ОТЧЁТ
Компьютерные технологии в науке и образовании
Задание № 5

Бартая Нодари ФМ-101

15 января 2020 г.

1 Постановка задачи

Требуется рассчитать траекторию движения электрона в скрещенных постоянных магнитном и электрическом полях. С компонентами $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ и напряженностями 10 А/м и 10 В/м соответственно. Начальная скорость электрона $\mathbf{v}_0$ направлена перпендикулярно вектору напряженности магнитного поля и составляет 10 см/с. Геометрия задачи представлена на рисунке ниже.

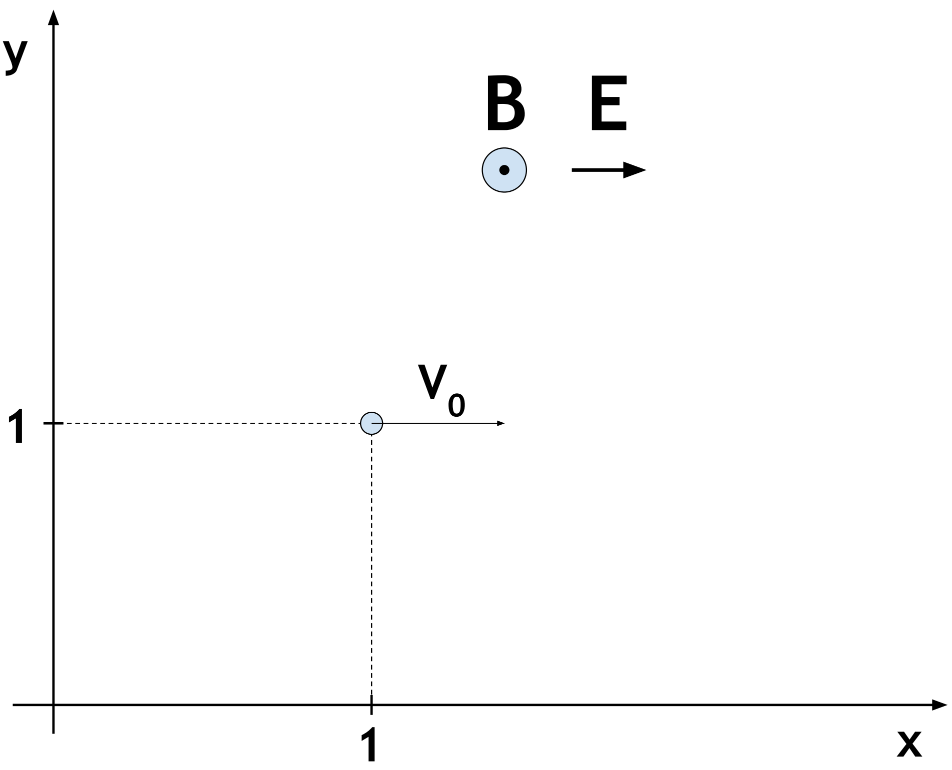

Рис. 1: Электрон в электромагнитном поле. Геометрия задачи, начальные условия.

2 Аналитическое решение

Решение будем искать в нерелятивистском приближении, то есть скорость движения электрона много меньше скорости света. Тогда, согласно второму закону Ньютона уравнение движения электрона имеет вид:

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}, \tag{1}$$

где m - масса электрона, $\mathbf{v}$ - его скорость, $\mathbf{F}$ - действующая сила.

В элетромагнитном поле на заряженные частицы действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\left[\mathbf{vB}\right], \tag{2}$$

где e - заряд частицы, - скорость света, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ - напряженности электрического и магнитного поля, соответственно.

