BÀI 09

Giả sử G là đồ thị hai phần có n đỉnh. Ký hiệu k là số phần tử của tập đỉnh tựa bé nhất. Khi đó thì:

Định lý 5.2:

1. Số ổn định trong của đồ thị hai phần G là bằng n-k.
2. Số phần tử của cặp ghép lớn nhất của G là bằng k.

Chứng minh:

1. Suy từ nhận xét trên: C là tập đỉnh tựa nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ V \ C là tập ổn định trong lớn nhất.

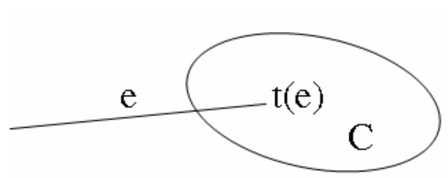
2. Giả sử W là cặp ghép lớn nhất và C là tập tựa nhỏ nhất.

Lập ánh xạ $t : W \to C$ như sau:

$\forall e \in W$, $t(e)$ là một đỉnh của e thuộc C.

Đỉnh đó tồn tại vì C là tập tựa, còn nếu cả hai đỉnh của e đều thuộc C thì ta lấy một trong hai đỉnh đó.

Nếu $u, v \in W$ và $u \neq v$ thì $t(u) \neq t(v)$ vì hai cạnh u và v không có đỉnh chung. Vậy thì: $|W| \leq |C| = k$.



Hình 5.6. Cách xây dựng ánh xạ t

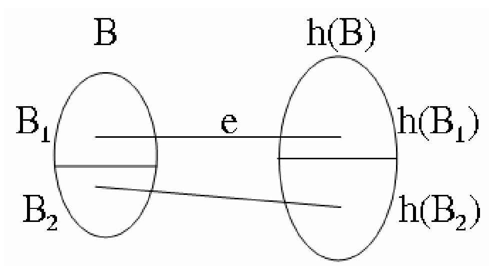
Để chứng minh chiều ngược lại ta xây dựng tập đỉnh tựa C từ cặp ghép lớn nhất W mà hai tập này có cùng lực lượng.

Ký hiệu B là tập các đỉnh của W trong V_1. Lập ánh xạ $h : B \to V_2$ như sau:

$$\forall a \in B,\ \exists\, b \in V_2 : (a, b) \in W \text{ ta đặt } h(a) = b.$$

Vậy h(B) chính là tập các đỉnh của W trong V_2.

Nếu $a, c \in B$ và $a \neq c$ thì $h(a) \neq h(c)$ vì các cạnh trong W chứa a và c không kề nhau.



Hình 5.7. Cách xây dựng tập đỉnh tựa

Một đường đi trong đồ thị G được gọi là *đường đan* nếu nó có dạng

$$< \boldsymbol{w_1}\ u_1\ \boldsymbol{w_2}\ u_2\ \ldots\ \boldsymbol{w_q}\ u_q >$$

trong đó: $\boldsymbol{w_1, w_2, \ldots, w_q}$ đều thuộc W và $u_1, u_2, \ldots, u_q$ đều không thuộc W.
Ký hiệu: $B_1 = \{a \in B \mid \exists$ đường đan đi từ a đến một đỉnh nào đó nằm ngoài $B\}$ và $B_2 = B \setminus B_1$. Đặt: $C = B_2 \cup h(B_1)$.

Chúng ta sẽ chứng minh rằng, tập C là tập đỉnh tựa của đồ thị G. Ta chứng minh điều này bằng phản chứng.

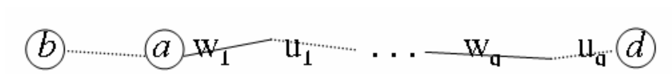
Giả sử rằng tập C không phải tập đỉnh tựa của đồ thị hai phần G, nghĩa là có cạnh (a, b) nào đó không tựa vào tập C. Vậy thì $a \notin B_2$ và $b \notin h(B_1)$.
Nhưng vì tập các cạnh W là cặp ghép lớn nhất, nên cạnh (a, b) phải kề với một cạnh nào đó trong W, nghĩa là: $a \in B$ hoặc $b \in h(B)$.

