Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Факультет физический
Кафедра теоретической физики
Направление 03.04.02 Физика
Направленность Теоретическая и математическая физика

ОТЧЁТ

Компьютерные технологии в науке и образовании
Задание № 5

Преподаватель: доцент кафедры теор. физики, кандидат физ.-мат.наук Хайбрахманов С.А.
Студент: Бартая Н.В.
Группа: ФМ-101

Челябинск, 2020

Содержание

1 Введение

В рамках курса "Компьютерные технологии в науке и образовании"студентам, в качестве итогового задания требовалось выполнить работу, которой и посвящен данный отчет.

Целью работы является продемонстрировать полученные в курсе навыки, а именно с помощью современных средств, решить физическую задачу с помощью вычислительной машины и аналитически. Используемым средством является пакет программного обеспечения Anaconda, включающий в себя наиболее популярные и удобные библиотеки для научных расчетов и визуализации, интегрированную среду разработки для языка python.

Для выполнения поставленных целей требуется решить задачу, описанную в разделе 2, привести аналитическое решение (см. раздел (3)), написать код на языке python, который позволяет численно решить задачу и визуализировать результат. Численное решение и рисунки, показывающие и аналитическое и численное решения приведены в разделе (4). Код программы представлен в разделе (6).

2 Постановка задачи

Требуется рассчитать траекторию движения электрона в скрещенных постоянных магнитном и электрическом полях с напряженностями 1 А/м и 100 В/м, соответственно. Начальная скорость электрона $\mathbf{v_0}$ направлена перпендикулярно вектору напряженности магнитного поля и составляет 10 см/с. Геометрия задачи представлена на рисунке 1. За единицу длины примем сантиметр.

Введем декартову систему координат, тогда в соответствии с ри-

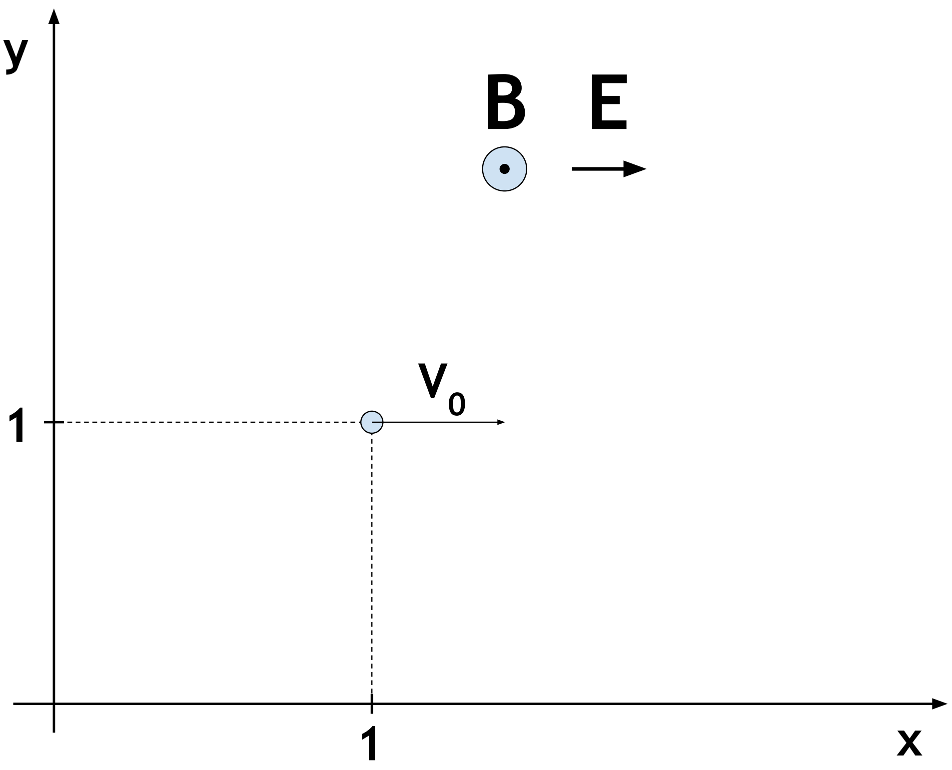

Рис. 1: Электрон в электромагнитном поле. Показано начальное положение частицы. Электрическое поле направлено вдоль оси x, магнитное поле направлено вдоль оси z, на наблюдателя. Вектор $\mathbf{v_0}$ показывает направление движения в начальный момент времени.

