

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Факультет физический
Кафедра теоретической физики
Направление 03.04.02 Физика
Направленность Теоретическая и математическая физика

ОТЧЁТ

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ ЗАДАНИЕ № 5

Преподаватель: Хайбрахманов С. А.
Студент: Бартая Н.В.
Группа: ФМ - 101

Челябинск, 2020

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Аналитическое решение	4
3	Численное решение	6
4	Заключение	8
5	Код программы	9

1 Постановка задачи

Требуется рассчитать траекторию движения электрона в скрещенных постоянных магнитном и электрическом полях. С компонентами $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ и напряженностями 10 А/м и 10 В/м соответственно. Начальная скорость электрона \mathbf{v}_0 направлена перпендикулярно вектору напряженности магнитного поля и составляет 10 см/с. Геометрия задачи представлена на рисунке ниже.

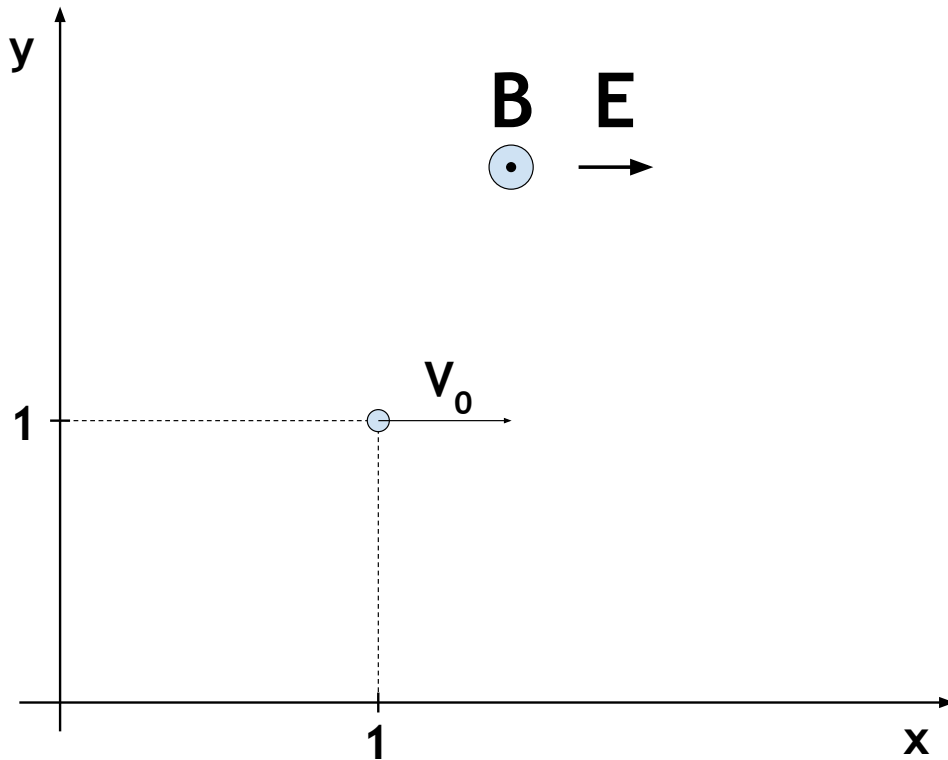


Рис. 1: Электрон в электромагнитном поле. Геометрия задачи, начальные условия.

2 Аналитическое решение

Решение будем искать в нерелятивистском приближении, то есть скорость движения электрона много меньше скорости света. Тогда, согласно второму закону Ньютона уравнение движения электрона имеет вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

где m - масса электрона, \mathbf{v} - его скорость, \mathbf{F} - действующая сила.

В элетромагнитном поле на заряженные частицы действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (2)$$

где e - заряд частицы, c - скорость света, \mathbf{E} и \mathbf{B} - напряженности электрического и магнитного поля, соответственно.