Xét các trường hợp sau đây:

1) Trường hợp: $a \in B$. Suy ra: $a \in B_1$.

Khi đó có một đường đan $(X) = < \boldsymbol{w_1}\ u_1\ \boldsymbol{w_2}\ u_2 \ldots \boldsymbol{w_q}\ u_q >$ dẫn đỉnh a tới một đỉnh d nào đó nằm ngoài tập B.

- Nếu $b \notin h(B)$ thì cạnh $(a, b) \notin W$. Ta loại các cạnh $w_1, w_2, \ldots, w_q$ ra khỏi W và thay các cạnh $(a, b), u_1, u_2, \ldots, u_q$ vào W. Khi đó, W vẫn là một cặp ghép và số cạnh tăng thêm 1. Vậy trái với giả thiết W là cặp ghép lớn nhất.



- Nếu $b \in h(B)$ thì $b \in h(B_2)$. Ký hiệu đỉnh $d' = h^{-1}(b) \in B_2$.
Đường đan: $< (d',b) + (b, a) + (X) >$ dẫn đỉnh d' trong B_2 tới đỉnh d nằm ngoài B. Vậy thì: $d' \in B_1$. Đó là điều mâu thuẫn.

2) Trường hợp: $a \notin B$. Khi đó $b \in h(B_2)$ vì (a, b) không tựa vào tập C.
Ký hiệu: $d' = h^{-1}(b) \in B_2$. Đường đan $< (d',b) + (b,a) >$ dẫn đỉnh d' tới đỉnh a ở ngoài tập B. Vậy thì $d \in B_1$. Suy ra điều mâu thuẫn.

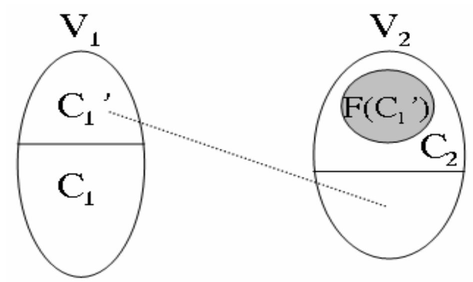
Vậy C là một tập tựa của đồ thị. Tập tựa này có số phần tử bằng số phần tử của cặp ghép lớn nhất W.
Theo ký hiệu của định lý: $k \leq$ số phần tử của C = số phần tử của cặp ghép lớn nhất W. Định lý được chứng minh. □

Với đồ thị hai phần $G = (V_1, V_2, F)$ ta ký hiệu:

$$d_0 = \max \{ |B| - |F(B)| \mid B \subseteq V_1 \}$$

Vì $\varnothing \subset V_1$ và $|\varnothing| - |F(\varnothing)| = 0 - 0 = 0$ nên d_0 luôn là một số không âm.

Định lý 5.3: Số phần tử của tập tựa bé nhất của đồ thị hai phần $G = (V_1,V_2, F)$ là bằng $|V_1| - d_0$.
Chứng minh: Giả sử C là một tập tựa bất kỳ.
Có thể viết $C = C_1 \cup C_2$ trong đó $C_1 \subseteq V_1$ và $C_2 \subseteq V_2$.
Ký hiệu: $C_1' = V_1 \setminus C_1$. Khi đó, $F(C_1') \subseteq C_2$, vì nếu ngược lại thì sẽ có đỉnh $a \in C_1'$ mà đỉnh kề của nó $y \notin C_2$ và cạnh (a, y) sẽ không tựa vào tập C, dẫn tới mâu thuẫn.