сунком 1 компоненты электрического и магнитного поля будут - $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ и $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$, соответственно. Для того, чтобы рассчитать траекторию электрона и его скорость, потребуется уравнение движения, которое, в соответствии со вторым законом Ньютона [1] имеет вид:

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}, \tag{1}$$

где m - масса электрона, $\mathbf{v}$ - его скорость, $\mathbf{F}$ - действующая сила.

Известно [2], что в элетромагнитном поле на заряженные частицы действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\left[\mathbf{v}\mathbf{B}\right], \tag{2}$$

где e - заряд частицы, c - скорость света, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ - напряженности электрического и магнитного поля, соответственно.

Используя уравнения (1) и (2), с учётом геометрии задачи запишем следующую систему уравнений для компонент скоростей движения электрона:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{e}{m}E_x + \dfrac{e}{cm}\left(v_y B_z\right), & v_x(0) = 10; \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{e}{mc}v_x B_z, & v_y(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Уравнения для нахождения траектории мы получим из решений системы (3). Так как по определению [3] скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, то уравнения для нахождения координат частиц можно определить, как систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_r, & x(0) = 1; \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y, & y(0) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

3 Аналитическое решение

Решение будем искать в нерелятивистском приближении, то есть скорость движения электрона много меньше скорости света. В этом случае, согласно [2, 4] накладывается условие на электромагнитное поле, а именно:

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \ll 1, \tag{5}$$

что соответствует условию задачи 1. Продифференцируем первое уравнение системы по времени

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e}{cm} B_z \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t},$$

введём обозначение $\frac{e}{cm} B_z = \gamma$ и подставим второе уравнение вместо $\dot{v_y}$. Получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{v_x} + \gamma^2 v_x = 0.$$

Корни характеристического уравнения оказываются чисто мнимыми и равными $\lambda_{1,2} = \pm\gamma i$, следовательно общее решение имеет вид:

$$v_x = C_1 \cos\gamma t + C_2 \sin\gamma t. \tag{6}$$

Подставим найденное общее решение в уравнение 2 системы (3) и проинтегрируем, следовательно общее решение для v_y имеет вид:

$$v_y = C_2 \cos\gamma t - C_1 \sin\gamma t + C_3. \tag{7}$$

Продифференцируем по времени общее решение для v_x (6) и приравняем к первому уравнению системы (3). В правой части подставим v_y из (7). Произведя тривиальные преобразования найдём, что $C_3 = -\xi$, где $\xi = cE_x B_z^{-1}$ Далее, используя начальные условия определим константы - $C_1 = 10$ и $C_2 = \xi$. Таким образом, решением системы уравений (3) будет:

$$v_x = 10\,\cos\gamma t + \xi\sin\gamma t, \tag{8}$$

$$v_y = \xi\,\cos\gamma t - 10\,\sin\gamma t - \xi. \tag{9}$$

Далее, используя известное решение для компонент $\mathbf{v}$, проинтегрируем оба уравнения из системы (4) как дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, откуда окончательно получаем решение системы (4):

$$x = [10\,\sin\gamma t - \xi\,\cos\gamma t + \xi]\,\gamma^{-1} + x_0, \tag{10}$$

$$y = [\xi\,\sin\gamma t + 10\,\cos\gamma t - 10]\,\gamma^{-1} + \xi t + y_0, \tag{11}$$

где x_0 и y_0 - координаты частицы в момент времени $t = 0$.

4 Численное решение

Численное решение уравнений (1) и (2) для координаты частицы и скорости её движения в зависимости от времени будем искать для следующей системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$
\begin{cases}
\dot{v_x} = \left[eE_x + \dfrac{e}{c}\left(v_y B_z\right)\right] m^{-1}, & v_x(0) = 10; \\
\dot{v_y} = -\dfrac{e}{mc} v_x B_z, & v_y(0) = 0; \\
\dot{x} = v_x, & x(0) = 1; \\
\dot{y} = v_y, & y(0) = 1.
\end{cases}
\tag{12}
$$

Данная система решается с помощью модуля integrate [5] библиотеки scipy для языка программирования python. Код программы приведен в разделе 6.

