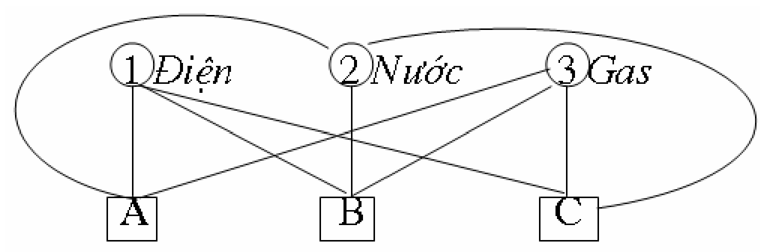
<u>BÀI 17</u>

Chương 10
Đồ thị phẳng

10.1. Bài toán ba biệt thự và ba nhà máy

Trong một thị trấn có ba biệt thự và ba nhà máy cung cấp: điện, nước và khí đốt. Mỗi biệt thự đều muốn mắc đường cáp điện ngầm, đường ống cấp nước, đường ống cấp khí đốt riêng từ nhà mình đến ba nhà máy mà không gặp đường ống của các biệt thự khác. Hỏi rằng có làm được những đường đi như thế hay không?



Hình 10.1. Ba biệt thự và ba nhà máy

Để giải quyết bài toán trên, ta sẽ sử dụng khái niệm đồ thị phẳng.

10.2. Đồ thị phẳng

Định nghĩa 10.1: Đa đồ thị vô hướng G được gọi là *đồ thị phẳng* nếu có thể biểu diễn nó trên mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau, trừ tại đỉnh.

Ví dụ, từ một bản đồ địa lý thế giới ta xây dựng một đồ thị với mỗi nước là một đỉnh, hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh nếu hai nước tương ứng có chung đường biên giới. Đồ thị nhận được là một đồ thị phẳng.

Giả sử G là một đồ thị phẳng được biểu diễn trên mặt phẳng.
Diện hữu hạn của một đồ thị phẳng là một miền kín của mặt phẳng được giới hạn bằng các cạnh của đồ thị sao cho có thể nối hai điểm bất kỳ thuộc diện này bằng một nét liền mà không gặp một cạnh nào ở bên trong.
Đồ thị còn có một *diện vô hạn*, đó là phần bù trên mặt phẳng của hợp các diện hữu hạn.

Ký hiệu: *h* là số diện hữu hạn của một đồ thị phẳng.

Ta sẽ thấy rằng, hệ chu trình đơn độc lập cực đại sẽ chia đồ thị phẳng thành các diện hữu hạn. Thật vậy:

Định lý 10.1: Số diện hữu hạn của một đa đồ thị phẳng G bằng chu số của đồ thị này.

Chứng minh: Quy nạp theo số diện hữu hạn h của G.

$h = 1$: chỉ có một chu trình đơn duy nhất, đó chính là biên của diện này. Suy ra chu số bằng 1.

$(h\ -1) \Rightarrow (h)$: Giả sử đồ thị phẳng G với n đỉnh, m cạnh và p mảng liên thông có h diện. Lập đồ thị G*'* từ G bằng cách bớt đi cạnh e nào đó trên biên của một diện để số diện hữu hạn bớt đi 1. Khi đó, G*'* có h-1 diện. Theo giả thiết quy nạp, chu số của G*'* là $h-1 = (m - 1) - n + p$ (p không đổi vì chỉ bớt đi một cạnh trên chu trình). Suy ra số diện hữu hạn của G là $h = m - n + p$ = chu số của G. □

Hệ quả 10.2: Nếu đa đồ thị phẳng G có n đỉnh, m cạnh, p mảng liên thông và h diện thì: $n - m + h = p + 1$ (công thức Euler tổng quát).

Chứng minh:

Số diện của đồ thị phẳng bằng số diện hữu hạn cộng thêm 1 (diện vô hạn) = chu số + 1. Vậy thì, $h = m - n + p + 1$. Do đó, $n - m + h = p + 1$ □

Hệ quả 10.3: Trong một đơn đồ thị phẳng có ít nhất một đỉnh có bậc không quá 5.

