Kuratowski's Theorem

(Toán rời rạc)

Nguyễn Đức Huy *
Departement
Đại học Khoa học Tự Nhiên
mail@edu

Trần Thị Như Quỳnh †
Departement
Đại học Khoa học Tự Nhiên
mail@edu

Bùi Khánh Duy ‡
Departement
Đại học Khoa học Tự Nhiên
mail@edu

Ngày 7 tháng 6 năm 2021

Tóm tắt nội dung

Đây là tóm tắt [1]

*K64 ...
†K65 ...
‡K65 ...

Mục lục

1 Mở đầu

Đôi lời phát biểu, thêm sau

2 Định nghĩa

Vài cái định nghĩa cơ bản, thêm sau

Định nghĩa 1 (Đồ thị)**.** *Một đồ thị $G(V(G), E(G))$ gồm tập $V \neq \varnothing$ là tập hợp các đỉnh và tập $E(G)$ được gọi là tập cạnh, môi cạnh nối 2 đỉnh là 2 thành phần của $V(G)$. $|V(G)|$ là số đỉnh trong tập kí hiệu bởi ν và $|E(G)|$ là số cạnh kí hiệu bởi ϵ*

Định nghĩa 2 (Khuyên)**.** *Khuyên là một cạnh bắt đầu và kết thúc tại cùng 1 đỉnh*

Định nghĩa 3. *Đồ thị vô hướng $G(V(G), E(G))$ gọi là đơn đồ thị nếu mỗi cặp đỉnh khác nhau $a, b \in V(G)$ được nối với nhau bởi không quá một cạnh và mọi đỉnh đều không có khuyên*

Định nghĩa 4. *Một đỉnh là liên thuộc với một cạnh nếu đỉnh đó là một trong 2 đầu mút của cạnh; hai đỉnh được gọi là kề nhau nếu chúng được nối bởi 1 cạnh. Bậc của một đỉnh v, kí hiệu bởi $deg(v)$, là số các cạnh kề với v, trong đó khuyên được tính như hai cạnh. Bậc của đồ thị là tổng bậc tất cả các đỉnh. Ta gọi $\delta = \min_{v \in V}(degv)$ và $\Delta = \max_{v \in V}(degv)$*

Định nghĩa 5. *Một đường đi W trong G là một dãy luân phiên các đỉnh và cạnh, biểu thị bởi $W = v_0e_1v_1e_2....v_ke_k$ trong đó $e_i (i \in [1, k], i \in \mathbb{N})$ nối giữa đỉnh v_{i-1} và v_i. Một đường đi mà tất cả cách cạnh e_i khác nhau gọi là đường đi đơn. Hơn nữa, nếu tất các đỉnh v_i phân biệt thì W là đường đi sơ cấp. Đồ thị G liên thông nếu tồn tại một đường đi sơ cấp nối giữa mọi cặp đỉnh trong G*

Một đường đi là đường đi đóng nếu nó có độ dài dương và điều đầu trùng điểm cuối.

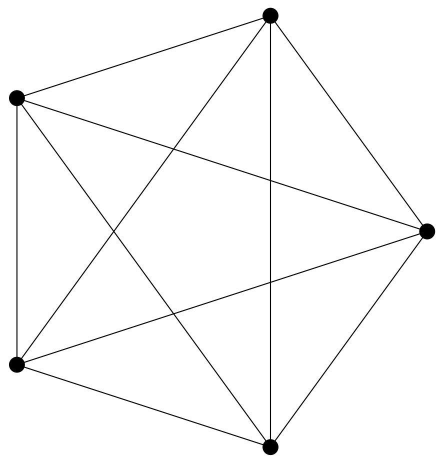
Một dường đi đơn đóng với các đỉnh phân biệt được gọi là chu trình.

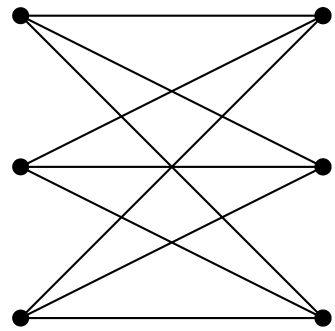
Định nghĩa 6. *H là đồ thị con của G nếu $V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$ và đầu mút các cạnh trong $E(H)$ thuộc $V(H)$. Hơn nữa, nếu H là một đồ thị con liên thông cực đại thì H là một thành phần liên thông của G. Số các thành phần liên thông của G được biểu diễn bởi $\omega(G)$. Một cạnh e được gọi là cầu nếu $\omega(G - e) > \omega(G)$*

Định nghĩa 7. *Đồ thị đầy đủ là đồ thị mà mỗi cặp đỉnh được nối với nhau bởi duy nhất một cạnh. Kí hiệu K_m là đồ thị đầy đủ m đỉnh*

Đồ thị G là đồ thị phân đôi nếu tập đỉnh V của nó có thể chia thành hai tập con khác rỗng X và Y sao cho mọi cạnh trong G nối một đỉnh trong X với một đỉnh trong Y

Đồ thị G là đồ thị phân đôi đầy đủ nếu $\forall x \in X, y \in Y$ thì x được nối với y bởi một cạnh duy nhất Khi X chứa m đỉnh, Y chứa n đỉnh thì G kí hiệu bởi $K_{m,n}$





K_5 $K_{3,3}$

Định lý. *Cho đồ thị G với tập đỉnh V và tập cạnh E,*

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2\epsilon$$

Chứng minh. Giả sử $x, y \in V$ và $(x, y) \in E$

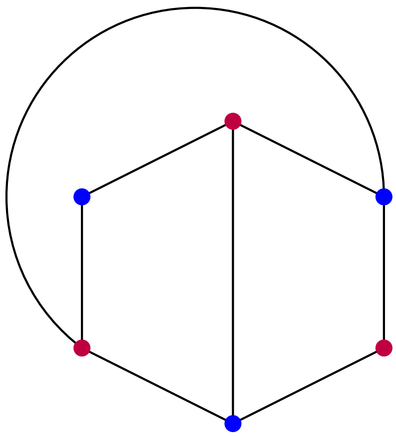
Với $x \neq y$, khi đó nếu xóa cạnh (x, y) thì bậc của đồ thị giảm đi 2. Nếu ta xóa tất cả các cạnh như trên thì đồ thị còn lại chỉ gồm các đỉnh cô lập và các đỉnh có khuyên.

