Mục lục

Lời nói đầu

Trong thực tế để miêu tả một số tình huống người ta thường biểu thị bằng một hình ảnh gồm các điểm (các đỉnh)-biểu diễn các thực thể-và vẽ các đoạn thẳng nối cặp các đỉnh biểu diễn mối quan hệ giữa chúng. Những hình như thế thường gọi là các *đồ thị*. Mục đích của giáo trình này cung cấp những kiến thức cơ bản để nghiên cứu các đồ thị. Các đồ thị xuất hiện trong nhiều lĩnh vực với các tên gọi khác nhau: "cấu trúc" trong công trình xây dựng, "mạch" trong điện tử, "lược đồ quan hệ", "cấu trúc truyền thông", "cấu trúc tổ chức" trong xã hội và kinh tế, "cấu trúc phân tử" trong hoá học, vân vân.

Do những ứng dụng rộng rãi của nó trong nhiều lĩnh vực, có rất nhiều nghiên cứu xung quanh lý thuyết đồ thị trong những năm gần đây; một nhân tố chủ yếu góp phần thúc đẩy sự phát triển đó là xuất hiện các máy tính lớn có thể thực hiện nhiều phép toán với tốc độ rất nhanh. Việc biểu diễn trực tiếp và chi tiết các hệ thống thực tế, chẳng hạn các mạng truyền thông, đã đưa đến những đồ thị có kích thước lớn và việc phân tích thành công hệ thống phụ thuộc rất nhiều vào các thuật toán "tốt" cũng như khả năng của máy tính. Theo đó, giáo trình này sẽ tập trung vào việc phát triển và trình bày các thuật toán để phân tích các đồ thị.

Các phương pháp phân tích và thiết kế các thuật toán trong giáo trình cho phép sinh viên có thể viết dễ dàng các chương trình minh họa. Giáo trình được biên soạn cho các đối tượng là sinh viên Toán-Tin và Tin học.

Giáo trình sử dụng ngôn ngữ C để minh họa, tuy nhiên có thể dễ dàng chuyển đổi sang các ngôn ngữ khác; và do đó, sinh viên cần có một số kiến thức về ngôn ngữ C. Ngoài ra, hầu hết các chương trình thao tác trên cấu trúc dữ liệu như danh sách liên kết, nên đòi hỏi sinh viên phải có những kỹ năng lập trình tốt.

Giáo trình bao gồm bảy chương và một phần phụ lục với những nội dung chính như sau:

- Chương thứ nhất trình bày những khái niệm căn bản về đồ thị.
- Chương 2 trình bày những số cơ bản của đồ thị. Ý nghĩa thực tiễn của các số này.

- Chương 3 tìm hiểu bài toán tìm đường đi ngắn nhất.
- Chương 4 đề cập đến khái niệm về cây. Ứng dụng của cây Huffman trong nén dữ liệu. Ngoài ra xây dựng các thuật toán tìm cây bao trùm nhỏ nhất.
- Bài toán Euler và bài toán Hamilton và những mở rộng của chúng sẽ được nói đến trong Chương 5.
- Chương 6 nghiên cứu các tính chất phẳng của đồ thị; và cuối cùng
- Chương 7 tìm hiểu các bài toán trên mạng vận tải.

Ngoài ra, phần phụ lục trình bày các cấu trúc dữ liệu và những thủ tục cần thiết để đơn giản hoá các đoạn chương trình minh họa các thuật toán được trình bày.

Giáo trình được biên soạn lần đầu tiên nên không tránh khỏi khá nhiều thiếu sót. Tác giả mong có những đóng góp từ bạn đọc.

Tôi xin cảm ơn những giúp đỡ đã nhận được từ nhiều người mà không thể liệt kê hết, đặc biệt là các bạn sinh viên, trong quá trình biên soạn giáo trình này.

Đà Lạt, ngày 5 tháng 3 năm 2002

PHẠM Tiến Sơn

Chương 1

Đại cương về đồ thị

1.1 Định nghĩa và các khái niệm

1.1.1 Đồ thị có hướng

Đồ thị có hướng $G = (V, E)$ gồm một tập V các phần tử gọi là *đỉnh* (hay *nút*) và một tập E các *cung* sao cho mỗi cung $e \in E$ tương ứng với một cặp các đỉnh được sắp thứ tự. Nếu có đúng một cung e tương ứng các đỉnh được sắp thứ tự (a, b), ta sẽ viết $e := (a, b)$.

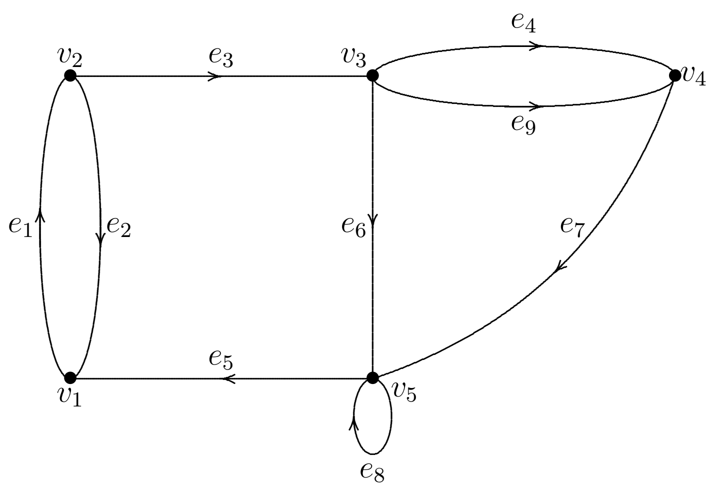
Chúng ta sẽ giả sử các đỉnh được đánh số là $v_1, v_2, \ldots, v_n$ hay giản tiện, $1, 2, \ldots, n$, trong đó $n = \#V$ là số các đỉnh của đồ thị.

Nếu e là một cung tương ứng cặp các đỉnh được sắp thứ tự v_i và v_j thì đỉnh v_i gọi là *gốc* và đỉnh v_j gọi là *ngọn;* cung e gọi là *liên thuộc* hai đỉnh v_i và v_j. Chúng ta sẽ thường ký hiệu $m = \#E-$số cạnh của đồ thị G. Các cạnh thường được đánh số là $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

Một cách hình học, các đỉnh được biểu diễn bởi các điểm, và $e = (v_i, v_j)$ được biểu diễn bởi một cung nối các điểm v_i và v_j.

Một cung có gốc trùng với ngọn gọi là *khuyên.*

Nếu có nhiều hơn một cung với gốc tại v_i và ngọn tại v_j thì G gọi là *đa đồ thị* và các cung tương ứng gọi là *song song. Đơn đồ thị* có hướng là đồ thị không khuyên trong đó hai đỉnh bất kỳ v_i và v_j có nhiều nhất một cung (v_i, v_j). Chẳng hạn, đồ thị trong Hình 1.1 có cung e_8 là khuyên; các cung e_4 và e_9 là song song do cùng tương ứng cặp đỉnh v_3 và v_4.



Hình 1.1: Ví dụ của 2−đồ thị có hướng.

1.1.2 Đồ thị và ánh xạ đa trị

Với mỗi $x \in V$, ký hiệu $\Gamma(x) := \{y \in V \mid (x, y) \in E\}$. Khi đó ta có một ánh xạ *đa trị* $\Gamma\colon V \to 2^V, x \mapsto \Gamma(x)$. Ký hiệu Γ^{-1} là ánh xạ (đa trị) ngược của Γ.

Nếu G là đơn đồ thị, thì đồ thị này hoàn toàn được xác định bởi tập V và ánh xạ đa trị Γ từ V vào 2^V. Vì vậy, đồ thị này còn có thể ký hiệu là $G = (V, \Gamma)$.

Nếu xoá cung e_9 trong Hình 1.1 ta nhận được đơn đồ thị và do đó có thể biểu diễn bởi ánh xạ đa trị Γ. Trong trường hợp này ta có

$$\Gamma(v_1) = \{v_2\}, \quad \Gamma(v_2) = \{v_1, v_3\}, \quad \Gamma(v_3) = \{v_4, v_5\}, \quad \Gamma(v_4) = \{v_5\}, \quad \Gamma(v_5) = \{v_1, v_5\}.$$

1.1.3 Đồ thị vô hướng

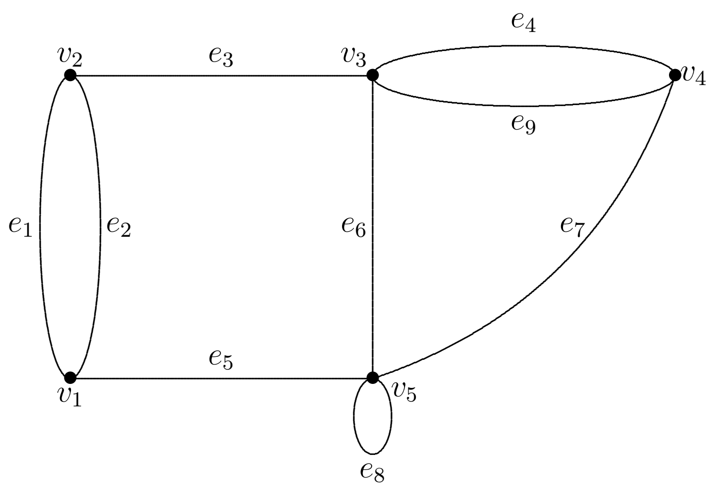
Khi nghiên cứu một số tính chất của các đồ thị, ta thấy rằng chúng không phụ thuộc vào hướng của các cung, tức là không cần phân biệt sự khác nhau giữa các điểm bắt đầu và kết thúc. Điều này đơn giản là mỗi khi có ít nhất một cung giữa hai đỉnh ta không quan tâm đến thứ tự của chúng.

Với mỗi cung, tức là mỗi cặp *có thứ tự* (v_i, v_j) ta cho tương ứng cặp *không có thứ tự* (v_i, v_j) gọi là các *cạnh*. Tương đương, ta nói rằng cạnh là một cung mà hướng đã bị *bỏ quên*. Về hình học, cạnh (v_i, v_j) được biểu diễn bởi các đoạn thẳng (hoặc cong) và không có mũi tên liên thuộc hai điểm tương ứng hai đỉnh v_i và v_j.

Nghiên cứu các tính chất *vô hướng* của đồ thị $G = (V, E)$ đưa về khảo sát tập E là tập các *cạnh*, tức là, một tập hữu hạn các phần tử mà mỗi phần tử là một cặp hai đỉnh phân biệt hay đồng nhất của V.

Đa đồ thị vô hướng là đồ thị mà có thể có nhiều hơn một cạnh liên thuộc hai đỉnh.

Đồ thị gọi là *đơn* nếu nó không có khuyên và hai đỉnh bất kỳ có nhiều nhất một cạnh liên thuộc chúng.



Hình 1.2: Đồ thị vô hướng tương ứng đồ thị trong Hình 1.1.

1.1.4 Các định nghĩa chính

Hai cung, hoặc hai cạnh gọi là *kề nhau* nếu chúng có ít nhất một đỉnh chung. Chẳng hạn, hai cạnh e_1 và e_3 trong Hình 1.2 là kề nhau. Hai đỉnh v_i và v_j gọi là *kề nhau* nếu tồn tại cạnh hoặc cung e_k liên thuộc chúng. Ví dụ trong Hình 1.2 hai đỉnh v_2 và v_3 là kề nhau (liên thuộc bởi cạnh e_3), nhưng đỉnh v_2 và v_5 không kề nhau.

Bậc và nửa bậc

Bậc ngoài của đỉnh $v \in V$, ký hiệu $d_G^+(v)$ (hay $d^+(v)$ nếu không sợ nhầm lẫn) là số các cung có đỉnh v là gốc. *Bậc trong* của đỉnh $v \in V$, ký hiệu $d_G^-(v)$ (hay $d^-(v)$ nếu không sợ nhầm lẫn) là số các cung có đỉnh v là ngọn.

Chẳng hạn, đồ thị có hướng trong Hình 1.1 có $d^+(v_2) = 2, d^-(v_2) = 1$.

Hiển nhiên rằng, tổng các bậc ngoài của các đỉnh bằng tổng các bậc trong của các đỉnh và bằng tổng số cung của đồ thị G, tức là

$$\sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(v_i) = m.$$

Nếu G là đồ thị vô hướng, *bậc* của đỉnh $v \in V$, ký hiệu $d_G(v)$ (hay $d(v)$ nếu không sợ nhầm lẫn) là số các cạnh liên thuộc đỉnh v với khuyên được đếm hai lần. Ví dụ đồ thị vô hướng trong Hình 1.2 có $d(v_2) = 3, d(v_5) = 5$.

Các cung (cạnh) liên thuộc tập $A \subset V$. Các đối chu trình

Giả sử $A \subset V$. Ký hiệu $\omega^+(A)$ là tập tất cả các cung có đỉnh gốc thuộc A và đỉnh ngọn thuộc $A^c := V \setminus A$, và $\omega^-(A)$ là tập tất cả các cung có đỉnh ngọn thuộc A và đỉnh gốc thuộc A^c. Đặt

$$\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A).$$

Tập các cung hoặc cạnh có dạng $\omega(A)$ gọi là *đối chu trình* của đồ thị.

Đồ thị có trọng số

Đồ thị có trọng số nếu trên mỗi cung (hoặc cạnh) $e \in E$ có tương ứng một số thực $w(e)$ gọi là trọng lượng của cung e.

Đồ thị đối xứng

Đồ thị có hướng gọi là *đối xứng* nếu có bao nhiêu cung dạng (v_i, v_j) thì cũng có bấy nhiêu cung dạng (v_j, v_i).

Đồ thị phản đối xứng

Đồ thị có hướng gọi là *phản đối xứng* nếu có cung dạng (v_i, v_j) thì không có cung dạng (v_j, v_i).

