TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN TIN - ỨNG DỤNG

BÁO CÁO MÔN HỌC
PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

PHƯƠNG PHÁP TRỌNG SỐ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LAPLACE 2 CHIỀU VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN DIRICHLET

Giảng viên hướng dẫn: **TS. Phan Xuân Thành**

Sinh viên thực hiện: **Nguyễn Đức Thắng**

Nguyễn Minh Quân

Lớp: **KSTN Toán - Tin K61**

HÀ NỘI, 1/2019

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung của bài báo cáo, chúng em xin gửi cảm ơn tới thầy giáo TS. Phan Xuân Thành, người đã có những chỉnh sửa, góp ý và nhận xét chân thành để giúp đỡ chúng em hoàn thiện bài báo cáo này .

Hà Nội, ngày 1 tháng 1 năm 2020

Mục lục

Lời mở đầu

Phương trình vật lý toán hay còn gọi là phương trình đạo hàm riêng thường xuyên xuất hiện trong các bài toán ứng dụng của lý thuyết thuỷ động học, cơ học lượng tử, điện học, điện - từ trường,... Đa số các bài toán này rất phức tạp, nhiều bài toán không có nghiệm theo nghĩa cổ điển. Vấn đề tìm nghiệm chính xác của các phương trình đạo hàm riêng không thể và cũng không cần thực hiện trong mọi trường hợp. Bởi vậy, chúng ta dẫn đến việc chỉ tìm được nghiệm gần đúng của các phương trình đạo hàm riêng và cũng từ đó xuất hiện các phương pháp để giải gần đúng các phương trình đó. Các phương pháp số được nghiên cứu nhiều và ứng dụng nhiều là phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp sai phân và phương pháp phần tử biên...

Trong bài báo cáo này, chúng tôi tiếp cận và trình bày một phương pháp khác tương đối cổ điển đó là **phương pháp trọng số (collocation method)** với lớp bài toán cụ thể đó là bài toán **giải phương trình Laplace với điều kiện biên Dirichlet**. Bố cục của bài báo cáo gồm 4 chương:

1. **Chương 1 :** Kiến thức cơ sở,trình bày các kiến thức liên quan đến phương trình Laplace, bài toán biên Dirichlet.

2. **Chương 2 :** Trình bày lý thuyết và phương pháp làm của phương pháp trọng số đối với lớp bài toán cụ thể.

3. **Chương 3 :**Trình bày các kết quả thực nghiệm của phương pháp trọng số đối với các bài toán cụ thể, đánh giá, so sánh và nhận xét.

4. **Chương 4:** Trong chương này, chúng tôi giới thiệu về lý thuyết của phương pháp trọng số một cách tổng quát, đó là sự hội tụ và sai số. Đây là những kiến thức rất phức tạp và trừu tượng, được chúng tôi tham khảo từ các bài báo.

Để hoàn thành bài báo cáo cuối kì cho môn học Phương pháp phần tử hạn, chúng tôi đã cố gắng thực hiện làm bài báo cáo một cách cẩn thận, song với kiến thức còn hạn chế, bài báo cáo này không thể tránh khỏi những sai sót và thiếu sót, đặc biệt là ở chương 4. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của thầy giáo và các bạn sinh viên để bài báo cáo này được hoàn thiện hơn.

Chương 1

Cơ sở lý thuyết

1.1 Đại cương về phương trình vật lý toán

Định nghĩa 1.1.1. *Một phương trình liên hệ giữa ẩn hàm $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, các biến độc lập $x_1, x_2, ..., x_n$ và các đạo hàm riêng của nó được gọi là phương trình vi phân đạo hàm riêng (gọi tắt là phương trình đạo hàm riêng). Nó có dạng*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}) = 0, \tag{1.1}$$

trong đó F là một hàm nào đó. Cấp cao nhất của đạo hàm riêng u, có mặt trong phương trình được gọi là cấp phương trình.

Phương trình cấp hai của hàm hai biến số có dạng

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$$

Định nghĩa 1.1.2. *Xét phương trình tuyến tính cấp hai với các hệ số thực:*

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{1.2}$$

Xét tại một điểm (x_0, y_0) cố định. Phương trình (1.2) tại điểm (x_0, y_0) được gọi là:

a) Thuộc loại elip nếu như tại điểm đó $b^2 - ac < 0$,

b) Thuộc loại hypecbon nếu như tại điểm đó $b^2 - ac > 0$,

c) Thuộc loại parabon nếu như tại điểm đó $b^2 - ac = 0$,

Nếu phương trình (1.2) tại mọi điểm của miền Ω thuộc cùng một loại (elip, hypecbon, parabon) thì ta nói nó thuộc loại đó (elip, hypecbon, parabon) trong miền đó.

Ví dụ 1.1.3. *Phương trình: $u_{xx} + u_{yy} = 0$ là phương trình elip trên toàn mặt phẳng.*

1.2 Phương trình Laplace và nghiệm cơ bản

Phương trình Laplace là một trong những phương trình quan trọng trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Đó là phương trình có dạng:

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Đây là phương trình thường gặp trong các bài toán tĩnh điện học, lý thuyết thế vị, lý thuyết truyền nhiệt và nhiều lĩnh vực khác của vật lý. Chẳng hạn trong lý thuyết hàm biến phức, hàm giải tích có dạng $u(x, y) + iv(x, y)$, trong đó $u(x, y)$ và $v(x, y)$ là nghiệm của phương trình Laplace.

Phương trình Laplace được nhà toán học Laplace đưa ra vào khoảng những năm 1780, phương trình Laplace xuất hiện trong nhiều bài toán vật lý. Giả sử U là miền thuộc $\mathbb{R}^n$, $\vec{F}$ là một trường vecto xác định trên U thỏa mãn điều kiện: Nếu $\Omega \subset U$ là một tập con bất kì, có biên $\partial\Omega$ trơn ($\partial\Omega$ là mặt kín) thì thông lượng của $\vec{F}$ đi qua $\partial\Omega$ bị triệt tiêu, nghĩa là ta có $\int\limits_{\partial\Omega} \vec{F}\vec{n}ds = 0$, $\vec{n}$ là vectơ đơn vị pháp tuyến phía ngoài.

Theo định lý Gauss-Green, ta có:

$$\int\limits_{\Omega} \text{div}\vec{F}dx = \int\limits_{\partial\Omega} \vec{F}\vec{n}ds = 0,$$

trong đó $\text{div}\vec{F} = 0$ trong Ω. Do Ω bất kỳ nên $\text{div}\vec{F} = 0$ trong U. Trong một số bài toán vật lý ta thường giải thiết $\vec{F}$ tỷ lệ với chiều ngược lại của $\vec{\text{grad}}Du$ với u là một hàm số nào đó, nghĩa là $\vec{F} = -aDu, (a > 0)$. Từ $\text{div}\vec{F} = 0$ ta nhận được phương trình Laplace.

$$\text{div}(Du) = \Delta u = 0$$

Hàm số $u(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại (x, y, z) và tại đó nó thỏa mãn phương trình Laplace $\Delta u = 0$ được gọi là hàm điều hòa tại (x, y, z). Hàm số $u(x, y, z)$ được gọi là hàm điều hòa trong miền giới nội Ω nếu nó là hàm điều hòa tại mọi điểm trong miền đó.

Ví dụ 1.2.1. *Hàm $u(x, y) = x^2 - y^2$, $u = e^{-3x}\cos(3y)$ là các hàm điều hòa trong mọi miền giới nội của $\mathbb{R}^2$. Hàm $u(x, y, z) = x^2 + xy + 2y^2 - 3z^2$ là hàm điều hòa trong mọi miền giới nội $\mathbb{R}^3$. Hàm $v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ là hàm điều hòa trừ gốc $O(0, 0)$.*

Phương trình Laplace không thuần nhất là phương trình có dạng

$$\Delta u = f(x)$$

Phương trình này thường được gọi là phương trình Poisson.

