Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Факультет физический
Кафедра теоретической физики
Направление 03.04.02 Физика
Направленность Теоретическая и математическая физика

ОТЧЁТ

Компьютерные технологии в науке и образовании
Задание № 5

Преподаватель: доцент кафедры теор. физики, кандидат физ.-мат.наук Хайбрахманов С.А.
Студент: Бартая Н.В.
Группа: ФМ-101

Челябинск, 2020

Содержание

1 Постановка задачи

Требуется рассчитать траекторию движения электрона в скрещенных постоянных магнитном и электрическом полях с напряженностями 1 А/м и 100 В/м, соответственно. Начальная скорость электрона $\mathbf{v}_0$ направлена перпендикулярно вектору напряженности магнитного поля и составляет 10 см/с. Геометрия задачи представлена на рисунке ниже. За единицу длины примем сантиметр.

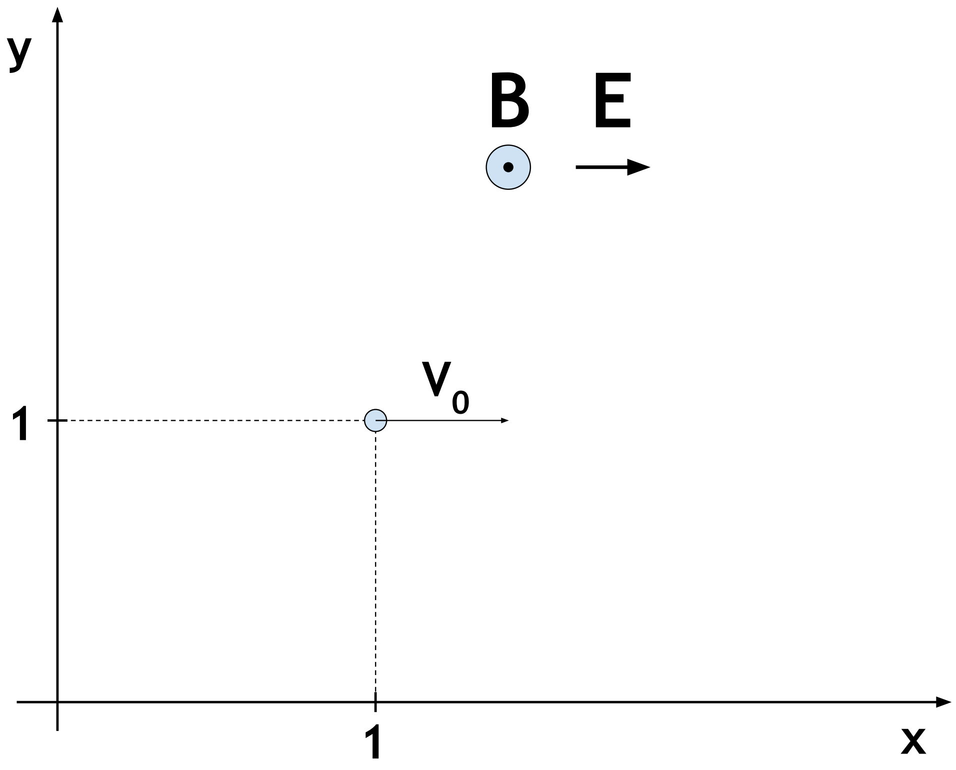

Рис. 1: Электрон в электромагнитном поле. Показано начальное положение частицы. Электрическое поле направлено вдоль оси x, магнитное поле направлено вдоль оси z, на наблюдателя. Вектор $\mathbf{v_0}$ показывает направление движения в начальный момент времени.

В соответствии с рисунком 1 введем декартову систему координат, тогда компоненты электрического и магнитного поля будут - $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ и $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$, соответственно. Для того, чтобы рассчитать траекторию электрона и его скорость, потребуется уравнение движения, которое, в соответствии со вторым законом Ньютона [1] имеет вид:

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}, \tag{1}$$

где m - масса электрона, $\mathbf{v}$ - его скорость, $\mathbf{F}$ - действующая сила.