Tại mỗi đỉnh x có khuyên, nếu ta xóa khuyên, thì bậc của đồ thị cũng sẽ giảm đi 2

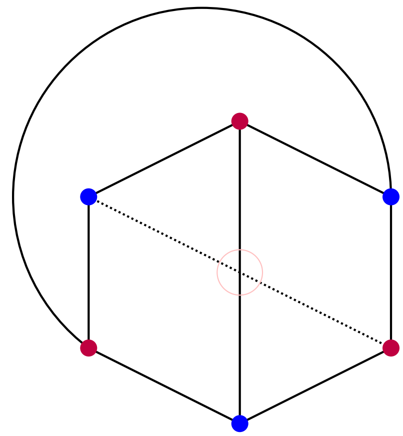
Như vậy, sau khi xóa 1 cạnh nối 2 đỉnh khác nhau hoặc xóa 1 khuyên, thì bậc của đồ thị giảm đi 2. Sau khi xóa tất cả cách cạnh và các khuyên của đồ thị, thì đồ thị chỉ còn lại các đỉnh cô lập nên bậc đồ thị bằng 0.

Từ đó, suy ra điều phải chứng minh □

Định nghĩa 8. *Đồ thị phẳng là đồ thị mà ta có thể vẽ nó trên một mặt phẳng, biểu diễn đỉnh bởi các điểm và cạnh bởi các đường nối các điểm, sao cho cho các cạnh chỉ giao nhau tại các đầu mút. Cách vẽ như vậy được gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị.*



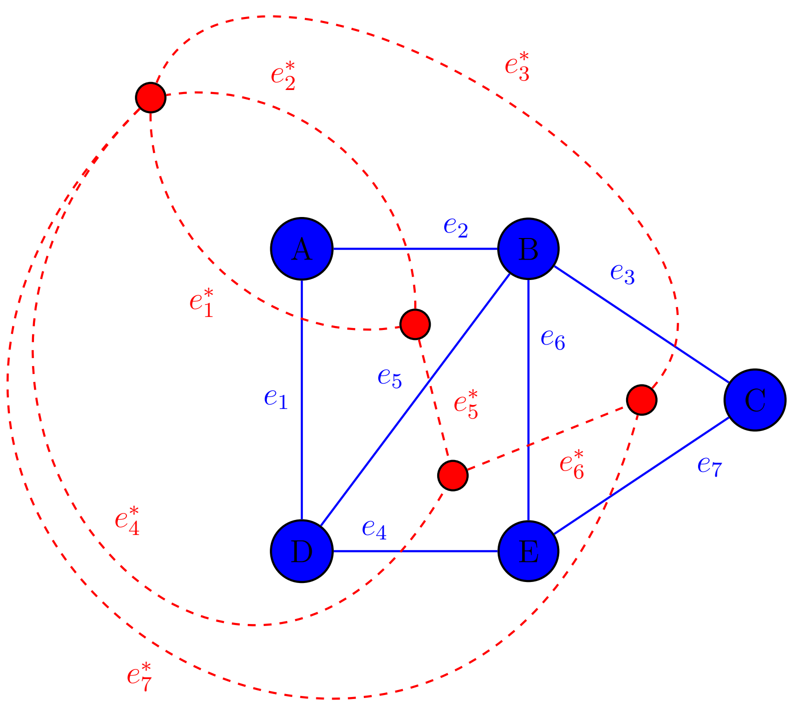
Biểu diễn phẳng



Không phải biểu diễn phẳng

Định nghĩa 9. *Không gian khép kín được phân vùng bởi biểu diễn phẳng được gọi là diện. Số diện của đồ thị kí hiệu bởi ϕ. Trong biểu diễn phẳng của đồ thị, bậc của diện f, kí hiệu $deg(f)$, là số cạnh liên thuộc với f, với cầu được đếm hai lần.*

Định nghĩa 10. *Đồ thị đối ngẫu của đồ thị phẳng G, kí hiệu G^* được xây dựng bằng cách: mỗi đỉnh v^* trong G^* tương ứng với một diện f trong G và mỗi cạnh e^* trong G^* tương ứng với một cạnh e trong G. 2 đỉnh trong G^*, u^* và w^*, được nối bởi cạnh e^* khi và chỉ khi chúng tương ứng với 2 diện trong G, f và g, được phân chia bởi e.*



Đồ thị G^* (Đỏ) là đối ngẫu của đồ thị G (Xanh) và ngược lại

Định lý. *Cho đồ thị phẳng G, $F(G)$ là tập hợp các diện của G, biểu thức sau luôn đúng:*

$$\sum_{f \in F(G)} deg(f) = 2\epsilon$$

Chứng minh. Xét đồ thị đối ngẫu G^* của G. Từ dịnh lý này, ta có:

$$\sum_{v^* \in V^*} deg(v^*) = 2\epsilon^*$$

Từ định nghĩa đồ thị đối ngẫu, $\forall finF(G), deg(f) = deg(v^*)$ và $\epsilon = \epsilon^*$. Vậy nên

$$\sum_{f \in F(G)} deg(f) = \sum_{v^* \in V^*} deg(v^*) = 2\epsilon^* = 2\epsilon$$

□

Định lý (Euler's formula)**.** $\nu - \epsilon + \phi = 2$ *for convex polyhedra*