Trong một số trường hợp, ta cần nghiên cứu phương trình Laplace trong tọa độ cực hay tọa độ cầu.
Với phép đổi biến

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

phương trình Laplace trong mặt phẳng

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} = 0$$

được viết dưới dạng

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(u)}{\partial \varphi^2} = 0$$

.

Định nghĩa 1.2.2. *Hàm số $u = U^*(x,y)$ được gọi là nghiệm cơ bản của phương trình Laplace $\Delta u = 0$, nếu*

1. *$u = U^*(x,y)$ là nghiệm của phương trình Laplace $\Delta u = 0$ với $x \neq y$.*
2. $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} P[u(y), U^*(x,y)]ds_y = u(x).$
3. *Hàm $U^*(x,y)$ có kì dị yếu tại $x = y$, tức là:*

$$|U^*(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^\alpha}, \alpha < n, \alpha \in \mathbb{R}$$

Bổ đề 1.2.3. *Nghiệm cơ bản của phương trình Laplace được cho bởi*

$$U^*(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y| & , n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^{n-2}} & , n \geq 3 \end{cases}$$

trong đó $\alpha(n)$ là thể tích hình cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$,

$$\alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}, \alpha(3) = \frac{4}{3}\pi, \alpha(4) = \frac{\pi^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2}{2}.$$

1.3 Phương trình Laplace với điều kiện biên Dirichlet

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền giới nội với biên đủ trơn $\Gamma = \partial\Omega$. **Bài toán biên Dirichlet** đối với phương trình Poisson là bài toán tìm hàm số $u(x)$ thỏa mãn phương trình Poisson

$$\Delta u(x) = f(x) \text{ trong } \Omega.$$

và điều kiện biên

$$u\,|_\Gamma = g_D(x) \text{ với } x \in \Gamma,$$

trong đó $g_D(x)$ là hàm cho trước trên biên Γ.

Với nghiệm $u(x)$ của phương trình Poisson $\Delta u(x) = f(x)$, áp dụng công thức Green thứ hai ta có công thức biểu diễn nghiệm:

$$u(x) = \int\limits_\Gamma U^*(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)ds_y - \int\limits_\Gamma \frac{\partial U^*}{\partial n_y}(x,y)u(y)ds_y - \int\limits_\Omega U^*(x,y)f(y)d_y. \tag{1.3}$$

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền giới nội với biên đủ trơn $\Gamma = \partial\Omega$. **Bài toán biên Dirichlet** đối với phương trình Laplace là bài toán tìm hàm số $u(x)$ thỏa mãn

$$\Delta u(x) = 0 \text{ trong } \Omega.$$

và điều kiện biên

$$u\,|_\Gamma = g(x) \text{ với } x \in \Gamma,$$

trong đó $g(x)$ là hàm cho trước trên biên Γ.

Sử dung công thức nghiệm (1.3), ta có:

$$u(x) = \int\limits_\Gamma U^*(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y)ds_y - \int\limits_\Gamma \frac{\partial U^*}{\partial n}(x,y)u(y)ds_y \tag{1.4}$$

Có rất nhiều phương pháp giải phương trình Laplace với điều kiện biên Dirichlet chẳng hạn: sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (finite element method), phương pháp phần tử biên (boundary element method) hay sử dụng trực tiếp công thức nghiệm tường minh đối với miền Ω đơn giản... Trong bài báo cáo này chúng tôi đề cập một phương pháp khác, tương đối cổ điển để giải bài toán trên, đó là phương pháp trọng số (the collocation method). Trong chương 2, chúng tôi sẽ trình bày cách xây dựng các bước làm của phương pháp trọng số để giải quyết bài toán trên.

Chương 2

Phương pháp trọng số giải phương trình Laplace 2 chiều với điều kiện biên Dirichlet

Trong phương pháp trọng số, chúng ta tìm kiếm một lời giải gần đúng cho phương trình vi phân bằng cách xấp xỉ nghiệm bằng không gian hữu hạn các hàm sơ cấp thỏa mãn phương trình tại hữu hạn điểm. Sau đây, chúng tôi mô tả phương pháp trọng số đối với một bài toán cụ thể có tính ứng dụng cao đó là phương trình Laplace.

2.1 Phát biểu bài toán

Ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = g(x), x \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó, Ω ta xét miền hình vuông.
Cụ thể, ta sẽ đưa bài toán về:

Cho miền hình vuông $\Omega = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. Bài toán tìm $u(x_1, x_2) \in W^2(\Omega)$ thỏa mãn:

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega$$

$$u\,|_{x_2=b_1} = g_1(x_1, b_1), u\,|_{x_1=a_2} = g_2(a_2, x_2)$$

$$u\,|_{x_2=b_2} = g_3(x_1, b_2), u\,|_{x_1=a_1} = g_4(a_1, x_2).$$

2.2 Phương pháp trọng số

Ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng:

$$u(\hat{x}) = \int\limits_{\Gamma} U^*(x,y)\sigma(y)dS_y.$$

Cho $\hat{x} \to x \in \Gamma$ thì $u(x) = g(x)$.Ta có

$$\int\limits_{\Gamma} U^*(x,y)\sigma(y)dS_y = g(x)$$

Đặt

$$V\sigma(x) = \int\limits_{\Gamma} U^*(x,y)\sigma(y)dS_y.$$

Ta tìm $\sigma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ thoả mãn:

$$V\sigma(x) = g(x) \tag{2.2}$$

với $g(x) \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Chia mỗi cạnh của biên thành N đoạn và đánh số từ T_1 cho đến T_{4N}. Đặt $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{4N} \sigma_k \varphi_k^0(x)$ trong đó:

$$\varphi_k^0(x) = \begin{cases} 1, x \in T_k \\ 0, x \notin T_k \end{cases}$$

Từ đó:

$$(2.2) \Leftrightarrow V\sum_{k=1}^{4N} \sigma_k \varphi_k^0(x) = g(x) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{4N} \sigma_k V\varphi_k^0(x) = g(x) \tag{2.3}$$

Lấy $x_1, x_2, ..., x_{4N}$ là các điểm thuộc đoạn $T_1, T_2, ..., T_{4N}$ (thường lấy là trung điểm) và thay vào (2.3).Ta có:

$$\begin{bmatrix} V\varphi_1^0(x_1) & V\varphi_2^0(x_1) & \dots & V\varphi_{4N}^0(x_1) \\ V\varphi_1^0(x_2) & V\varphi_2^0(x_2) & \dots & V\varphi_{4N}^0(x_2) \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ V\varphi_1^0(x_{4N}) & V\varphi_2^0(x_{4N}) & \dots & V\varphi_{4N}^0(x_{4N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{4N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_{4N}) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Với $V\varphi_k^0(x) = \int\limits_{\Gamma} U^*(x,u)\varphi_k^0 dS_y = \frac{-1}{2\pi}\int\limits_{T_k} \ln\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} dS_Y$

$= \frac{-1}{2\pi} \int\limits_{a_1+\frac{(k-1)(a_2-a_1)}{N}}^{a_1+\frac{k(a_2-a_1)}{N}} \ln\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} dy_1$

$= \frac{-1}{4\pi} \int\limits_{a_1+\frac{(k-1)(a_2-a_1)}{N}}^{a_1+\frac{k(a_2-a_1)}{N}} \ln\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right] dy_1$ với $k=\overline{1,N}$

Tương tự, ta có:

$V\varphi^0_{N+k}(x) = \int\limits_{T_{N+k}} U^*(x,u)dS_y = \frac{-1}{4\pi} \int\limits_{b_1+\frac{(k-1)(b_2-b_1)}{N}}^{b_1+\frac{k(b_2-b_1)}{N}} \ln\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right] dy_2$

$V\varphi^0_{2N+k}(x) = \int\limits_{T_{2N+k}} U^*(x,u)dS_y = \frac{-1}{4\pi} \int\limits_{a_1+\frac{(k-1)(a_2-a_1)}{N}}^{a_1+\frac{k(a_2-a_1)}{N}} \ln\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right] dy_1$

$V\varphi^0_{3N+k}(x) = \int\limits_{T_{3N+k}} U^*(x,u)dS_y = \frac{-1}{4\pi} \int\limits_{b_1+\frac{(k-1)(b_2-b_1)}{N}}^{b_1+\frac{k(b_2-b_1)}{N}} \ln\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right] dy_2$

Với $k=\overline{1,N}$.

