Chương 7

Mạng vận tải

7.1 Mở đầu

Một trong những bài toán lý thú và quan trọng của lý thuyết đồ thị là xác định giá trị lớn nhất của luồng được truyền từ một *đỉnh nguồn s* của đồ thị đến một *đỉnh đích t*. Trong khung cảnh đó, mỗi cung (v_i, v_j) của đồ thị G được gắn với một khả năng thông qua q_{ij} là số lượng luồng lớn nhất có thể tải qua cung này. Bài toán này và những cải biên của nó có rất nhiều ứng dụng trong thực tế, chẳng hạn, xác định mật độ giao thông lớn nhất giữa hai vùng trong bản đồ giao thông được biểu diễn bởi một đồ thị. Trong ví dụ này, lời giải của bài toán luồng lớn nhất cũng chỉ ra những nơi "bảo hoà" trên mạng giao thông và tạo một "tắc nghẽn" khi luồng tập trung vào giữa hai vị trí nào đó.

Phương pháp giải bài toán *luồng lớn nhất* từ s đến t đưa ra lần đầu tiên bởi Ford và Fulkerson [27] và kỹ thuật "gán nhãn" của họ là cơ sở cho những thuật toán khác giải quyết những vấn đề liên quan. Có một số cải biên của bài toán luồng lớn nhất:

1. Giả sử rằng mỗi cung của đồ thị không chỉ được gắn với khả năng q_{ij} cho biết cận trên của luồng trên cung (v_i, v_j) mà còn "khả năng" r_{ij} cho cận dưới của luồng trên cung này. Trong trường hợp như vậy, không phải lúc nào một tập chấp nhận được các giá trị của luồng cũng thoả mãn cùng lúc hai ràng buộc này. Tuy nhiên-nói chung-nhiều luồng thoả điều kiện này, và nếu ngoài các khả năng còn có các chi phí c_{ij} tương ứng một đơn vị luồng dọc theo các cung, thì bài toán trở thành *tìm luồng chấp nhận được với chi phí nhỏ nhất* từ s đến t.

2. Xét trường hợp đòi hỏi *luồng lớn nhất giữa mọi cặp đỉnh*. Mặc dù bài toán này có thể giải bằng $n(n-1)/2$ lần lặp các bài toán luồng lớn nhất từ s đến t nhưng cách làm này quá thô! Tương tự với tìm tất cả các đường đi ngắn nhất, ở đây cũng cần

một thuật toán chuyên dụng để giải nó-và trong trường hợp đồ thị vô hướng, phương pháp giải quyết nó không liên quan đến lời giải của bài toán luồng lớn nhất giữa hai đỉnh s và t.

3. Nếu thay cho một đỉnh nguồn và một đỉnh đích, ta khảo sát một số nguồn và một số đích, với các hàng hoá khác nhau giữa hai tổ hợp nguồn-đích khác nhau, thì bài toán cực đại tổng số tất cả các luồng từ các nguồn đến các đích là *bài toán luồng đa-hàng hoá*. Trong bài toán này, khả năng q_{ij} của cung (v_i, v_j) là cận trên của tổng các luồng với các loại hàng hoá trên cung đó.

4. Giả thiết (ẩn) trong tất cả các trường hợp trên là số lượng luồng đến bằng số lượng luồng ra. Nếu ta bỏ giả thiết này và xét trường hợp luồng ra khỏi một cung bằng luồng đến nhân với một số nguyên không âm nào đó, thì bài toán luồng lớn nhất (từ s đến t) được xem như *bài toán trong các đồ thị với các lợi nhuận*. Trong dạng này, các luồng có thể "được sinh ra" hoặc "bị hấp thụ" bởi đồ thị, và do vậy luồng vào s và luồng ra khỏi t có thể thay đổi hoàn toàn độc lập.

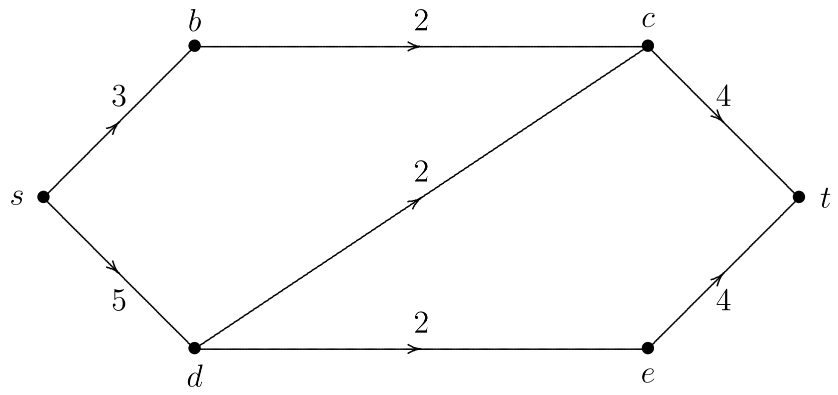
Các bài toán về luồng được nghiên cứu nhiều và có những ứng dụng thực tiễn. Mục đích của chương này trình bày ngắn gọn các bài toán thường gặp, chỉ ra mối liên hệ giữa chúng và xây dựng một số thuật toán giải quyết.

Chương này sẽ thảo luận bài toán luồng lớn nhất từ s đến t và các tổng quát hoá của nó (1), (2), (3) và (4) trên. Do các thuật toán giải bài toán luồng đa-hàng hoá rất khác biệt về bản chất, và không phải đều hiệu quả như phương pháp gán nhãn, nên sẽ không được đề cập ở đây. Bạn đọc quan tâm có thể xem [30] và các tài liệu dẫn kèm theo.

7.2 Bài toán luồng lớn nhất

Luồng lớn nhất trên mạng vận tải G là một luồng với giá trị lớn nhất. Nói chung có một vài luồng với cùng giá trị lớn nhất. Phần này trình bày thuật toán tìm luồng lớn nhất. Ý tưởng của thuật toán là: khởi đầu với luồng nào đó và tăng giá trị của luồng cho đến khi không thể tăng được nữa. Kết quả ta có luồng lớn nhất.

Ví dụ 7.2.1 Đồ thị có hướng trong Hình 7.1 biểu diễn sơ đồ mạng dẫn dầu. Dầu được dẫn từ tàu s và được bơm thông qua mạng đến nhà máy lọc dầu t. Các đỉnh b, c, d và e là các trạm bơm trung gian. Các cung biểu thị các ống dẫn dầu và hướng di chuyển của hệ thống. Các nhãn trên các cung là khả năng thông qua tối đa của ống dẫn. Bài toán đặt ra là tìm cách chuyển nhiều nhất lượng dầu từ tàu đến nhà máy và tính giá trị này. Hình 7.1 là một ví dụ của một "mạng vận tải". Trước hết ta có:



Hình 7.1: Ví dụ về mạng vận tải.

Định nghĩa 7.2.2 *Mạng vận tải* là một đơn đồ thị có hướng, có trọng số G sao cho

(a) có một và chỉ một đỉnh s, gọi là *đỉnh vào (hoặc đỉnh nguồn) của mạng,* không có cung đến nó.

(b) có một và chỉ một đỉnh t, gọi là *đỉnh ra (hoặc đỉnh đích) của mạng,* không có cung đi ra khỏi nó.

(c) mỗi cung $u := (v_i, v_j) \in E$ được gán một số nguyên không âm q_{ij}, gọi là *khả năng* của cung u.

(d) đồ thị vô hướng nhận được từ G bằng cách bỏ đi các hướng là liên thông.

Ví dụ 7.2.3 Đồ thị có hướng trong Hình 7.1 là mạng vận tải. Lối vào là đỉnh s và lối ra là đỉnh t. Khả năng cung (s, b) là $q_{sb} = 3$ và của cung (b, c) là $q_{bc} = 2$.

Trong chương này, nếu G là mạng vận tải chúng ta sẽ ký hiệu đỉnh vào là s và đỉnh ra là t.