Используя уравнения (1) и (2), с учётом геометрии задачи 1 запишем следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{m} E_x + \frac{e}{cm} (v_y B_z) & v_x(0) = 10 \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{e}{mc} v_x B_z & v_y(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Продифференцируем первое уравнение по времени

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{e}{cm} B_z \frac{dv_y}{dt},$$

введём обозначение $\frac{e}{cm} B_z = \gamma$ и подставим второе уравнение вместо \dot{v}_y . Получим однородное дифференциальное уравнение второго

порядка:

$$\ddot{v}_x - \gamma^2 v_x = 0$$

Корни характеристического уравнения равны $\lambda_{1,2} = \pm\gamma$, следовательно общее решение имеет вид:

$$v_x = C_1 e^{\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t} \quad (4)$$

Подставим найденное общее решение в уравнение 2 системы (3) и проинтегрируем, следовательно общее решение для v_y имеет вид:

$$v_y = C_1 e^{\gamma t} - C_2 e^{-\gamma t} + C_3. \quad (5)$$

Продифференцируем по времени общее решение для v_x (4) и приравняем к первому уравнению системы (3). В правой части подставим v_y из (5). Произведя тривиальные преобразования найдём, что $C_3 = -\xi$, где $\xi = cE_x B_z^{-1}$. Далее, используя начальные условия определим константы - $C_1 = 5 + \xi$ и $C_2 = 5 - \xi$. Таким образом, решением системы уравнений (3) будет:

$$v_x = (5 + \xi)e^{\gamma t} + (5 - \xi)e^{-\gamma t} \quad (6)$$

$$v_y = (5 + \xi)e^{\gamma t} - (5 - \xi)e^{-\gamma t} - \xi. \quad (7)$$

3 Численное решение

Согласно уравнениям (1), (2) численное решение для координаты частицы и скорости её движения в зависимости от времени будем искать для следующей системы дифференциальных уравнений первого порядка в соответствии с геометрией задачи 1.

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \left[eE_x + \frac{e}{c}(v_y B_z) \right] m^{-1} & v_x(0) = 10 \\ \dot{v}_y = \frac{e}{mc} v_x B_z & v_y(0) = 0 \\ \dot{r}_x = v_x & r_x(0) = 1 \\ \dot{r}_y = v_y & r_y(0) = 1 \end{cases} \quad (8)$$

Данная система решается с помощью модуля `integrate` библиотеки `scipy` для языка программирования `python`. Код программы приведен в разделе 5.

На рисунке 2 представлена траектория частицы от начального положения до момента $t = 1$ мкс. На рисунке 3 представлен график зависимости компонент скоростей частицы от времени. Точечными линиями показано аналитическое решение. Рисунок 4 показывает ошибку численного решения относительно аналитического в разные моменты времени.

Рисунки построены с помощью библиотеки `matplotlib`.

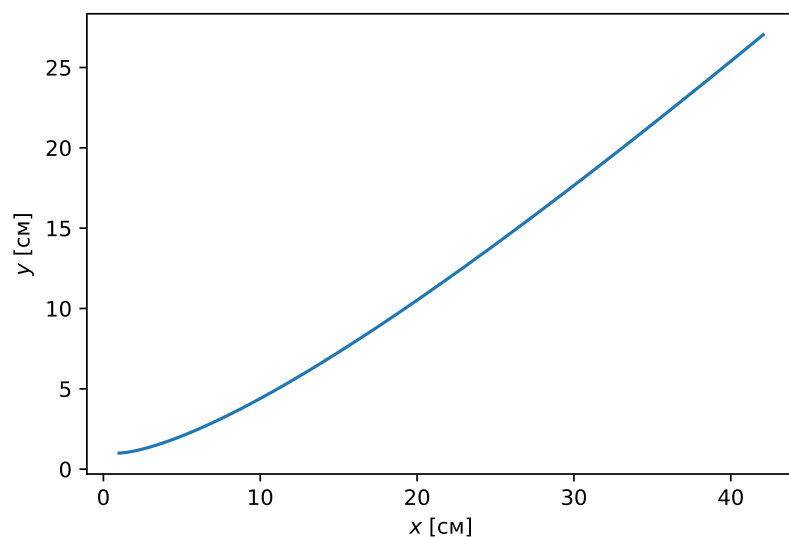


Рис. 2: Траектория частицы за интервал времени $t = [0, 1e-3]$ сек.