Ta đổi về cận $(0,1)$ để có thể sử dụng công thức xấp xỉ tích phân Gauss cho lập trình.

Xét:

$$V\varphi^0_k(x) = \int\limits_{T_k} \frac{-1}{4\pi} \int\limits_{a_1+\frac{(k-1)(a_2-a_1)}{N}}^{a_1+\frac{k(a_2-a_1)}{N}} \ln\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right] dy_1, k=\overline{1,N}.$$

Đặt $t = k - \frac{N}{a_2-a_1}(y_1-a_1) \Rightarrow y_1 = a_1 + \frac{(k-t)(a_2-a_1)}{N} = \frac{(k-t)(a_2-a_1)-Na_1}{N}$

Ta có: $dt = \frac{-N}{a_2-a_1}dy_1 \Rightarrow dy_1 = -\frac{a_2-a_1}{N}dt.$

Thay vào ta được:

$V\varphi^0_k(x) = \frac{-1}{4\pi}\int\limits_0^1 \ln\left[\left(x_1 - \frac{(k-t)(a_2-a_1)+Na_1}{N}\right)^2 + (x_2-b_1)^2\right]\frac{a_2-a_1}{N}dt$

Hay:

$$V\varphi^0_k(x) = \frac{-1}{4\pi N}(a_2-a_1)\int\limits_0^1 \ln\left[\left(x_1 - \frac{(k-t)(a_2-a_1)+Na_1}{N}\right)^2 + (x_2-b_1)^2\right]dt \quad (2.5)$$

Tương tự, thu được:

$$V\varphi^0_{N+k}(x) = \frac{-1}{4\pi N}(b_2-b_1)\int\limits_0^1 \ln\left[(x_1-a_2)^2 + \left(x_2 - \frac{(k-t)(b_2-b_1)+Nb_1}{N}\right)^2\right]dt \quad (2.6)$$

$$V\varphi^0_{2N+k}(x) = \frac{-1}{4\pi N}(a_2-a_1)\int\limits_0^1 \ln\left[\left(x_1 - \frac{(k-t)(a_2-a_1)+Na_1}{N}\right)^2 + (x_2-b_2)^2\right]dt \quad (2.7)$$

$$V\varphi^0_{3N+k}(x) = \frac{-1}{4\pi N}(b_2 - b_1)\int\limits_0^1 \ln\left[(x_1 - a_1)^2 + \left(x_2 - \frac{(k-t)(b_2-b_1) + Nb_1}{N}\right)^2\right]dt \tag{2.8}$$

Giải hệ: $\sum\limits_{k=1}^{4N} V\sigma(x_k) = g(x_k) \Rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{4N} \end{bmatrix}$

Vậy nghiệm xấp xỉ của bài toán là:

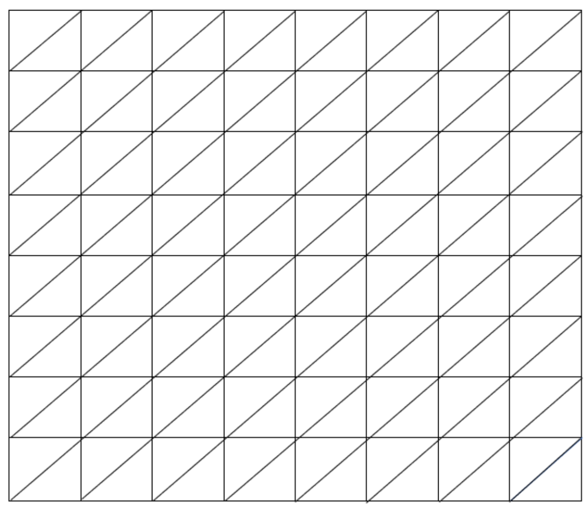
$$u \approx u_h = \sum_{k=1}^{4N} \int\limits_{T_k} U^*(x,y)\sigma_k dS_y = \sum_{k=1}^{4N} \sigma_k \int\limits_{T_k} U^*(x,y) dS_y \tag{2.9}$$

2.3 Đánh giá sai số

Giả sử u là nghiệm chính xác của bài toán và u_h là nghiệm gần đúng của bài toán, ta có đánh giá sai số L_2:

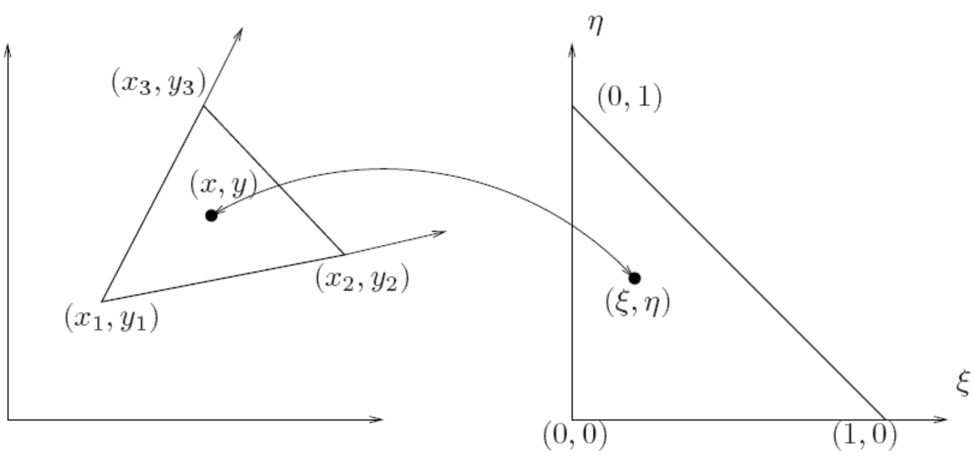
$$||u - u_h||_{L_2} = \sqrt{\int\limits_{\Omega} (u - u_h)^2 dxdy} \tag{2.10}$$

Để thực hiện việc lập trình để tính toán được sai số này trên máy. Ta chia Ω thành các miền hình tam giác Δ_k (như hình vẽ).



$\Rightarrow \int\limits_{\Omega} (u - u_h)^2 dxdy = \sum\limits_{k=1}^{4N} \int\limits_{\Delta_k} (u - u_h)^2 dxdy$

Xét Δ_k có 3 đỉnh x_k^1, x_k^2 và x_k^3.