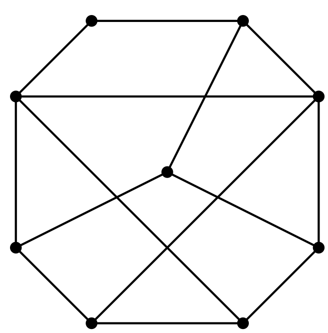
But we will generalize it to planar graphs by using stereographic projection

First, we see that we can take a graph embedded on the surface of a sphere and under stereographic projection get a planar graph

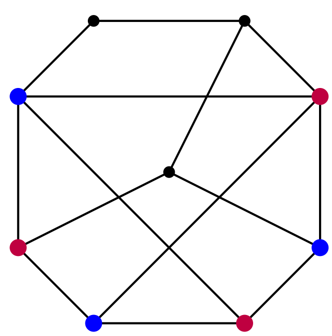
Định nghĩa 11 (Planarity)**.** *A graph is planar if some embedding of it onto the plane has no edge intersections.*

3 Phát biểu định lý

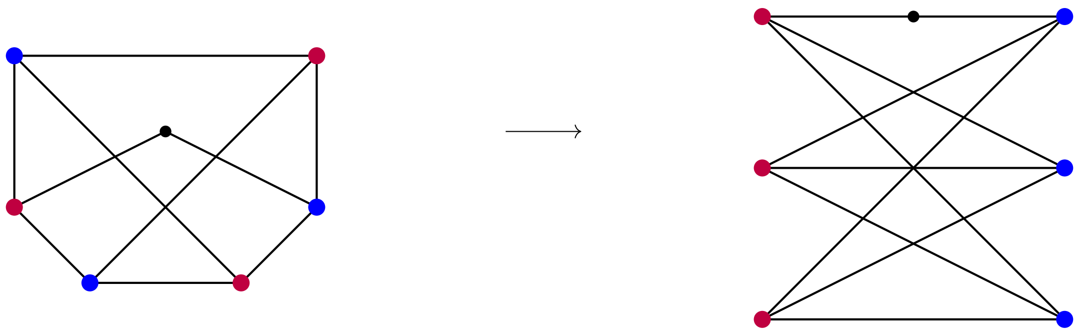
Định lý (Kuratowski)**.** *Một đồ thị phẳng khi và chỉ khi không chứa bất kỳ đồ thị con nào là subdivision của K_5 hoặc $K_{3,3}$*



Nonplanar graph G



Nonplanar graph G



Subgraph of G

Subdivision of $K_{3,3}$

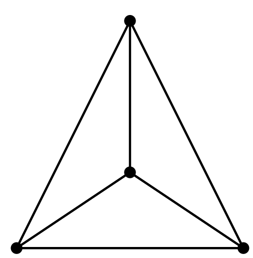
4 Preliminaries

4.1 Planar Graphs and their Properties

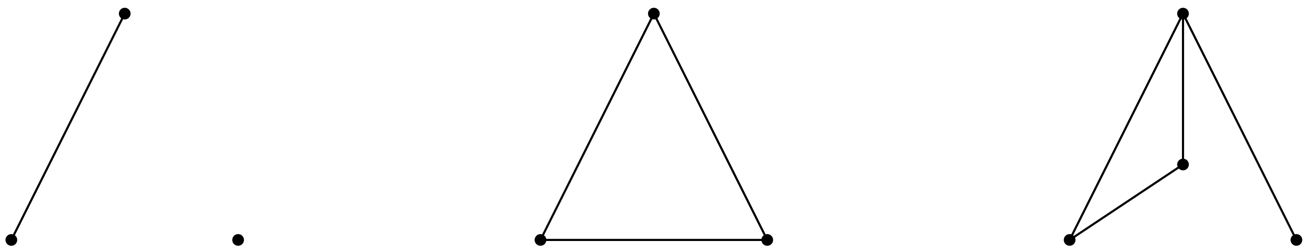
4.2 Define K_5 and $K_{3,3}$

4.3 Subgraph and Subdivision

Định nghĩa 12. *Subgraphs are subsets of vertices and egdes of some original graphs*



Original graph



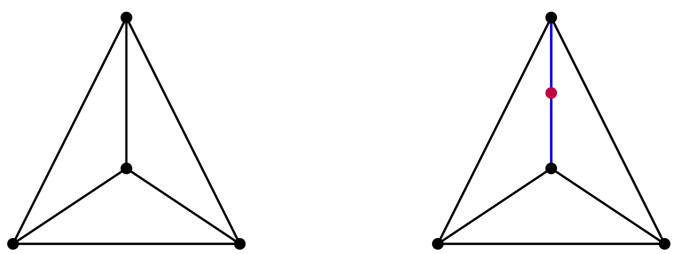
3 Subgraphs

Hệ quả 1. *If graph is planar then all subgraphs are planar*

Chứng minh. Contradiction □

Định nghĩa 13. *Subdivisions are obtained by replacing an edge with 2 edges connected by a new vertex*

Chứng minh. □



Original graph Subdivision graph

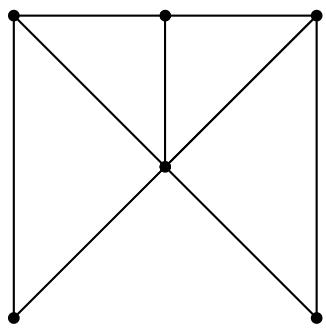
Hệ quả 2. *If some subdivision is planar then graph is planar*

Chứng minh. Ai biết đâu. □

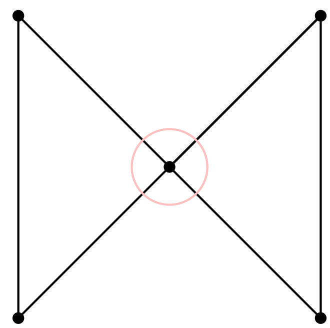
Bổ đề 1. *If graph is nonplanar then all subdivisions are nonplanar*

