# Введение

В отчёте представлено решение поставленных в индивидуальном задании задач. Исследуются решения уравнений сплошной среды. Численный метод рассмотрен в разделе 1. Задача о линейном переносе и о произвольном гидродинамическом разрыве описаны в разделах 2 и 4, соответственно.

# 1 Двухшаговый метод Лакса-Вендроффа

Разностые методы применяются для расчёта различных физических задач с использованием вычислительной техники. В этой работе будет исследоваться применение двухшагового метода Лакса-Вендроффа, для уравнений вида:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ называют вектором консервативных переменных, $\mathbf{F}$ - вектором потоков соответствующих физических величин.

Уравнение 1 является уравнением гиперболического типа. Интегрирование будет проводиться с помощью явного, консервативного метода второго порядка точности как по пространству, так и по времени. Непрерывные производные аппроксимируются конечными разностями, далее вычисление проходит в два этапа - предиктор, корректор.

Первый этап также называют вспомогательным шагом, он производится на каждом шаге по времени и позволяет получить значения величин и их потоков в промежуточные моменты времени, тем самым центрируя по времени интеграл и позволяя получить точность второго порядка. Схема метода представлена на рисунке 1.

*Вспомогательный шаг:*

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j+1}^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_j^n\right). \tag{2}$$

Далее, полученные значения используются для нахождения потоков в промежуточных временных и пространственных точках:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}\left(\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1/2}\right). \tag{3}$$

На втором этапе, используя промежуточные величины, вычисляется новый временной слой.

*Основной шаг:*

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}^{n+1/2}\right). \tag{4}$$

Условием устойчивости метода является так называемое число Куранта $C \leqslant 1$, что равносильно условию Куранта – Фридрихса – Леви, применимого ко всем уравнением гиперболического типа:

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta x}{|v|}, \tag{5}$$

где $v$ - наибольшая скорость распространения возмущений на сетке. Сетка для вычислений вводится следующим образом. Длина рассматриваемой области $l$ делится на выбранное количество узлов ячеек $N$ в итоге получаем сетку с узлами $j$ -

$$0 \leqslant j \leqslant N.$$

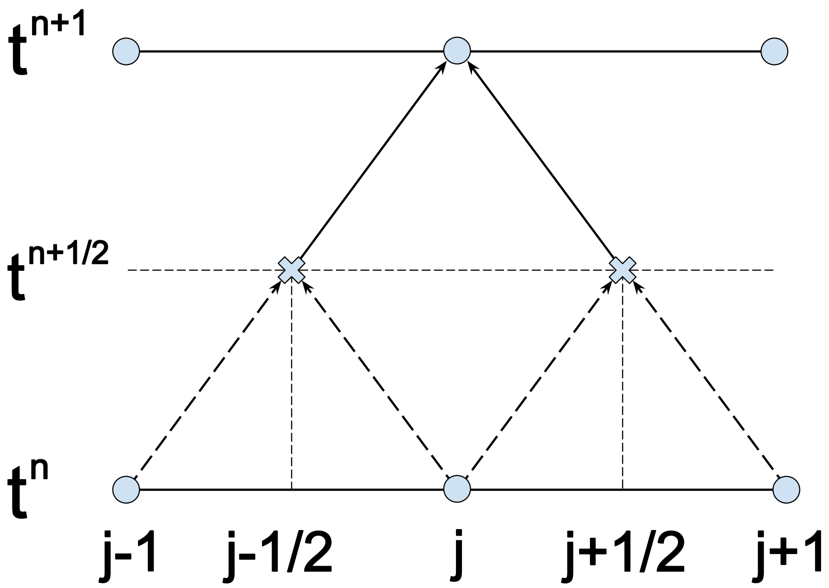


Рис. 1: Консервативный двухшаговый метод Лакса-Вендроффа на пространственно - временной сетке.

Узлы с номерами 0 и N считаются граничными. Значения в этих узлах определяются начальными условиями и остаются постоянными на протяжении всего расчёта, либо устанавилваются наперёд заданной функцией, зависящей от времени.

## 2 Задача о линейном переносе

Рассмотрим одно из уравнений вида (1), являющееся законом сохранения массы в дифференциальнй форме - уравнение переноса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{6}$$

В одномерном случае $\mathbf{u} = \rho$ и $\mathbf{F} = \rho v$. Разностная схема соответствует приведённым в разделе 1 уравнениям (2) – (4).

Начальные условия:

$$\begin{cases} \mathbf{u}|_{t_0} = 0.8\,; & 0.4 \leqslant x \leqslant 0.8\,, \\ \mathbf{u}|_{t_0} = 0.4\,; & x < 0.4\,; x > 0.8\,. \end{cases} \tag{7}$$

$$x \in [0, 1]$$
$$t \in [0, T]$$

Аналитическим решением уравнения адвекции является функция:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0) + vt\,, \tag{8}$$

где $v$ - скорость распространения возмущения.

# 3 Основные уравнения

Уравнения идеальной гидродинамики в дифференциальной форме относительно неподвижной системы отсчёта:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \rho \mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla p, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho v^2\right) + \nabla\left\{\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon + p\right)\mathbf{v}\right\} = 0, \tag{11}$$

где $\varepsilon$ – удельная внутренняя энергия. Для иделального газа она выражается как:

$$\varepsilon = \frac{kT}{m(\gamma - 1)} = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \tag{12}$$

где $\gamma$ – показатель адиабаты (отношение теплоемкостей), $m$ – масса молекулы (либо атома), $k$ – постоянная Больцмана, $T$ - температура.

# 4 Задача о гидродинамическом разрыве

Уравнения гидродинамики можно записать в консервативной форме следующим образом:

где векторы физических величин и потоков равны, соответственно:

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho v \\ \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \left(\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 + p\right) v \end{vmatrix}. \tag{13}$$