Ta đổi biến để đưa Δ_k về tam giác đơn vị.
Đặt $x = x_k^1 + \xi_1(x_k^2 - x_k^1) + \xi_2(x_k^3 - x_k^1)$. Khi đó:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

Định thức Jacobi:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} = 2S_{\Delta_k}$$

Với S_{Δ_k} là diện tích của tam giác Δ_k.
Từ đó:
$\int\limits_{\Delta_k} (u(x) - u_h(x))^2 d\Delta_k = 2S_{\Delta_k} \int\limits_{T} (u(\xi) - u_h(\xi))^2 dT$ (T là miền tam giác đơn vị)
$\approx 2S_{\Delta_k} \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{7} (u(\xi^i) - u_h(\xi^i))^2 \mathrm{w}_i = S_{\Delta_k} \sum\limits_{i=1}^{7} \mathrm{w}_i (u(\xi^i) - u_h(\xi^i))^2$
Trong đó:
$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \xi^2 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 - \sqrt{15} \\ 6 - \sqrt{15} \end{pmatrix}, \xi^3 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 9 + 2\sqrt{15} \\ 6 - \sqrt{15} \end{pmatrix}$,
$\xi^4 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 - \sqrt{15} \\ 9 + 2\sqrt{15} \end{pmatrix}, \xi^5 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 + \sqrt{15} \\ 6 - \sqrt{15} \end{pmatrix}, \xi^6 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 + \sqrt{15} \\ 9 - 2\sqrt{15} \end{pmatrix}$,
$\xi^7 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 9 - 2\sqrt{15} \\ 6 + \sqrt{15} \end{pmatrix}$.
$w_1 = 9/40, w_2 = w_3 = w_4 = \frac{155 - \sqrt{15}}{1200}, w_5 = w_6 = w_7 = \frac{155 + \sqrt{15}}{1200}$.
Từ đây, ta có thể dễ dàng lập trình để tính sai số L_2

2.4 Cải tiến phương pháp

2.4.1 Tính chính xác tích phân

Thay vì dùng xấp xỉ tích phân Gauss, chúng ta có thể thiết lập công thức nguyên hàm để tính tích phân chính xác.
Xét nguyên hàm:

$$I = \int \ln\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right] dy_1$$

Ta có:
$I = \int \ln\left[x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + (x_2 - y_2)^2\right] dy_1 = \int \ln\left[y_1^2 - 2x_1y_1 + x_1^2 + (x_2 - y_2)^2\right] dy_1$
Đặt: $\begin{cases} t = & y_1 \\ b = & -2x_1 \\ c = & x_1^2 + (x_2 - y_2)^2 \end{cases}$
Bài toán trở thành, tìm nguyên hàm: $I = \int \ln\left(t^2 + bt + c\right) dt$
Đặt: $\begin{cases} u = \ln(t^2 + bt + c) \\ dv = dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{2t+b}{t^2+bt+c} dt \\ v = t \end{cases}$

$$\Rightarrow I = t\ln(t^2 + bt + c) - \int \frac{2t^2 + bt}{t^2 + bt + c} dt$$

Xét:

$$I_1 = \int \frac{2t^2 + bt}{t^2 + bt + c} dt = \int \frac{2t^2 + 2bt + 2c - bt - 2c}{t^2 + bt + c} dt = 2\int dt + \int \frac{-bt - 2c}{t^2 + bt + c} dt$$
$$= 2t - \int \frac{bt + 2c}{t^2 + bt + c} dt$$

Xét:

$$I_2 = \int \frac{bt + 2c}{t^2 + bt + c} dt = \int \frac{b^2 + 2bt - b^2 + 4c}{2(t^2 + bt + c)} dt = \int \frac{b(b + 2t)}{2(t^2 + bt + c)} dt - \int \frac{b^2 - 4c}{2(t^2 + bt + c)} dt$$

$$= \frac{b}{2}\int \frac{d(t^2 + bt + c)}{t^2 + bt + c} - \frac{b^2 - 4c}{2}\int \frac{1}{t^2 + bt + c} dt = \frac{b}{2}\ln\left|t^2 + bt + c\right| + \frac{4c - b^2}{2}\int \frac{1}{t^2 + bt + c} dt$$

Xét:

$$I_3 = \int \frac{1}{t^2 + bt + c} dt = \int \frac{1}{t^2 + 2\frac{b}{2}t + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c} dt = \int \frac{1}{\left(t + \frac{b}{2}\right)^2 + c^2 - \frac{b^2}{4}} dt$$

Trường hợp 1: Nếu $c - \frac{b^2}{4} > 0$

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \arctan \frac{t + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}}$$

Trường hợp 2: Nếu $c - \frac{b^2}{4} < 0$

$$I_3 = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{b^2}{4} - c} + t + \frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4} - c} - t - \frac{b}{2}} \right|$$

Trường hợp 3: Nếu $c - \frac{b^2}{4} = 0$

$$I_3 = \int \frac{1}{\left(t + \frac{b}{2}\right)^2} dt = \frac{-1}{t + \frac{b}{2}}$$

Với bài toán của chúng ta, do: $\begin{cases} b = -2x_1 \\ c = x_1^2 + (x_2 - y_2)^2 \end{cases}$, nên $c - \frac{b^2}{4} \geq 0$

Vậy:

$$I = t\ln(t^2 + bt + c) - 2t + \frac{b}{2} \ln \left| t^2 + bt + c \right| + \frac{4c - b^2}{2} I_3 \tag{2.11}$$

Trong đó:

$$I_3 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \arctan \frac{t + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} & , c - \frac{b^2}{4} > 0 \\ \frac{-1}{t + \frac{b}{2}} & , c - \frac{b^2}{4} > 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

Thay: $\begin{cases} t = & y_1 \\ b = & -2x_1 \\ c = & x_1^2 + (x_2 - y_2)^2 \end{cases}$,

Ta được:

$$I = (y_1 - x_1) \ln \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right] - 2y_1 + 2(x_2 - y_2)^2 I_3 \tag{2.13}$$

Trong đó:

$$I_3 = \begin{cases} \frac{1}{|x_2 - y_2|} \arctan \frac{y_1 - x_1}{|x_2 - y_2|} & , x_2 > y_2 \\ \frac{-1}{y_1 - x_1} & , x_2 = y_2 \end{cases} \tag{2.14}$$

Từ công thức này, chúng ta có thể tăng tốc độ đáng kể thuật toán, thay vì lặp rất nhiều lần để tính nhiều tích phân, thì giờ ta đã có thể có công thức tính tích phân xác định. Tuy nhiên với miền Ω phức tạp, việc tính tích phần về công thức tường minh là rất phức tạp, vì vậy đối với các miền Ω phức tạp hơn, chúng ta vẫn cần sử dụng công thức xấp xỉ tích phân Gauss.

2.4.2 Lập trình song song

Tính toán song song là một hình thức tính toán trong đó nhiều phép tính được thực hiện đồng thời, hoạt động trên nguyên tắc là những vấn đề lớn đều có thể chia thành nhiều phần nhỏ hơn, sau đó được giải quyết tương tranh ("trong lĩnh vực tính toán"). Có nhiều hình thức khác nhau của tính toán song song: song song cấp bit, song song cấp lệnh, song song dữ liệu, và song song tác vụ. Song song đã được sử dụng từ nhiều năm qua, chủ yếu là trong lĩnh vực tính toán hiệu năng cao. Gần đây hình thức tính toán này được quan tâm nhiều hơn, do những hạn chế vật lý ngăn chặn việc tăng hiệu năng tính toán chỉ bằng cách tăng tần số. Vì việc tiêu hao điện năng (dẫn đến sinh nhiệt) từ máy tính đã trở thành một mối lo ngại trong những năm gần đây, tính toán song song đã trở thành mô hình thống trị trong lĩnh vực kiến trúc máy tính, phần lớn là dưới dạng bộ xử lý đa nhân.