Định nghĩa 7.2.4 Giả sử G là mạng vận tải với khả năng cung (v_i, v_j) là q_{ij}. *Luồng (chấp nhận được)* F trong G gán mỗi cung (v_i, v_j) một số không âm f_{ij} sao cho

(a) $0 \le f_{ij} \le q_{ij}$; và

(b) với mỗi đỉnh $v_j \ne s, t$, ta có

$$\sum_i f_{ij} = \sum_i f_{ji}. \tag{7.1}$$

(Tổng trong (7.1) lấy trên tất cả các giá trị i; nếu không có cung (v_i, v_j), ta đặt $f_{ij} = 0$).

Ta nói f_{ij} là *luồng trên cung* (v_i, v_j). Với mỗi j, ta gọi

$$\sum_i f_{ij}$$

là *luồng đến đỉnh* v_j và

$$\sum_i f_{ij}$$

là *luồng ra khỏi đỉnh* v_j.

Điều kiện (7.1) gọi là *bảo toàn luồng.* Trong ví dụ dẫn dầu của Hình 7.1, bảo toàn luồng có nghĩa dầu không được sử dụng và cũng không được cấp thêm tại các trạm bơm b, c, d và e.

Ví dụ 7.2.5 Các phép gán

$$f_{sb} = 2, f_{bc} = 2, f_{cz} = 3, f_{sd} = 3,$$

$$f_{dc} = 1, f_{de} = 2, f_{ez} = 2,$$

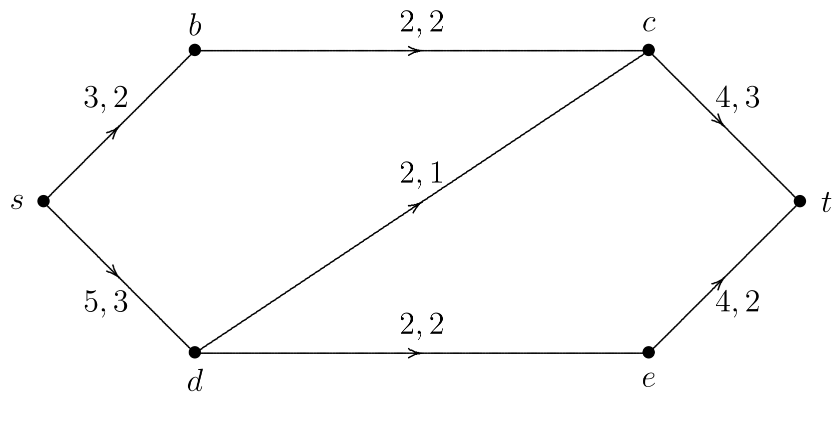
xác định luồng trên mạng vận tải của Hình 7.1. Chẳng hạn, luồng đến đỉnh d là

$$f_{sd} = 2,$$

bằng luồng ra khỏi đỉnh d :

$$f_{dc} + f_{de} = 1 + 2 = 3.$$

Luồng F được vẽ trong Hình 7.2, trong đó cung e được gán nhãn x, y nếu khả năng của e là x và luồng trên e là y.



Hình 7.2: Luồng trên mạng vận tải của Hình 7.1.

Chú ý rằng trong ví dụ này, luồng ra khỏi đỉnh s là

$$f_{sb} + f_{sd}$$

bằng luồng đến đỉnh t :

$$f_{ct} + f_{et}$$

và bằng 5. Thật vậy, ta có

Định lý 7.2.6 *Giả sử F là luồng trên mạng vận tải $G := (V, E)$. Khi đó luồng ra khỏi đỉnh s bằng luồng đến đỉnh t; tức là*

$$\sum_i f_{si} = \sum_i f_{it}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\sum_{j\in V}\left(\sum_{i\in V} f_{ij}\right) = \sum_{j\in V}\left(\sum_{i\in V} f_{ji}\right)$$

do mỗi vế bằng $\sum_{e\in E} f_e$. Vì vậy

$$\begin{aligned} 0 &= \textstyle\sum_{j\in V}\left(\sum_{i\in V} f_{ij} - \sum_{i\in V} f_{ji}\right) \\ &= \left(\textstyle\sum_{i\in V} f_{it} - \sum_{i\in V} f_{ti}\right) + \left(\sum_{i\in V} f_{is} - \sum_{i\in V} f_{si}\right) + \sum_{j\in V, j\neq s,t}\left(\sum_{i\in V} f_{ij} - \sum_{i\in V} f_{ji}\right) \\ &= \textstyle\sum_{i\in V} f_{it} - \sum_{i\in V} f_{si} \end{aligned}$$

do $f_{ti} = 0 = f_{is}$ với mọi $v_i \in V$, và (7.1).

Định nghĩa 7.2.7 Giả sử F là luồng trên mạng vận tải G. Đại lượng

$$\sum_i f_{si} = \sum_i f_{it}$$

gọi là *giá trị của luồng F*.

Bài toán trên mạng vận tải G có thể phát biểu:

Bài toán 7.2.8 *Tìm một luồng chấp nhận được lớn nhất trên đồ thị G; tức là trong số tất cả các luồng trên G, tìm luồng F có giá trị lớn nhất.*

Thuật toán gán nhãn của Ford và Fulkerson [27] giải bài toán này dựa trên Định lý 7.2.10. Trước hết ta có một số khái niệm

Định nghĩa 7.2.9 Nếu các đỉnh của đồ thị $G = (V, E)$ được phân hoạch thành hai tập con V_0 và $\tilde{V}_0$ (trong đó $V_0 \subset V$ và $\tilde{V}_0$ là phần bù của V_0 trong V), thì tập các cung của G với đỉnh xuất phát thuộc V_0 và đỉnh kết thúc thuộc $\tilde{V}_0$ gọi là *thiết diện* của G. Tập các cung của thiết diện thường được ký hiệu bởi $(V_0 \to \tilde{V}_0)$.

Giả sử G là mạng vận tải. Thiết diện $(V_0 \to \tilde{V}_0)$ tách s khỏi t nếu $s \in V_0$ và $t \in \tilde{V}_0$. *Khả năng thông qua* hay *giá trị* của thiết diện là tổng của tất cả các khả năng của tất cả các cung của G với đỉnh xuất phát thuộc V_0 và đỉnh kết thúc thuộc $\tilde{V}_0$; tức là

$$v(V_0 \to \tilde{V}_0) := \sum_{(v_i, v_j) \in (V_0 \to \tilde{V}_0)} q_{ij}.$$

Thiết diện nhỏ nhất là thiết diện có khả năng thông qua nhỏ nhất.

Định lý 7.2.10 (Định lý thiết diện nhỏ nhất-luồng lớn nhất) *Giá trị của luồng lớn nhất từ s đến t bằng khả năng thông qua của thiết diện nhỏ nhất $(V_m \to \tilde{V}_m)$ tách s khỏi t.*

Chứng minh. Hiển nhiên rằng, luồng lớn nhất từ s đến t không thể lớn hơn $v(V_m \to \tilde{V}_m)$ do tất cả các đường đi từ s đến t đều sử dụng ít nhất một cung của thiết diện này. Do đó chỉ cần chứng minh rằng tồn tại một luồng đạt giá trị này. Ta xem luồng đã cho F tương ứng với một vector m chiều và định nghĩa thiết diện $(V_0 \to \tilde{V}_0)$ bằng đệ quy theo thủ tục sau:

1. Khởi tạo, đặt $V_0 = \{s\}$.
2. Nếu $v_i \in V_0$, và hoặc $f_{ij} < q_{ij}$ hoặc $f_{ij} > 0$ thì đặt v_j vào trong tập V_0.
3. Lặp lại Bước 2 cho đến khi không thể thêm đỉnh nào vào V_0.

Có hai trường hợp xảy ra: hoặc $t \in V_0$ hoặc $t \notin V_0$.

Trường hợp 1. $t \in V_0$.