4.4 2-Connected Graphs and their Properties

Định nghĩa 14. *A graph is 2-connected if it cannot be separated into two components by removing a single vertex*



Example 2-connected graph

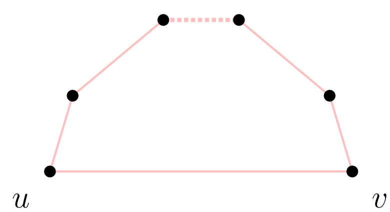


Not 2-connected

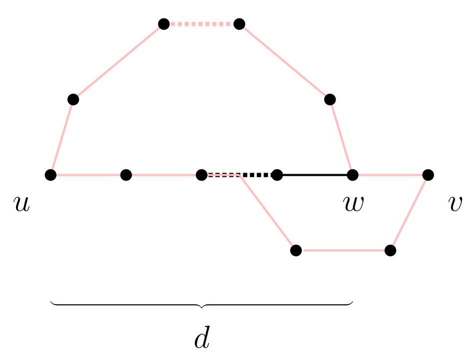
Định lý. *In a 2-connected graph, any pair of vertices is contained in a cycle*

Chứng minh. Quy nạp:

Trường hợp cơ bản: u kề v



Quy nạp: u, v có khoảng cách $d + 1$



□

5 Graph Theory Background

6 Proof the Theorem

(⇒) Nếu đồ thị G chứa đồ thị con là subdivision của K_5 hoặc $K_{3,3}$ thì G không phẳng.

Chứng minh. Ta có:

- Subdivision của đồ thị không phẳng thì không phẳng
- Nếu một đồ thị con không phẳng thì đồ thị không phẳng
- Nếu một đồ thị con của đồ thị G là subdivision của đồ thị không phẳng thì G không phẳng

Bổ đề 2. *$K_{3,3}$ is không phẳng*

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh bằng phản chứng.

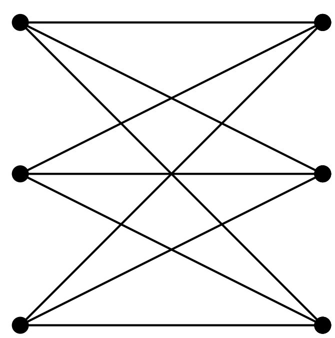
Giả sử tồn tại một biểu diễn phẳng của $K_{3,3}$. Trong đồ thị phân đôi đơn, chiều dài nhỏ nhất của chu trình là 4, nghĩa là với mọi $f \in F(K_{3,3})$

$$deg(f) \geq 4$$

Lại có

$$\sum_{f \in F(K_{3,3})} deg(f) = 2\epsilon$$

$$V - E + F = 2$$
$$6 - E + F = 2$$
$$6 - 9 + F = 2$$
$$F = 5$$



$$4F \leq 2E$$
$$4F \leq 2 \times 9$$
$$F \leq 4.5$$

$$5 \leq 4.5$$

□

Bổ đề 3. *K_5 is không phẳng*

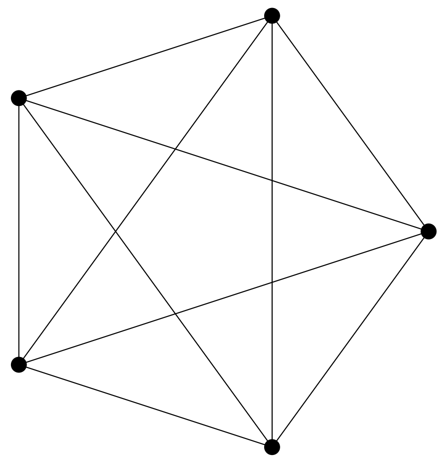
Chứng minh. Giả sử tồn tại một biểu diễn phẳng của $K_{3,3}$. Trong đồ thị phân đôi đơn, chiều dài nhỏ nhất của chu trình là 4, nghĩa là với mọi $f \in F(K_{3,3})$

$$deg(f) \geq 3$$

Lại có

$$\sum_{f \in F(K_{3,3})} deg(f) = 2\epsilon$$

$$V - E + F = 2$$
$$5 - E + F = 2$$
$$5 - 10 + F = 2$$
$$F = 7$$



$$3F \leq 2E$$
$$3F \leq 2 \times 10$$
$$F \leq \frac{20}{3}$$

$$7 \leq \tfrac{20}{3}$$

$\square$

Tóm lại.

K_5 và $K_{3,3}$ là không phẳng
$\Rightarrow$ Tất cả subdivisions của chúng đều không phẳng
$\Rightarrow$ Nếu đồ thị G chứa đồ thị con là subdivision của K_5 hoặc $K_{3,3}$ thì G không phẳng

$\square$

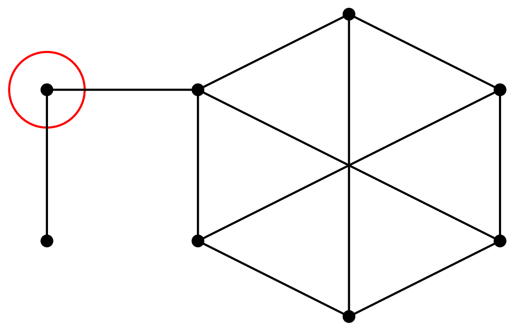
($\Leftarrow$) Nếu đồ thị G không phẳng thì G chứa subdivision của K_5 hoặc $K_{3,3}$

Chứng minh. Giả sử tồn tại đồ thị không phẳng mà không chứa đồ thị con là subdivisions của K_5 hoặc $K_{3,3}$.