Hình 5.8. Cách tìm tập tựa bé nhất

Mặt khác, $C_1 \cup F(C_1')$ lại là một tập tựa và $C_1 \cup F(C_1') \subseteq C$. Do đó, với mỗi tập tựa C ta có thể thay bằng một tập tựa dạng $C_1 \cup F(C_1')$ với số phần tử không lớn hơn.
Vậy để xét tập tựa bé nhất ta chỉ cần xét:

$$\min \{ |C_1 \cup F(C_1')| \mid C_1 \subseteq V_1 \} =$$
$$\min \{ |C_1| + |F(C_1')| \mid C_1 \subseteq V_1 \} =$$
$$|V_1| - \max \{ |C_1'| - |F(C_1')| \mid C_1' \subseteq V_1 \} = |V_1| - d_0.$$ □

Từ định lý này ta gọi d_0 là *số hụt* của đồ thị.

Hệ quả 5.4:
a) Số ổn định trong của đồ thị hai phần G là bằng $|V_2| + d_0$

b) Số phần tử của cặp ghép lớn nhất của G là bằng $| V_1 | - d_0$.

Ví dụ 5.6 (*Bài toán phân công nhiệm vụ*):

Một cơ quan có n nhân viên $x_1, x_2, ..., x_n$ và m nhiệm vụ $y_1, y_2, ..., y_m$. Do quá trình đào tạo, mỗi nhân viên có thể đảm nhiệm k nhiệm vụ và mỗi nhiệm vụ có đúng k nhân viên có thể đảm nhiệm được. Chứng minh rằng luôn có thể phân công mỗi nhân viên đảm nhiệm một nhiệm vụ thích hợp với trình độ của người đó.

Thật vậy, ký hiệu V_1 là tập nhân viên và V_2 là tập các nhiệm vụ. Thế thì: $|V_1| = n$ và $|V_2| = m$.
Ta xây dựng đồ thị hai phần $G = (V_1,V_2, F)$ mà:

$$x_i \in F(y_j) \Leftrightarrow \text{nhân viên } x_i \text{ đảm nhiệm được nhiệm vụ } y_j.$$

Theo giả thiết của bài toán thì mỗi đỉnh kề với đúng k cạnh.
Với $B \subseteq V_1$ thì số cạnh kề B sẽ là $k.| B |$ và số cạnh kề F(B) là $k.| F(B) |$.
Số cạnh kề F(B) ≥ số cạnh kề B vì cạnh kề B thì cũng kề F(B).
Cho nên, $|B| \le |F(B)|$. Suy ra $d_0 = 0$. Theo Hệ quả 5.4, lực lượng của cặp ghép lớn nhất sẽ là $|V_1| - d_0 = |V_1|$. Do vậy, có thể phân công cho n nhân viên đảm nhiệm n nhiệm vụ. Bằng cách thay đổi vai trò giữa V_1 và V_2 suy ra lực lượng của cặp ghép lớn nhất bằng $|V_2|$. Vậy $|V_1| = |V_2|$, nghĩa là số nhân viên bằng số nhiệm vụ. Bài toán phân công được giải quyết xong.

Đồ thị hai phần và cặp ghép của nó có nhiều ứng dụng trong thực tế. Vậy khi nào có thể tách từ một đồ thị vô hướng ra một đồ thị riêng hai phần với tập các cạnh của nó là một cặp ghép. Ta có kết quả sau đây.

Định lý 5.5: Đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ với $| V| = 2n$ và bậc của mỗi đỉnh của đồ thị không ít hơn n, luôn có một đồ thị riêng hai phần $G'' = (V_1, V_2, E'')$ với $| V_1 | = |V_2 | = | E''| = n$ và tập các cạnh E'' chính là một cặp ghép lớn nhất của đồ thị G.

Chứng minh:

Ta xây dựng đồ thị riêng hai phần $G'' = (V_1, V_2, E'')$ như sau:
Lấy dần vào tập E'' các cạnh của G sao cho các đỉnh trên các cạnh này khác nhau từng đôi cho đến khi bất kỳ cạnh nào còn lại cũng kề với cạnh nào đó thuộc E''.
Giả sử $| E'' | = k$.
- Nếu $k = n$ thì định lý được chứng minh
- Nếu $k < n$ thì $| V | \ge 2k +2$.