Theo Bước 2 trên, tồn tại một dây chuyền từ s đến t sao cho mọi cung (v_i, v_j) được sử dụng bởi dây chuyền theo hướng thuận (các cung định hướng thuận) thoả $f_{ij} < q_{ij}$ và các cung (v_k, v_l) được định hướng ngược, tức là hướng từ v_l đến v_k thoả $f_{lk} > 0$. Dây chuyền này gọi là *dây chuyền điều chỉnh.*

Đặt

$$\begin{array}{rcll} \delta_f & = & \min_{(v_i,v_j)}[q_{ij} - f_{ij}]; & (v_i, v_j) \text{ thuận hướng,} \\ \delta_b & = & \min_{(v_k,v_l)}[f_{kl}]; & (v_k, v_l) \text{ ngược hướng} \end{array}$$

và

$$\delta = \min[\delta_f, \delta_b].$$

Nếu ta cộng thêm δ vào luồng trên tất cả các cung định hướng thuận và trừ đi δ trên tất cả các cung định hướng ngược trong dây chuyền điều chỉnh thì luồng thu được vẫn là luồng chấp nhận được có giá trị nhỏ hơn luồng ban đầu một lượng δ. Điều này là hiển nhiên vì thêm một lượng δ vào các cung theo chiều thuận không vượt quá khả năng của các cung này (do $\delta < \delta_f$) và trừ đi một lượng δ vào các cung theo chiều ngược thì luồng vẫn không âm (do $\delta < \delta_b$).

Áp dụng lại với luồng mới theo các Bước 1-3 trên ta lại thu được một thiết diện mới $(V_0 \to \tilde{V}_0)$.

Trường hợp 2. $t \notin V_0$.

Theo Bước 2, $f_{ij} = q_{ij}$ với mọi cung $(v_i, v_j) \in (V_0 \to \tilde{V}_0)$ và $f_{kl} = 0$ với mọi cung $(v_k, v_l) \in (\tilde{V}_0 \to V_0)$.

Do đó

$$\sum_{(v_i,v_j)\in(V_0\to\tilde{V}_0)} f_{ij} = \sum_{(v_i,v_j)\in(V_0\to\tilde{V}_0)} q_{ij}$$

và

$$\sum_{(v_k,v_l)\in(\tilde{V}_0\to V_0)} f_{kl} = 0;$$

tức là giá trị của luồng bằng

$$\sum_{(v_i,v_j)\in(V_0\to\tilde{V}_0)} f_{ij} - \sum_{(v_k,v_l)\in(\tilde{V}_0\to V_0)} f_{kl}$$

và bằng khả năng thông qua của thiết diện $(V_0 \to \tilde{V}_0)$.

Do Trường hợp 1, luồng tăng ít nhất một đơn vị, nên nếu giả thiết tất cả các khả năng q_{ij} là những số nguyên thì luồng lớn nhất có thể nhận được sau một số hữu hạn bước khi Trường hợp 2 xảy ra. Luồng này có giá trị bằng khả năng thông qua của thiết diện hiện hành $(V_0 \to \tilde{V}_0)$ nên là luồng lớn nhất và thiết diện tương ứng có khả năng thông qua nhỏ nhất. ◁

Phương pháp xây dựng được sử dụng để chứng minh định lý trên cho chúng ta thuật toán để tìm luồng lớn nhất từ s đến t. Thuật toán này sẽ được trình bày dưới đây.

Xuất phát từ luồng chấp nhận được tuỳ ý (có thể sử dụng luồng có giá trị bằng không) và sau đó tăng luồng bằng cách tìm các dây chuyền điều chỉnh luồng từ s đến t. Việc tìm một dây chuyền điều chỉnh luồng được thực hiện bằng cách gán nhãn. Khi tìm được một dây chuyền điều chỉnh luồng, ta sẽ tăng giá trị của luồng. Sau đó xoá tất cả các nhãn và luồng mới được sử dụng để gán nhãn lại. Nếu không tồn tại dây chuyền điều chỉnh luồng thì thuật toán kết thúc, luồng chấp nhận được là lớn nhất. Thuật toán cụ thể như sau:

7.2.1 Thuật toán gán nhãn để tìm luồng lớn nhất

A. Quá trình gán nhãn

Mỗi đỉnh chỉ có thể có một trong ba khả năng:

1. được gán nhãn và được kiểm tra (tức là nó được gán nhãn và tất cả các đỉnh liên thuộc với nó đã được xử lý); hoặc
2. được gán nhãn và chưa được kiểm tra (tức là nó được gán nhãn và tồn tại đỉnh liên thuộc với nó chưa được xử lý); hoặc
3. chưa được gán nhãn.

Nhãn của đỉnh v_i gồm hai thành phần và có một trong hai dạng hoặc $(+v_j, \delta)$ hoặc $(-v_j, \delta)$. Trong trường hợp đầu, có thể tăng luồng dọc theo cung (v_i, v_j); trong trường hợp thứ hai, có thể giảm luồng dọc theo cung (v_i, v_j). Đại lượng δ trong cả hai trường hợp là lượng hàng nhiều nhất có thể thêm hoặc bớt giá trị của luồng trên các cung thuộc *dây chuyền điều chỉnh* (trong quá trình xây dựng) từ s đến v_i. Nhãn của đỉnh v_i cho phép xác định dây chuyền điều chỉnh luồng từ s đến v_i.

Khởi tạo tất cả các đỉnh chưa được gán nhãn và $f_{ij} = 0$ với mọi cung $(v_i, v_j) \in E$.

1. Gán nhãn của đỉnh s là $(+s, \delta(s) = \infty)$. Đỉnh s được gán nhãn và chưa được kiểm tra; tất cả các đỉnh khác chưa được gán nhãn.
2. Chọn đỉnh $v_i \in V$ đã được gán nhãn và chưa được kiểm tra. Nếu không tồn tại, thuật toán dừng, luồng $F = (f_{ij})$ là lớn nhất. Ngược lại, giả sử $(\pm v_k, \delta(v_i))$ là nhãn của đỉnh v_i.
   - Gán nhãn $(+v_i, \delta(v_j))$ cho tất cả các đỉnh $v_j \in \Gamma(v_i)$ chưa được gán nhãn sao cho $f_{ij} < q_{ij}$, trong đó
   $$\delta(v_j) := \min\{\delta(v_i), q_{ij} - f_{ij}\}.$$

- Gán nhãn $(-v_i, \delta(v_j))$ cho tất cả các đỉnh $v_j \in \Gamma^{-1}(v_i)$ chưa được gán nhãn sao cho $f_{ji} > 0$, trong đó
$$\delta(v_j) := \min\{\delta(v_i), f_{ji}\}.$$

(Đỉnh v_i đã được gán nhãn và đã được kiểm tra; các đỉnh v_j xác định trên đã được gán nhãn và chưa được kiểm tra).

3. Nếu đỉnh t được gán nhãn, chuyển sang Bước 4; ngược lại chuyển sang Bước 2. Cần chú ý rằng, nếu V_0 là tập các đỉnh đã được gán nhãn và $\tilde{V}_0$ là tập các đỉnh chưa được gán nhãn thì $(V_0 \to \tilde{V}_0)$ là thiết diện nhỏ nhất.

B. Quá trình tăng luồng

4. Đặt $c = t$ và chuyển sang Bước 5.
   - Nếu nhãn của đỉnh c có dạng $(+z, \delta(c))$ thì thay luồng trên cung (z, c) là f_{zc} bởi $f_{zc} + \delta(t)$;
   - Nếu nhãn của đỉnh c có dạng $(-z, \delta(c))$ thì thay luồng trên cung (x, z) là f_{cz} bởi $f_{cz} - \delta(t)$;

5. Nếu $z = s$ thì xoá tất cả các nhãn từ các đỉnh và chuyển sang Bước 1; ngược lại (tức là $z \neq c$) đặt $c = z$ và trở lại Bước 5.

7.2.2 Đồ thị điều chỉnh luồng

Quá trình tìm một dây chuyền để tăng giá trị của luồng F trong đồ thị $G = (V, E)$ có thể đưa về tìm một đường đi từ s đến t trên đồ thị điều chỉnh luồng $G^\mu(F) = (V^\mu, E^\mu)$, $V^\mu = V, E^\mu = E_1^\mu \cup E_2^\mu$, trong đó
$$E_1^\mu := \{(v_i^\mu, v_j^\mu) \mid f_{ij} < q_{ij}, (v_i, v_j) \in E\},$$
với khả năng của mỗi cung $(v_i^\mu, v_j^\mu) \in E_1^\mu$ là $q_{ij}^\mu = q_{ij} - f_{ij}$, và
$$E_2^\mu := \{(v_j^\mu, v_i^\mu) \mid f_{ij} > 0, (v_i, v_j) \in E\}$$
với khả năng của mỗi cung $(v_j^\mu, v_i^\mu) \in E_2^\mu$ là $q_{ji}^\mu = f_{ij}$.