Используя уравнения (1) и (2), с учётом геометрии задачи 1 запишем следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{e}{m}E_x + \dfrac{e}{cm}\left(v_y B_z\right) & v_x(0) = 10 \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{e}{mc}v_x B_z & v_y(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Продифференцируем первое уравнение по времени

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e}{cm}B_z\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t},$$

введём обозначение $\dfrac{e}{cm}B_z = \gamma$ и подставим второе уравнение вместо v_y. Получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{v_x} - \gamma^2 v_x = 0$$

Корни характеристического уравнения равны $\lambda_{1,2} = \pm\gamma$, следовательно общее решение имеет вид:

$$v_x = C_1\, e^{\gamma t} + C_2\, e^{-\gamma t} \tag{4}$$

Подставим найденное общее решение в уравнение 2 системы (3) и проинтегрируем, следовательно общее решение для v_y имеет вид:

$$v_y = C_1\, e^{\gamma t} - C_2\, e^{-\gamma t} + C_3. \tag{5}$$

Продифференцируем по времени общее решение для v_x (4) и приравняем к первому уравнению системы (3). В правой части подставим v_y из (5). Произведя тривиальные преобразования найдём, что $C_3 = -\xi$, где $\xi = cE_x B_z^{-1}$ Далее, используя начальные условия определим константы - $C_1 = 5+\xi$ и $C_2 = 5-\xi$. Таким образом, решением системы уравений (3) будет:

$$v_x = (5+\xi)e^{\gamma t} + (5-\xi)e^{-\gamma t} \tag{6}$$
$$v_y = (5+\xi)e^{\gamma t} - (5-\xi)e^{-\gamma t} - \xi \tag{7}$$

3 Численное решение

Согласно уравнениям (1), (2) численное решение для координаты частицы и скорости её движения в зависимости от времени будем искать для следующей системы дифференциальных уравнений первого порядка в соответсвии с геометрией задачи 1.

$$\begin{cases} \dot{v_x} = \left[eE_x + \dfrac{e}{c}\,(v_y B_z)\right] m^{-1} & v_x(0) = 10 \\ \dot{v_y} = \dfrac{e}{mc} v_x B_z & v_y(0) = 0 \\ \dot{r_y} = v_y & r_x(0) = 1 \\ \dot{r_y} = v_y & r_y(0) = 1 \end{cases} \tag{8}$$

Данная система решается с помощью модуля integrate библиотеки scipy для языка программирования python. Код программы приведен в разделе 5.

На рисунке 2 представлена траектория частицы от начального положения до момента $t = 1$ мкс. На рисунке 3 представлен график

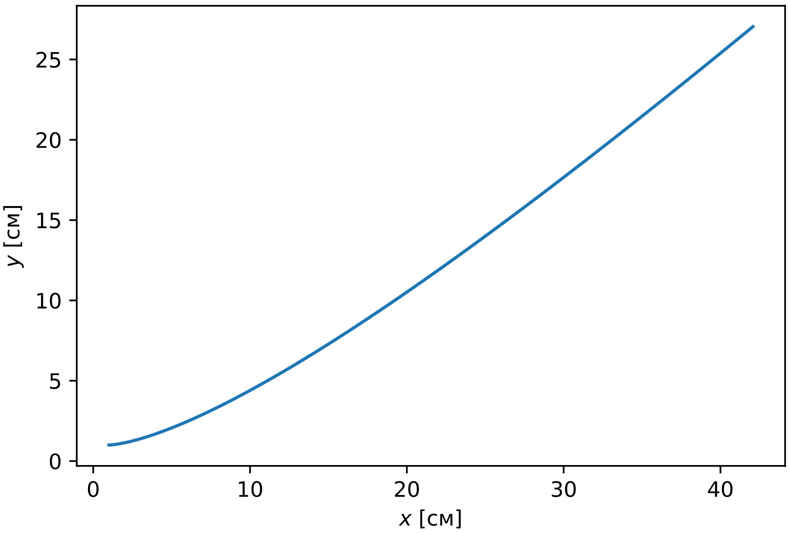

Рис. 2: Траектория частицы за интервал времени $t = [0, 1\text{e-}3]$ сек.

компонент скоростей частицы от времени. Точечными линиями показано аналитическое решение. Рисунок 4 показывает ошибку численного решения относительно аналитического в разные моменты времени.

Рисунки построены с помощью библиотеки matplotlib.

4 Заключение

Поставленная задача выполнена в полном объеме. Приведена постановка задачи и соответствующий рисунок. Аналитическое решение получено в предположении о том, что скорость частицы много меньше скорости света. Численное решение получено с помощью средств для языка python, а именно библиотек scipy, numpy. Относительная погрешность имеет порядок 1e-8, что является очень хорошим результатом.