На рисунке 2 представлена траектория частицы от начального положения до момента $t = 1$ мкс. Траектория электрона описывает циклоиду в направлении движения перпендикулярному и электрическому и магнитному полю. На рисунке 3 представлен график зависимости компонент скоростей частицы от времени. Компоненты скорости описывают синусоиду, причём они сдвинуты по фазе и абсолютной величине. Скорость частица имеет порядок 1×10^5, что сравнимо с тепловыми скоростями движения. Разберём подробнее динамику, изначально электрон начинает двигаться вдоль электрического поля, которое ускоряет его, в то же время электрон двигается поперек сильного магнитного поля, которое хоть и не изменяет энергии частицы, но искривляет ее траекторию в направлении вдоль

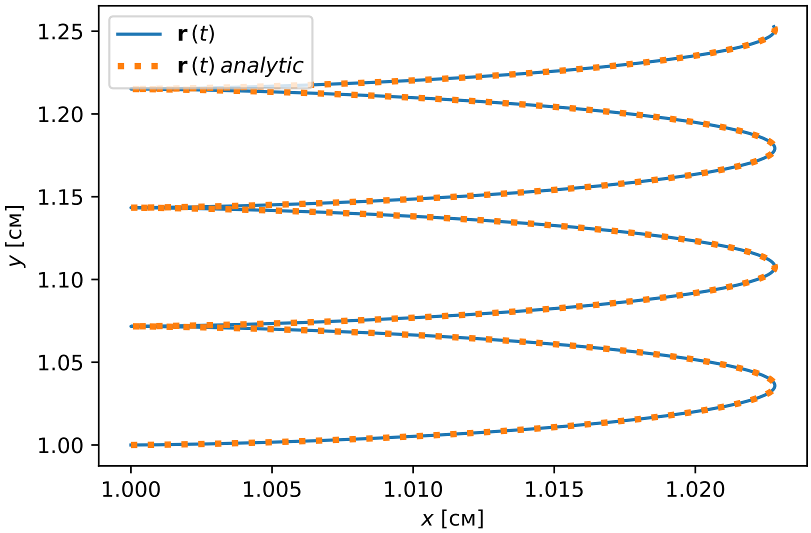

Рис. 2: Траектория частицы в интервале времени $t = [0\,, 1 \times 10^{-6}]$ сек.

оси y, причем настолько сильно, что электрон разворачивается и засчет накопленной скорости начинает двигаться против электрического поля. Его скорость уменьшается, достигает нуля и с этого момента электрическое поле вновь начинает ускроять электрон. И таким образом движение будет продолжаться неограниченное время, если не изменятся условия. Рисунок 4 показывает ошибку численного решения относительно аналитического в разные моменты времени. Ошибки величин, как скоростей так и координат осциллируют, достигая максимальных значений на точках перегиба, что особо заметно у компонент скоростей. Ошибки координат в начальный момент малы и имеют порядок 1×10^{-11}, однако они накапливаются и выходят на некий стационар, не превышая 1×10^{-9}. Конечно, ошибка очень мала, и на рисунках мы видим полное совпадение аналитического и численного решений.

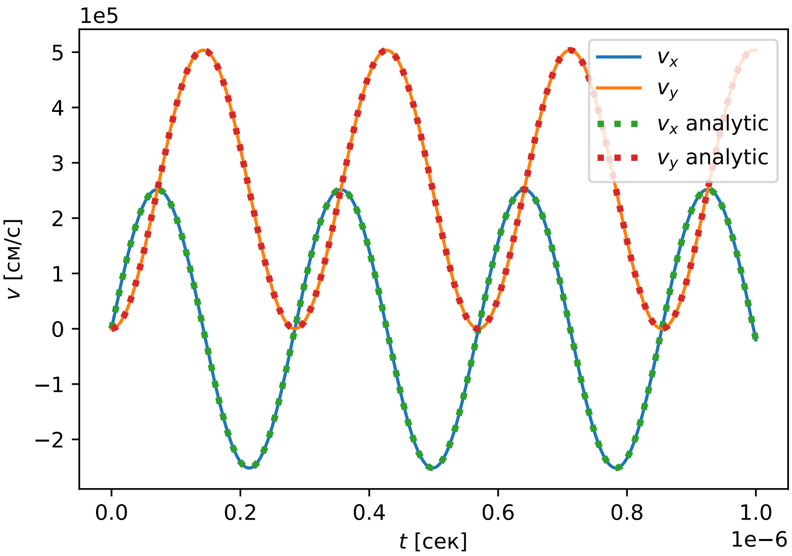

Рис. 3: Зависимость компонент скоростей частицы от времени. Сплошные линии - численное решение, прерывистые линии - аналитическое