Khi đó thủ tục gán nhãn của thuật toán tìm luồng lớn nhất trong Phần 7.2.1 chính là thuật toán xác định tập phạm vi $R(s)$ trong đồ thị điều chỉnh luồng $G^\mu(F)$. Nếu $t \in R(s)$, tức là nếu đỉnh t được gán nhãn, thì có thể xác định một đường đi từ s đến t trong đồ thị $G^\mu(F)$. Trong trường hợp này, dây chuyền điều chỉnh luồng của G là đường đi P mà các cung của P thuộc E_1^μ tương ứng cung định hướng thuận và các cung của P thuộc E_2^μ được định hướng ngược.

7.2.3 Phân tích luồng

Trong một số trường hợp ta muốn phân tích một luồng phức tạp thành tổng của những luồng đơn giản hơn. Điều này không những có ý nghĩa thực tiễn mà còn góp phần hiểu tốt hơn bản chất của luồng trên mạng vận tải, và ngoài ra phục vụ một số thuật toán về luồng.

Ký hiệu $h \circ (S)$ là luồng trong đồ thị G mà các cung $(v_i, v_j) \in S$ có $f_{ij} = h$ và các cung $(v_i, v_j) \notin S$ có $f_{ij} = 0$. Chú ý rằng $h \circ (S)$ không nhất thiết là một luồng với tập S tuỳ ý. Hiển nhiên rằng $h \circ (S)$ là một luồng thì tập S các cung hoặc tạo thành một đường đi từ s đến t hoặc là một mạch trong G.

Với hai luồng F và H ta ký hiệu $F + H$ là luồng mà luồng trên cung (v_i, v_j) là $f_{ij} + h_{ij}$.

Định lý 7.2.11 *Nếu F là luồng từ s đến t có giá trị nguyên v trong G thì F có thể phân tích thành*

$$F = 1 \circ (P_1) + 1 \circ (P_2) + \cdots + 1 \circ (P_v) + 1 \circ (\Phi_1) + 1 \circ (\Phi_2) + \cdots + 1 \circ (\Phi_\kappa),$$

trong đó P_1, P_2, P_v là các đường đi sơ cấp từ s đến t và $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\kappa$ là các mạch sơ cấp của G. (P_i và Φ_i không nhất thiết phân biệt).

Chứng minh. Từ $G = (V, E)$ với luồng F cho trước ta xây dựng đồ thị unitary $G^e = (V^e, E^e)$ như sau: Tập V^e các đỉnh của G^e chính là tập V các đỉnh của G. Nếu f_{ij} là luồng trên cung (v_i, v_j) của G thì ta thay bằng f_{ij} cung song song giữa các đỉnh tương ứng v_i^e và v_j^e của G^e. Nếu $f_{ij} = 0$ thì không có cung nào được đặt giữa v_i^e và v_j^e. Ta được G^e là đa đồ thị trong đó mỗi cung của nó tương ứng với một đơn vị luồng trên cung tương ứng trong G; nói cách khác, G^e biểu diễn luồng F trong G.

Từ điều kiện về luồng F suy ra các đỉnh của đồ thị G^e cần thoả mãn

$$\begin{array}{rcll} d^+(v_i^e) & = & d^-(v_i^e), & \text{với mọi } v_i^e \neq s^e \text{ hoặc } t^e, \\ d^+(s^e) & = & d^-(^e) \quad = \quad v. & \end{array}$$

Suy ra nếu ta trả lại v cung được thêm vào G^e từ đỉnh t^e đến đỉnh s^e thì đồ thị G^e sẽ có một mạch Euler (xem Phần 5.1). Loại bỏ v cung này khỏi mạch Euler, ta được v đường đi từ s^e đến t^e qua mỗi cung của G^e đúng một lần. Ký hiệu các đường đi này là $P_1', P_2', \ldots, P_v'$. Các đường đi P_i' không nhất thiết sơ cấp (mặc dù chúng là đơn giản). Tuy nhiên, mỗi đường đi không sơ cấp có thể xem như tổng của một đường đi sơ cấp từ s^e đến t^e và một số các mạch sơ cấp rời nhau. Do vậy,

$$F = 1 \circ (P_1) + 1 \circ (P_2) + \cdots + 1 \circ (P_v) + 1 \circ (\Phi_1) + 1 \circ (\Phi_2) + \cdots + 1 \circ (\Phi_\kappa),$$

trong đó P_i là các đường đi sơ cấp từ s^e đến t^e và Φ_i là các mạch sơ cấp. $\triangleleft$

Nói chung, các đường đi và các chu trình có thể trùng nhau. Nếu chỉ có v' đường đi và κ' mạch đầu tiên khác nhau, với đường đi P_i xuất hiện h_i lần trong danh sách $P_1, P_2, \ldots, P_v$ và mạch Φ_i xuất hiện l_i lần trong danh sách $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\kappa$ thì F có thể viết dưới dạng

$$F = \sum_{i=1}^{v'} h_i \circ (P_i) + \sum_{i=1}^{\kappa'} l_i \circ (\Phi_i).$$

Nói chung hai luồng F và H là thích ứng nến $f_{ij}.h_{ij} = 0$ với mọi cung (v_i, v_j).

Ví dụ 7.2.12 Luồng F trong Hình 7.3 được phân tích thành các đường đi (từ s đến t) và các mạch sơ cấp:

$$F = 2 \circ P_1 + 1 \circ P_2 + 1 \circ \Phi_1 + 1 \circ \Phi_2 + 1 \circ \Phi_3,$$

trong đó

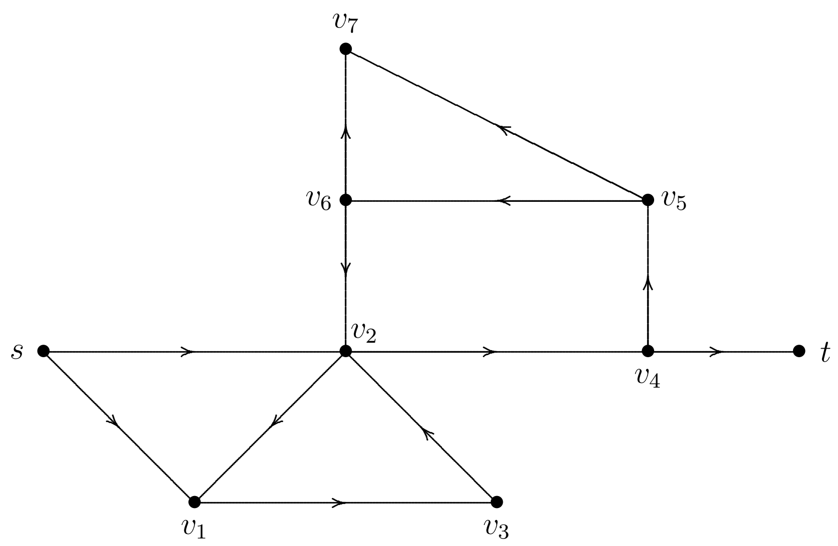
$$\begin{array}{lcl} P_1 & = & \{s, v_2, v_4, t\}, \\ P_2 & = & \{s, v_1, v_3, v_2, v_4, t\}, \\ \Phi_1 & = & \{v_1, v_3, v_2, v_1\}, \\ \Phi_2 & = & \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_2\}, \\ \Phi_3 & = & \{v_5, v_6, v_7, v_5\}. \end{array}$$

7.3 Các cải biên đơn giản của bài toán luồng lớn nhất

Phần này chúng ta nêu một số kết quả nhận được từ bài toán luồng lớn nhất.