Известно [2], что в элетромагнитном поле на заряженные частицы действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\left[\mathbf{vB}\right], \tag{2}$$

где e - заряд частицы, - скорость света, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ - напряженности электрического и магнитного поля, соответственно.

Используя уравнения (1) и (2), с учётом геометрии задачи 1 запишем следующую систему уравнений для компонент скоростей движения электрона -

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{e}{m}E_x + \dfrac{e}{cm}\left(v_y B_z\right), & v_x(0) = 10; \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{e}{mc}v_x B_z, & v_y(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Уравнения для нахождения траектории мы получим из решений системы (3). Так как по определению [3] скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, то уравнения для нахождения координат частиц можно определить, как систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r_x}{\mathrm{d}t} = v_r, \quad r_x(0) = 1; \\ \dfrac{\mathrm{d}r_y}{\mathrm{d}t} = v_y, \quad r_y(0) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом у нас имеются все необходимые данные: геометрия задачи 1 с выбранной системой координат, уравнения и начальные условия (3), (4) для нахождения скорости движения электрона и его траектории.

2 Аналитическое решение

Решение будем искать в нерелятивистском приближении, то есть скорость движения электрона много меньше скорости света. Тогда, согласно второму закону Ньютона уравнение движения электрона имеет вид [4] :

$$\frac{\mathrm{d}m\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{c}\left[\mathbf{vB}\right], \tag{5}$$

что соответствует выведенной ранее системе уравнений (3). Продифференцируем первое уравнение системы по времени

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e}{cm}B_z\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t},$$

введём обозначение $\dfrac{e}{cm}B_z = \gamma$ и подставим второе уравнение вместо $\dot{v_y}$. Получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{v_x} + \gamma^2 v_x = 0.$$

Корни характеристического уравнения оказываются чисто мнимыми и равными $\lambda_{1,2} = \pm\gamma i$, следовательно общее решение имеет вид:

$$v_x = C_1 \cos\gamma t + C_2 \sin\gamma t. \tag{6}$$

Подставим найденное общее решение в уравнение 2 системы (3) и проинтегрируем, следовательно общее решение для v_y имеет вид:

$$v_y = C_2 \cos\gamma t - C_1 \sin\gamma t + C_3. \tag{7}$$

Продифференцируем по времени общее решение для v_x (6) и приравняем к первому уравнению системы (3). В правой части подставим v_y из (7). Произведя тривиальные преобразования найдём, что $C_3 = -\xi$, где $\xi = cE_xB_z^{-1}$ Далее, используя начальные условия определим константы - $C_1 = 10$ и $C_2 = \xi$. Таким образом, решением системы уравнений (3) будет:

$$v_x = 10 \cos\gamma t + \xi \sin\gamma t, \tag{8}$$

$$v_y = \xi \cos\gamma t - 10 \sin\gamma t - \xi. \tag{9}$$

Далее, используя известное решение для компонент $\mathbf{v}$, проинтегрируем оба уравнения из системы (4) как дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, откуда окончательно получаем решение системы (4):

$$r_x = [10 \sin\gamma t - \xi \cos\gamma t + \xi]\,\gamma^{-1} + r_{x0}, \tag{10}$$

$$r_y = [\xi \sin\gamma t + 10 \cos\gamma t - 10]\,\gamma^{-1} + \xi t + r_{y0}, \tag{11}$$

где r_{x0} и r_{y0} - координаты частицы в момент времени $t = 0$.