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát có thể giả thiết rằng đơn đồ thị là liên thông. Trong đơn đồ thị phẳng mỗi diện hữu hạn được giới hạn bởi ít nhất 3 cạnh, mà mỗi cạnh thuộc nhiều nhất là hai diện nên:

$$3h \le 2m \quad \Rightarrow \quad h \le \frac{2m}{3}.$$

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử mọi đỉnh của đồ thị G đều có bậc ít nhất là bằng 6. Khi đó, tổng tất cả các bậc của các đỉnh của trong G $= 2m \ge 6n$.

Do vậy: $m \ge 3n$ hay $n \le \dfrac{m}{3}$.

Theo công thức Euler thì: $n - m + h = 1 + p = 2$

Ta có: $2 \le \dfrac{m}{3} - m + \dfrac{2m}{3} = 0$. Suy ra điều vô lý. □

Các điều kiện cho tính phẳng của đồ thị

Với điều kiện nào đảm bảo cho một đồ thị là phẳng. Để trả lời cho câu hỏi này ta dựa vào một số khái niệm được định nghĩa dưới đây. Trước hết, ta có ngay những kết quả hiển nhiên sau đây.

Định lý 10.4:

Giả sử G là một đồ thị và G*'* là đồ thị con của nó.

Đồ thị G phẳng thì G*'* cũng phẳng.

Đồ thị G*'* không phẳng thì G cũng không phẳng.

Chứng minh: Hiển nhiên. □

Ký hiệu: δ là độ dài của chu trình ngắn nhất hoặc là số cạnh của đồ thị G nếu nó không có chu trình. Số δ được gọi là *đai* của đồ thị.

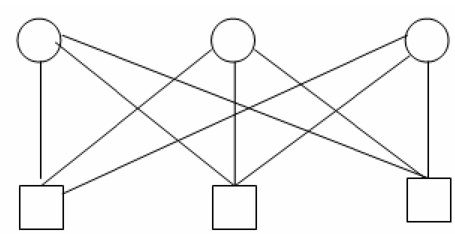
Định lý 10.5: Nếu đồ thị G là phẳng và đai của nó $\delta \geq 3$ thì

$$m \leq \frac{\delta}{\delta - 2}(n-2) .$$

Chứng minh:

Ta có: $h.\delta \leq 2m$. Do vậy theo công thức Euler thì $\delta.(m - n + 2) \leq 2m$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Ví dụ 10.2: (*Bài toán ba biệt thự và ba nhà máy*)



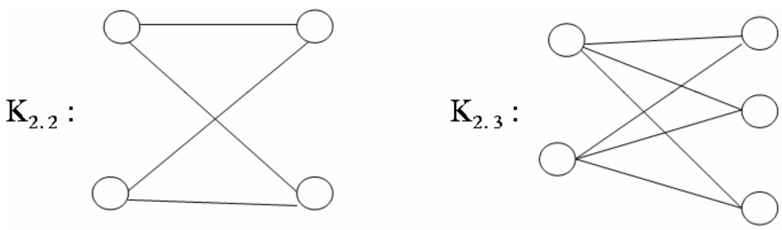
Hình 10.2. Đồ thị của bài toán *ba biệt thự và ba nhà máy*

Đai của đồ thị trên là δ = 4. Vậy thì:

$m = 9 > \frac{4}{4-2}(6-2) = 8$. Theo Định lý 10.5, đồ thị trên không phẳng.

Ví dụ 10.3:

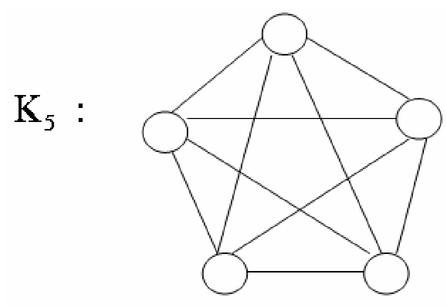
Đồ thị hai phần đầy đủ $K_{m,n}$ là một đơn đồ thị có $m+n$ đỉnh gồm m đỉnh “bên trái” và n đỉnh “bên phải” sao cho mỗi đỉnh “bên trái” đều kề với mọi đỉnh “bên phải”.