7.3.1 Các đồ thị có nhiều nguồn và nhiều đích

Xét đồ thị với n_s đỉnh vào và n_t đỉnh ra và giả sử luồng có thể chuyển từ nguồn đến đích tuỳ ý. Bài toán tìm luồng lớn nhất từ tất cả các nguồn đến tất cả các đích có thể đưa về bài toán luồng lớn nhất bằng cách thêm một đỉnh nguồn nhân tạo s và một đỉnh ra nhân tạo t với các cung được thêm từ s đến các đỉnh vào ban đầu và từ các đỉnh ra thực tế đến đỉnh t. Khả năng của các cung thêm vào từ s đến các nguồn có thể đặt bằng vô cùng, hoặc trong trường hợp lượng hàng cung cấp tại một nguồn s_k tối đa là a_k thì khả năng của cung



Hình 7.3: Luồng F.

(s, s_k) có thể đặt bằng giá trị này. Tương tự, khả năng của các cung dẫn tới đỉnh ra t có thể đặt bằng nhu cầu tại các đỉnh ra t_k hoặc bằng vô hạn nếu có nhu cầu là vô hạn.

Nếu bài toán đặt ra ở đó có đỉnh ra chỉ được cung cấp bởi những nguồn nào đó và ngược lại, thì bài toán không phải là cải biên đơn giản của bài toán luồng lớn nhất từ s đến t mà có thể đưa về bài toán đa luồng như đã đề cập trong phần mở đầu.

7.3.2 Các đồ thị với ràng buộc tại các cung và đỉnh

Nếu ngoài khả năng q_{ij} của các cung, ta thêm khả năng của các đỉnh $w_j, j = 1, 2, \ldots, n$, sao cho tổng số lượng hàng đi đến đỉnh v_j nhỏ hơn w_j, tức là

$$\sum_{v_i \in \Gamma^{-1}(v_j)} f_{ij} \leq w_{ij}$$

với mọi v_j.

Ta cần tìm luồng lớn nhất từ s đến t với giả thiết thêm tại các đỉnh. Xét đồ thị G_0 sao cho mọi đỉnh v_j của đồ thị G tương ứng hai đỉnh v_j^+ và v_j^- trong đồ thị G_0 sao cho mọi cung (v_i, v_j) của G đến đỉnh v_j tương ứng một cung (v_i^-, v_j^+) đến đỉnh v_j^+, và mọi cung (v_j, v_k) của G xuất phát từ v_j tương ứng một cung (v_j^-, v_k^+) của G_0 xuất phát từ v_j^-. Ngoài ra ta thêm một cung giữa v_j^+ và v_j^- với khả năng thông qua w_j, tức là bằng khả năng của đỉnh v_j.

Vì tổng số lượng hàng đến đỉnh v_j^+ phải được chuyển dọc theo cung (v_j^+, v_j^-) với khả năng thông qua w_j nên luồng lớn nhất trong đồ thị G với ràng buộc tại các đỉnh bằng luồng lớn nhất trong đồ thị G_0 với ràng buộc chỉ tại các cung. Cần chú ý rằng nếu thiết diện nhỏ nhất của G_0 không chứa các cung dạng (v_j^+, v_j^-) thì ràng buộc tại đỉnh v_j tng ng trong G không "tích cực" và trở thành vô dụng; nếu ngược lại, thiết diện nhỏ nhất của G_0 chứa các cung loại này thì các đỉnh tương ứng của G là bảo hoà bởi luồng lớn nhất.

7.3.3 Các đồ thị có cận trên và cận dưới về luồng

Xét đồ thị G trong đó các cung (v_i, v_j) ngoài cận trên q_{ij} còn có cận dưới về luồng là r_{ij}. Giả sử ta muốn biết có tồn tại một luồng chấp nhận giữa s và t sao cho $r_{ij} \leq f_{ij} \leq q_{ij}$ với mọi cung (v_i, v_j).

Từ G, ta thêm một đỉnh vào nhân tạo s_a và đỉnh ra nhân tạo t_a để nhận được G_a. Mỗi cung (v_i, v_j) mà $r_{ij} \neq 0$ ta thêm một cung (s_a, v_j) với khả năng r_{ij} và cận dưới bằng không, và cũng thêm cung thứ hai (v_i, t_a) với khả năng r_{ij} và cận dưới bằng không. Thay q_{ij} bởi $q_{ij} - r_{ij}$ và r_{ij} bằng 0. Ngoài ra thêm cung (t, s) với $q_{ts} = \infty, r_{ts} = 0$.

Bây giờ ta tìm luồng lớn nhất từ s_a đến t_a trong đồ thị G_a. Nếu giá trị của luồng lớn nhất bằng $\sum_{r_{ij} \neq 0} r_{ij}$ (tức là, nếu tất cả các cung đi ra từ s_a và tất cả các cung đi đến t_a bảo hoà) và ký hiệu lượng hàng trên cung (t, s) là f_{ts} thì tồn tại luồng chấp nhận được với giá trị f_{ts} trong đồ thị ban đầu. Thật vậy, nếu ta trừ r_{ij} lượng hàng trên các cung (v_i, t_a) và (s_a, v_j) và cộng thêm r_{ij} vào lượng hàng trên cung (v_i, v_j) thì tổng lượng hàng từ s_a đến t_a giảm một lượng là r_{ij}, luồng trên các cung (v_i, t_a) và (s_a, v_j) giảm xuống không, còn luồng trên cung (v_i, v_j) là $f_{ij} \in [r_{ij}, q_{ij}]$. (Giá trị cuối của f_{ij} bằng r_{ij} nếu giá trị ban đầu của f_{ij} tương ứng luồng lớn nhất bằng không, và giá trị cuối của f_{ij} bằng q_{ij} nếu giá trị ban đầu của f_{ij} bằng $q_{ij} - r_{ij}$). Bước trừ luồng lớn nhất ngược với bước điều chỉnh luồng trong thuật toán tìm luồng lớn nhất. Vì ta giả thiết giá trị của luồng lớn nhất bằng $\sum_{r_{ij} \neq 0} r_{ij}$ nên cuối cùng, tiến trình trừ luồng sẽ cho luồng từ s_a đến t_a có giá trị bằng không (do đó sẽ khiến hai đỉnh nhân tạo và các cung liên thuộc chúng trở thành vô dụng), và luồng trên tất cả các cung với $r_{ij} \neq 0$ sẽ thay đổi trong phạm vi $[r_{ij}, q_{ij}]$. Kết quả là ta có một luồng "lưu thông" trong đồ thị với giá trị bằng f_{ts}.

Mặt khác ta có

Định lý 7.3.1 *Nếu giá trị của luồng lớn nhất từ s_a đến t_a trong đồ thị G_a khác $\sum_{r_{ij} \neq 0} r_{ij}$ thì không tồn tại luồng chấp nhận được trong G.*

Chứng minh. Bài tập. ◁

7.4 Luồng với chi phí nhỏ nhất

Trong Phần 7.2 chúng ta đã xét bài toán tìm luồng lớn nhất từ s đến t mà không đề cập đến chi phí được gắn trên mỗi cung. Phần này khảo sát bài toán tìm luồng với giá trị v cho trước từ s đến t sao cho chi phí của luồng là nhỏ nhất. Cụ thể là:

Bài toán 7.4.1 *Cho mạng vận tải $G := (V, E)$ với đỉnh vào s, đỉnh ra t, khả năng thông qua của cung $(i, j) \in E$ là q_{ij}. Giả sử c_{ij} là chi phí vận chuyển một đơn vị hàng trên cung $(i, j) \in E$. Tìm luồng $F := (f_{ij})$ có giá trị v trên G với chi phí nhỏ nhất; tức là giải bài toán*

$$\sum_{(v_i,v_j)\in E} f_{ij}c_{ij} \to \min$$

với điều kiện

$$\begin{cases} & \sum_{(v_i,v_j)\in E} f_{ij} & = v, \\ 0 \leq & f_{ij} & \leq q_{ij}. \end{cases}$$

Hiển nhiên, bài toán không có lời giải nếu v lớn hơn giá trị lớn nhất của luồng từ s đến t. Tuy nhiên, nếu v nhỏ hơn hoặc bằng giá trị này thì sẽ có một số luồng có giá trị v và bài toán có lời giải. Ford và Fulkerson [27] đã xây dựng một thuật toán "không có thứ tự" để tìm luồng với chi phí nhỏ nhất. Các thuật toán trình bày dưới đây dựa theo những kết quả của Klein [38], Busacker và Gowen [10]. Các thuật toán này đơn giản hơn phương pháp của Ford-Fulkerson và sử dụng những kỹ thuật đã giới thiệu trên.