Đồ thị đầy đủ

Đồ thị vô hướng gọi là *đầy đủ* nếu hai đỉnh bất kỳ v_i và v_j tồn tại một cạnh dạng (v_i, v_j). Đơn đồ thị vô hướng đầy đủ n đỉnh được ký hiệu là K_n.

Đồ thị con

Giả sử $A \subset V$. *Đồ thị con* được sinh bởi tập A là đồ thị $G_A := (A, E_A)$ trong đó các đỉnh là các phần tử của tập A và các cung trong E_A là các cung của G mà hai đỉnh nó liên thuộc thuộc tập A.

Nếu G là đồ thị biểu diễn bản đồ giao thông của nước Việt Nam thì đồ thị biểu diễn bản đồ giao thông của thành phố Đà Lạt là một đồ thị con.

Đồ thị bộ phận

Xét đồ thị $G = (V, E)$ và $U \subset E$. *Đồ thị bộ phận sinh bởi* tập U là đồ thị với tập đỉnh V và các cung thuộc U (các cung của $E \setminus U$ bị xoá khỏi G).

Đồ thị con bộ phận

Xét đồ thị $G = (V, E)$ và $A \subset V, U \subset E$. *Đồ thị con bộ phận* sinh bởi tập A và U là đồ thị bộ phận của G_A sinh bởi U.

1.2 Ma trận biểu diễn đồ thị

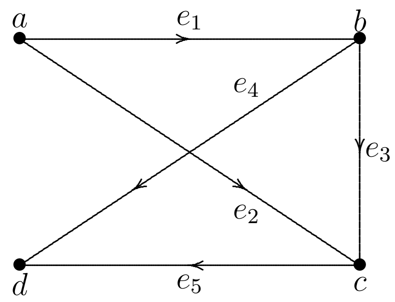
1.2.1 Ma trận liên thuộc đỉnh-cung

Ma trận liên thuộc đỉnh-cung của đồ thị $G = (V, E)$ là ma trận $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m$, với các phần tử $0, 1$ và -1, trong đó mỗi cột biểu diễn một cung của G và mỗi hàng biểu diễn một đỉnh của G. Nếu $e_k = (v_i, v_j) \in E$ thì tất cả các phần tử của cột k bằng không ngoại trừ

$$a_{ik} = 1, \quad a_{jk} = -1.$$

Ví dụ 1.2.1 Ma trận liên thuộc đỉnh-cung của đồ thị trong Hình 1.3 là

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}.$$



Hình 1.3:

Nhắc lại rằng, ma trận vuông gọi là *unimodular* nếu định thức của nó bằng 1 hoặc -1. Ma trận A cấp $m \times n$ gọi là *total unimodular* nếu tất cả các ma trận vuông con không suy biến của A là unimodular.

Mệnh đề 1.2.2 *Ma trận liên thuộc đỉnh-cung của đồ thị $G = (V, E)$ là total unimodular.*

Chứng minh. Chú ý rằng ma trận liên thuộc đỉnh-cung của đồ thị $G = (V, E)$ chứa đúng hai phần tử khác không trên mỗi cột, một bằng 1 và một bằng -1. Do đó ta có thể chứng minh theo quy nạp như sau: Hiển nhiên, tất cả các ma trận vuông con không suy biến cấp 1 của A là modular; giả sử khẳng định đúng cho mọi ma trận con không suy biến cấp $(k-1)$.

Xét ma trận vuông con A' cấp k của A. Nếu mỗi cột của A' chứa đúng hai phần tử khác không thì $\det(A') = 0$ (thật vậy, tổng tất cả các hàng của A' là vector không, do đó các hàng là độc lập tuyến tính). Nếu tồn tại một cột của A' không có phần tử khác không thì $\det(A') = 0$. Cuối cùng, nếu tồn tại cột j của A' sao cho có đúng một phần tử khác không a_{ij} (bằng 1, hay -1) thì $\det(A') = \pm \det(A'')$, trong đó A'' là ma trận vuông cấp $(k-1)$ nhận được từ A' bằng cách xoá hàng i và cột j. Theo giả thiết quy nạp, $\det(A')$ bằng 1, -1 hay 0 và do đó mệnh đề được chứng minh. ◁

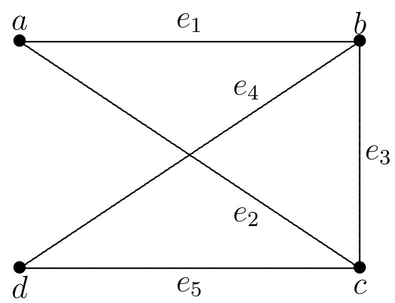
1.2.2 Ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh

Xét đồ thị vô hướng $G = (V, E)$. *Ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh* của đồ thị G là ma trận $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m$, với các phần tử 0 và 1, trong đó mỗi cột biểu diễn một cạnh của G và mỗi hàng biểu diễn một đỉnh của G; ngoài ra, nếu cạnh e_k liên thuộc hai đỉnh v_i và v_j thì tất cả các phần tử của cột k bằng không ngoại trừ

$$a_{ik} = 1, \quad a_{jk} = 1.$$

Ví dụ 1.2.3 Ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh của đồ thị trong Hình 1.4 là

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



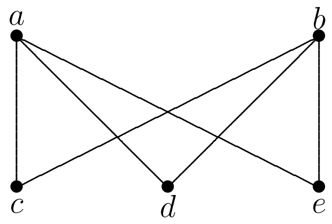
Hình 1.4:

Trái với ma trận liên thuộc đỉnh-cung, nói chung ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh không total unimodular. Chẳng hạn, trong ví dụ trên, ma trận con

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

có định thức bằng -2.

Đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ gọi là *hai phần* nếu có thể phân hoạch tập các đỉnh V thành hai tập con rời nhau V_1 và V_2 sao cho đối với mỗi cạnh $(v_i, v_j) \in E$ thì hoặc $v_i \in V_1, v_j \in V_2$ hoặc $v_j \in V_1, v_i \in V_2$.



Hình 1.5: Đồ thị hai phần $K_{2,3}$.

Ví dụ 1.2.4 Dễ kiểm tra đồ thị $K_{2,3}$ trong Hình 1.5 là hai phần.

Mệnh đề 1.2.5 *Ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh của đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ là total unimodular nếu và chỉ nếu G là đồ thị hai phần.*

Chứng minh. (1) Nếu đồ thị là hai phần, thì chúng ta có thể chứng minh theo quy nạp rằng mọi ma trận vuông con B của ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh có định thức $\det(B) = 0, 1$ hoặc -1. Điều này đúng với các ma trận vuông con cấp 1; giả sử khẳng định đúng với các ma trận vuông con cấp $(k-1)$. Xét ma trận vuông con B cấp k.

Nếu mỗi cột B^j của B chứa đúng hai phần tử bằng 1 thì

$$\sum_{i \in I_1} B_i = \sum_{i \in I_2} B_i,$$

trong đó I_1 và I_2 là các tập chỉ số tương ứng hai phân hoạch của tập các đỉnh V và B_i là vector hàng của B. Các vector hàng phụ thuộc tuyến tính, nên $\det(B) = 0$.

Nếu, ngược lại, tồn tại cột có đúng một phần tử bằng 1, chẳng hạn $b_{ij} = 1$, ký hiệu C là ma trận nhận được từ B bằng cách xoá hàng i và cột j. Thì

$$\det(B) = \pm \det(C) \quad (= 0, 1 \ \text{ hoặc } \ -1 \ \text{ theo quy nạp}).$$

(2) Mặt khác, dễ dàng chứng minh rằng ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh của đồ thị là một chu trình độ dài lẻ (tức là số cạnh trên chu trình là lẻ-xem Phần 1.3) có định thức bằng ± 2. Do đó G không chứa chu trình độ dài lẻ và vì vậy nó là hai phần theo bổ đề sau. ◁

Bổ đề 1.2.6 *Đồ thị vô hướng G là hai phần nếu và chỉ nếu G không chứa chu trình có độ dài lẻ.*

Chứng minh. Điều kiện cần. Do V được phân hoạch thành V_1 và V_2 :

$$V = V_2 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Giả thiết tồn tại một chu trình có độ dài lẻ

$$\mu = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_q}, v_{i_1}\}$$

và không mất tính tổng quát, lấy $v_{i_1} \in V_1$. Do G là hai phần, nên hai đỉnh liên tiếp trên chu trình μ phải có một đỉnh thuộc V_1 và đỉnh kia thuộc V_2. Do đó $v_{i_2} \in V_2, v_{i_3} \in V_1, \ldots,$ và tổng quát, $v_{i_k} \in V_1$ nếu k lẻ và $v_{i_k} \in V_2$ nếu k chẵn. Mà chu trình μ có độ dài lẻ nên $v_{i_q} \in V_1$ và bởi vậy $v_{i_1} \in V_2$. Điều này mâu thuẫn với $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Điều kiện đủ. Không mất tính tổng quát giả thiết đồ thị G liên thông. Giả sử không tồn tại chu trình có độ dài lẻ.

Chọn đỉnh bất kỳ, chẳng hạn v_i và gán nhãn cho nó là " + ". Sau đó lặp lại các phép toán sau:

Chọn đỉnh đã được gán nhãn v_j và gán nhãn ngược với nhãn của v_j cho tất cả các đỉnh kề với đỉnh v_j.

Tiếp tục quá trình này cho đến khi xảy ra một trong hai trường hợp:

(a) Tất cả các đỉnh đã được gán nhãn và hai đỉnh bất kỳ kề nhau có nhãn khác nhau (một mang dấu + và một mang dấu −); hoặc

(b) Tồn tại đỉnh, chẳng hạn v_{j_k}, được gán hai nhãn khác nhau.

Trong Trường hợp (a), đặt V_1 là tập tất cả các đỉnh được gán nhãn "+" và V_2 là tập tất cả các đỉnh được gán nhãn "−". Do tất cả các cạnh liên thuộc giữa các cặp đỉnh có nhãn khác nhau nên đồ thị G là hai phần.

Trong Trường hợp (b), đỉnh v_{j_k} được gán nhãn "+" dọc theo một dây chuyền μ_1 nào đó, với các đỉnh được gán nhãn "+" và "−" xen kẽ nhau xuất phát từ v_i và kết thúc tại v_{j_k}. Tương tự, đỉnh v_{j_k} được gán nhãn "−" dọc theo một dây chuyền μ_2 nào đó, với các đỉnh được gán nhãn "+" và "−" xen kẽ nhau xuất phát từ v_i và kết thúc tại v_{j_k}. Nhưng như thế chu trình đi dọc theo μ_1 từ đỉnh v_i đến đỉnh v_{j_k} sau đó đi ngược lại dọc theo μ_2 về lại v_i có độ dài lẻ. Điều này mâu thuẫn với giả thiết, và do đó không thể xảy ra Trường hợp (b). Định lý được chứng minh. $\triangleleft$

1.2.3 Ma trận kề hay ma trận liên thuộc đỉnh-đỉnh

Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị sao cho có nhiều nhất một cung liên thuộc hai đỉnh bất kỳ v_i và v_j. *Ma trận kề* hay *ma trận liên thuộc đỉnh-đỉnh* là ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp $n \times n$

với các phần tử 0 hoặc 1:

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{nếu } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Trong trường hợp đồ thị vô hướng, ma trận kề của đơn đồ thị cũng có thể được định nghĩa bằng cách xem mỗi cạnh (v_i, v_j) tương ứng hai cung (v_i, v_j) và (v_j, v_i). Trong trường hợp này, ma trận kề là đối xứng.

1.2.4 Các biểu diễn của đồ thị

Để mô tả một đồ thị, ta có thể sử dụng một số cách biểu diễn khác nhau. Với quan điểm lập trình, nói chung các biểu diễn này không tương đương theo khía cạnh hiệu quả của thuật toán.

Có hai cách biểu diễn chính: Thứ nhất, sử dụng ma trận kề hoặc các dẫn xuất của nó; thứ hai, sử dụng ma trận liên thuộc hoặc các dẫn xuất của nó.

Sử dụng ma trận kề

Chúng ta biết rằng các ma trận kề cho phép miêu tả hoặc các 1-đồ thị định hướng, hoặc các đơn đồ thị vô hướng. Với cách biểu diễn đồ thị qua ma trận kề, ta thấy số lượng thông tin, gồm các bit 0 và 1, cần lưu trữ là n^2. Các bit có thể được kết hợp trong các từ. Ký hiệu w là độ dài của từ (tức là số các bit trong một từ máy tính). Khi đó mỗi hàng của ma trận kề có thể được viết như một dãy n bit trong $\lceil n/w \rceil$ từ [1]. Do đó số các từ để lưu trữ ma trận kề là $n\lceil n/w \rceil$.

Ma trận kề của đồ thị vô hướng là đối xứng, nên ta chỉ cần lưu trữ nửa tam giác trên của nó, và do đó chỉ cần $n(n-1)/2$ bit. Tuy nhiên, với cách lưu trữ này, sẽ tăng độ phức tạp và thời gian tính toán trong một số bài toán.

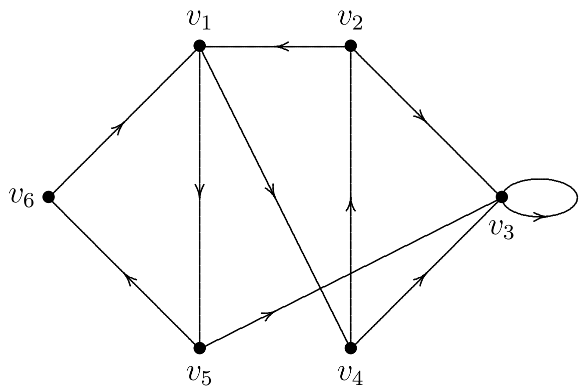
Trong trường hợp các ma trận thưa ($m \ll n^2$ với đồ thị có hướng; $m \ll \frac{1}{2}n(n+1)$ đối với đồ thị vô hướng) cách biểu diễn này là lãng phí. Do đó ta sẽ tìm cách biểu diễn chỉ các phần tử khác không.