3 Численное решение

Согласно уравнениям (1), (2) численное решение для координаты частицы и скорости её движения в зависимости от времени будем искать для следующей системы дифференциальных уравнений первого порядка в соответсвии с геометрией задачи 1.

$$\begin{cases} \dot{v_x} = \left[eE_x + \frac{e}{c}\left(v_y B_z\right)\right] m^{-1} & v_x(0) = 10 \\ \dot{v_y} = -\frac{e}{mc} v_x B_z & v_y(0) = 0 \\ \dot{r_y} = v_y & r_x(0) = 1 \\ \dot{r_y} = v_y & r_y(0) = 1 \end{cases} \tag{12}$$

Данная система решается с помощью модуля integrate [5] библиотеки scipy для языка программирования python. Код программы приведен в разделе 5.

На рисунке 2 представлена траектория частицы от начального положения до момента $t = 1$ мкс. На рисунке 3 представлен график зависимости компонент скоростей частицы от времени. Точечными линиями показано аналитическое решение. Рисунок 4 показывает ошибку численного решения относительно аналитического в разные моменты времени.

Рисунки построены с помощью библиотеки matplotlib [6].

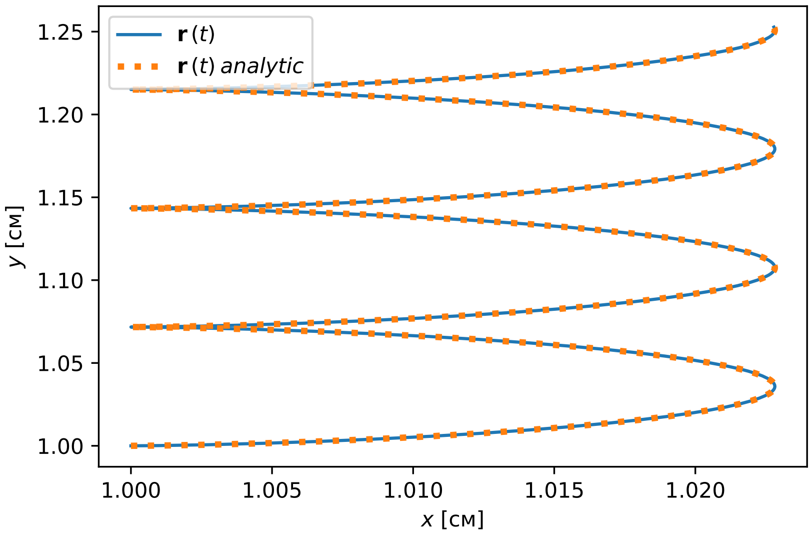

Рис. 2: Траектория частицы за интервал времени $t = [0, 1\text{e-}6]$ сек.

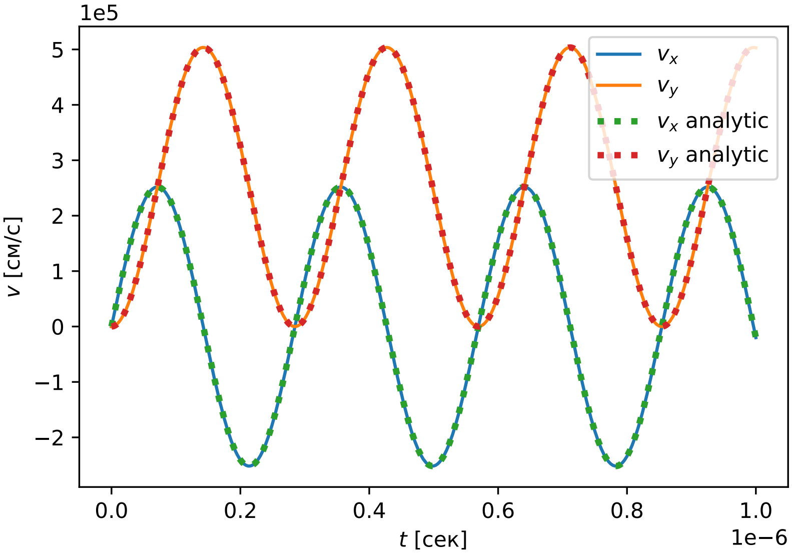

Рис. 3: Зависимость компонент скоростей частицы от времени. Сплошные линии - численное решение, прерывистые линии - аналитическое