7.4.1 Thuật toán Klein, Busacker, Gowen

Thuật toán này dựa vào việc xác định mạch có độ dài âm. Chúng ta hãy giả thiết rằng tồn tại luồng chấp nhận được F với giá trị v và F đã được xác định. Luồng này có thể nhận được bằng cách áp dụng thuật toán tìm luồng lớn nhất và chúng ta tăng luồng cho đến khi nhận được luồng có giá trị v.

Với luồng chấp nhận này, ta định nghĩa đồ thị $G^\mu(F) := (V^\mu, E^\mu)$ như đã giải thích trong Phần 7.2 và có chi phí trên các cung như sau:

- với mỗi cung $(v_i^\mu, v_j^\mu) \in E_1^\mu$, đặt $c_{ij}^\mu := c_{ij}$.
- với mỗi cung $(v_j^\mu, v_i^\mu) \in E_2^\mu$, đặt $c_{ji}^\mu := -c_{ij}$.

Thuật toán dựa trên định lý sau:

Định lý 7.4.2 *F là luồng giá trị v với chi phí nhỏ nhất nếu và chỉ nếu không tồn tại mạch Φ trong $G^\mu(F)$ sao cho tổng của các chi phí của các cung thuộc Φ âm.*

Chứng minh. Đặt $c[F]$ là chi phí của luồng F trong đồ thị G và $c[\Phi|G^\mu(F)]$ là tổng của các chi phí của các cung thuộc mạch Φ tương ứng với đồ thị $G^\mu(F)$.

Điều kiện cần. Giả sử $c[\Phi|G^\mu(F)] < 0$ với mạch Φ nào đó trong $G^\mu(F)$. Thêm một đơn vị vào luồng trên mỗi cung thuộc mạch Φ sẽ tạo ra một luồng mới chấp nhận được $F + 1 \circ (\Phi)$ có giá trị v. Chi phí của luồng $F + 1 \circ (\Phi)$ bằng $c[F] + c[\Phi|G^\mu(F)] < c[F]$-mâu thuẫn với giả thiết F là luồng với giá trị v và có chi phí nhỏ nhất.

Điều kiện đủ. Giả sử $c[\Phi|G^\mu(F)] \geq 0$ với mọi mạch Φ trong $G^\mu(F)$ và $F^*(\neq F)$ là luồng giá trị v có chi phí nhỏ nhất.

Ta ký hiệu $F^* - F$ là luồng mà giá trị trên cung (v_i, v_j) bằng $f^*_{ij} - f_{ij}$.

Vì F^* và F có thể phân tích thành tổng của các luồng dọc theo (từ s đến t) các đường đi trong G, theo cách xây dựng của đồ thị unitary G^e trong Phần 7.2.3 đối với luồng $F^* - F$, suy ra với mọi đỉnh $v_i \in V$ ta có

$$d^+_{G^*}(v_i) = d^-_{G^*}(v_i).$$

Do đó theo Phần 7.2.3, dễ dàng kiểm tra rằng

$$F^* - F = 1 \circ (\Phi_1) + 1 \circ (\Phi_2) + \cdots + 1 \circ (\Phi_\kappa).$$

Hơn nữa, luồng $F^* = F + 1 \circ (\Phi_1) + 1 \circ (\Phi_2) + \cdots + 1 \circ (\Phi_\kappa)$ là chấp nhận được nên tổng $F + 1 \circ (\Phi_1) + 1 \circ (\Phi_2) + \cdots + 1 \circ (\Phi_l)$ chấp nhận được với mọi $1 \leq l \leq \kappa$. Do đó với luồng F ta có

$$\begin{aligned} c[F + 1 \circ (\Phi_1)] &= c[F] + c[\Phi_1|G^\mu(F)] \\ &\geq c[F]. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$c[\Phi_l|G^\mu(F + 1 \circ (\Phi_1))] \geq c[\Phi_l|G^\mu(F)]$$

với mọi $l = 1, 2, \ldots, k$.

Vậy chi phí của luồng $F + 1 \circ (\Phi_1) + 1 \circ (\Phi_2)$ là

$$\begin{aligned} c[F + 1 \circ (\Phi_1) + 1 \circ (\Phi_2)] &= c[F + 1 \circ (\Phi_1)] + c[\Phi_2|G^\mu(F + 1 \circ (\Phi_1))] \\ &\geq c[F + 1 \circ (\Phi_1)] + c[\Phi_2|G^\mu(F)] \\ &\geq c[F + 1 \circ (\Phi_1)] \end{aligned}$$

$$\geq \; c[F].$$

Tiếp tục quá trình trên ta được $c[F^*] \geq c[F]$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết F^* là luồng có chi phí nhỏ nhất. ◃

Do đó theo Định lý 7.4.2, để tìm luồng chấp nhận được có giá trị v với chi phí nhỏ nhất ta bắt đầu từ luồng chấp nhận được có giá trị v, thiết lập đồ thị $G^\mu(F)$ và kiểm tra có tồn tại mạch có độ dài âm không. Nếu không có thì luồng nhận được có chi phí nhỏ nhất. Ngược lại nếu Φ là mạch có độ dài âm thì ta thêm δ vào luồng trên mạch này. Khi đó luồng mới vẫn có giá trị v và có chi phí giảm một lượng $\delta.c(\Phi)$, trong đó $c(\Phi)$ là chi phí của mạch có dồ dài âm Φ. Hiển nhiên δ cần được chọn sao cho các khả năng thông qua của các cung trong $G^\mu(F)$ không bị vi phạm; tức là

$$\delta = \min_{(v_i^\mu, v_j^\mu)} q_{ij}^\mu.$$

Theo cách chọn ban đầu của các khả năng của đồ thị $G^\mu(F)$ luồng mới nhận được từ luồng cũ (bằng cách cộng δ vào luồng trên mạch độ dài âm) là chấp nhận được. Quá trình lại được lặp lại với luồng mới và vân vân. Chi tiết của thuật toán như sau.

Thuật toán tìm luồng có chi phí nhỏ nhất

1. Sử dụng thuật toán luồng lớn nhất, tìm luồng chấp nhận được F với giá trị v.

2. Đặt
$$E_1^\mu := \{(v_i^\mu, v_j^\mu) \mid f_{ij} < q_{ij}, (v_i, v_j) \in E\},$$
$$E_2^\mu := \{(v_j^\mu, v_i^\mu) \mid f_{ij} > 0, (v_i, v_j) \in E\}.$$
Xây dựng đồ thị có trọng số $G^\mu(F) := (V^\mu, E^\mu)$, trong đó
$$V^\mu := V,$$
$$E^\mu := E_1^\mu \cup E_2^\mu,$$
   - Với mỗi cung $(v_i^\mu, v_j^\mu) \in E_1^\mu$, đặt $c_{ij}^\mu := c_{ij}$.
   - Với mỗi cung $(v_j^\mu, v_i^\mu) \in E_2^\mu$, đặt $c_{ji}^\mu := -c_{ij}$.

3. Nếu tồn tại mạch có độ dài âm Φ trên đồ thị $G^\mu(F)$ có trọng số $W := (w_{ij})$, chuyển sang Bước 5. Ngược lại, F là luồng với chi phí nhỏ nhất; thuật toán dừng.

4. Tính δ theo công thức sau:
$$\delta := \min\{q_{ij}^\mu \mid (v_i^\mu, v_j^\mu) \in \Phi\}.$$
   - Với mọi cung $(v_i^\mu, v_j^\mu) \in \Phi$ sao cho $c_{ij}^\mu < 0$ thay đổi luồng f_{ji} trên cung $(v_j, v_i) \in E$ bởi $f_{ji} - \delta$.