Các máy tính song song có thể được phân loại tùy theo cấp độ hỗ trợ cho song song của phần cứng, với những chiếc máy tính đa nhân và đa xử lý có bộ phận đa xử lý trong một máy đơn lẻ, trong khi cụm máy tính, xử lý song song hàng loạt, và điện toán lưới sử dụng nhiều máy tính để xử lý cùng một công việc. Những kiến trúc máy tính song song chuyên dụng thỉnh thoảng cũng sử dụng các bộ xử lý truyền thống nhằm tăng tốc độ cho những công việc đặc trưng.

Thuật toán song song khó viết hơn so với những thuật toán tuần tự, vì sự tương tranh tạo ra nhiều lớp mới tiềm tàng các lỗi phần mềm, trong đó lỗi điều kiện ganh đua là phổ biến nhất. Quản lý việc Giao tiếp và đồng bộ giữa các luồng xử lý là một trong những trở ngại lớn nhất để tạo ra một chương trình song song tốt.

Khả năng tăng tốc cao nhất có thể đạt được của một chương trình khi được song song hóa tuân theo định luật Amdahl.

Xử lý song song tốt khi chúng ta thực hiện một loạt các phép tính với số lượng lớn, nếu với số lượng nhỏ, thì nó lại phản tác dụng, vì ta mất thời gian để truyền dữ liệu giữa các tiến trình với nhau.Vì vậy, trong bài toán này, chúng ta chỉ nên áp dụng xử lý song song khi mà số phần tử chia ở mỗi biên lớn hơn hoặc bằng 32.

Trong bài toán của chúng ta, khi thiết lập ma trận chứa các $V\varphi_k^0$, ta phải tính 1 lượng tích phân khá lớn, ngoài ra, sau khi giải hệ và thu được các σ_k, để tính toán u_h phục vụ cho việc tính sai số điểm hay sai số miền L_2 thì cũng phải tính 1 lượng rất lớn tích phân, vì mỗi lần tính u_h thì ta cần tính $4N$ tích phân (Với N là số đoạn chia ở mỗi cạnh miền Ω. $u_h = \sum\limits_{k=1}^{4N} \int\limits_{T_k} U^*(x,y)\sigma_k dS_y = \sum\limits_{k=1}^{4N} \sigma_k \int\limits_{T_k} U^*(x,y) dS_y$). Tuy rằng, bên trên ta đã giảm thiểu rất đáng kể số phép tính bằng cách tính chính xác các tích phân để không cần sử dụng xấp xỉ Gauss. Để cải tiến tốt mô hình hơn nữa, chúng ta nên tiếp tục áp dụng song song để xử lý thuật toán này.

Dễ thấy rằng, với số lượng tích phân cần phải tính lớn, nhưng các tích phân này hoàn toàn độc lập với nhau. Vì thế, thay vì chỉ sử dụng một tiến trình để thực hiện lặp từ 1 cho đến $4N$ và tính lần lượt các tích phân, ta hoàn toàn có thể tách quá trình lặp này ra thành nhiều quá trình lặp nhỏ và độc lập tính các tích phân. Ví dụ sử dụng 2 tiến trình thì có thể tách thành 2 vòng lặp là từ 1 đến $2N$ cho tiến trình 1 và từ $2N + 1$ đến $4N$ cho tiến trình 2, tương tự như vậy, tuỳ thuộc vào số tiến trình có trên máy tính mà ta áp dụng để chạy nhằm tăng tốc độ xử lý bài toán.

Chương 3

Thực nghiệm và đánh giá

Ở trong báo cáo này, chúng tôi thực nghiệm kết quả trên 3 bài toán khác nhau phương trình Laplace 2 chiều với điều kiện biên Dirichlet Trong thực nghiệm này, sai số toàn miền L_2 được tính bằng cách chia mỗi cạnh của miền Ω thành 100 đoạn bằng nhau, miền Ω được chia thành lưới 100x100. Từ kết quả thực nghiệm của ba bài toán, chúng tôi có nhận xét và đánh giá đối với phương pháp.

Cấu hình máy tính thử nghiệm:

- CPU: Intel Core i7 7700HQ (4 Cores, 8 Processor)
- RAM: DDR4 8GB

3.1 Cài đặt thuật toán

Chương trình được chạy song song với 8 Processor hoạt động để tính sai số L_2 khi $N \geq 32$.

Input:

- Các tọa độ a_1, a_2, b_1, b_2.
- N là số đoạn chia trên mỗi cạnh của hình chữ nhật.
- Các hàm $g_i(x), i = \overline{1,4}$.

Output:

- Vecto cột $\sigma_k, k = \overline{1,4N}$.
- Giá trị hàm $u(x), x \in \Omega$.
- Hình vẽ biểu diễn tương quan giữa u_h, u trên miền Ω.
- Sai số toàn miền L_2.

Thuật toán:

Bước 1: Thực hiện chia biên thành các đoạn, trên mỗi đoạn ta lấy 1 điểm thuộc đoạn đó, lưu lại toạ độ các điểm chia $x_1, x_2, .., x_{4N}$

Bước 2: Tính toán các vector $g = (g(x_1), g(x_2), ..., g(x_{4N})^T$ và ma trận V với:

$$V = \begin{bmatrix} V\varphi_1^0(x_1) & V\varphi_2^0(x_1) & \dots & V\varphi_{4N}^0(x_1) \\ V\varphi_1^0(x_2) & V\varphi_2^0(x_2) & \dots & V\varphi_{4N}^0(x_2) \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ V\varphi_1^0(x_{4N}) & V\varphi_2^0(x_{4N}) & \dots & V\varphi_{4N}^0(x_{4N}) \end{bmatrix}$$

Bước 3: Giải phương trình: $V\sigma = g$. Từ đó thu được $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{4N})^T$

Bước 4: $u_h = \sum\limits_{k=1}^{4N} \int\limits_{T_k} U^*(x,y)\sigma_k dS_y = \sum\limits_{k=1}^{4N} \sigma_k \int\limits_{T_k} U^*(x,y) dS_y$

Bước 5: Tính sai số điểm, sai số toàn miền L_2 và đánh giá kết quả.

3.2 Các bài toán thử nghiệm

Ví dụ 3.2.1. *Xét trên miền* $\Omega = [\text{-}3, 3] \times [\text{-}3, 3]$ *với:*

$$u = x_1^2 - x_2^2$$

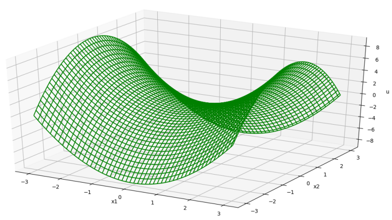
Hàm g được xác định trên từng cạnh như sau:

$$\begin{cases} u|_{\Gamma_1 : x_2 = -3} = g_1(x) = x_1^2 - 9 \\ u|_{\Gamma_2 : x_1 = 3} = g_2(x) = 9 - x_2^2 \\ u|_{\Gamma_3 : x_2 = 3} = g_3(x) = x_1^2 - 9 \\ u|_{\Gamma_4 : x_1 = -3} = g_4(x) = 9 - x_2^2 \end{cases}$$