Vì mục đích này ta sẽ sử dụng một *mảng danh sách kề* cho đồ thị có hướng. Đồ thị có hướng được biểu diễn bởi một mảng các con trỏ $V\_out[1], V\_out[2], \ldots, V\_out[n]$, trong đó mỗi con trỏ tương ứng với một đỉnh trong đồ thị có hướng. Mỗi phần tử của mảng $V\_out[i]$ chỉ đến một nút đầu lưu trữ mục dữ liệu của nút tương ứng đỉnh v_i và chứa một con trỏ

[1] Ký hiệu $\lceil x \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất không bé hơn x.

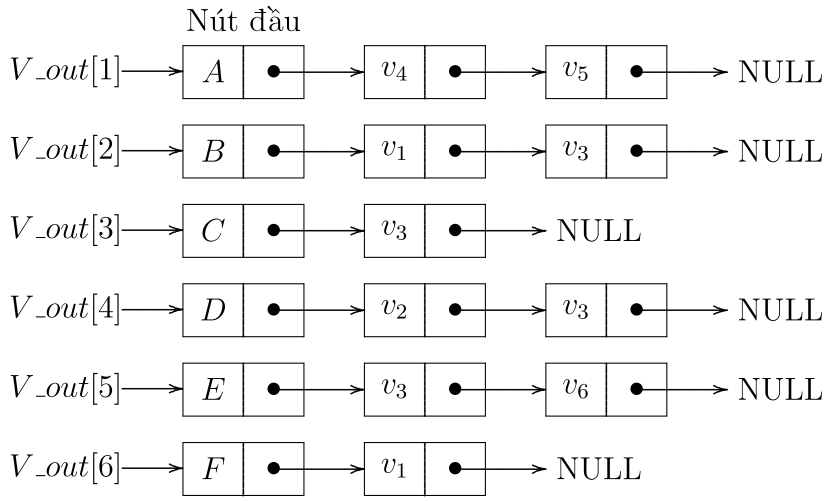
chỉ đến một danh sách liên kết của các đỉnh kề (đỉnh được nối với v_i theo hướng từ v_i ra). Mỗi nút kề có hai trường:

1. *Trường số nguyên*: lưu trữ số hiệu của đỉnh kề; và
2. *Trường liên kết* chỉ đến nút kế tiếp trong danh sách kề này.



Hình 1.6:

Cách biểu diễn mảng danh sách kề $V\_out[]$ của đồ thị có hướng trong Hình 1.6 được cho tương ứng trong Hình 1.7 (giả sử các mục dữ liệu tương ứng các đỉnh theo thứ tự là A, B, C, D, E, F).



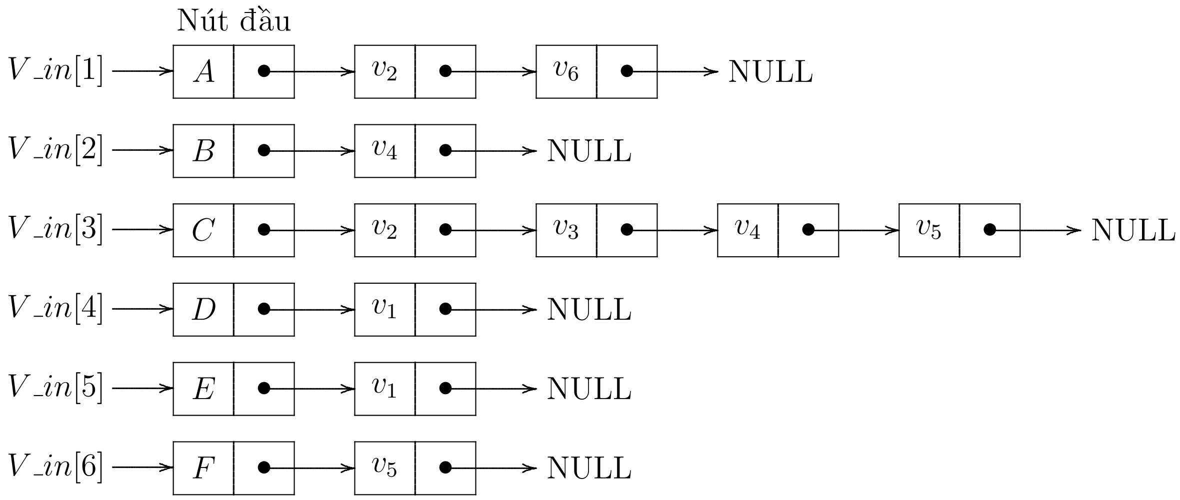
Hình 1.7: Danh sách kề $V\_out[]$ tương ứng đồ thị trong Hình 1.6.

Thay vì con trỏ chỉ đến một danh sách các đỉnh từ v_i *đi ra* trong $V\_out[i]$, ta trỏ đến danh sách các đỉnh *đi đến* v_i và do đó có thể lưu trữ đồ thị thông qua mảng các danh sách kề $V\_in[i]$. Hình 1.8 minh họa mảng các danh sách kề $V\_in[]$ của đồ thị có hướng trong Hình 1.6.

Để ý rằng, các số trong nút kề của $V\_out[]$ (tương ứng, $V\_in[]$) là những chỉ số cột (tương ứng, hàng) trong ma trận kề của đồ thị mà ở đó số 1 xuất hiện. Ngoài ra, trong trường hợp đồ thị vô hướng, hai danh sách kề này là trùng nhau.

Khi đồ thị có *trọng số*, tức là nếu mỗi cung hoặc cạnh $e \in E$ có một trọng lượng $w(e)$, ta chỉ cần mở rộng cấu trúc của mỗi nút trong danh sách kề bằng cách thêm một trường lưu trữ trọng lượng của cung.

Cách biểu diễn bằng danh sách kề của đồ thị có hướng có thể được cài đặt trong ngôn ngữ lập trình C với các khai báo trong thư viện Graph.h (xem Phụ lục A). Để xây dựng mảng các danh sách kề $V\_out[]$ và $V\_in[]$ cho một đồ thị, ta có thể sử dụng các thủ tục MakeV_out() và MakeV_in() tương ứng.

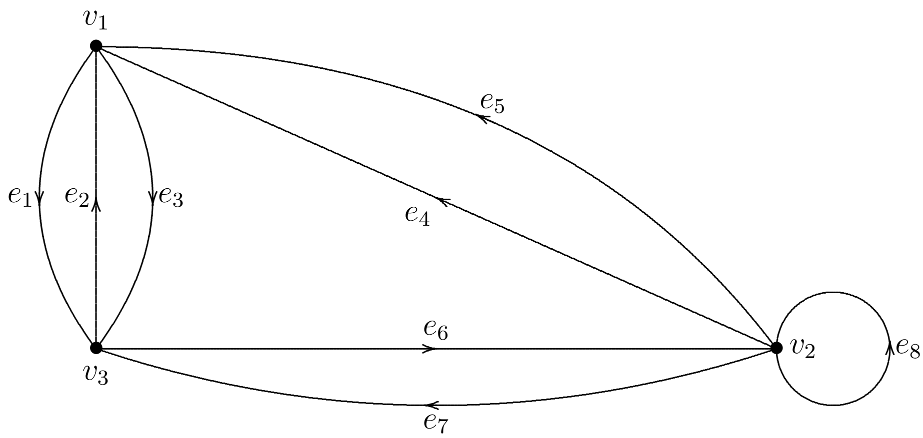


Hình 1.8: Danh sách kề $V\_in[]$ tương ứng đồ thị trong Hình 1.6.

Sử dụng các ma trận liên thuộc đỉnh-cung hoặc đỉnh-cạnh

Ma trận liên thuộc đỉnh-cung hoặc đỉnh-cạnh cho phép chúng ta mô tả đầy đủ cấu trúc của một đa đồ thị *không có khuyên*. Tuy nhiên, do chỉ có hai phần tử khác không trong mỗi cột, nên có thể biểu diễn thông tin ở dạng thích hợp hơn.

Chúng ta định nghĩa hai *mảng tuyến tính* $\alpha[]$ và $\beta[]$ chiều m trong đó với mỗi cung hoặc cạnh $e_k, k = 1, 2, \ldots, m$, các giá trị $\alpha[k]$ và $\beta[k]$ là các chỉ số của các đỉnh mà e_k liên



Hình 1.9:

thuộc. Trong trường hợp có hướng, chúng ta quyết định $\alpha[k]$ là đỉnh gốc và $\beta[k]$ là đỉnh ngọn của cung e_k.

Chú ý rằng, trái với ma trận kề, cách biểu diễn này cũng có thể đặc trưng cho các đa đồ thị có khuyên.

Chẳng hạn, đa đồ thị của Hình 1.9 trong đó các cung được đánh số, ta nhận được

k	1	2	3	4	5	6	7	8
α	1	3	1	2	2	3	2	2
β	3	1	3	1	1	2	3	2

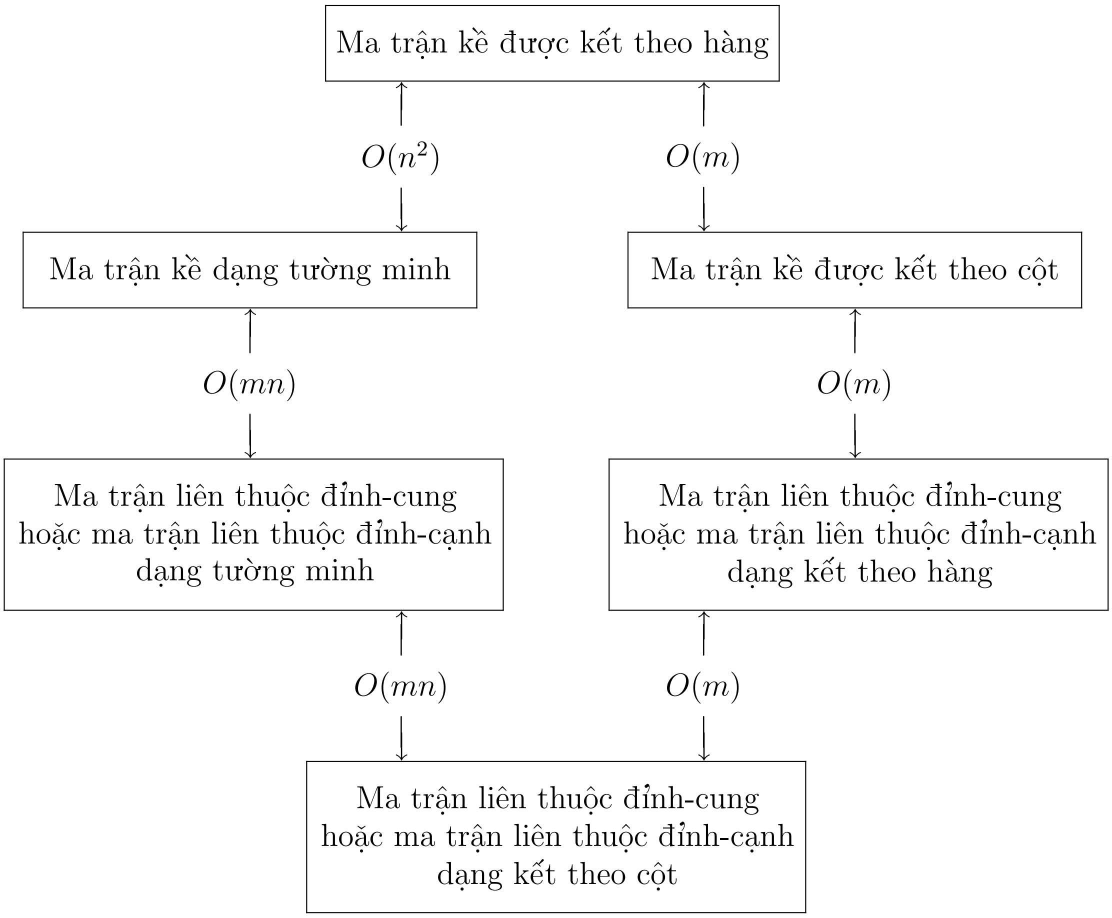
Trong trường hợp đồ thị có trọng số, ta chỉ cần thêm một mảng $w[]$ kích thước m lưu trữ trọng lượng của mỗi cạnh hoặc cung với tương ứng một-một các mảng $\alpha[]$ và $\beta[]$.

Về cách khác biểu diễn hiệu quả hơn của đồ thị vô hướng sử dụng danh sách các cạnh xem [43].

Mối liên hệ giữa các biểu diễn

Dễ dàng thấy rằng tồn tại các thuật toán đa thức để chuyển đổi giữa các kiểu dữ liệu trên đồ thị. Hình 1.10 minh họa các khả năng có thể có.

Để chuyển đổi giữa các kiểu dữ liệu, cần các chương trình thực hiện điều này (bài tập). Các biểu diễn này có thể cải biên cho phù hợp với yêu cầu. Chẳng hạn, đồ thị có



Hình 1.10: Mối liên hệ và độ phức tạp tính toán khi chuyển đổi giữa các biểu diễn khác nhau trong đồ thị.

trọng số có thể được biểu diễn bởi một *ma trận trọng lượng* (còn gọi là *ma trận chi phí* hay *khoảng cách*) cấp $n \times n$ trong đó phần tử (i, j) bằng trọng lượng của cạnh hay cung (v_i, v_j). Tuy nhiên, cần chú ý rằng, tính hiệu quả của nhiều vấn đề phụ thuộc vào biểu diễn của đồ thị. Do đó, việc chọn lựa các cấu trúc dữ liệu một cách thích hợp là quan trọng.