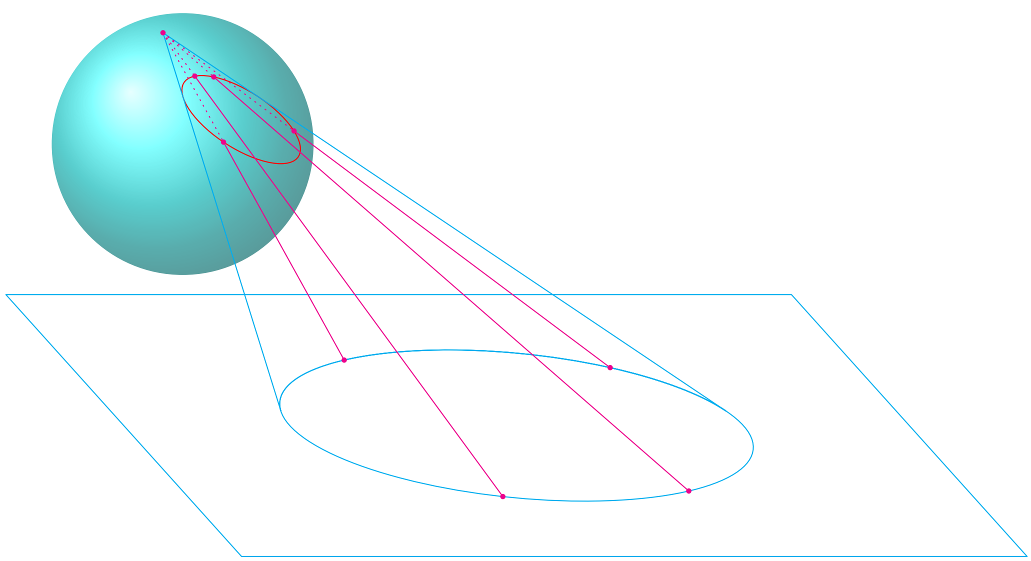
Cho G là đồ thị có *ít cạnh nhất*. Khi loại bỏ một cạnh bất kì của G thì ta được đồ thị *phẳng*.

Giả sử G có nhiều thành phần liên thông, dễ thấy G phải có một thành phần liên thông không phẳng. Gọi thành phần liên thông đó là K. Rõ ràng $\epsilon(K) \leq \epsilon(G)$ và K không chứa K_5 và $K_{3,3}$. Khi K ít cạnh hơn G, G sẽ không phải đồ thị không phẳng *ít cạnh nhất*, mâu thuẫn, do đó $\epsilon(K) = \epsilon(G)$ và các thành phần liên thông khác K của G đều chỉ gồm đỉnh cô lập. Không mất tính tổng quát, giả sử G liên thông.

1. G là 2-connected



Chứng minh. Vì G liên thông nên $\kappa(G) \geq 1$. Giả sử $\kappa(G) = 1$, theo định nghĩa, tồn tại đỉnh v sao cho $G - v$ không liên thông. Không mất tính tổng quát, giả sử $G - v$ có 2 thành phần liên thông H_1 và H_2. Ta có $H_1 \cup v$ và $H_2 \cup v$ đều phẳng vì tính cực tiểu của G. Trong biểu diễn phẳng của chúng, ta có thể tìm một diện f mà biên chứa đỉnh v. Với phép chiếu lập thể, ta có thể thu được biểu diễn phẳng của $H_1 \cup v$ và $H_2 \cup v$ mà v nằm trên đường biên của diện không bị chặn. Bằng cách đặt điểm ở vô cùng. Sau đó, ta gộp $H_1 \cup v$ và $H_2 \cup v$ bằng cách hợp nhất v và thu được một biểu diễn phẳng của G. Vô lý.



Ví dụ phép chiếu lập thể từ mặt cầu đến mặt phẳng

Vậy, nếu G là đồ thị không phẳng cực tiểu thì G 2-connected.

$\square$

2. Nếu G là đồ thị không phẳng *ít cạnh nhất* và xy là một cạnh của G thì $G - xy$ 2-connected

Chứng minh. Vì G 2-connected nên $\kappa(G) \geq 2$. Giả sử $\kappa(G) = 2$ thì tồn tại 2 đỉnh x, y sao cho $G - \{x, y\}$ không liên thông. Gọi các thành phần liên thông của $G - \{x, y\}$ là $H_1, H_2, \ldots, H_k$. Xây dựng tập $M_1, M_2, \ldots, M_k$ trọng đó $M_i = H_i \cup \{x, y\} + xy$. Ta sẽ chỉ ra tồn tại $M_j (1 \geq j \geq k)$ không phẳng.

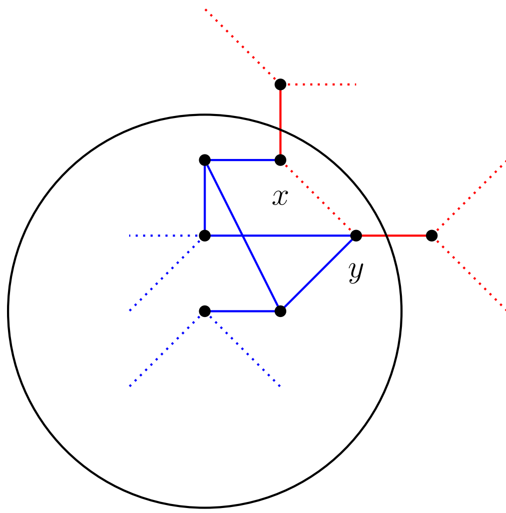
Giả sử tất cả $M_i (1 \geq i \geq k)$ đều phẳng, do đó tồn tại biểu diễn phẳng của mỗi chúng. Với phép chiếu lập thể, ta luôn có một biểu phẳng sao cho xy là biên của diện vô hạn. Vì $\{x, y\}$ và xy là phân chung duy nhất của các M_i, do đó, ta có thể hợp nhất biểu diễn phẳng của chúng, thu được biểu diễn phẳng của $G + xy$. Nghĩa là $G + xy$ phẳng, nên G cũng phẳng. Vô lý, do đó tồn tại $M_j (1 \geq j \geq k)$ không phẳng.