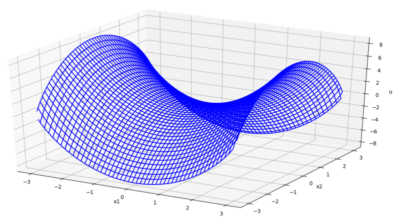
#BE	Sai số L_2	EOC	Tg giải hệ(s)	Tg sai số L_2(s)	Sai số điểm
4×2	9.140e-1		8.859e-6	9.005	2.468e-1
4×4	1.817e-1	2.331	9.630e-5	14.141	1.545e-2
4×8	3.793e-2	2.260	1.805e-3	24.323	1.890e-3
4×16	7.950e-3	2.254	3.379e-3	45.815	2.549e-4
4×32	1.650e-3	2.268	5.551e-3	90.189	3.198e-5
4×64	3.319e-4	2.314	1.305e-2	185.785	4.002e-6
4×128	5.848e-5	2.505	1.397e-2	353.259	5.005e-7
4×256	6.505e-6	3.168	3.393e-2	698.705	6.257e-8
4×512	9.874e-7	2.720	1.434e-1	1440.472	7.821e-9

Sai số điểm xét tại điểm $(2.5, 0.5)$

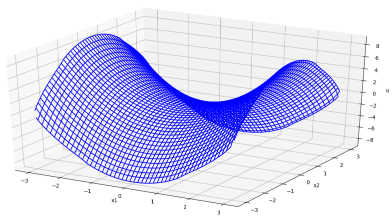
Hàm u



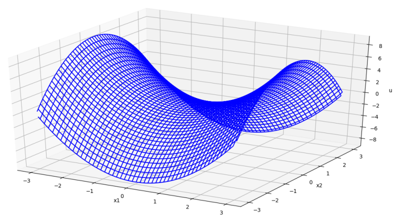
$N = 2$



Hàm $N = 4$



$N = 32$



Ví dụ 3.2.2. *Xét trên miền* $\Omega = [\text{-}5, 5] \times [\text{-}5, 5]$ *với:*

$$u(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 100$$

Hàm g được xác định trên từng cạnh như sau:

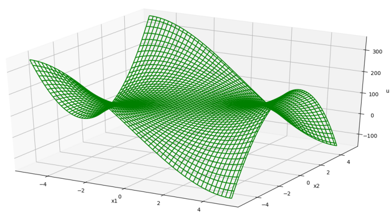
$$\begin{cases} u|_{\Gamma_1: x_2 = -5} = g_1(x) = x_1^3 - 75x_1 + 100 \\ u|_{\Gamma_2: x_1 = 5} = g_2(x) = 225 - 15x_2^2 \\ u|_{\Gamma_3: x_2 = 5} = g_3(x) = x_1^3 - 75x_1 + 100 \\ u|_{\Gamma_4: x_1 = -5} = g_4(x) = -25 + 15x_2^2 \end{cases}$$

#BE	Sai số L_2	EOC	Tg giải hệ(s)	Tg sai số L_2(s)	Sai số điểm
4×2	2.861e+2		9.040e-5	8.872	2.715e+1
4×4	6.474e+1	2.144	9.430e-5	14.649	1.891e+0
4×8	1.705e+1	1.925	1.572e-3	22.843	2.696e-1
4×16	4.939e+0	1.787	3.317e-3	44.964	3.957e-2
4×32	1.500e+0	1.719	4.973e-3	86.204	5.839e-3
4×64	4.654e -1	1.688	9.485e-3	168.258	8.711e-4
4×128	1.428e -1	1.704	1.626e-2	329.344	1.312e-4
4×256	2.958e -2	2.271	3.479e-2	663.847	1.992e-5
4×512	3.876e-3	2.932	1.363e-1	1369.796	3.045e-6
4×1024	1.163e-3	1.737	1.025e+0	2883.834	4.680e-7

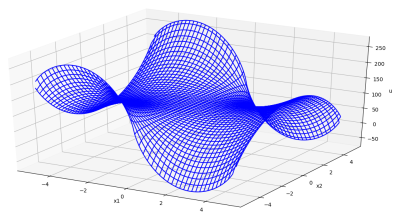
Sai số điểm xét tại điểm $(4, 1)$

Đồ thị:

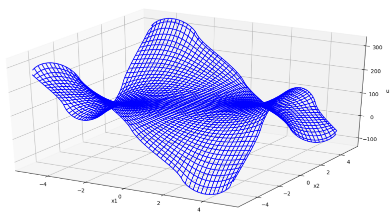
Hàm u



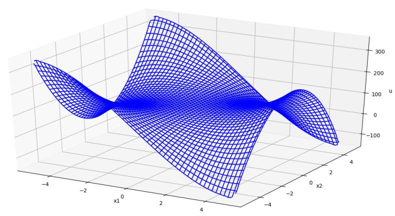
$N = 2$



Hàm $N = 4$



$N = 32$



Ví dụ 3.2.3. *Xét trên miền* $\Omega = [\text{-}\pi, \pi] \times [\text{-}\pi, \pi]$ *với:*

$$u = e^{-3x_1} \cos(3x_2)$$

Hàm g được xác định trên từng cạnh như sau:

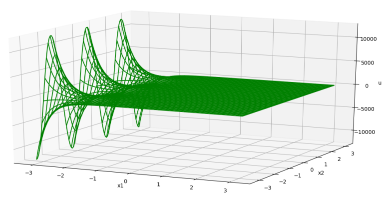
$$\begin{cases} u|_{\Gamma_1 : x_2 = -\pi} = g_1(x) = -e^{-3x_1} \\ u|_{\Gamma_2 : x_1 = \pi} = g_2(x) = e^{-3\pi} cos(3x_2) \\ u|_{\Gamma_3 : x_2 = \pi} = g_3(x) = -e^{-3x_1} \\ u|_{\Gamma_4 : x_1 = -\pi} = g_4(x) = e^{3\pi} cos(3x_2) \end{cases}$$

#BE	Sai số L_2	EOC	Tg giải hệ(s)	Tg sai số L_2(s)	Sai số điểm
4×2	8.964e+3		9.150e-5	8.459	12405.693
4×4	1.474e+4	-0.717	1.359e-4	13.516	4598.692
4×8	2.802e+3	2.395	1.668e-3	23.158	1113.763
4×16	4.070e+2	2.783	2.774e-3	42.716	127.452
4×32	8.432e+1	2.271	6.282e-3	82.538	15.552
4×64	2.323e+1	1.860	9.171e-3	167.873	1.811
4×128	6.915e+0	1.748	1.315e-2	326.646	0.253
4×256	1.425e+0	2.279	3.377e-2	658.342	0.024
4×512	1.864e-1	2.934	1.489e-1	1317.618	4.871e-3
4×1024	5.583e-2	1.739	8.049e-1	2969.281	1.538e-4

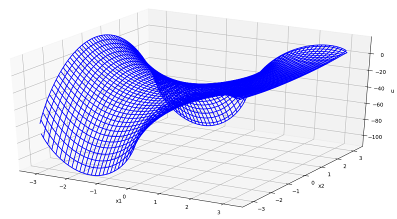
Sai số điểm xét tại điểm $(-\pi, \frac{2\pi}{3})$

Đồ thị:

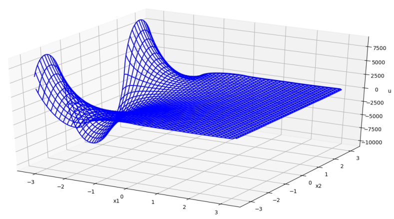
Hàm u



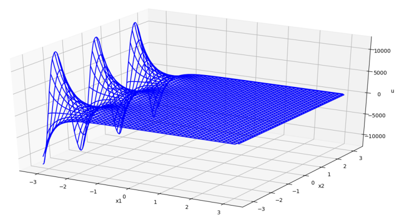
$N = 2$



$N = 4$



$N = 32$



3.3 Nhận xét và đánh giá

Tuy đã cố gắng rất nhiều để tối ưu thuật toán và chương trình, thời gian có hẹp nên chúng tôi dừng lại ở mức chia mỗi đoạn của miền thành 1024 phần tử. Bài toán ví dụ 3.2.2 và ví dụ 3.2.3 có thể thấy EOC khá giống nhau. Tuy nhiên, EOC bài toán ở ví dụ 3.2.1 có vẻ khác. Đây là một phương pháp khó đánh giá và chứng minh sai số. Dù đã cố tinh chỉnh phương pháp và chương trình, nhưng vì tài liệu về phương pháp hạn hẹp nên chúng tôi khó khăn trong quá trình đánh giá và nghiên cứu sai số. Có thể thấy bằng trực quan rằng, khi chia mỗi cạnh thành 32 phần tử, thì đồ thị của hàm u_h đã khá giống với hàm u. Thời gian giải hệ, chúng tôi sử dụng giải hệ tuyến tính của thư viện numpy trong ngôn ngữ lập trình Python và thời gian này không đáng kể, thời gian lâu nhất là tính sai số toàn miền L_2.