1.3 Tính liên thông

1.3.1 Dây chuyền và chu trình

Giả sử v_0, v_k là các đỉnh của đồ thị vô hướng $G := (V, E)$. *Dây chuyền* μ từ v_0 đến v_k độ dài k là một dãy xen kẽ $(k+1)$ đỉnh và k cạnh bắt đầu từ v_0 và kết thúc tại v_k,

$$\mu := \{v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k\},$$

trong đó cạnh e_i liên thuộc các đỉnh v_{i-1} và $v_i, i = 1, 2, \ldots, k$. Để giản tiện, ta thường viết

$$\mu := \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}.$$

Dây chuyền được gọi là *đơn giản* (tương ứng, *sơ cấp*) nếu nó không đi hai lần qua cùng một cạnh (tương ứng, đỉnh).

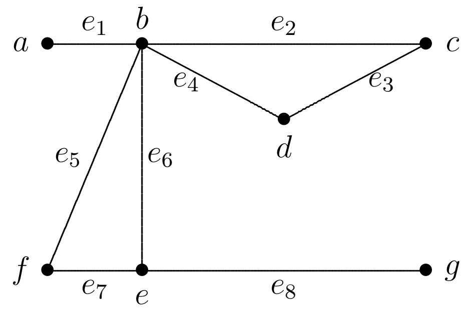
Chu trình là một dây chuyền trong đó đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối. Chu trình qua mỗi cạnh đúng một lần gọi là *đơn giản.* Chu trình là *sơ cấp* nếu nó đi qua mỗi đỉnh đúng một lần trừ đỉnh đầu tiên hai lần (một lần lúc xuất phát và một lúc trở về).

Đồ thị trong Hình 1.11 có

$$(a, e_1, b, e_2, c, e_3, d, e_4, b)$$

là dây chuyền từ đỉnh a đến đỉnh b có độ dài bốn. Các chu trình sau là sơ cấp

$$(b, e_2, c, e_3, d, e_4, b), \quad \text{và} \quad (b, e_5, f, e_7, e, e_6, b).$$



Hình 1.11:

Trong trường hợp đồ thị không có *cạnh song song* (tức là hai đỉnh có nhiều nhất một cạnh liên thuộc chúng), để đơn giản dây chuyền μ được viết lại

$$\mu = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}.$$

1.3.2 Đường đi và mạch

Giả sử v_0, v_k là các đỉnh của đồ thị có hướng $G := (V, E)$. *Đường đi* μ từ v_0 đến v_k độ dài k là một dãy xen kẽ $(k+1)$ đỉnh và k cung bắt đầu từ v_0 và kết thúc tại v_k,

$$\mu := \{v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k\},$$

trong đó cung e_i liên thuộc các đỉnh v_{i-1} và $v_i, i = 1, 2, \ldots, k$. Để giản tiện, ta có thể ký hiệu đường đi μ là $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$.

Do đó trong Hình 1.12 dãy các cung

$$\begin{aligned} \mu_1 &:= \{e_6, e_5, e_9, e_8, e_4\} \\ \mu_2 &:= \{e_1, e_6, e_5, e_9\} \\ \mu_3 &:= \{e_1, e_6, e_5, e_9, e_{10}, e_6, e_4\} \end{aligned}$$

là các đường đi.

Đường đi là *đơn giản* nếu không chứa cung nào quá một lần. Suy ra các đường đi μ_1, μ_2 là đơn giản, nhưng đường đi μ_3 không đơn giản do nó sử dụng cung e_6 hai lần.

Đường đi là *sơ cấp* nếu không đi qua đỉnh nào quá một lần. Khi đó đường đi μ_2 là sơ cấp nhưng các đường đi μ_1 và μ_3 là không sơ cấp. Hiển nhiên, đường đi sơ cấp là đơn giản nhưng ngược lại không nhất thiết đúng. Chẳng hạn, chú ý rằng đường đi μ_1 là đơn giản nhưng không sơ cấp, đường đi μ_2 vừa đơn giản và vừa sơ cấp, đường đi μ_3 không đơn giản cũng không sơ cấp.

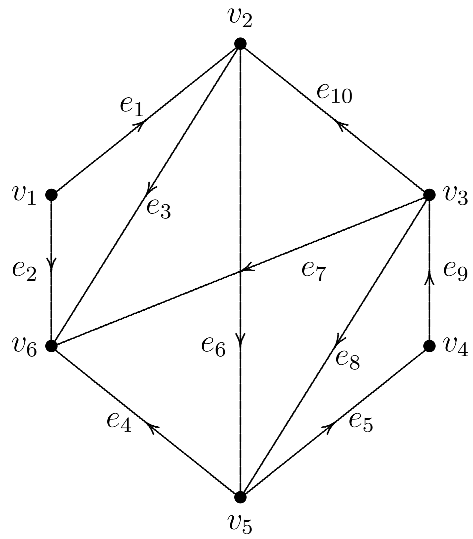
Chú ý rằng, khái niệm dây chuyền là bản sao không có hướng của đường đi và áp dụng cho các đồ thị mà không để ý đến hướng của các cung.

Đường đi cũng có thể được biểu diễn bởi dãy các đỉnh mà chúng đi qua trong trường hợp không có *cung song song* (tức hai cung có cùng gốc và cùng ngọn). Do đó, đường đi μ_1 có thể biểu diễn bởi dãy đỉnh $\{v_2, v_5, v_4, v_3, v_5, v_6\}$.

Mạch là một đường đi $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ trong đó đỉnh gốc của cung e_1 trùng với đỉnh ngọn của cung e_k. Do đó đường đi $\{e_5, e_9, e_{10}, e_6\}$ trong Hình 1.12 là mạch.

1.3.3 Tính liên thông

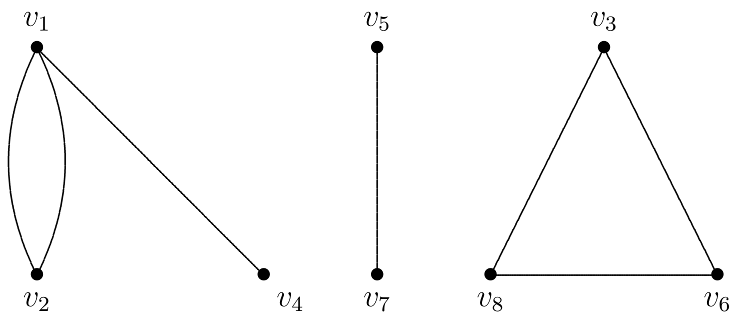
Đồ thị vô hướng gọi là *liên thông* nếu tất cả các cặp đỉnh v_i và v_j tồn tại dây chuyền từ v_i đến v_j. Quan hệ $v_i \mathcal{R} v_j$ nếu và chỉ nếu $v_i = v_j$ hoặc tồn tại một dây chuyền nối hai đỉnh v_i và v_j là *quan hệ tương đương* (phản xạ, đối xứng và bắc cầu).



Hình 1.12:

Lớp tương đương trên V xác định bởi quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ phân hoạch tập V thành các tập con rời nhau $V_1, V_2, \ldots, V_p$. Số p gọi là *số thành phần liên thông* của đồ thị. Theo định nghĩa, đồ thị liên thông nếu và chỉ nếu số thành phần liên thông bằng một. Các đồ thị con $G_1, G_2, \ldots, G_p$ sinh bởi các tập con $V_1, V_2, \ldots, V_p$ gọi là các *thành phần liên thông* của đồ thị. Mỗi thành phần liên thông là một đồ thị liên thông.

Hình 1.13 minh họa đồ thị có ba thành phần liên thông.



Hình 1.13: Đồ thị có ba thành phần liên thông.

Xác định số thành phần liên thông của đồ thị là một trong những bài toán cơ bản của lý thuyết đồ thị và có nhiều ứng dụng trong thực tiễn; chẳng hạn, xác định tính liên thông của mạch điện, mạng điện thoại, v.v.

Chúng ta sẽ trình bày một số thuật toán có thời gian $O(m)$ giải bài toán này vì nó cho phép tìm lời giải của một số bài toán khác.

Bắt đầu với đỉnh nào đó của đồ thị, chúng ta liệt kê các đỉnh theo thứ tự của thuật toán *tìm kiếm theo chiều sâu*, tức là chúng ta đi, đầu tiên, xa nhất có thể được trên đồ thị mà không tạo thành chu trình, và sau đó trở về vị trí rẽ nhánh gần đây nhất mà chúng ta đã bỏ qua, và tiếp tục cho đến khi trở về đỉnh xuất phát. Do đó tập các đỉnh bắt gặp sẽ tạo thành thành phần liên thông đầu tiên.

Nếu tất cả các đỉnh của đồ thị được duyệt thì đồ thị liên thông; ngược lại, chúng ta khởi đầu lại thủ tục trên với một đỉnh mới chưa được viếng thăm; do đó ta xây dựng được thành phần liên thông thứ hai, và vân vân.

Thuật toán dưới đây trình bày giai đoạn đầu tiên, tức là tìm thành phần liên thông chứa một đỉnh đã cho-nếu thành phần này chứa tất cả các đỉnh của đồ thị thì đồ thị liên thông.

Ký hiệu $\text{num}(i)$ là số hiệu của đỉnh v_i trong quá trình tìm kiếm. Nếu ta bắt đầu bằng đỉnh s thì đặt $\text{num}(s) = 1$. Ký hiệu $P(i)$ là đỉnh đứng liền trước đỉnh v_i trong *cây có gốc* (xem Chương 4) được xây dựng trong quá trình thực hiện thuật toán.

Xét đồ thị được biểu diễn bởi ánh xạ đa trị Γ. Đặt d_i^+ là số các đỉnh kề đỉnh $v_i : d_i^+ := \#\Gamma(v_i)$. Với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n$, ký hiệu $\Gamma_k(v_i)$ là đỉnh thứ k trong tập $\Gamma(v_i)$.

Để thực hiện tìm kiếm trên đồ thị, chúng ta cần mỗi giai đoạn của thuật toán chỉ số $n(i)$ của đỉnh được viếng thăm cuối cùng từ đỉnh v_i. Do đó ta bắt đầu với $n(i) = 0$.

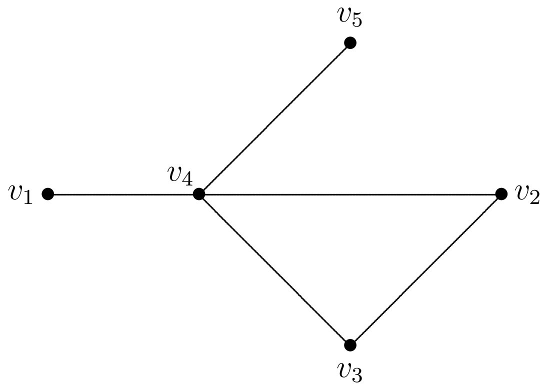
Dưới đây là thuật toán (dạng không đệ qui) của Trémaux đưa ra nằm 1882 và sau đó được Tarjan cải tiến [53].

Thuật toán Trémaux-Tarjan tìm thành phần liên thông chứa đỉnh s.

1. [Khởi tạo] Đặt $P(i) = 0, d_i^+ := \#\Gamma(v_i)$ và $n(i) = 0$ với mọi đỉnh $v_i, i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0$, $\text{num}(s) = 1, P(s) = s$ (tuỳ ý, khác không), $i = s$.
2. [Bước lặp] Trong khi $(n(i) \neq d(i))$ hoặc $(i \neq s)$ thực hiện
   - Nếu $n(i) = d(i)$ đặt $i = P(i)$ (lần ngược);
   - ngược lại, đặt $n(i) = n(i) + 1$ (viếng thăm đỉnh kế tiếp trong $\Gamma(v_i)$), và $j = \Gamma_{n(i)}(v_i)$. Nếu $P(j) = 0$ thì gán $P(j) = i, i = j, k = k + 1$, $\text{num}(i) = k$.

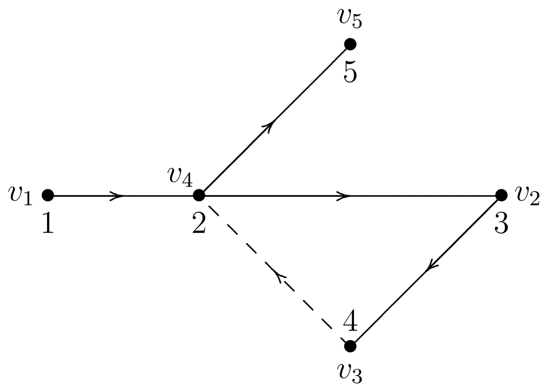
Kết thúc thuật toán, nếu $k = n$ thì đồ thị liên thông; ngược lại thành phần liên thông chứa đỉnh s gồm k đỉnh mà $\text{num}(i)$ nhận các giá trị từ 1 đến k.

Ví dụ 1.3.1 Xét đồ thị trong Hình 1.14. Các đỉnh sẽ được viếng thăm theo thứ tự $1, 4, 2, 3$ và 5. Quá trình tìm kiếm có thể biểu diễn thành cây có gốc (đỉnh gốc là v_1) trong Hình



Hình 1.14:

1.15.



Hình 1.15:

Thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu

1. Thăm đỉnh xuất phát s.
2. Với mỗi đỉnh w kề với v (có hướng từ v đến w) làm các bước sau:

   Nếu w chưa được thăm, áp dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu với w như là đỉnh xuất phát.