Giả sử $H_p (1 \geq p \geq k)$ là một thành phần liên thông của G. Nếu trong 2 đỉnh x, y không có đỉnh nào nối với H_p, khi đó, H_p là một thành phần liên thông, hay G không liên thông, vô lý. Nếu trong 2 đỉnh x, y có một đỉnh nối tới H_p, giả sử x, thì khi xóa đỉnh x, $G - x$ không còn liên thông, hay $\kappa(G) = 1$, vô lý. Vậy cả x và y đều có cạnh nối tới H_p hay có ít nhất 2 cạnh từ $\{x, y\}$ nối đến H_p

Ta có:

$$\begin{aligned}
\epsilon(G) &\geq \epsilon(H_j + \{x, y\}) + \epsilon(H_p + \{x, y\}) \\
&\geq \epsilon(H_j + \{x, y\}) + 2 \\
&> \epsilon(H_j + \{x, y\}) + 1 \\
&= \epsilon(H_j + \{x, y\} + xy) = \epsilon(M_j)
\end{aligned}$$

Cuối cùng thì $\epsilon(M_j) < \epsilon(G)$. Vì G là đồ thị ít cạnh nhất không chứa subdivision K_5 và $K_{3,3}$, M_j không phẳng và ít cạnh hơn G, nên M_j phải chứa subdivision của K_5 hoặc $K_{3,3}$. Suy ra M_j không phải đồ thị con của G. Lại có $M_j - xy$ là đồ thị con của G nghĩa là G không chứa cạnh xy. Ta hợp nhất $M_j - xy$ với $M_p - xy$ bằng cách hợp nhất đỉnh x và đỉnh y, ta thu được một đồ thị con của G. Do $M_p - xy$ liên thông nên tồn tại một path giữa x và y, kết hợp path này với $M_j - xy$ ta được một subdivision của K_5 hoặc $K_{3,3}$.



Xanh: $M_j - xy$
Đỏ: $M_p - xy$

Dẫn đến G chứa subdivision của K_5 hoặc $K_{3,3}$. Vô lý
$\Rightarrow \kappa(G) \geq 3$ hay G 3-connected. $\square$

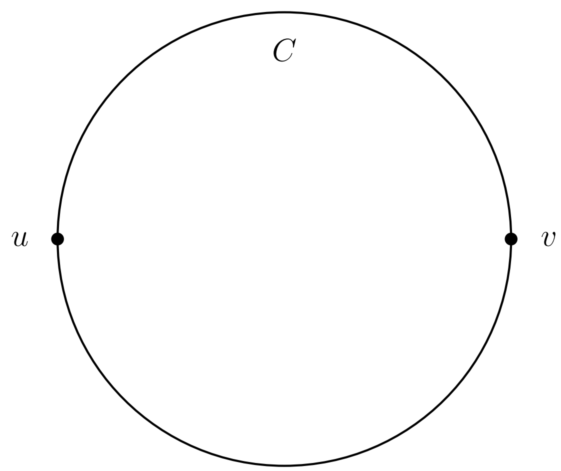
Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra với mọi cặp đỉnh $a, b \in V(G - uv)$, tồn tại một chu trình đi qua chúng. Ta sẽ chứng minh qua 3 trường hợp.

- $\{a, b\} = \{u, v\}$. Rõ ràng $\nu(G) \geq 4$?? :D ??. Chọn bừa 2 đỉnh c và d trong đồ thị $G - uv$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = u$. Vì G 3-connected nên loại bỏ 2 đỉnh không làm mất tính liên thông của G. nghĩa là khi loại bỏ v và d, vẫn còn một path nối giữa u và c. Nói cách khác, có một path P_1 giữa u và c không đi qua v và d. Tương tự, có một path P_2 giữa c và v không đi qua u và d, một path P_3 giữa v và d không đi qua u và c, một path P_4 giữa d và u không đi qua v và c. Khi đó, ta có u và v cùng nằm trên một chu trình $u - P_1 - c - P_2 - v - P_3 - d - P_4 - u$.
- Có duy nhất 1 đỉnh trong $\{a, b\}$ là u hoặc v. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = u$ và $b \neq v$. Chọn bừa 1 điểm $c \neq b$ không trùng u và v. Tương tự trường hợp trên, tồn tại một path P_1 giữa u và b không đi qua c và v, một path P_2 giữa c và b không đi qua u và v, một path P_2 giữa c và u không đi qua u. Ta lại thu được một chu trình $u - P_1 - b - P_2 - c - P_3 - u$, chu trình này chứa cả u và b.
- Cả a, b đều không trùng u, v. Lại một lần nữa, tương tự trường hợp trên, tồn tại một path P_1 giữa a, b không đi qua u, v, một path P_2 giữa b, v không đi qua u, a, một path P_1 giữa v, a không đi qua u, b. Ta thu được chu trình $a - P_1 - b - P_2 - v - P_3 - a$ chứa cả a và b.

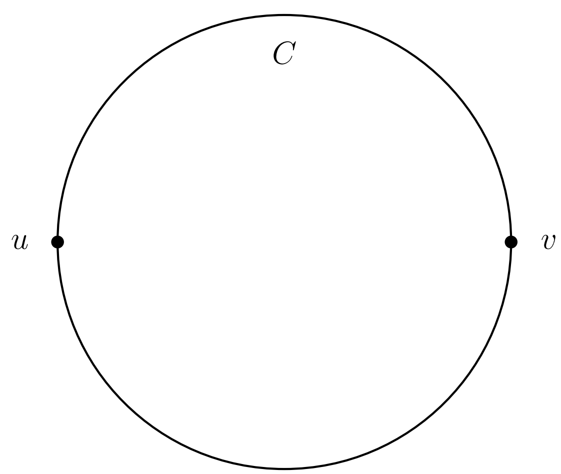
Từ 3 trường hợp trên, luôn có một chu trình đi qua a, b trong $G - uv$, nên $G - uv$ phải 2-connected.