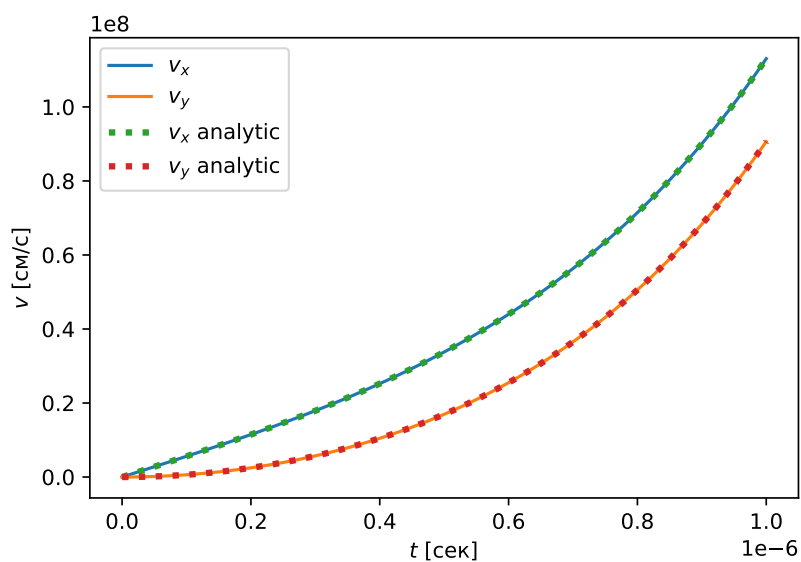


Рис. 3: Зависимость компонент скоростей частицы от времени. Сплошные линии - численное решение, прерывистые линии - аналитическое

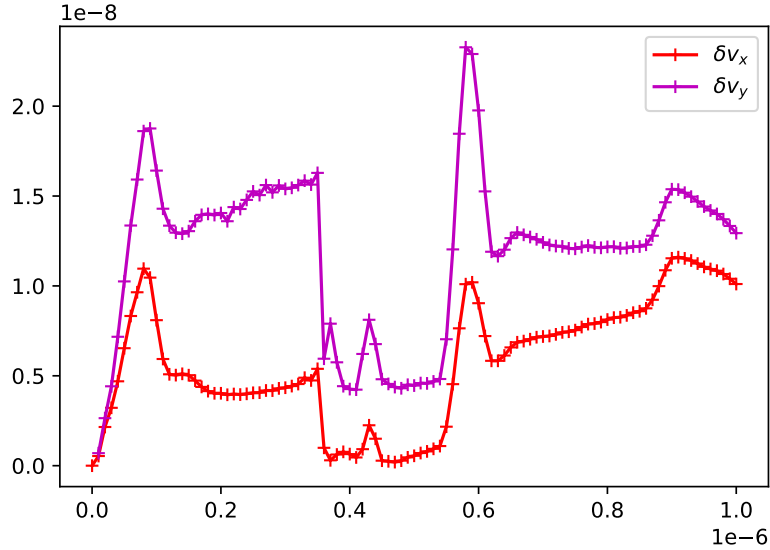


Рис. 4: График зависимости относительной ошибки численного решения для компонент скоростей.

4 Заключение

Поставленная задача выполнена в полном объеме. Приведена постановка задачи и соответствующий рисунок. Аналитическое решение получено в предположении о том, что скорость частицы много меньше скорости света. Численное решение получено с помощью средств для языка python, а именно библиотек `scipy`, `numpy`. Относительная погрешность имеет порядок $1e-8$, что является очень хорошим результатом.

Но, стоит обратить особое внимание на то, что за времена менее одной микросекунды частица разгоняется до околосветовых скоростей, следовательно, требуется учитывать релятивистские эффекты.

5 Код программы

```
1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import numpy as np
4  from scipy.integrate import odeint
5
6  m = 9.11e-28
7  e = 4.8e-10
8  c = 3e10
9  erstd = 4*np.pi/1e3
10 sgse = np.sqrt(4*np.pi*8.854e-12)
11 B = 10 * erstd
12 E = 10 * sgse
13
14 C = (m, e, c, B, E)
15
16 # function
17 def system(u, t, C):
18     dvxdt = (C[1]*C[4] + C[1]/C[2] * u[1]*C[3])/C[0]
19     dvydt = C[1]/C[2]/C[0] * u[0]*C[3]
20     drxdt = u[0]
21     drydt = u[1]
22     return [dvxdt, dvydt, drxdt, drydt]
23
24 # initial condition
25 u0 = [10, 0, 1, 1]
26
27 # time points
28 t = np.linspace(0, 1e-6, 101)
29
30 # solve
31 sol = odeint(system, u0, t, args=(C,))
32 print(sol)
```