Trong cách tìm kiếm theo chiều sâu, ta đi theo đường từ đỉnh xuất phát cho đến khi đạt đến một đỉnh có tất cả các đỉnh kề nó đã được viếng thăm. Sau đó ta quay lại đỉnh cuối cùng vừa được thăm dọc theo đường này sao cho các đỉnh kề với nó (có hướng từ nó đi ra trong trường hợp đồ thị có hướng) có thể thăm được. Để có thể quay trở lại, ta lưu trữ các đỉnh dọc theo đường này trong một ngăn xếp. Nếu thủ tục được viết dạng đệ quy thì ngăn xếp này được bảo trì một cách tự động; trong trường hợp ngược lại, cần một mảng đánh dấu các đỉnh đã được viếng thăm.

Thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng

Trong thuật toán này, chúng ta thăm các đỉnh theo từng mức một, và khi thăm một đỉnh ở mức nào đó, ta phải lưu trữ nó để có thể trở lại khi đi hết một mức, vì vậy có thể thăm các đỉnh kề của nó. Thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng dưới đây dùng một hàng đợi theo cách này.

1. Thăm đỉnh xuất phát.
2. Khởi động một hàng đợi chỉ chứa đỉnh xuất phát.
3. Trong khi hàng đợi không rỗng làm các bước sau:

   Lấy một đỉnh v từ hàng đợi.
   Với tất cả các đỉnh w kề với v, làm các bước sau:
      Nếu (w chưa được thăm) thì:
         Thăm w.
         Thêm w vào hàng đợi.

Các thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng và tìm kiếm theo chiều sâu là rất cơ bản cho nhiều thuật toán khác để xử lý đồ thị. Ví dụ, để duyệt một đồ thị, ta có thể áp dụng nhiều lần một trong các cách nói trên, chọn các đỉnh xuất phát mới nếu cần thiết, cho đến khi tất cả các đỉnh được thăm.

1.3.4 Cầu, $k-$liên thông

Điểm khớp của đồ thị là một đỉnh mà xoá nó sẽ tăng số thành phần liên thông; *cầu* là cạnh mà xoá nó cũng có ảnh hưởng tương tự. Đồ thị trong Hình 1.14 có một điểm khớp là đỉnh v_4 và hai cầu là các cạnh (v_1, v_4) và (v_4, v_5).

Ví dụ 1.3.2 Trong một đồ thị không có chu trình, các đỉnh không phải là đỉnh treo, tức đỉnh có bậc ≥ 2, là điểm khớp. Ngược lại, đồ thị có chu trình Hamilton (xem Phần 5.3) không có điểm khớp.

Ví dụ 1.3.3 *[Mạng thông tin]* Giả sử V là tập hợp những người thuộc một tổ chức nào đó; ta đặt $(a, b) \in E$ nếu người a và b có thể báo tin với nhau. Những người liên lạc là những điểm khớp. Những người đó là những mắt xích quan trọng, vì mất họ sẽ phá vỡ tính thống nhất và sự liên kết của tổ chức.

Định lý 1.3.4 *Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị liên thông. Khi đó đỉnh $v \in V$ là điểm khớp nếu và chỉ nếu tồn tại hai đỉnh a và b sao cho mọi dây chuyền nối a với b đều đi qua v.*

Chứng minh. Điều kiện cần. Nếu đồ thị con sinh bởi tập hợp $V \setminus \{v\}$ không liên thông thì nó chứa ít nhất hai thành phần C và C; giả sử a là một đỉnh nào đó của C và b là một đỉnh nào đó của C. Trong đồ thị liên thông ban đầu G mọi dây chuyền bất kỳ nối a với b đều phải đi qua v.

Điều kiện đủ. Nếu một dây chuyền bất kỳ nối a với b đều đi qua v thì đồ thị con sinh ra bởi $V \setminus \{v\}$ không thể liên thông; bởi vậy đỉnh v là điểm khớp. $\triangleleft$

Ta có thể định nghĩa: đồ thị n đỉnh ($n \geq 3$) là $2-$*liên thông* hay *đồ thị không tách được* nếu và chỉ nếu nó liên thông và không có điểm khớp. Các đồ thị con $2-$liên thông cực đại của G tạo thành một phân hoạch của G, và gọi là các *thành phần* $2-$*liên thông* của G.

Để tìm các điểm khớp và các thành phần $2-$liên thông ta có thể sử dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu.

Với mỗi đỉnh v_i, xét tập $D(i)$ các đỉnh đứng liền trước đỉnh v_i trong cây T xác định bởi thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu. Khi đó, với mọi đỉnh $v_j \in D(i)$ ta có

$$l(j) = \min_{k \in \Gamma(v_j)} (\mathrm{num}(k))$$

là số nhỏ nhất được gán cho đỉnh kề với đỉnh v_j trong G. Bây giờ ta định nghĩa một chỉ số mới

$$\inf(i) := \min_{v_j \in D(i)} l(j).$$

Do đó chỉ số này tương ứng cực tiểu của $\mathrm{num}(i)$ và số nhỏ nhất được gán cho các đỉnh mà có thể đến được bằng đúng một cạnh từ một trong các *hậu duệ* của v_i trong cây T.

Do đó, trong Ví dụ 1.3.1 (Hình 1.15), đỉnh v_2 có đúng một đỉnh trước liền kề là đỉnh v_4, và do đó $\inf(2) = \mathrm{num}(4) = 2$.

Chú ý rằng $\inf(i) \leq \mathrm{num}(i)$ vì khởi đầu từ *tiền bối* của v_i nó có thể trở về v_i.

Hơn nữa, dễ dàng chỉ ra rằng, nếu $\inf(i) = \text{num}(i)$ thì đỉnh v_i là điểm khớp của đồ thị. Ngoài ra, các đỉnh bắt gặp khi duyệt trở lại đỉnh v_i tạo thành một thành phần $2-$liên thông.

Thuật toán dưới đây trình bày phương pháp xác định các điểm khớp của đồ thị liên thông xuất phát từ đỉnh s.

Thuật toán Tarjan tìm điểm khớp của đồ thị liên thông xuất phát từ đỉnh s

1. [Khởi tạo] Đặt $P(i) = 0, d_i^+ := \#\Gamma(v_i), n(i) = 0$ và $\inf(i) = \infty$ với mọi đỉnh $v_i, i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0$, $\text{num}(s) = 1, P(s) = s, i = s$.
2. [Bước lặp] Trong khi $(n(i) \neq d(i))$ hoặc $(i \neq s)$ thực hiện
   - Nếu $n(i) = d(i)$ đặt
   $$q = \inf(i), i = P(i), \inf(i) = \min(q, \inf(i)).$$
   Nếu $\inf(i)$ =$\text{num}(i)$ thì v_i là điểm khớp (và ta có thể xác định thành phần $2-$liên thông).
   - Ngược lại, tức là $n(i) \neq d(i)$ (viếng thăm đỉnh kế tiếp trong $\Gamma(v_i)$)
     Nếu $j = P(i)$ thì gán $n(i) = n(i) + 1, j = \Gamma_{n(i)}(i)$.
     Nếu $P(j) = 0$ thì gán
     $$\inf(i) = \min(\inf(i), \text{num}(i)), P(j) = i, i = j, k = k + 1, \text{num}(i) = k.$$
     Ngược lại nếu $P(j) \neq 0$ gán $\inf(i) = \min(\inf(i),\ \text{num}(j))$.

Dễ dàng kiểm tra với ví dụ trước, đỉnh v_4 là điểm khớp. Chú ý rằng có thể xác định thành phần $2-$liên thông bằng cách sửa đổi Bước 2 trong Thuật toán Tarjan.

Mệnh đề sau là hiển nhiên:

Mệnh đề 1.3.5 *Các thuật toán Trémaux-Tarjan và Tarjan có thời gian $O(m)$.*

Thiết diện $A \subset V$ của đồ thị liên thông G là tập con A các đỉnh sao cho đồ thị con $G_{V \setminus A}$ nhận được từ G bằng cách xoá các đỉnh trong A (và các cạnh liên thuộc nó) không liên thông.

Đồ thị gọi là $k-$*liên thông* nếu và chỉ nếu nó liên thông, có số đỉnh $n \geq k+1$, và không chứa một thiết diện có lực lượng $(k-1)$.

Các đồ thị con $k-$liên thông cực đại của G tạo thành một phân hoạch của G và gọi là các *thành phần $k-$liên thông.*

Các thành phần $3-$liên thông của đồ thị có thể nhận được trong thời gian $O(m)$ bằng thuật toán tương tự của Tarjan.

Đa đồ thị liên thông G gọi là *$k-$cạnh liên thông* nếu nó vẫn còn liên thông khi xoá đi ít hơn k cạnh.

Do đó, đa đồ thị là $2-$liên thông nếu và chỉ nếu nó liên thông và không chứa cầu. Bằng cách sửa đổi lại thuật toán Tarjan, ta có thể xác định các cầu trong thời gian $O(m)$. Xét tính $2-$cạnh liên thông có nhiều ứng dụng trong thực tế: mạng điện, điện thoại, v.v., phải $2-$cạnh liên thông!

1.3.5 Đồ thị liên thông mạnh

Đồ thị có hướng gọi là *liên thông mạnh* nếu tất cả các cặp đỉnh v_i và v_j tồn tại đường đi từ v_i đến v_j.

Xét quan hệ $v_i \mathcal{R} v_j$ nếu và chỉ nếu hoặc $v_i = v_j$ hoặc tồn tại đường đi từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j và đường đi từ đỉnh v_j đến đỉnh v_i. Dễ thấy đây là *quan hệ tương đương* (phản xạ, đối xứng và bắc cầu).

Lớp tương đương trên V xác định bởi quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ phân hoạch tập V thành các tập con rời nhau $V_1, V_2, \ldots, V_p$. Số p gọi là *số thành phần liên thông mạnh* của đồ thị. Các đồ thị con $G_1, G_2, \ldots, G_p$ sinh bởi các tập con $V_1, V_2, \ldots, V_p$ gọi là các *thành phần liên thông mạnh* của G. Theo định nghĩa, đồ thị liên thông mạnh nếu và chỉ nếu số thành phần liên thông mạnh bằng một.

Nhận xét rằng, thành phần liên thông mạnh $\mathcal{C}_l$ chứa đỉnh v_l được cho bởi

$$\mathcal{C}_l = \hat{\Gamma}_{v_l} \cap \hat{\Gamma}^{-1}_{v_l},$$

và từ đó suy ra một thuật toán rất đơn giản thời gian đa thức $O(m)$ dựa trên thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu mà có thể sử dụng nó để tìm $\mathcal{C}_l$.

Do đó tính liên thông mạnh dễ dàng kiểm tra. Chỉ cần xét khi nào $\mathcal{C}_l \equiv V$. (Hãy giải bài toán này bằng ma trận).

Nếu mặt khác, chúng ta muốn tìm tất cả các thành phần liên thông mạnh, ta sẽ sử dụng Thuật toán Tarjan.

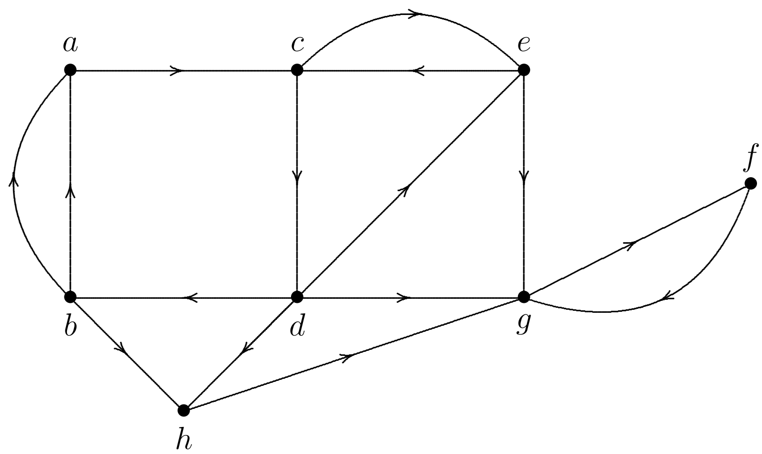
Thật vậy ta sẽ chứng minh rằng, *thuật toán Tarjan* áp dụng với các đồ thị có hướng, cho phép tìm các thành phần liên thông mạnh.

Chúng ta khởi đầu với thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu, như trong các thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu và Tarjan. Với mỗi đỉnh v_i xét một chỉ số mới là số nhỏ nhất của chỉ số đỉnh mà có thể đến nó bằng chỉ một cung từ một *hậu duệ* của v_i trong *cây gia phả*. Chỉ số mới này được ký hiệu là $\inf(i)$.

Nhận xét rằng chúng ta luôn luôn có $\inf(i) \leq \text{num}(i)$. Dễ dàng chỉ ra rằng khi chúng ta trở lại trong cây gia phả, thì một đỉnh mà xảy ra đẳng thức $\inf(i) = \text{num}(i)$ sẽ phân hoạch đồ thị thành ít nhất hai thành phần liên thông mạnh, và một trong chúng tương ứng tập các đỉnh mà đã được viếng thăm trước khi tới đỉnh v_i.