Xét đồ thị $G - uv$ thu được bằng cách bỏ cạnh uv từ G
$G - uv$ là đồ thị phẳng
$G - uv$ là 2-connected, nên tồn tại chu trình đi qua u và v.

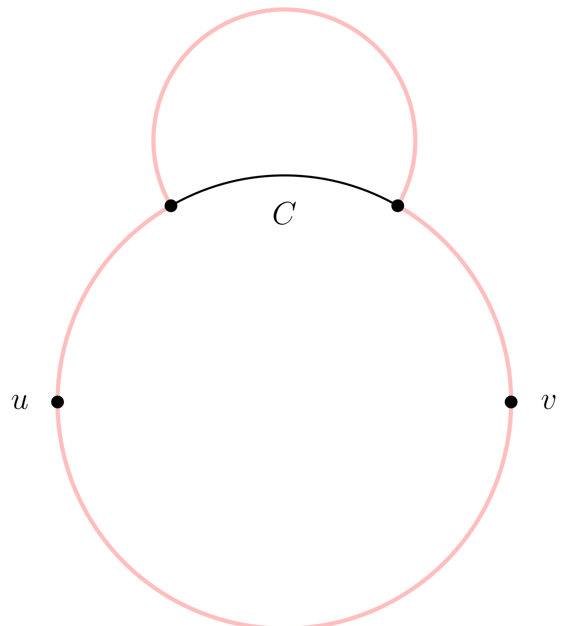
Nhận xét. *Chú ý những cạnh chúng tôi vẽ dưới đây là những path trong đồ thị.*



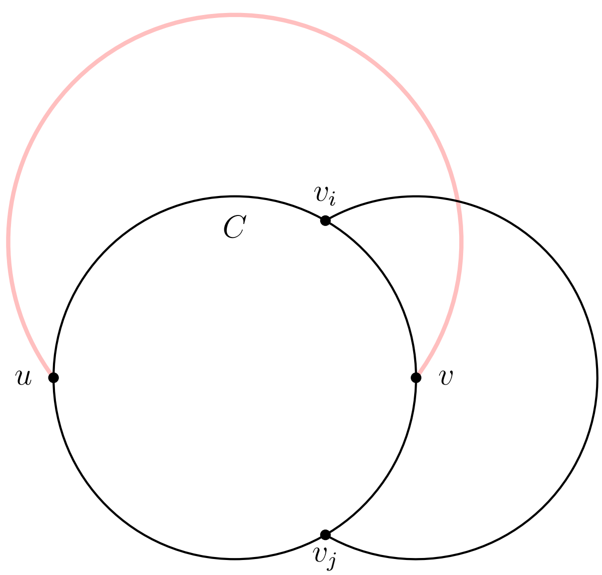
Gọi C là chu trình dài nhất chứa u, v



Có một biểu diễn phẳng củ G sao cho C chiếm nhiều diện tích nhất trong tất cả các chu trình chứa u và v



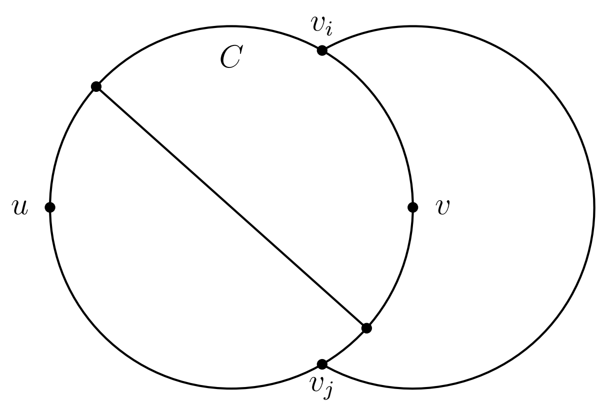
Ta không thể có extra paths ở phần trên hay dưới C vì nó sẽ tạo ra chu trình chiếm nhiều diện tích hơn C, mâu thuẫn.



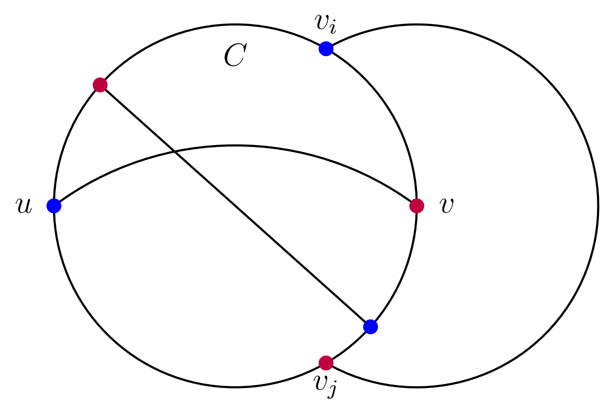
G không phẳng, nên ta có một obstruction uv ở phía ngoài của C. There must exist a path v_iv_j that blocks uv

Phía trong của C cũng cần có một obstruction. Cái obstruction này cũng phải block v_iv_j và uv from being draw inside of C since otherwise we could just draw it inside and draw uv on the outside.

