1 Основные уравнения

Уравнения идеальной гидродинамики в дифференциальной форме относительно неподвижной системы отсчёта:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla\rho\mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla p, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho v^2\right) + \nabla\left\{\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon + p\right)\mathbf{v}\right\} = 0, \tag{3}$$

где ε – удельная внутренняя энергия. Для иделального газа она выражается как:

$$\varepsilon = \frac{kT}{m(\gamma-1)} = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}, \tag{4}$$

где γ – показатель адиабаты (отношение теплоемкостей), m – масса молекулы (либо атома), k – постоянная Больцмана, T - температура.

2 Задача о гидродинамическом разрыве

Уравнения гидродинамики можно записать в консервативной форме следующим образом:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

где векторы физических величин и потоков равны, соответственно:

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho v \\ \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \left(\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 + p\right) v \end{vmatrix}. \tag{6}$$

3 Двухшаговый метод Лакса-Вендроффа

Рассматриваемый в этом разделе метод является явным, консервативным методом второго порядка точности как по пространству, так и по времени. Непрерывные производные аппроксимируются конечными разностями, далее вычисление проходит в два этапа - предиктор, корректор.

Первый этап также называют вспомогательным шагом, он производится на каждом шаге по времени и позволяет получить значения величин и их потоков в промежуточные моменты времени, тем самым центрируя по времени интеграл и позволяя получить точность второго порядка.

Вспомогательный шаг:

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j+1}^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_j^n\right). \tag{7}$$

Далее, полученные значения используются для нахождения потоков в промежуточных временных и пространственных точках:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}\left(\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1/2}\right). \tag{8}$$

На втором этапе, используя промежуточные величины, вычисляется новый временной слой, центрированный по пространству и времени (см. рис **??**).

Основной шаг:

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}^{n+1/2}\right). \tag{9}$$

Условием устойчивости метода является так называемое число Ку-

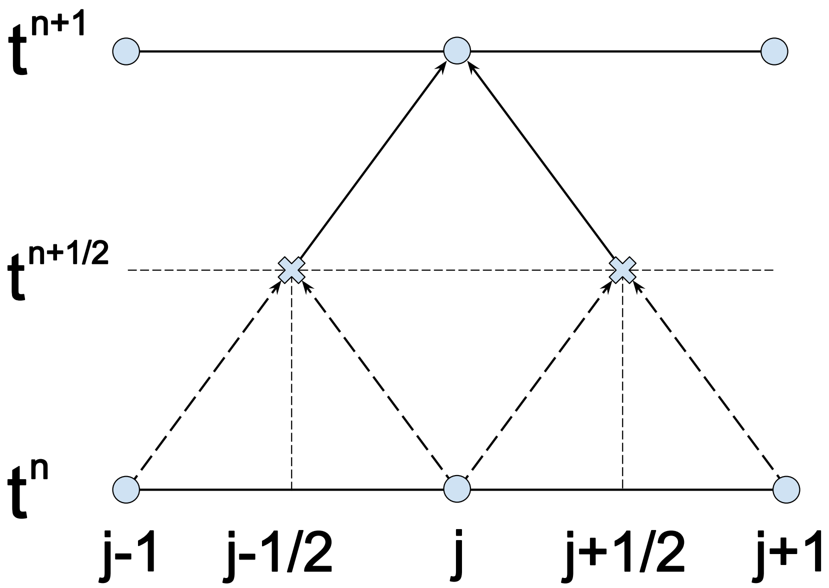

Рис. 1: Консервативный двухшаговый метод Лакса-Вендроффа на пространственно - временной сетке.

ранта $C \leqslant 1$, что равносильно условию Куранта – Фридрихса – Леви, применимого ко всем уравнением гиперболического типа:

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta x}{|v|}\,, \tag{10}$$

где v - наибольшая скорость распространения возмущений на сетке.