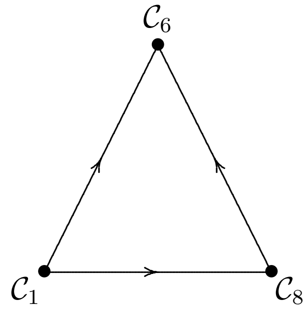
Đồ thị trong Hình 1.16 có ba thành phần liên thông mạnh:

$$\mathcal{C}_1 = \{a, b, c, d, e\}, \quad \mathcal{C}_6 = \{g, f\}, \quad \mathcal{C}_8 = \{h\}.$$



Hình 1.16:

Chúng ta sử dụng thuật ngữ *đồ thị thu gọn* để biểu diễn đồ thị G qua quan hệ liên thông mạnh $G_r := G/\mathcal{R}$. Do đó các đỉnh của G_r là các thành phần liên thông mạnh của G và tồn tại cung giữa hai đỉnh $\mathcal{C}_i$ và $\mathcal{C}_j$ nếu và chỉ nếu tồn tại ít nhất một cung giữa một đỉnh của $\mathcal{C}_i$ và $\mathcal{C}_j$ trong G. Hiển nhiên đồ thị G_r không có mạch. Hình 1.17 là đồ thị thu gọn của đồ thị có hướng trong Hình 1.16. Nghiên cứu các thành phần liên thông mạnh và tìm đồ thị thu gọn là những bài toán thực tiễn quan trọng; chẳng hạn trong mối liên hệ với xích Markov, trong phân tích cấu trúc của một hệ thống (xem [30]). Phần tiếp theo chúng ta sẽ đề cập thêm về vấn đề này.



Hình 1.17:

1.4 Phạm vi và liên thông mạnh

Ta biết rằng hệ thống truyền thông của một tổ chức có thể xem như một đồ thị trong đó mỗi người tương ứng một đỉnh và các kênh truyền thông tương ứng các cung. Câu hỏi đặt ra là trong hệ thống này, thông tin từ v_i có thể đến được v_j không? Tức là có tồn tại đường đi từ v_i đến v_j? Nếu đường đi đó tồn tại ta nói v_j thuộc *phạm vi* của v_i. Chúng ta cũng quan tâm đến có đường đi từ v_i đến v_j với số cung hạn chế không? Mục đích của phần này là thảo luận một vài khái niệm cơ bản liên quan đến các tính chất phạm vi và liên thông mạnh của các đồ thị và giới thiệu một số thuật toán cơ sở.

Theo thuật ngữ của đồ thị biểu diễn cho một tổ chức, phần này khảo sát một số câu hỏi:

1. Số người ít nhất mà mỗi người trong tổ chức có thể liên lạc được bằng bao nhiêu?
2. Số người nhiều nhất có thể liên lạc được với nhau bằng bao nhiêu?
3. Hai bài toán trên có quan hệ gì với nhau?

1.4.1 Ma trận phạm vi

Ma trận phạm vi $R = (r_{ij})$ định nghĩa như sau:

$$r_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{nếu tồn tại đường đi từ đỉnh } v_i \text{ đến đỉnh } v_j, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Tập $R(v_i)$ các đỉnh của đồ thị G có thể đến được từ đỉnh v_i gồm các đỉnh v_j sao cho phần tử r_{ij} bằng 1. Theo định nghĩa, tất cả các phần tử trên đường chéo của ma trận phạm vi bằng 1.

Do $\Gamma(v_i)$ là tập các đỉnh có thể đến được từ v_i theo một đường đi có độ dài 1 nên tập $\Gamma(\Gamma(v_i)) = \Gamma^2(v_i)$ gồm những đỉnh có thể đến được từ v_i theo một đường đi có độ dài 2. Tương tự, $\Gamma^p(v_i)$ là tập những đỉnh có thể đến được từ v_i theo một đường đi có độ dài p. Do vậy, tập các đỉnh có thể đến được từ v_i là

$$R(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma^1(v_i) \cup \Gamma^2(v_i) \cup \cdots.$$

Nhưng do đồ thị được xét là hữu hạn và mọi đường đi đều chứa một đường đi con sơ cấp trong đó, nên tồn tại p sao cho

$$R(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma^1(v_i) \cup \Gamma^2(v_i) \cup \cdots \cup \Gamma^p(v_i). \tag{1.1}$$

Suy ra tập phạm vi $R(v_i)$ có thể nhận được từ Phương trình (1.1) bằng cách thực hiện các phép toán hợp từ trái sang phải cho đến khi tập hiện hành không tăng kích thước trong lần lặp kế tiếp. Số các phép toán hợp phụ thuộc vào đồ thị, mặc dù hiển nhiên rằng $p \leq n-1$, trong đó n là số đỉnh của đồ thị.

Vậy ma trận phạm vi có thể được xây dựng như sau. Tìm tập $R(v_i)$ với mỗi đỉnh v_i theo trên. Đặt $r_{ij} = 1$ nếu $v_j \in R(v_i)$, và $r_{ij} = 0$ nếu ngược lại.

Ma trận đạt được $Q = (q_{ij})$ định nghĩa như sau:

$$q_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{nếu tồn tại đường đi từ đỉnh } v_j \text{ đến đỉnh } v_i, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Tập $Q(v_i)$ của đồ thị G là tập các đỉnh có thể đến được đỉnh v_i. Tương tự như trên ta cũng có

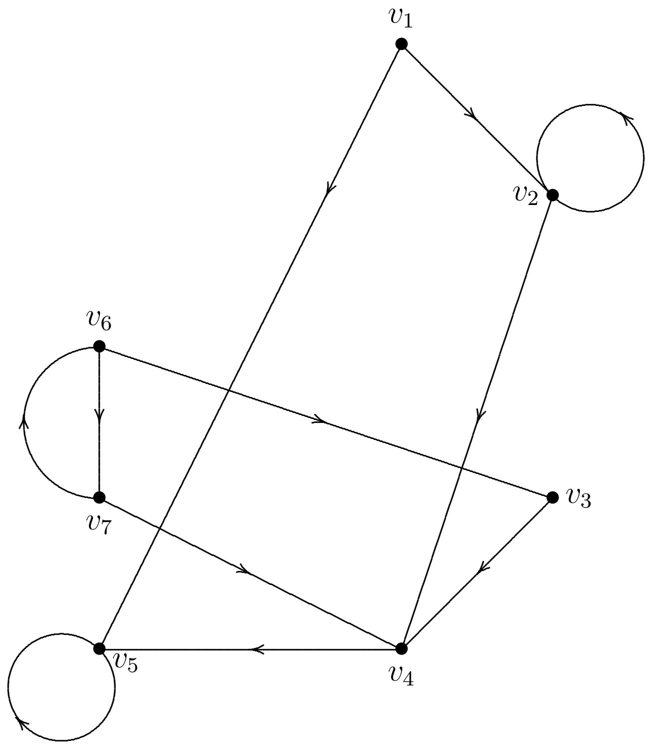
$$Q(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma^{-1}(v_i) \cup \Gamma^{-2}(v_i) \cup \cdots \cup \Gamma^{-p}(v_i), \tag{1.2}$$

trong đó $\Gamma^{-2}(v_i) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(v_i)), \ldots$.

Từ định nghĩa, hiển nhiên có $Q = R^t$.

Ví dụ 1.4.1 Xét đồ thị G trong Hình 1.18. Ma trận kề của G là

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$



Hình 1.18:

Các tập phạm vi có thể xác định từ Phương trình (1.1) như sau

$$\begin{aligned}
R(v_1) &= \{v_1\} \cup \{v_2, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} \\
&= \{v_1, v_2, v_4, v_5\}, \\
R(v_2) &= \{v_2\} \cup \{v_2, v_4\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} \cup \{v_2, v_4, v_5\} \\
&= \{v_2, v_4, v_5\}, \\
R(v_3) &= \{v_3\} \cup \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\} \\
&= \{v_3, v_4, v_5\}, \\
R(v_4) &= \{v_4\} \cup \{v_5\} \cup \{v_5\} \\
&= \{v_4, v_5\}, \\
R(v_5) &= \{v_5\} \cup \{v_5\} \\
&= \{v_5\}, \\
R(v_6) &= \{v_6\} \cup \{v_3, v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \\
&= \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \\
R(v_7) &= \{v_7\} \cup \{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5, v_7\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \\
&= \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}.
\end{aligned}$$

Do đó ma trận phạm vi có dạng

$$R = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Cần chú ý rằng, do R và Q là các ma trận Boole, mỗi hàng của chúng có thể lưu dạng một hoặc hơn một từ (word) . Việc tìm các ma trận này là một tính toán đơn giản do chỉ dựa vào các phép toán logic.

Từ định nghĩa, $R(v_i) \cap Q(v_j)$ là tập các đỉnh v_k mà có ít nhất một đường đi từ v_i đến v_j qua đỉnh v_k. Các đỉnh này gọi là *cốt yếu*. Tất cả các đỉnh $v_k \notin R(v_i) \cap Q(v_j)$ gọi là *không cốt yếu* hay *dư thừa* do bỏ chúng đi không ảnh hưởng đến các đường đi từ v_i đến v_j.

Các ma trận R và Q định nghĩa trên là tuyệt đối theo nghĩa số các cung trên đường đi từ v_i đến v_j không bị hạn chế. Mặt khác ta cũng có thể định nghĩa tương tự các ma trận này với số cung trên đường đi không vượt quá một số cho trước. Với mở rộng này ta cũng có thể tính được các ma trận hạn chế theo lược đồ trên.

Đồ thị được gọi là *bắc cầu* nếu tồn tại các cung (v_i, v_j) và (v_j, v_k) thì cũng tồn tại cung (v_i, v_k). *Bao đóng bắc cầu* của đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị $G_{tc} = (V, E \cup E')$ trong đó E' là các cung được thêm vào ít nhất để đồ thị G_{tc} có tính bắc cầu. Dễ dàng chứng minh rằng ma trận kề của đồ thị G_{tc} chính là ma trận phạm vi R và bằng

$$A + A^2 + \cdots + A^p, \quad (p \leq n - 1),$$

trong đó A là ma trận kề của G. (Tại sao?)

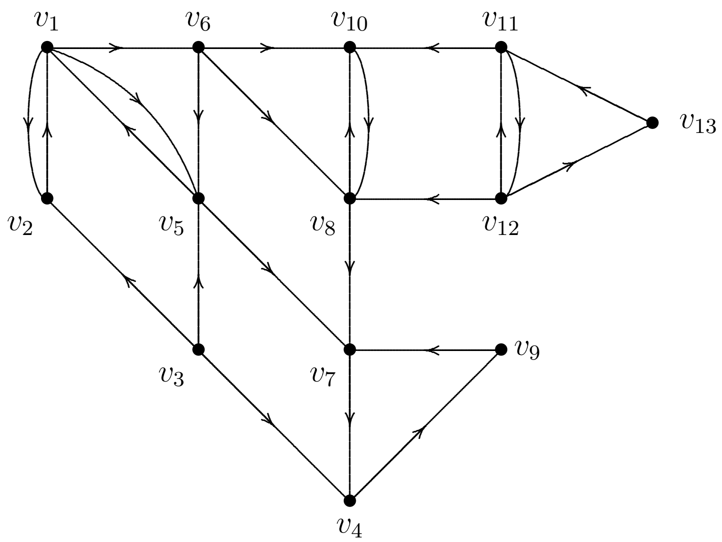
1.4.2 Tìm các thành phần liên thông mạnh

Thành phần liên thông mạnh định nghĩa trong phần trước trước là đồ thị con liên thông mạnh lớn nhất trong G. Vì với đồ thị liên thông mạnh, với mọi cặp đỉnh v_i, v_j, luôn luôn tồn tại một đường đi từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j và ngược lại, nên tồn tại duy nhất một thành phần liên thông mạnh chứa một đỉnh cho trước và v_i sẽ xuất hiện trong tập các đỉnh của một và chỉ một thành phần liên thông mạnh. Khẳng định này là hiển nhiên (tại sao?).

Nếu đỉnh v_i được coi vừa là xuất phát vừa là kết thúc thì tập các đỉnh cốt yếu tương ứng với hai đỉnh trùng nhau này (tức là tập các đỉnh thuộc mạch nào đó chứa v_i) xác định bởi $R(v_i) \cap Q(v_i)$. Vì tất cả các đỉnh cốt yếu này có thể đến từ v_i và ngược lại nên chúng cũng có thể đến được các đỉnh khác trong tập này và ngược lại. Hơn nữa, dễ thấy rằng tập $R(v_i) \cap Q(v_i)$ xác định các đỉnh của thành phần liên thông mạnh duy nhất tương ứng với đỉnh v_i.

Nếu ta loại các đỉnh này khỏi đồ thị $G = (V, \Gamma)$ thì có thể áp dụng tìm thành phần liên thông mạnh trên đồ thị con nhận được G' với tập đỉnh $V \setminus (R(v_i) \cap Q(v_i))$. Quá trình này lặp lại cho đến khi tất cả các thành phần liên thông mạnh được tìm. Kết thúc ta có đồ thị G được *phân hoạch* thành các thành phần liên thông mạnh.

Ví dụ 1.4.2 Xét đồ thị trong Hình 1.19. Chúng ta hãy tìm thành phần liên thông mạnh chứa đỉnh v_1.



Hình 1.19: Đồ thị G.