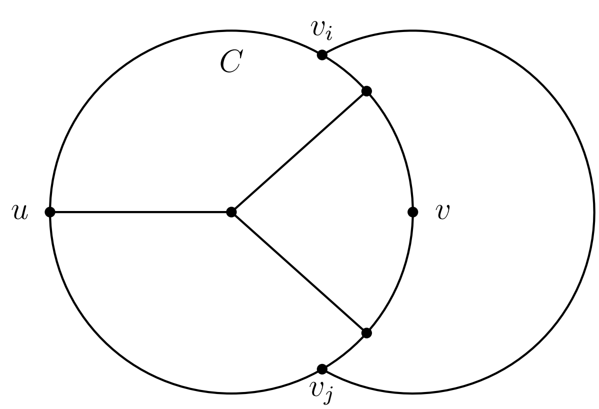
Tương đương, Ta có 4 loại obstructions tổng quát được miêu tả dưới đây.



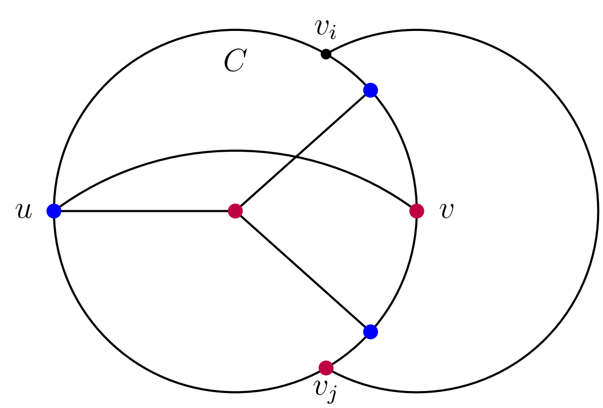
Obstruction 1



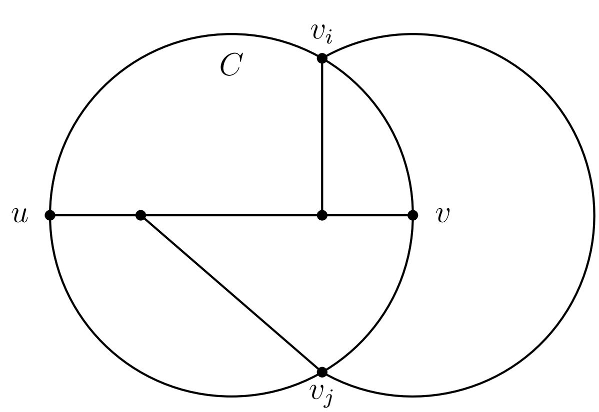
G chứa một subdivision của $K_{3,3}$



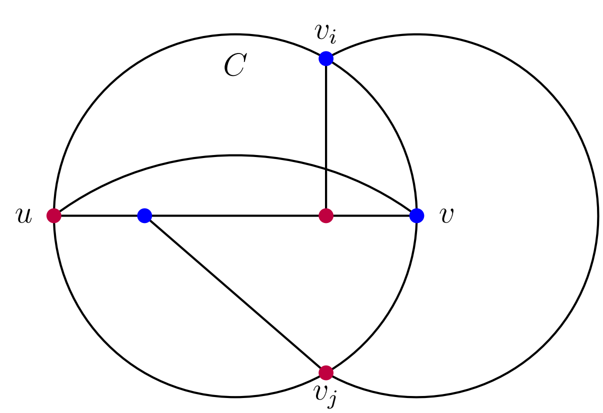
Obstruction 2



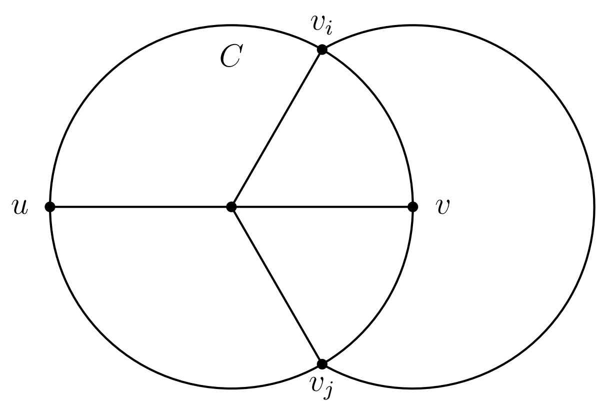
G chứa một subdivision của $K_{3,3}$



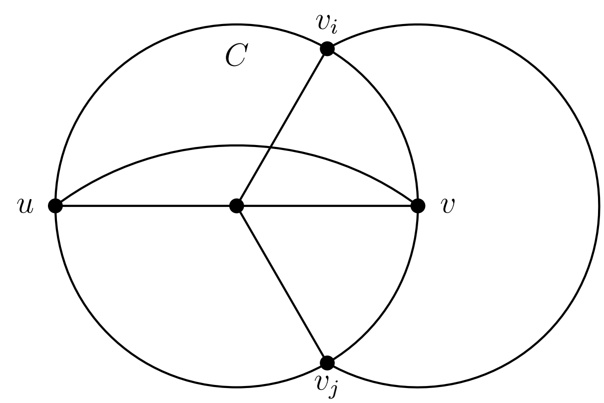
Obstruction 3



G chứa một subdivision của $K_{3,3}$



Obstruction 4



G chứa một subdivision của K_5

Nhận xét. *G luôn có một đồ thị con là subdivision của K_5 hoặc $K_{3,3}$*

Kết quả của 4 trường hợp trên đều mâu thuẫn với giả thiết. Từ đây, ta kết luận rằng, không tồn tại đồ thị nào như G. Định lý được chứng minh. □

Acknowledgement

We would like to thank:

- Người hướng dẫn, Nguyễn Hải Vinh, vì sự hướng dẫn.
- Giáo sư Antti Laaksonen đã giới thiệu chúng tôi đến với Lý thuyết đồ thị.
- 3Blue1Brown vì thư viện Python manim.
- Nhóm của David Cabatingan vì những lưu ý về Định lý Kuratowski
- Ai đấy xây nên cái trường HUS.