Hình 10.3. Các đồ thị hai phần phẳng

Hệ quả 10.6: Đồ thị hai phần đầy đủ $Km_{,n}$ là đồ thị phẳng khi và chỉ khi $m \le 2$ hoặc $n \le 2$.

Ví dụ 10.4*: Đồ thị đầy đủ 5 đỉnh*



Hình 10.3. Đồ thị đầy đủ 5 đỉnh

Đồ thị này có đai δ = 3. Vậy $m = 10 > \frac{3}{3-2}(5-2) = 9$. Do đó, đồ thị K_5 không phẳng. Từ đó suy ra, đồ thị đầy đủ K_n với $n \ge 5$ là không phẳng.
Chú ý rằng, đồ thị đầy đủ Kn với $n \le 4$ là đồ thị phẳng.

Từ đồ thị G*'* cho trước ta xây dựng đồ thị G bằng cách: Thêm vào G*'* các đỉnh mới và các cạnh mới. Đỉnh mới có thể nối với một đỉnh khác bằng một cạnh mới. Đỉnh mới cũng có thể đặt trên một cạnh cũ và chia cạnh này thành hai cạnh mới. Ta nói rằng, đồ thị G nhận được có chứa cấu hình G*'*. Hay đồ thị G*'* là một *cấu hình* của đồ thị G.
Chẳng hạn, đồ thị riêng của đồ thị là một cấu hình của đồ thị này.

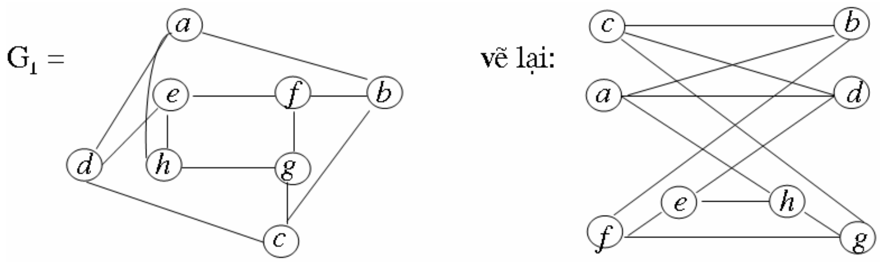
Định lý 10.7 (Kuratowski):

Đồ thị là phẳng khi và chỉ khi nó không chứa cấu hình $K_{3,3}$ hoặc K_5.

Ta có thể áp dụng định lý Kuratowski để xét tính chất phẳng của đồ thị.

Ví dụ 10.5: Xét các đồ thị sau đây.

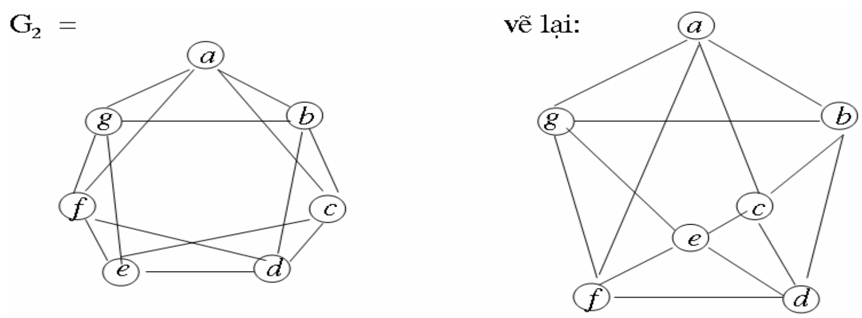
1)



Hình 10.4. Hai đồ thị đẳng hình chứa cấu hình $K_{3,3}$

Đồ thị này chứa cấu hình $K_{3,3}$. Do vậy, nó không phẳng.

2)



Hình 10.5. Hai đồ thị đẳng hình chứa cấu hình K_5

Đồ thị này chứa cấu hình K_5. Vậy nó là không phẳng.