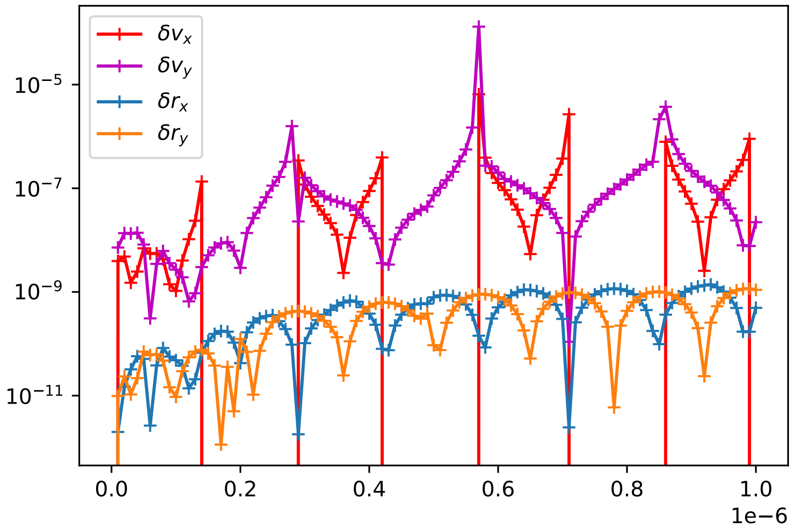

Рис. 4: График зависимости относительной ошибки численного решения от времени для координат и компонент скоростей частицы. Шкала по оси ординат - логарифмическая.

4 Заключение

Поставленная задача выполнена в полном объеме. Аналитическое решение получено в предположении что скорость частицы много меньше скорости света, это справедливо на рассматриваемом временном масштабе. Численное решение получено с помощью средств для языка python, а именно библиотек scipy[7], numpy[8]. Максимальная относительная погрешность имеет порядок 1e-5 для скоростей частицы и не превышает 1e-9 для координат, что является очень хорошим результатом. В целом результаты согласуются с известными ранее ([2] и др.), что подтверждает правильность полученных аналитических решений и эффективность использования современных средств для решения научных задач.

5 Код программы

```
# -*- coding: utf-8 -*-
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

m = 9.11e-28
e = 4.8e-10
c = 3e10
erstd = 4*np.pi/1e3
sgse = np.sqrt(4*np.pi*8.854e-12)
B = -100 * erstd
E = 10e-1 * sgse

C = (m, e, c, B, E)

# function
def system(u, t, C):
    dvxdt = (C[1]*C[4] + C[1]/C[2] * u[1]*C[3])/C[0]
    dvydt = -C[1]/C[2]/C[0] * u[0]*C[3]
    drxdt = u[0]
    drydt = u[1]
    return [dvxdt, dvydt, drxdt, drydt]

# initial condition
u0 = [10, 0, 1, 1]

# time points
t = np.linspace(0, 1e-6, 101)

# solve
sol = odeint(system, u0, t, args=(C,))
print(sol)
```

Список литературы

[1] Д.В. Сивухин. Общий курс физики: учебное пособие в 5 т. 4-е, стереот. изд. М.: ФИЗМАТЛИТ; изд-во МФТИ, 2005. Т. I. Механика.

[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. 5-е, стереот. изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2004. Т. II. Теория поля.

[3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. 5-е, стереот. изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2004. Т. I. Механика.

[4] В. Измайлов С. Курс электродинамики. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1962.

[5] Module of scipy.integrate — numerical integration techniques including an ordinary differential equation integrator. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/tutorial/integrate.html.

[6] Matplotlib — plotting library for Python. https://matplotlib.org/index.html.

[7] Python-based ecosystem for mathematics, science, and engineering. https://www.scipy.org/.

[8] Fundamental package for scientific computing with Python. https://numpy.org/.