Ký hiệu k cạnh thuộc E'' là: (a_1, a_2) , (a_3, a_4) , . . . , (a_{2k-1}, a_{2k}). Sẽ còn ít nhất hai đỉnh a_{2k+1}, a_{2k+2} không nằm trên cạnh nào thuộc E''.

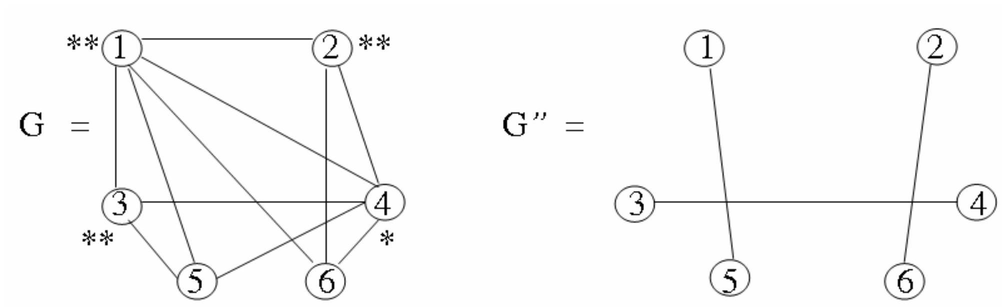
Theo cách chọn tập cạnh E" thì hai đỉnh a_{2k+1}, a_{2k+2} chỉ kề với các đỉnh trên E", vì nếu chúng kề với các đỉnh không nằm trên E" thì đã có thể bổ sung cho E" một cạnh mới nữa. Vậy theo giả thiết, mỗi đỉnh a_{2k+1} , a_{2k+2} kề với ít nhất n đỉnh trên E".

Ta đánh dấu các đỉnh trên E" kề với a_{2k+1}. Số đỉnh được đánh dấu $\geq n$. Ta lại đánh dấu các đỉnh trên E" mà đỉnh cùng cạnh với nó trong E" kề với a_{2k+2}. Số đỉnh được đánh dấu $\geq n$. Như vậy số lần đánh dấu trên các đỉnh thuộc E" $\geq 2n$. Nhưng số đỉnh trên E" là $2k < 2n$ nên sẽ có ít nhất một đỉnh được đánh dấu hai lần.

Giả sử đỉnh này là a_i và đỉnh cùng cạnh với nó trong E" là a_j. Đỉnh a_i kề với a_{2k+1} còn a_j kề với a_{2k+2}. Như vậy, ta có thể loại cạnh (a_i, a_j) ra khỏi E" và thêm vào hai cạnh mới (a_i, a_{2k+1}) và (a_j, a_{2k+2}). Số cạnh trong E" tăng thêm một. Cứ tiếp tục như thế sau một số bước ta có $|E"| = n$ và xây dựng được đồ thị hai phần G". □

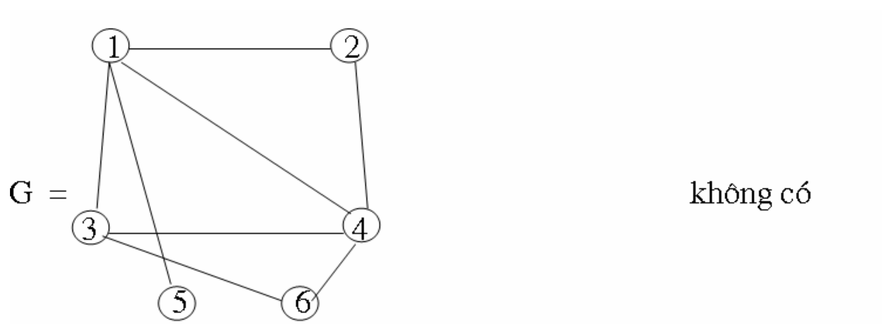
Ví dụ 5.7:

a)



Hình 5.9. Đồ thị và đồ thị riêng hai phần

b)



Hình 5.10. Đồ thị không có đồ thị riêng hai phần