Sắc số của đồ thị phẳng

Do đặc thù của đồ thị phẳng mà bài toán tô màu trên đồ thị phẳng trở nên rất lý thú.

Định lý 10.8 (Kemple - Heawood):

Mọi đồ thị phẳng không có đỉnh nút đều có sắc số không lớn hơn 5.

Chứng minh:

Ta chứng minh định lý bằng quy nạp theo số đỉnh n của đồ thị.

$n = 1, 2, 3, 4, 5$: Hiển nhiên đúng.

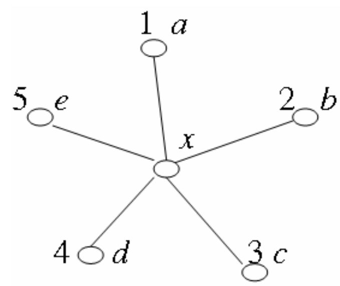
$(n\text{-}1) \Rightarrow (n)$: Theo Hệ quả 10.3, đồ thị G có ít nhất một đỉnh x với bậc không quá 5. Xây dựng đồ thị G*'* từ đồ thị G bằng cách bỏ đỉnh x . Theo giả thiết quy nạp, đồ thị G*'* có sắc số không vượt quá 5.

Lấy một cách tô màu nào đấy của G*'*.

Nếu các đỉnh kề với đỉnh x được tô bằng ít hơn 5 màu thì vẫn còn thừa màu để tô cho x. Sắc số của G bằng sắc số của G*'* (không vượt quá 5).

Vậy ta chỉ cần xét trường hợp đỉnh x kề với 5 đỉnh và các đỉnh kề với x được đánh số thứ tự theo chiều kim đồng hồ và tô bằng 5 màu như Hình 10.6 dưới đây. Khi đó, ta phải đổi màu của các đỉnh trên để dành ra màu cho đỉnh x.

Xét tất cả các đường đi trong G bắt đầu từ đỉnh a và gồm các đỉnh chỉ tô bằng màu 1 và màu 3. Trong các đường này nếu không có đường nào đi qua đỉnh c thì ta có thể tráo đổi màu 1 với màu 3 cho tất cả các đỉnh trên các đường đi ấy. Sau đó, ta tô màu 1 cho đỉnh x.



Hình 10.6. Năm đỉnh kề với 5 màu

Ngược lại, nếu có một đường đi từ a đến c gồm toàn các đỉnh được tô bằng các màu 1 và màu 3 thì đường này cùng với hai cạnh (c,x) và (x,a) sẽ tạo thành một chu trình trong G. Do tính chất phẳng của đồ thị G nên hai đỉnh b và d không thể cùng nằm bên trong hoặc cùng nằm bên ngoài chu trình này được. Suy ra không có đường đi nào nối b với d gồm các đỉnh chỉ tô bằng màu 2 và màu 4. Vậy ta lại có thể tráo đổi màu 2 với màu 4 cho tất cả các đỉnh trên các đường đi qua đỉnh b. Khi đó, hai đỉnh b và d có cùng màu 4. Ta tô màu 2 cho đỉnh x.

Định lý được chứng minh. □

Bài toán bốn màu

Bài toán bốn màu xuất hiện vào những năm năm mươi của thế kỷ 19. Một thương gia người Anh tên là Gazri, khi tô màu bản đồ hành chính của nước mình, đã nhận ra rằng luôn có thể tô được bằng 4 màu. Năm 1852 ông ta đã thông báo giả thuyết này cho De Morgan và năm 1878 Keli đã đăng bài toán trên trong Tuyển tập các công trình của Hội Toán học Anh, gây nên sự chú ý của rất nhiều người.

Mãi đến tận năm 1976, ba nhà khoa học người Mỹ là K. Appel, W. Haken và J. Koch mới chứng minh bằng máy tính điện tử được rằng giả thuyết của Gazri là đúng.

Định lý 10.7 (Appel - Haken):

Mọi đồ thị phẳng không có đỉnh nút đều có sắc số không quá 4.

Dễ thấy rằng, đồ thị vô hướng đầy đủ K_n ($n \geq 5$) có sắc số lớn hơn 4 nên không phẳng.