- Với mọi cung $(v_i^\mu, v_j^\mu) \in \Phi$ sao cho $c_{ij}^\mu > 0$ thay đổi luồng f_{ij} trên cung $(v_i, v_j) \in E$ bởi $f_{ij} + \delta$.

5. Với luồng mới F, chuyển sang Bước 2.

7.5 Cặp ghép

7.5.1 Các bài toán về cặp ghép

Các bài toán về cặp ghép trong các đồ thị (nói chung không phải đồ thị hai phần) được quan tâm vì hai lý do. Thứ nhất, có thể dẫn đến các bài toán này từ việc tổng quát hoá bài toán phân công, và chúng là một phần trong những bài toán khác của đồ thị: các bài toán tìm hành trình tối ưu (như bài toán người đưa thư Trung Hoa), xác định dây chuyền ngắn nhất trong đồ thị vô hướng, v.v.

Mối quan tâm thứ hai về khía cạnh lý thuyết, do mối liên hệ với lớp các bài toán quy hoạch nguyên mà có thể giải bằng thuật toán với độ phức tạp đa thức theo m và n (số các cạnh và các đỉnh của đồ thị).

Xét bài toán sau xây dựng đồ thị con bộ phận G_p của đồ thị vô hướng G trong đó bậc của các đỉnh của đồ thị G_p thoả mãn tính chất cho trước.

Bài toán 7.5.1 (Bài toán đồ thị bộ phận có ràng buộc về đỉnh) *Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng với chi phí c_j tương ứng với mỗi cạnh $e_j \in E$. Ngoài ra, cho trước các số nguyên dương $\delta_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Vấn đề đặt ra là tìm một đồ thị bộ phận G_p^* của G sao cho bậc của các đỉnh v_i tương ứng đồ thị G_p^* bằng δ_i, và tổng của các cạnh trong G_p^* lớn nhất (hoặc nhỏ nhất).*

Hiển nhiên, với đồ thị G và các số δ_i cho trước, có thể không tồn tại đồ thị bộ phận G_p thoả mãn các ràng buộc về đỉnh. Hai điều kiện cần (nhưng không đủ-tại sao?) để tồn tại đồ thị bộ phận chấp nhận được là

$$\delta_i \le d_G(v_i), \quad \text{với mọi đỉnh } v_i \in V$$

và

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \quad \text{chẵn.}$$

Điều kiện sau suy trực tiếp từ tính chất: tổng các bậc của các đỉnh bằng hai lần số các cạnh.

Tập con $M \subset E$ gọi là một *cặp ghép* nếu hai cạnh bất kỳ trong M không kề nhau. *Chi phí* của cặp ghép M định nghĩa bởi

$$c(M) = \sum_{e_j \in M} c_j.$$

Ta có bài toán sau:

Bài toán 7.5.2 (Bài toán đối sánh với chi phí lớn nhất) *Tìm cặp ghép M^* có chi phí lớn nhất.*

Bài toán đối sánh với chi phí lớn nhất có thể phát biểu dạng bài toán quy hoạch nguyên:

$$z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \max$$

sao cho

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j & \leq & 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ x_j & \in & \{0, 1\}, \end{cases}$$

trong đó b_{ij} là ma trận liên thuộc của G và $x_j = 1$ (hoặc 0) phụ thuộc vào e_j có được ghép cặp hay không.

Hiển nhiên rằng, bài toán đối sánh với chi phí lớn nhất đối với đồ thị $\hat{G}$ nào đó là trường hợp đặc biệt của bài toán có ràng buộc về bậc của các đỉnh. Nếu số các đỉnh của $\hat{G}$ chẵn, ta thêm các cạnh với chi phí bằng $-\infty$ vào $\hat{G}$ để thu được một đồ thị đầy đủ G. Khi đó bài toán đưa về Bài toán 7.5.1 trên đồ thị G trong đó tất cả các $\delta_i = 1$. Nghiệm của bài toán ban đầu dễ dàng suy ra từ bài toán sau bằng cách bỏ qua tất cả các cạnh có chi phí bằng $-\infty$. Nếu số các đỉnh của $\hat{G}$ lẻ thì ta thêm một đỉnh cô lập vào $\hat{G}$ trước khi xây dựng đồ thị G và áp dụng lý luận trên.

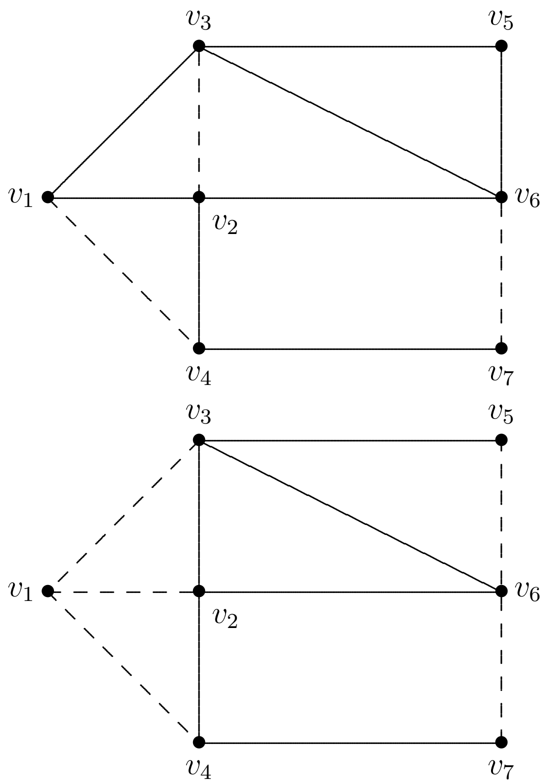
Tương ứng với bài toán tìm cặp ghép có chi phí lớn nhất là *bài toán phủ có chi phí nhỏ nhất*, tức là: Tìm phủ E^* của G sao cho tổng chi phí $\sum_{e_j \in E^*} c_j$ nhỏ nhất. Bài toán này có thể phát biểu dạng quy hoạch nguyên như sau:

$$z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \min$$

sao cho

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j & \geq & 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ x_j & \in & \{0, 1\}, \end{cases}$$

trong đó $x_j = 1$ (hoặc 0) phụ thuộc vào e_j có thuộc phủ E^* hay không.



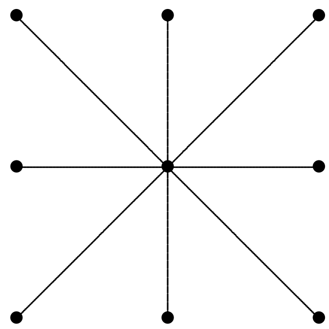
Hình 7.4: (a) Cặp ghép. (b) Phủ.

Hình 7.4(a) minh họa đồ thị với cặp ghép được vẽ bằng đoạn nét đứt và Hình 7.4(b) minh họa phủ được vẽ bằng đoạn nét đứt trong cùng đồ thị.

Trong trường hợp tất cả các cạnh có chi phí bằng nhau (chẳng hạn 1) thì bài toán đối sánh với chi phí lớn nhất và bài toán tìm phủ với chi phí nhỏ nhất đưa về *bài toán tìm cặp ghép lớn nhất* tức là tìm cặp ghép có số cạnh nhiều nhất và *bài toán tìm phủ nhỏ nhất* tương ứng. Nếu đồ thị G có n đỉnh, khi đó số phần tử của cặp ghép lớn nhất không vượt quá $[n/2]$. Tuy nhiên, số này không phải lúc nào cũng đạt được; chẳng hạn, đồ thị "hình sao" trong Hình 7.5 có cặp ghép lớn nhất với số phần tử 1.

Trường hợp đặc biệt khi các chi phí c_j tuỳ ý nhưng đồ thị là hai phần, thì bài toán tìm cặp ghép có chi phí nhỏ nhất đưa về *bài toán phân công công việc*, một bài toán quen thuộc của Vận trù học. Với cấu trúc đồ thị đặc biệt này, Bài toán 7.5.1 trở thành *bài toán vận tải*.