Hy vọng nhận được thêm sự đóng góp của thầy cô và các bạn để chúng tôi hoàn thành đề tài này tốt hơn. Cũng mong đây sẽ là tài liệu để cho các khoá sau tiếp tục cải tiến và hoàn thành tốt hơn đề tài này.

Chương 4

Lý thuyết về phương pháp trọng số

Phương pháp trọng số được sử dụng để giải gần đúng các phương trình vi phân trước khi phương pháp phần tử hữu hạn ra đời. Phương pháp trọng số lần đầu tiên được giới thiệu vào năm 1937 bởi Frazer. Phương pháp được sử dụng phổ biến để giải các phương trình vi phân một chiều. Trong chương này, các kiến thức và các kết quả chúng tôi tham khảo chủ yếu từ bài báo Martin Costabel, Ernst P. Stephan *On the Convergence of Collocation Methods for Boundary Integral Equations on Polygons*, Mathematics of Computation, 1987.

4.1 Hai phương trình cơ bản của phương pháp

Các phương trình tích phân gặp phải trong phương pháp phần tử biên thường xuyên sử dụng phương pháp trọng số với các hàm thử spline. Sự chứng minh hội tụ và sai số chỉ đúng trong một số các trường hợp:

1. Phương trình tích phân Fredholm loại thứ 2.

2. Phương trình vi sai một chiều và phương trình tích phân với hệ số mịn từng phần trên đường cong mịn.

3. Một số kết quả đặc biệt về phương trình tích phân Neumann cổ điển của lý thuyết tiềm năng (potential) cho miền phẳng đa giác.

Trong bài báo cáo này, chúng tôi tập chung vào sự hội tụ và sai số ước tính trong chuẩn Sobolev cho phương pháp trọng số với các hàm thử nghiệm spline tuyến tính từng phần áp dụng cho hai phương trình tích phân cơ bản của lý thuyết tiềm năng trên miền phẳng đa giác, cụ thể là phương trình tích phân loại thứ hai với tiềm năng hai lớp **phương trình tích phân Neumann** và phương trình tích phân loại thứ nhất với tiềm năng lớp đơn giản là **phương trình tích phân Symm**.

Xét Γ là đường cong kín, được kết nối với các cung tròn trơn $\Gamma^j, j = 1, ..., J$, gặp nhau tại các điểm góc z_j ở bên trong góc $\omega_j \in (0, 2\pi)$. Không gian Sobolev $H^s(\Gamma)$ được xác định với $s > 0$ được định nghĩa là hạn chế của $H^{s+1/2}(\mathbb{R}^2)$ với Γ, với $s < 0$, đối ngẫu: $H^s(\Gamma) = H^{-s}(\Gamma)'$ và $H^0(\Gamma) = L^2(\Gamma)$.
Chúng ta xem xét hai phương trình tích phân sau đây trên Γ:

$$(1 + K)\sigma = f \tag{4.1}$$

$$V\sigma = f \tag{4.2}$$

Trong đó K là toán tử được xác định bởi công thức:

$$K\sigma(z) := \frac{-1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial n(\xi)} \log |z - \xi| ds(\xi)$$

và V xác định bởi công thức:

$$V\sigma(\xi) := \frac{-1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \log |z - \xi| ds(\xi)$$

Trong đó, $1 + K : H^s(\Gamma) \to H^s(\Gamma)$ liên tục và song ánh với mọi $s \in (\frac{1}{2} - \alpha_0, \frac{1}{2} + \alpha_0)$, các $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_j \in (\frac{1}{2}, 1)$ được xác định:

$$\alpha_j := \min\{\frac{\pi}{\omega_j}, \frac{\pi}{2\pi - \omega_j}\}, \alpha_0 := \min\{\alpha_j | j = 1, ..., J\}.$$

Tương tự, $V : H^s(\Gamma) \to H^{s+1}(\Gamma)$ liên tục và song ánh với mọi $s \in (-\frac{1}{2} - \alpha_0, -\frac{1}{2} + \alpha_0)$.
Trong phương pháp trọng số, chúng ta cần một lưới $\Delta_N = \{x_1, x_2, ..., x_N\} \subset \Gamma$, x_j bao gồm các điểm trọng số và các điểm lưới của hàm thử. $S^1(\Delta_N)$ biểu thị không gian N chiều spline, mỗi $\sigma \in S^1(\Delta_N)$ là một hàm liên tục trên Γ đó là một hàm tuyến tính của độ dài cung trên mỗi đoạn cung $x_n x_{n+1}, n = 0, ..., N - 1, x_0 = x_N$. Xét

$$h := \max\{|x_{n+1} - x_n| | n = 0, ..., N - 1\}$$

Chúng ta giả sử khi $h \to 0$ thì $N \to \infty$.
Đối với phương trình tích phân thứ nhất, phương pháp trọng số:
Tìm $\sigma_N \in S^1(\Delta_N)$ sao cho:

$$(1 + K)\sigma_N(x_n) = f(x_n), \qquad n = 1, 2, ...N. \tag{4.3}$$

Đối với phương trình tích phân thứ hai

$$V\sigma_N(x_n) = f(x_n), \qquad n = 1, 2, ...N. \tag{4.4}$$

4.2 Sự hội tụ của phương pháp trọng số

Xét X và Y là các không gian Bannach, $A : X \to Y$ là ánh xạ song ánh và liên tục. Ta có phương trình

$$A\sigma = f \tag{4.5}$$

giả sử có một dãy các không gian con hữu hạn

$$V_N \subset X, T_N \subset Y', \dim V_N = \dim T_N < \infty \qquad (N \in \mathbb{N})$$

thay thế phương trình trên, với $\sigma_N \in V_N$,

$$\langle\, t, A\sigma_N\rangle = \langle\, t, f\rangle \qquad \forall t \in T_N. \tag{4.6}$$

trong đó Y' và Y là hai không gian đối ngẫu. Ta có các điều giả sử sau:

1. Tồn tại một toán tử tuyến tính giới hạn $P_N : Y' \to T_N$
2. Có một không gian Bannach X_0 nhúng liên tục trong X ($||x||_X \leq C||x||_{X_0}$ với $\forall x \in X_0$ và các hằng số C).
3. Với mọi N có $V_N \subset X_0$.
4. Với mọi N ta có một ánh xạ $Q_N : V_N \to T_N$ và một hằng số M sao cho:
$$|\langle\, Q_N v, Aw\rangle| \leq M||v||_X||w||_{X_0} \qquad \forall v \in V_N, w \in X_0, N \in \mathbb{N}.$$
5. Tồn tại một dãy các toán tử compact $C_N : X \to X'$ và một hằng số $\gamma > 0$ sao cho:
$$|\langle\, Q_N v, Aw\rangle + \langle\, C_N v, v\rangle| \geq \gamma||v||_X^2 \qquad \forall v \in V_N, N \in \mathbb{N}.$$