5 Заключение

В ходе выполнения работы были достигнуты следующие цели и выполнены поставленные задачи. Получены навыки использования языка программирования python в комплексе с библиотеками для научных расчётов и визуализации данных. Аналитическое решение получено в предположении что скорость частицы много меньше скорости света, это справедливо для указанных условий задачи. Численное решение получено с помощью средств для языка python, а именно библиотек scipy[7], numpy[8]. Рисунки построены с помощью библиотеки matplotlib [6]. Максимальная относительная погрешность имеет порядок 1×10^{-5} для скоростей частицы и не превышает 1×10^{-9} для координат, что является очень хорошим результатом. Показа-

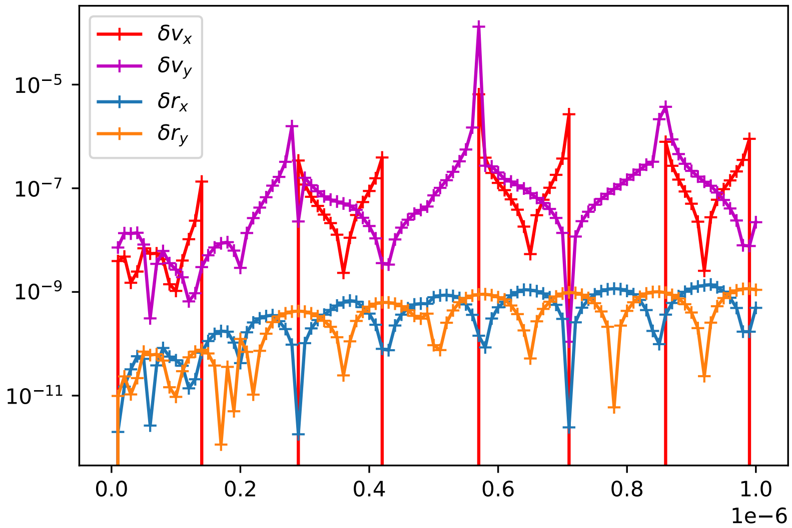

Рис. 4: График зависимости относительной ошибки численного решения от времени для координат и компонент скоростей частицы. Шкала по оси ординат - логарифмическая.

но, что электрон в скрещенных электрическом и магнитном полях испытывает так называемый дрейф, двигаясь в плоскости перпендикулярной и электрическому полю с циклическим ускорением/замедлением. В целом, результаты согласуются с известными ранее ([2] и др.), что подтверждает правильность полученных аналитических решений и эффективность использования современных средств для решения научных задач.

6 Код программы

```
# -*- coding: utf-8 -*-
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

m = 9.11e-28
e = 4.8e-10
c = 3e10
erstd = 4*np.pi/1e3
sgse = np.sqrt(4*np.pi*8.854e-12)
B = -100 * erstd
E = 10e-1 * sgse

C = (m, e, c, B, E)

# function
def system(u, t, C):
    dvxdt = (C[1]*C[4] + C[1]/C[2] * u[1]*C[3])/C[0]
    dvydt = -C[1]/C[2]/C[0] * u[0]*C[3]
    drxdt = u[0]
    drydt = u[1]
    return [dvxdt, dvydt, drxdt, drydt]

# initial condition
u0 = [10, 0, 1, 1]

# time points
t = np.linspace(0, 1e-6, 101)

# solve
sol = odeint(system, u0, t, args=(C,))
print(sol)
```

Список литературы

[1] Сивухин Д. В. Общий курс физики: учебное пособие в 5 т. 4-е, стереот. изд. М.: ФИЗМАТЛИТ; изд-во МФТИ, 2005. Т. I. Механика.

[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. 5-е, стереот. изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2004. Т. II. Теория поля.

[3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. 5-е, стереот. изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2004. Т. I. Механика.

[4] Измайлов С. В. Курс электродинамики. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1962.

[5] Module of scipy.integrate — numerical integration techniques including an ordinary differential equation integrator. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/tutorial/integrate.html.

[6] Matplotlib — plotting library for Python. https://matplotlib.org/index.html.

[7] Python-based ecosystem for mathematics, science, and engineering. https://www.scipy.org/.

[8] Fundamental package for scientific computing with Python. https://numpy.org/.