Но, стоит обратить особое внимание на то, что за времена менее одной микросекунды частица разгоняется до околосветовых скоростей, следовательно, требуется учитывать релятивистские эффекты.

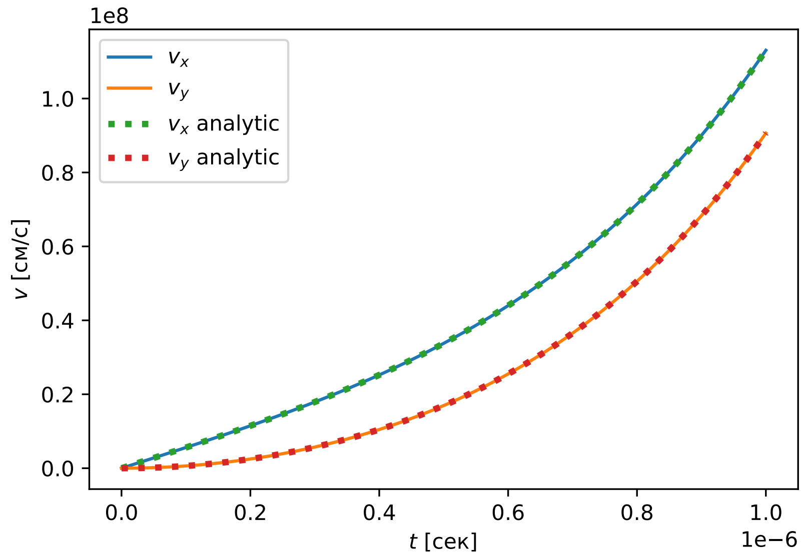

Рис. 3: Зависимость компонент скоростей частицы от времени. Сплошные линии - численное решение, прерывистые линии - аналитическое

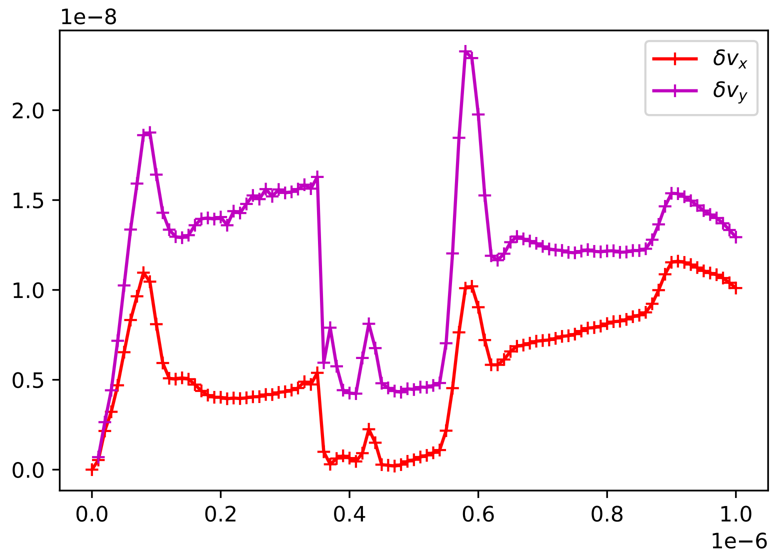

Рис. 4: График зависимости относительной ошибки численного решения для компонент скоростей.

5 Код программы

```
# -*- coding: utf-8 -*-
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

m = 9.11e-28
e = 4.8e-10
c = 3e10
erstd = 4*np.pi/1e3
sgse = np.sqrt(4*np.pi*8.854e-12)
B = 10 * erstd
E = 10 * sgse

C = (m, e, c, B, E)

# function
def system(u, t, C):
    dvxdt = (C[1]*C[4] + C[1]/C[2] * u[1]*C[3])/C[0]
    dvydt = C[1]/C[2]/C[0] * u[0]*C[3]
    drxdt = u[0]
    drydt = u[1]
    return [dvxdt, dvydt, drxdt, drydt]

# initial condition
u0 = [10, 0, 1, 1]

# time points
t = np.linspace(0, 1e-6, 101)

# solve
sol = odeint(system, u0, t, args=(C,))
print(sol)
```