Từ các phương trình (1.1) và (1.2) ta có

$$R(v_1) = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$$

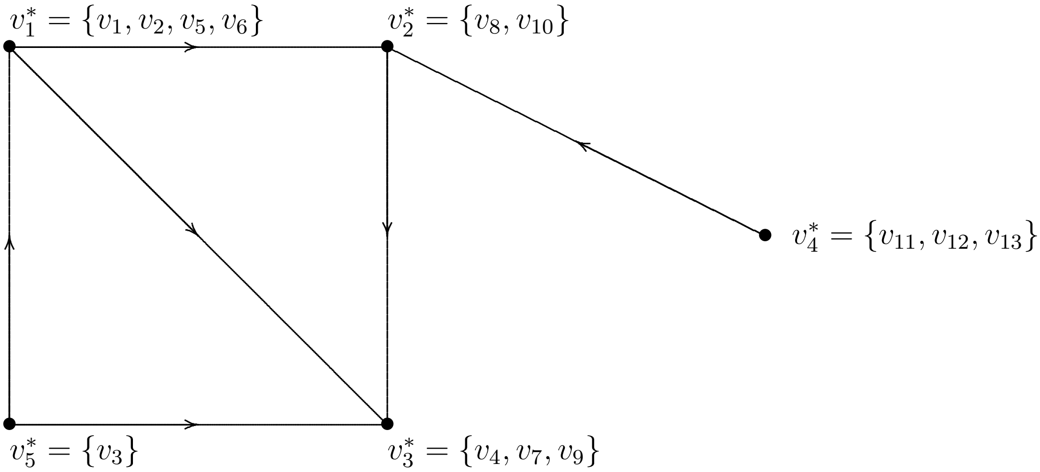
và

$$Q(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\}.$$

Do đó thành phần liên thông mạnh chứa đỉnh v_1 là đồ thị con

$$\langle R(v_1) \cap Q(v_1) \rangle = \langle \{v_1, v_2, v_5, v_6\} \rangle.$$

Tương tự, thành phần liên thông mạnh chứa đỉnh v_8 là đồ thị con $\langle\{v_8, v_{10}\}\rangle$, chứa đỉnh v_7 là đồ thị con $\langle\{v_4, v_7, v_9\}\rangle$, chứa đỉnh v_{11} là đồ thị con $\langle\{v_{11}, v_{12}, v_{13}\}\rangle$, và chứa đỉnh v_3 là đồ thị con $\langle\{v_3\}\rangle$. Đồ thị thu gọn G_r được cho trong Hình 1.20.



Hình 1.20: Đồ thị thu gọn G_r.

Các phép toán được miêu tả trên để tìm các thành phần liên thông mạnh của một đồ thị cũng có thể sử dụng trực tiếp đối với các ma trận R và Q định nghĩa phần trước. Do đó nếu ta ký hiệu $R \otimes Q$ có nghĩa là ma trận nhận được từ R và Q bằng cách nhân các phần tử tương ứng thì phần tử $(R \otimes Q)_{ij} = r_{ij}q_{ij}$ bằng 1 nếu tồn tại đường đi từ v_i đến v_j và ngược lại, và bằng 0 trong trường hợp ngược lại. Do đó hai đỉnh thuộc cùng một thành phần liên thông mạnh nếu và chỉ nếu các hàng (hoặc cột) tương ứng bằng nhau. Các đỉnh mà hàng tương ứng chứa một phần tử 1 ở cột v_j tạo thành tập đỉnh của thành phần liên thông mạnh chứa v_i. Hiển nhiên rằng có thể biến đổi ma trận $R \otimes Q$ bằng phép hoán vị các hàng và các cột sao cho ma trận thu được có dạng khối chéo; mỗi ma trận con chéo tương ứng với một thành phần liên thông mạnh của G và có các phần tử bằng 1, các phần tử khác bằng 0. Với ví dụ trên, ma trận $R \otimes Q$ được sắp xé6p lại có dạng

$$R \otimes Q = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_8 \\ v_{10} \\ v_4 \\ v_7 \\ v_9 \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} v_1 & v_2 & v_5 & v_6 & v_8 & v_{10} & v_4 & v_7 & v_9 & v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1.4.3 Cơ sở

Tập B các đỉnh có thể đến được mọi đỉnh của đồ thị và nhỏ nhất theo nghĩa không có tập con thực sự nào của nó có tính chất này gọi là *cơ sở*. Do đó nếu ta viết $R(B)$ là tập phạm vi của B-tức là

$$R(B) = \cup_{v_i \in B} R(v_i)$$

thì B là cơ sở nếu và chỉ nếu

1. $B(V) = V$; và

2. với mọi tập con $S \subset B$ thì $R(S) \neq V$.

Điều kiện thứ hai tương đương với điều kiện $v_j \notin R(v_i)$ với hai đỉnh phân biệt $v_i, v_j \in B$; tức là một đỉnh thuộc B không thể đến được từ một đỉnh khác trong B. Điều này có thể chứng minh như sau:

Do với hai tập con H và $H' \subset H$ ta có $R(H') \subset R(H)$ nên điều kiện $R(S) \neq V$ với mọi $S \subset B$ tương đương với $R(B \backslash \{v_j\}) \neq V$ với mọi $v_j \in B$. Nói cách khác, $R(v_j) \not\subset R(B \backslash \{v_j\})$. Nhưng điều kiện này thoả mãn nếu và chỉ nếu $v_j \notin R(B \setminus \{v_j\})$, tức là $v_j \notin R(v_i)$ với mọi $v_i, v_j \in B$.

Vậy, cơ sở là một tập B các đỉnh thoả mãn hai điều kiện sau:

1. tất cả các đỉnh của G có thể đến được từ đỉnh nào đó của B; và

2. không đỉnh nào trong B có thể đến được từ một đỉnh thuộc B.

Từ hai điều kiện này ta suy ra

Mệnh đề 1.4.3 *(i) Không tồn tại hai đỉnh trong cơ sở B sao cho chúng thuộc cùng một thành phần liên thông mạnh của G.*

(b) Đồ thị không mạch có duy nhất một cơ sở gồm tập các đỉnh có bậc trong bằng không.

Chứng minh. Suy trực tiếp từ định nghĩa. ◁

Theo Mệnh đề trên và do đồ thị thu gọn G_r của đồ thị G không có mạnh nên tập cơ sở B_r của G_r là tập các đỉnh có bậc trong bằng không. Các tập cơ sở của G có thể xác định dựa vào B_r. Cụ thể là nếu $B_r = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$, trong đó k là số các tập đỉnh S_j trong cơ sở B_r của G_r, thì B là tập dạng $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$ với $v_{i_j} \in S_j, j = 1, 2, \ldots, k$.

Ví dụ 1.4.4 Với đồ thị trong Hình 1.19, đồ thị thu gọn trong Hình 1.20. Cơ sở của đồ thị này là $\{v_4^*, v_5^*\}$ do v_4^* và v_5^* là hai đỉnh duy nhất của G có bậc trong bằng không. Suy ra các tập cơ sở của G là $\{v_3, v_{11}\}$, $\{v_3, v_{12}\}$ và $\{v_3, v_{13}.\}$

Đối ngẫu với khái niệm cơ sở có thể định nghĩa theo thuật ngữ của các tập hợp $Q(v_i)$ như sau.

Đối cơ sở là tập $\bar{B}$ các đỉnh của đồ thị $G = (V, \Gamma)$ thoả mãn

$$\begin{aligned} &Q(\bar{B}) = \bigcup_{v_i \in B} Q(v_i) = V, \\ &\forall S \subset \bar{B}, Q(S) \neq V. \end{aligned}$$

Tức là $\bar{B}$ là tập nhỏ nhất các đỉnh có thể đến được từ các đỉnh khác. Các tính chất của $\bar{B}$ tương tự với của B trong đó các khái niệm về hướng được thay bằng bản sao ngược lại.

Do vậy, đối cơ sở của đồ thị thu gọn G_r là tập các đỉnh của G_r có bậc ngoài bằng không, và từ đó ta có thể nhận được đối cơ sở của G tương tự như đã thực hiện ở trên.

Trong ví dụ của đồ thị G trong Hình 1.19, đồ thị thu gọn G_r chỉ chứa một đỉnh v_3^* có bậc ngoài bằng không. Do đó đối cơ sở của G_r là $\{v_3^*\}$ và bởi vậy đối cơ sở của G là $\{v_4\}, \{v_7\}$ và $\{v_9\}$.

Áp dụng trong cấu trúc tổ chức

Nếu đồ thị biểu diễn cấu trúc ảnh hưởng của một tổ chức thì các phần tử của một thành phần liên thông mạnh của G có ảnh hưởng và chức năng ngang nhau. Một cơ sở của G có thể hiểu là một "liên minh" có số người ít nhất nhưng lãnh đạo mọi cá nhân trong tổ chức.

Trên tập các đỉnh biểu diễn các thành viên của cùng tổ chức, ta xét đồ thị G' được xây dựng để biểu diễn các kênh truyền thông sao cho tồn tại cung (v_i, v_j) nếu v_i có thể giao tiếp với v_j. Đồ thị G' dĩ nhiên có liên quan với G. Số người ít nhất mà biết hoặc có thể nhận tất cả các sự kiện về tổ chức tạo thành một đối cơ sở của G'. Ta có thể nói rằng một liên minh hiệu quả để lãnh đạo tổ chức là tập H những người thoả mãn:

$$H = B(G) \cup \bar{B}(G'),$$

trong đó $B(G)$ và $\bar{B}(G')$ là một trong các cơ sở và các đối cơ sở của G và G' tương ứng được chọn sao cho $\#H$ nhỏ nhất.

Kế tiếp xét *cơ sở luỹ thừa* là tập các đỉnh $B_p \subset V$ sao cho

$$\begin{array}{rl} R(B_p) = V, & Q(B_p) = B_p, \\ R(S) \neq V, & \forall S \subset B_p. \end{array}$$

Điều kiện thứ hai nghĩa là chỉ những người bên trong B_p mới có thể có ảnh hưởng đến người khác cũng trong B_p và có thể thay bằng điều kiên tương đương: $R(V \setminus B_p) \cap B_p = \emptyset$. Điều kiện này chỉ ra rằng nếu một đỉnh trong thành phần liên thông mạnh của G thuộc B_p thì mọi đỉnh khác trong cùng thành phần liên thông mạnh này cũng thuộc B_p. Do tập cơ sở của G_r là tập các đỉnh có bậc trong bằng không nên tập cơ sở lũy thừa của G chính là

$$B_p = \bigcup_{S_i \in B^*} S_i.$$

Chẳng hạn đồ thị trong Hình 1.19 có cơ sở lũy thừa là $\{v_3, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$. Cần chú ý rằng, nếu đồ thị này tương ứng một tổ chức thì v_3 có thể xem là người lãnh đạo cao nhất của các nhóm v_1^*, v_2^* và v_3^*.

1.5 Đẳng cấu của các đồ thị

Ta đã biết rằng cùng một đồ thị có thể được biểu diễn bằng nhiều hình vẽ khác nhau. Việc nhận biết được trong trường hợp nào hai hình vẽ biểu diễn cùng một đồ thị, trong trường hợp nào biểu diễn hai đồ thị khác nhau, là một vấn đề không đơn giản.

Rõ ràng là hai hình cho trước biểu diễn cùng một đồ thị chỉ khi các điều kiện sau đây được thoả mãn:

1. Số đỉnh bằng nhau;

2. Số cạnh bằng nhau;

3. Số đỉnh cùng bậc bằng nhau.

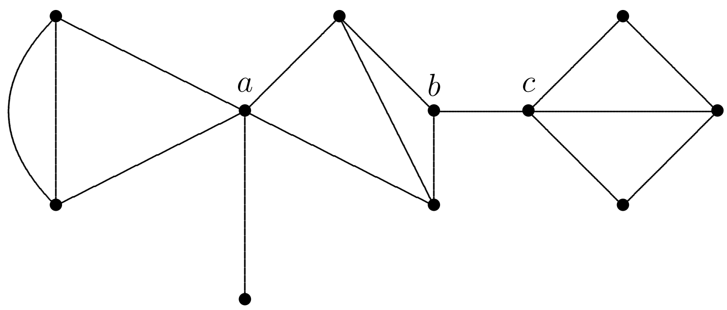
Đó là những điều kiện cần: hai hình không thoả mãn một trong các điều kiện đó thì không biểu diễn cùng một đồ thị. Nhưng chúng cũng không phải là điều kiện đủ (hãy cho ví dụ). Hiển nhiên rằng

Định lý 1.5.1 *Điều kiện cần và đủ để hai hình biểu diễn cùng một đồ thị là tồn tại một tương ứng một-một lên giữa các đỉnh của hai hình sao cho nếu hai đỉnh của hình này được nối bởi một cạnh thì hai đỉnh tương ứng của hình kia cũng được nối với nhau bởi một cạnh và ngược lại.*

Việc tìm một tiêu chuẩn đơn giản và hiệu quả để phát hiện tính đẳng cấu của các đồ thị vẫn là bài toán mở của lý thuyết đồ thị và đang còn được tiếp tục nghiên cứu.

1.5.1 1−đẳng cấu

Đồ thị có các điểm khớp gồm ít nhất hai đồ thị con không có điểm khớp. Mỗi đồ thị con liên thông lớn nhất không có điểm khớp gọi là *khối*. Đồ thị trong Hình 1.21 có năm khối (và ba điểm khớp a, b và c). Chú ý rằng đồ thị liên thông không có điểm khớp chỉ có một khối.

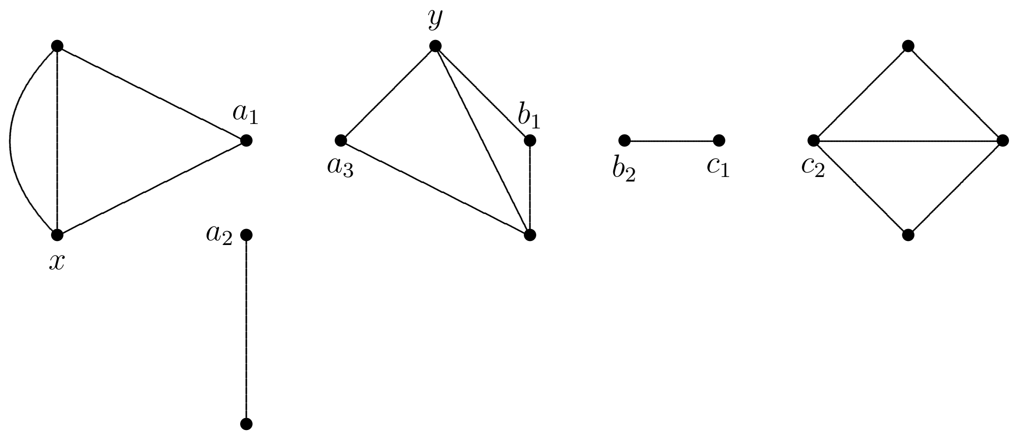


Hình 1.21:

So sánh đồ thị không liên thông trong Hình 1.22 và đồ thị trong Hình 1.21. Hiển nhiên hai đồ thị này không đẳng cấu (chúng có số đỉnh khác nhau); nhưng chúng có mối liên hệ là các khối trong Hình 1.21 đẳng cấu với các thành phần của đồ thị trong Hình 1.22. Các đồ thị này gọi là *1-đẳng cấu*. Chính xác hơn:

Định nghĩa 1.5.2 Hai đồ thị G_1 và G_2 gọi là $1-$*đẳng cấu* nếu chúng trở thành đẳng cấu với nhau sau khi áp dụng một số lần phép toán sau:

Phép toán 1. "Tách" một điểm khớp thành hai đỉnh để tạo thành hai đồ thị con không có điểm khớp rời nhau.