Bổ đề 4.2.1. *Với các điều kiện* $(1) - (5)$*, tồn tại* $N_0 \in \mathbb{N}$ *sao cho với mọi* $N \geq N_0$ *phương trình* (4.6) *có một nghiệm* $\sigma_N \in V_N$ *với* $f \in Y$*. Tồn tại một hằng số* C *sao cho nghiệm gần đúng* σ_N *và nghiệm chính xác* σ *thỏa mãn:*

$$||\sigma_N||_X \leq C||\sigma||_{X_0} \qquad \forall \sigma \in X_0, N \geq N_0, \tag{4.7}$$

$$||\sigma - \sigma_N||_X \leq C \inf\{||\sigma - \widetilde{\sigma}||_{X_0} | \widetilde{\sigma} \in V_N\}. \tag{4.8}$$

4.3 Sự hội tụ và sự ổn định của sai số

Trong phần này, chúng ta xem xét sự hội tụ và sự ổn định của sai số của phương pháp trọng số (4.4) đối với phương trình tích phân (4.2). Do lý thuyết về toán học trong phần này rất sâu và trừu tượng, chúng ta chỉ đi giới các định nghĩa và định lý chính.

Chọn $Q = D^2, X = H^{+1/2}(\Gamma), A = V$ không đầy đủ vì $\langle Qv, Av\rangle = \infty$, Q không ánh xạ vào $Y' = (AX)' \underset{\neq}{\subset} H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma)$.

Định nghĩa 4.3.1.

$$\overset{\circ}{H}{}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \{\sigma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) | \widetilde{\sigma_j} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)(j = 1, ..., J), \widetilde{\sigma_j} = \sigma \;\; \textit{trên}\;\; \Gamma^j, \widetilde{\sigma_j} = 0 \;\; \textit{trên}\;\; \Gamma - \Gamma^j\} \tag{4.9}$$

Chuẩn trên không gian $\overset{\circ}{H}{}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *là:*

$$||\sigma||^2_{\overset{\circ}{H}{}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{J} ||\sigma_j||^2_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

$\overset{\circ}{H}{}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ là không gian đầy đủ của $C_0^\infty(\Gamma \backslash \{z_1, ..., z_J\})$ với chuẩn trên. $\overset{\circ}{H}{}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ nhúng trong không gian $H^{1/2}(\Gamma)$. Toán tử V từ $\overset{\circ}{H}{}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ vào $H^{3/2}(\Gamma)$ liên tục nhưng không toàn ánh.

Định nghĩa 4.3.2.

$$\overset{\circ}{S}(\Delta_N) := \{v \in S^1(\Delta_N) | v(z_j) = 0, j = 1, ..., J\} \tag{4.10}$$

Định nghĩa 4.3.3. *Chọn hàm trọng số* $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \{z_1, ..., z_J\})$ *với*

$$\rho(z) = |z - z_j| \;\textit{là một lân cận của}\; z_j, \qquad j = 1, ..., J.$$

Giả sử $\{z_1, ..., z_J\} \subset \Delta_N$ *và định nghĩa:*

$$S^1_\rho(\Delta_N) := \frac{1}{\rho} \overset{\circ}{S}{}^1(\Delta_N) = \{\sigma | \rho\sigma \in \overset{\circ}{S}{}^1(\Delta_N)\}.$$

Phương trình trọng số (4.6) trở thành :

Tìm $\sigma_N \in S^1_\rho(\Delta_N)$ sao cho:

$$V\sigma_N(x_n) = f(x_n), \qquad \forall x_n \in \Delta_N \backslash \{z_1, ..., z_J\}. \tag{4.11}$$

Ta có hai định lý quan trọng sau đây.

Định lí 4.3.4. *Tồn tại* $N_0 \in \mathbb{N}$ *và* $C \geq 0$ *sao cho với* $\forall f \in H^{1/2}(\Gamma)$ *và* $\sigma = V^{-1}f \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *thỏa mãn* $\rho\sigma \in H^{1/2}(\Gamma)$ *có một nghiệm* $\sigma_N \in S^1_\rho(\Delta_N)$ *của phương trình* (4.11) *thỏa mãn:*

$$||\sigma_N||_{H^{1/2}_\rho(\Gamma)} \leq C(||\sigma||_{H^{-1/2}(\Gamma)} + ||\sigma||_{H^{1/2}_\rho(\Gamma)})$$

và

$$||\sigma - \sigma_N||_{H^{1/2}_\rho(\Gamma)} \leq C \inf\{||\sigma - \widetilde{\sigma}||_{H^{-1/2}(\Gamma)} + ||\sigma - \widetilde{\sigma}||_{H^{1/2}_\rho(\Gamma)} | \widetilde{\sigma} \in S^1_\rho(\Delta_N)\}.$$

Định lí 4.3.5. *Tồn tại* $N_0 \in \mathbb{N}$ *và* $C \geq 0$ *sao cho với mọi hàm* f *đủ mịn và* $N \geq N_0$, *nghiệm* $\sigma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *của phương trình* (4.2) *và nghiệm* $\sigma_N \in S^1_\rho(\Delta_N)$ *của phương trình* (4.11) *thỏa mãn:*

$$||\sigma - \sigma_N||_{H^{1/2}_\rho(\Gamma)} \leq C \begin{cases} h^{3/2} & \textit{nếu}\ \beta > 2/(2\alpha_0 - 1) \\ h^{\alpha_0\beta - \varepsilon} & \textit{nếu}\ 1 \leq \beta < 4/(2\alpha_0 + 1);\ (\textit{với}\ \varepsilon > 0). \end{cases} \tag{4.12}$$

KẾT LUẬN

Như vậy, chúng ta đã có một cái nhìn khái quát về phương pháp trọng số và có thể nhận thấy các điểm khác biệt của phương pháp trọng số với các phương pháp khác. Phương pháp trọng số với cách thực hiện tương đối đơn giản, tuy nhiên với kiến thức lý thuyết rất phức tạp và trừu tượng, đòi hỏi cần có những nghiên cứu tỉ mỉ và nghiêm túc về cả lý thuyết lẫn kĩ thuật lập trình, qua đó để xây dựng lời giải cho những lớp bài toán phức tạp hơn. Đây cũng là hướng phát triển bài báo cáo của nhóm trong tương lai.

Một lần nữa chúng em xin cảm ơn thầy giáo TS. Phan Xuân Thành cũng như các bạn lớp KSTN Toán Tin K61 đã có những hỗ trợ dành cho nhóm trong quá trình nhóm thực hiện đề tài!

Tài liệu tham khảo

[1] Martin Costabel and Ernst P. Stephan, *On the Convergence of Collocation Methods for Boundary Integral Equations on Polygons*, mathematics of computation volume 49, number 180 october 1987, pages 461-478

[2] Phan Xuân Thành, *Bài giảng Phương trình đạo hàm riêng*, Đại học Bách Khoa Hà Nội, 2011

[3] Olaf Steinbach, *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems*, Institute of Computational Mathematics Graz University of Technology Austria

[4] Stig Larsson, Vidar Thomée, *Partial Differential Equations with Numerical Methods*, Mathematical Sciences Chalmers University of Technology and University of Gothenburg

[5] Susanne C. Brenner L, Ridgway Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Third Edition

[6] Tạ Văn Đĩnh *Phương pháp sai phân và phương pháp phần tử hữu hạn*, Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 2002