Mục đích chính của phần này là trình bày bài toán về cặp ghép lớn nhất của đồ thị hai phần trong mối liên hệ với bài toán luồng lớn nhất. Về các thuật toán giải quyết các bài toán cặp ghép trong trường hợp tổng quát có thể xem tài liệu dẫn [14], [30].



Hình 7.5: Đồ thị hình sao.

7.5.2 Cặp ghép lớn nhất trong đồ thị hai phần

Trước hết ta bắt đầu bằng một ví dụ.

Ví dụ 7.5.3 (Phân công công việc, cặp ghép trong đồ thị hai phần) Một nhà máy có p máy và q công việc cần thực hiện. Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị hai phần mà các đỉnh là $V = V_1 \cup V_2$, với $V_1 = \{1, 2, \ldots, p\}$ và $V_2 = \{1, 2, \ldots, q\}$ và có một cạnh liên thuộc (i, j) nếu máy i có thể thực hiện công việc j. Vấn đề đặt ra là sắp xếp mỗi máy với một công việc mà nó có thể thực hiện. Điều đó có nghĩa rằng, tìm trong G một cặp ghép có số phần tử bằng p.

Bài toán cặp ghép có thể đưa về bài toán mạng vận tải như sau. Ta thêm đỉnh nguồn và đỉnh ra nhân tạo s, t sau đó nối từ s đến các đỉnh thuộc tập V_1 và từ các đỉnh thuộc tập V_2 đến t. Gán mỗi cung trong đồ thị thu được, ký hiệu G^M, có khả năng thông qua bằng 1. Ta có G^M là một mạng vận tải.

Định lý 7.5.4 *Giả sử G là đồ thị hai phần định hướng với các tập đỉnh rời nhau V_1 và V_2 mà trong đó các cạnh được định hướng từ các đỉnh trong tập V_1 đến các đỉnh trong tập V_2.*

1. *Luồng F trong mạng vận tải G^M cho ta một cặp ghép trong G. Đỉnh $v_i \in V_1$ được đối sánh với đỉnh v_j trong V_2 nếu và chỉ nếu luồng F trên cung (v_i, v_j) bằng 1.*
2. *Luồng lớn nhất tương ứng với cặp ghép lớn nhất.*
3. *Luồng có giá trị bằng $\#V_1$ tương ứng với cặp ghép hoàn hảo.*

Chứng minh. Giả sử $f_{ij} = 1$. Có đúng một cung đến đỉnh v_i là (s, v_i). Do đó $f_{si} = 1$. Suy ra luồng đến đỉnh v_i bằng 1. Do luồng ra khỏi đỉnh v_i bằng 1 nên có đúng một cung có dạng

(v_i, x) có $f_{ix} = 1$ là (v_i, v_j). Tương tự chỉ có một cung dạng (x, v_j) có $f_{xj} = 1$ là (v_i, v_j). Vậy nếu M là tập các cung (v_i, v_j) sao cho $f_{ij} = 1$ thì hai cạnh bất kỳ trong M không kề nhau. Nói cách khác M là cặp ghép của G.

Các phần còn lại suy từ số các đỉnh của V_1 được đối sánh bằng giá trị của luồng tương ứng. $\triangleleft$

Định lý trên chỉ ra rằng có thể áp dụng thuật toán tìm luồng lớn nhất để xác định cặp ghép lớn nhất của đồ thị hai phần.

7.5.3 Cặp ghép hoàn hảo trong đồ thị hai phần

Ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 7.5.5 *Cặp ghép hoàn hảo* trong đồ thị hai phần $G = (V_1 \cup V_2, E)$ là cặp ghép mà mỗi đỉnh $a \in V_1$ tồn tại $b \in V_2$ sao cho $(a, b) \in E$.

Nếu $S \subset V_1$, ta đặt

$$\Gamma(S) := \{v_j \in V_2 \mid \text{tồn tại } v_i \in S \text{ sao cho } (v_i, v_j) \in E\}.$$

Giả sử G có cặp ghép hoàn hảo. Nếu $S \subset V_1$ ta cần có

$$\#S \leq \#\Gamma(S).$$

Ta sẽ chỉ ra rằng nếu $\#S \leq \#\Gamma(S)$ với mọi tập con S của V_1 thì G có một cặp ghép hoàn hảo. Kết quả này được chứng minh bởi Hall và gọi là *Định lý đám cưới của Hall* do V_1 là tập những người đàn ông và V_2 là tập những người đàn bà và tồn tại cạnh nối $v_i \in V_1$ đến $v_j \in V_2$ nếu v_i và v_j ưng thích nhau; định lý cho một điều kiện để người đàn ông có thể cưới người mình thích.

Định lý 7.5.6 *Tồn tại cặp ghép hoàn hảo nếu và chỉ nếu*

$$\#S \leq \#\Gamma(S) \tag{7.2}$$

với mọi tập con S của V_1.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh nếu điều kiện (7.2) đúng thì tồn tại cặp ghép hoàn hảo. Đặt $n_1 = \#V_1$ và $(P, \tilde{P})$ là thiết diện nhỏ nhất trong mạng vận tải. Nếu ta chứng minh rằng khả năng của thiết diện này bằng n_1 thì luồng lớn nhất có giá trị bằng n_1. Cặp ghép tương ứng với luồng lớn nhất sẽ là cặp ghép hoàn hảo.

Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử ngược lại, khả năng của thiết diện nhỏ nhất $(P, \tilde{P})$ nhỏ hơn n_1. Nhận xét rằng khả năng của thiết diện này bằng số các cạnh trong tập

$$M = \{(x, y) \mid x \in P, y \in \tilde{P}\}.$$

Một phần tử của M có một trong ba dạng:

Loại 1: $(s, v_i), v_i \in V_1$.

Loại 2: $(v_i, v_j), v_i \in V_1, v_j \in V_2$.

Loại 3: $(v_j, t), v_j \in V_2$.

Chúng ta sẽ đếm số các cạnh trong mỗi loại.

Nếu $V_1 \in \tilde{P}$ thì khả năng của thiết diện là n_1; do đó

$$V_1^* = V_1 \cap P$$

khác trống. Suy ra tồn tại $n_1 - \#V_1^*$ cạnh loại 1 trong E.

Ta phân hoạch $R(V_1^*)$ thành các tập hợp

$$X = R(V_1^*) \cap P \quad \text{và} \quad Y = R(V_1^*) \cap \tilde{P}.$$

Khi đó tồn tại ít nhất $\#V_1^*$ cạnh loại 3 trong E. Do đó tồn tại ít hơn

$$n_1 - (n_1 - \#V_1^*) - \#X = \#V_1^* - \#X$$

cạnh loại 2 trong E. Mà mỗi phần tử của Y đóng góp nhiều nhất một cạnh loại 2, nên

$$\#Y < \#V_1^* - \#X.$$

Vậy

$$\#R(V_1^*) = \#X + \#Y < \#V_1^*.$$

Điều này mâu thuẫn với (7.2). Do đó tồn tại cặp ghép hoàn hảo. $\triangleleft$

Ví dụ 7.5.7 Có n máy tính và n ổ đĩa. Mỗi máy tính tương thích với m ổ đĩa và mỗi ổ đĩa tương thích với m máy tính. Có thể ghép mỗi máy tính với một ổ đĩa mà nó tương thích?

Đặt V_1 là tập các máy tính và V_2 là tập các ổ đĩa. Ta cho tương ứng cạnh (v_i, v_j) nếu máy tính $v_i \in V_1$ tương thích với ổ đĩa $v_j \in V_2$. Chú ý rằng mọi đỉnh có bậc bằng m. Đặt

$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V_1$. Khi đó có km cạnh xuất phát từ S. Nếu $l := \#\Gamma(S)$ thì $\Gamma(S)$ nhận nhiều nhất lm cạnh đến từ S. Do đó

$$km \leq lm.$$

Nên

$$\#S = k \leq l = \#\Gamma(S).$$

Theo Định lý đám cưới Hall, tồn tại cặp ghép hoàn hảo. Vậy có thể ghép mỗi máy tính với một ổ đĩa tương thích.