Hình 1.22:

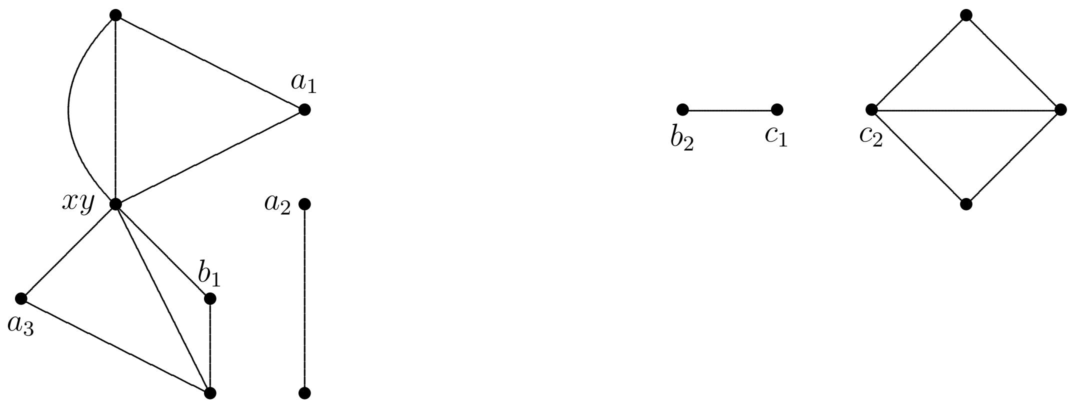
Từ định nghĩa suy ra rằng hai đồ thị không có điểm khớp là 1-đẳng cấu nếu và chỉ nếu chúng đẳng cấu.

Điều gì sẽ xảy ra khi ta nối hai thành phần của Hình 1.22 bằng cách "dán" hai đỉnh (chẳng hạn x và y)? Chúng ta nhận được đồ thị trong Hình 1.23.

Hiển nhiên các đồ thị trong Hình 1.23 là $1-$đẳng cấu với đồ thị trong Hình 1.22. Vì các khối của đồ thị trong Hình 1.23 đẳng cấu với các khối của đồ thị trong Hình 1.21, nên hai đồ thị này là $1-$đẳng cấu. Do đó ba đồ thị trong các Hình 1.21, 1.22 và 1.23 là đôi một $1-$đẳng cấu.

1.5.2 $2-$đẳng cấu

Trong phần trên chúng ta đã tổng quát hoá khái niệm đẳng cấu bằng khái niệm $1-$đẳng cấu. Các đồ thị đẳng cấu thì $1-$đẳng cấu nhưng ngược lại không đúng. Sự tổng quát hoá rất hữu ích trong việc nghiên cứu các đồ thị có điểm khớp.



Hình 1.23:

Chúng ta còn có thể mở rộng khái niệm này cho các đồ thị 2−liên thông như sau.

Trong đồ thị 2−liên thông G xét hai đỉnh x và y mà xoá chúng (và các cạnh liên thuộc chúng) thì đồ thị mất tính liên thông. Nói cách khác, G gồm một đồ thị con g_1 và phần bù của nó $\bar{g}_1$ sao cho g_1 và $\bar{g}_1$ có đúng hai đỉnh chung: x và y. Giả sử rằng chúng ta thực hiện phép toán sau trên G :

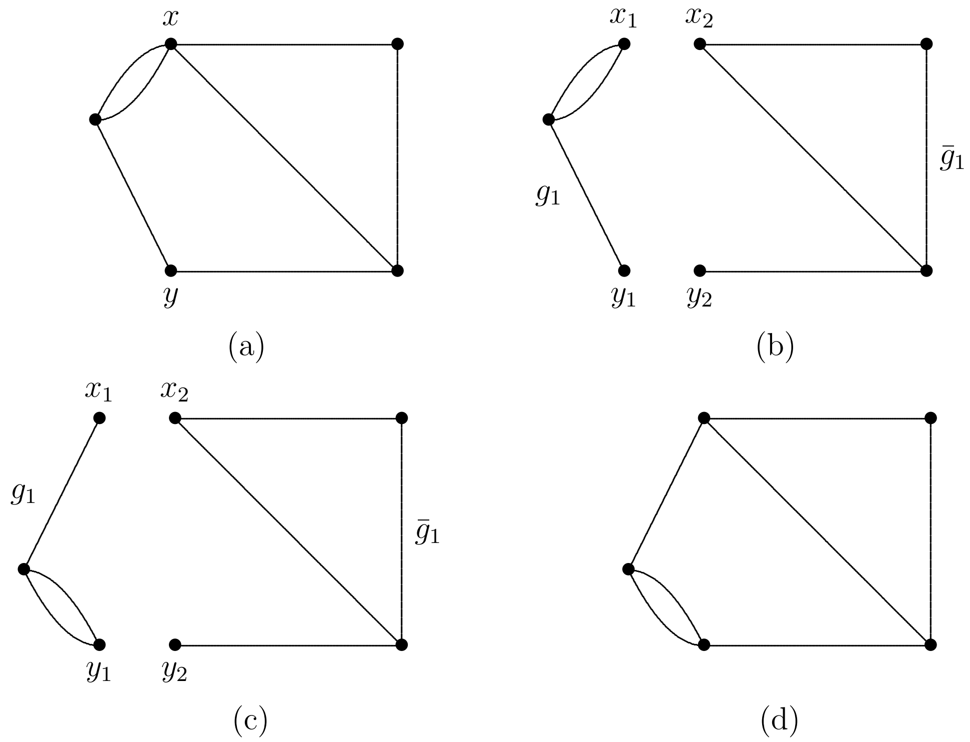
Phép toán 2. "Tách" đỉnh x thành x_1 và x_2 và đỉnh y thành y_1 và y_2 sao cho ta thu được từ G hai thành phần g_1 và $\bar{g}_1$. Giả sử các đỉnh x_1 và y_1 thuộc thành phần g_1 và x_2 và y_2 thuộc $\bar{g}_1$. Bây giờ nối hai đồ thị g_1 và $\bar{g}_1$ bằng cách hợp nhất đỉnh x_1 với đỉnh y_2 và đỉnh x_2 với đỉnh y_1. (Hiển nhiên các cạnh mà liên thuộc với x hoặc y trong G đi cùng với g_1 hoặc $\bar{g}_1$, không ảnh hưởng đến đồ thị thu được ở bước cuối).

Hai đồ thị gọi là 2−*đẳng cấu* nếu chúng trở thành đẳng cấu sau Phép toán 1 hoặc Phép toán 2, hoặc cả hai phép toán sau một số lần thực hiện. Hình 1.24 chỉ ra hai đồ thị trong Hình 1.24(a) và (d) là 2−đẳng cấu. Chú ý rằng trong Hình 1.24(a), bậc của đỉnh x bằng bốn, còn trong Hình 1.24(d) không có đỉnh nào bậc bốn.

Từ định nghĩa, suy ra 1−đẳng cấu là 2−đẳng cấu, nhưng ngược lại chưa chắc đúng. Tuy nhiên, với các đồ thị k−liên thông với $k \geq 3$ thì ba khái niệm đẳng cấu, 1−đẳng cấu và 2−đẳng cấu là như nhau (tại sao?).

Tương ứng chu trình

Hai đồ thị G_1 và G_2 gọi là cho một *tương ứng chu trình* nếu chúng thoả điều kiện sau: Tồn tại tương ứng một-một giữa các cạnh của G_1 và G_2 và một tương ứng giữa các chu trình của G_1 và G_2 sao cho một chu trình trong G_1 được tạo bởi các cạnh của G_1 có một chu trình tương ứng trong G_2 được tạo bởi các cạnh tương ứng trong G_2, và ngược lại. Từ



Hình 1.24:

định nghĩa suy ra các đồ thị đẳng cấu có tương ứng chu trình.

Vì trong đồ thị có điểm khớp G, mỗi chu trình thuộc một khối nào đó, nên mỗi chu trình trong G vẫn tương ứng các cạnh của nó khi thực hiện Phép toán 1 trên G. Do đó, các đồ thị 1−đẳng cấu có tính chất tương ứng chu trình.

Tương tự, xét chu trình μ trong đồ thị G sau khi thực hiện Phép toán 2 trên G. Với chu trình μ, ta có ba trường hợp xảy ra:

1. Các cạnh thuộc μ nằm hoàn toàn trong g_1; hoặc
2. Các cạnh thuộc μ nằm hoàn toàn trong $\bar{g}_1$; hoặc
3. Các cạnh thuộc μ nằm trong cả hai đồ thị con g_1 và $\bar{g}_1$; và trong trường hợp này μ phải chứa cả hai đỉnh x và y.

Trong các Trường hợp 1 và 2, chu trình μ không ảnh hưởng qua Phép toán 2. Trong Trường hợp 3, μ vẫn gồm các cạnh cũ, ngoại trừ dây chuyền giữa các đỉnh x và y trong g_1 (thuộc chu trình μ) bị "đảo ngược lại". Do đó, mỗi chu trình sau Phép toán 2 vẫn gồm chính những cạnh cũ. Suy ra các đồ thị 2−đẳng cấu cũng có tính chất tương ứng chu trình.

Định lý 1.5.3 *Hai đồ thị là 2−đẳng cấu nếu và chỉ nếu chúng có tương ứng chu trình.*

Chứng minh. Điều kiên đủ suy từ các lý luận trên. Chứng minh điều kiện cần khó hơn và có thể xem [55]. ◁

Như sẽ thấy sau, các khái niệm 2−đẳng cấu và tương ứng chu trình đóng vai trò quan trọng khi nghiên cứu đối ngẫu của các đồ thị phẳng.

1.6 Các đồ thị đặc biệt

Phần này giới thiệu một số đồ thị đặc biệt thường gặp trong các mô hình thực tế. Các đồ thị này được quan tâm nhiều vì:

- Từ phát biểu một số bài toán;
- Từ các tính chất đặc biệt của chúng;
- Phục vụ cho một số thuật toán.

1.6.1 Đồ thị không có mạch

Đây là đồ thị thường gặp nhất khi biểu diễn các quan hệ thứ tự bộ phận trên các phần tử: với một quan hệ thứ tự $\leq$ trên tập V, xét đồ thị $G = (V, E)$ trong đó

$$(v_i, v_j) \in E \quad \Leftrightarrow \quad i \leq j.$$

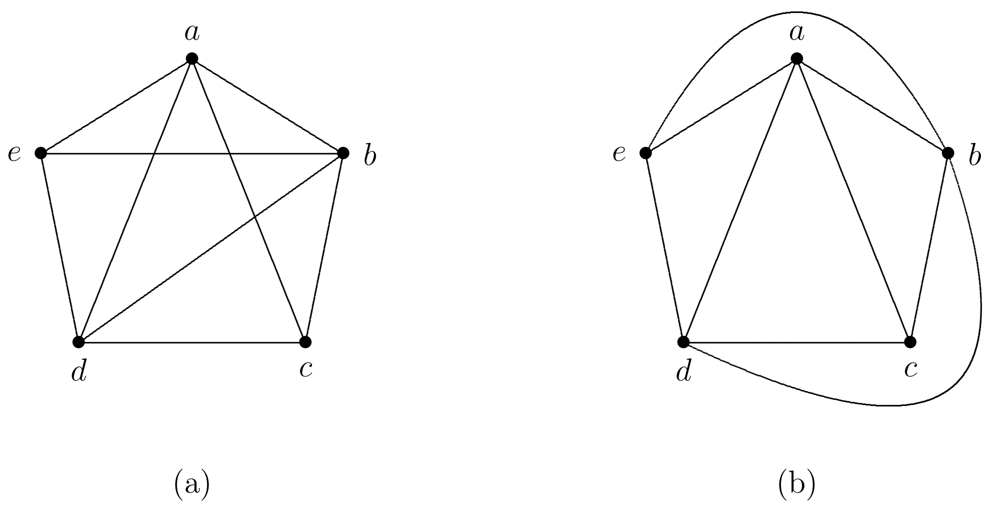
Các bài toán luồng trên mạng vận tải xét các đồ thị này (cũng xem các bài toán lập lịch trong [30]).

1.6.2 Đồ thị phẳng

Đồ thị vô hướng G gọi là *phẳng* nếu có thể biểu diễn trên một mặt phẳng $\mathbf{R}^2$ với các đỉnh tương ứng các điểm phân biệt trên $\mathbf{R}^2$ và các đường cong không tự cắt tương ứng các cạnh sao cho hai đường cong bất kỳ không cắt nhau ngoại trừ tại các đỉnh chung.

Đồ thị trong Hình 1.25(a) là phẳng vì chúng ta có thể vẽ lại như trong Hình 1.25(b).

Các đồ thị phẳng sẽ được nghiên cứu trong Chương 6.



Hình 1.25: Đồ thị (a) được biểu diễn lại trong hình (b) là phẳng.

