'' + \#S' - 2$$

và

$$\#S_2 \leq \#S' \Rightarrow \delta(v_i) + \delta(v_j) \leq 2n - 2$$

với hai đỉnh không kề nhau $v_i$ và $v_j$, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy $S'' = \emptyset$ và từ đường đi $Q$ với $S-$đường đi $P$ ta có thể xây dựng một mạch $\mu'$ có độ dài $\geq \#S + 1$.

(5) Trong tất cả các trường hợp (tham khảo các Phần (3) và (4) trên) khi $\#S < n$ ta có thể tìm (nhiều nhất $O(mn + n^3)$ phép toán sơ cấp) một mạch $\mu'$ có độ dài lớn hơn mạch

cũ 1. Trước khi lặp lại thuật toán, ta cần kiểm tra $\mu'$ có phải là mạch tựa cực đại. (Nếu không phải, xây dựng một mạch tựa cực đại $\mu''$ từ $\mu'$-đòi hỏi nhiều nhất $O(n^3)$ phép toán sơ cấp).

Sau nhiều nhất $(n-1)$ lần lặp mở rộng mạch, thuật toán cho chúng ta một mạch Hamilton của đồ thị $G$. Định lý 5.3.18 được chứng minh bằng thuật toán kiến thiết cách xây dựng mạch Hamilton với độ phức tạp thuật toán là $O(n^4)$. $\triangleleft$