

Введение

В отчёте представлено решение поставленных в индивидуальном задании задач. Исследуются решения уравнений сплошной среды. Численный метод рассмотрен в разделе 1. Задача о линейном переносе и о произвольном гидродинамическом разрыве описаны в разделах 2 и 3, соответственно.

1 Двухшаговый метод Лакса-Вендроффа

Разностные методы применяются для расчёта различных физических задач с использованием вычислительной техники. В этой работе будет исследоваться применение двухшагового метода Лакса-Вендроффа, для уравнений вида:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{u} называют вектором консервативных переменных, \mathbf{F} - вектором потоков соответствующих физических величин.

Уравнение 1 является уравнением гиперболического типа. Интегрирование будет проводиться с помощью явного, консервативного метода второго порядка точности как по пространству, так и по времени. Непрерывные производные аппроксимируются конечными разностями, далее вычисление проходит в два этапа - предиктор, корректор.

Первый этап также называют вспомогательным шагом, он производится на каждом шаге по времени и позволяет получить значения величин и их потоков в промежуточные моменты времени, тем са-

мым центрируя по времени интеграл и позволяя получить точность второго порядка. Схема метода представлена на рисунке 1.

Вспомогательный шаг:

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_j^n). \quad (2)$$

Далее, полученные значения используются для нахождения потоков в промежуточных временных и пространственных точках:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1/2}). \quad (3)$$

На втором этапе, используя промежуточные величины, вычисляется новый временной слой.

Основной шаг:

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}^{n+1/2}). \quad (4)$$

Условием устойчивости метода является так называемое число Куранта $C \leq 1$, что равносильно условию Куранта – Фридрихса – Леви, применимого ко всем уравнениям гиперболического типа:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v|}, \quad (5)$$

где v - наибольшая скорость распространения возмущений на сетке. Сетка для вычислений вводится следующим образом. Длина рассматриваемой области l делится на выбранное количество ячеек N в итоге получаем сетку с количеством ячеек j -

$$0 \leq j \leq N.$$

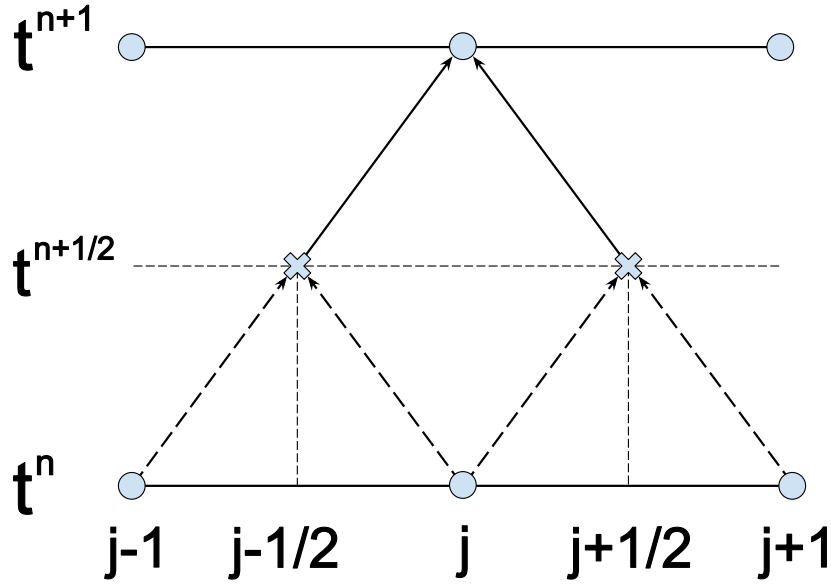


Рис. 1: Консервативный двухшаговый метод Лакса-Вендроффа на пространственно - временной сетке.

Ячейки с номерами 0 и N считаются граничными. Значения в этих ячейках определяются начальными условиями и остаются постоянными на протяжении всего расчёта, либо устанавливаются наперёд заданной функцией, зависящей от времени. То есть граничные условия задаются в виде:

$$\mathbf{u}_0^n = \mathbf{u}_0^0, \quad \mathbf{u}_N^n = \mathbf{u}_N^0, \quad (6)$$

в случае граничных условий типа Дирихле. Если использовать граничные условия Неймана, то они будут иметь вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}_N}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

В этом случае нужно непосредственно аппроксимировать граничное

условие методом конечных разностей. И непосредственно вычислять на каждом шаге по времени. Для решения задачи о линейном переносе и о распаде разрыва ограничимся граничными условиями в виде (6).

2 Задача о линейном переносе

Рассмотрим одно из уравнений вида (1), являющееся законом сохранения массы в дифференциальной форме - уравнение переноса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (8)$$

В одномерном случае $\mathbf{u} = \rho$ и $\mathbf{F} = \rho v$. Разностная схема соответствует приведённым в разделе 1 уравнениям (2) – (4).

Начальные условия:

$$\begin{cases} \mathbf{u}|_{t_0} = 0.8; & 0.4 \leq x \leq 0.8, \\ \mathbf{u}|_{t_0} = 0.4; & x < 0.4; x > 0.8. \end{cases} \quad (9)$$

$$x \in [0, 1]$$

$$t \in [0, T]$$

При постоянном v аналитическим решением уравнения адвекции является функция:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(x - vt), \quad (10)$$

где $v = 1$ – скорость распространения возмущения.

Таким образом, решением уравнения (8) в момент времени $t = 0.3$ сек. будет начальный профиль (9), сдвинутый вправо по оси x . Ни-

же на рисунках показано начальное распределение (рис. 2), которое, очевидно, полностью совпадает с заданными начальными условиями. Далее, на рисунке 3 показаны профили плотности через три десятых доли секунды от начала расчёта. Рисунок показывает, что полученное численное решение достаточно точно соответствует аналитическому решению. Отклонения проявляются только в моментах резких перепадов, что связано с численной диффузией при использовании разностной схемы. На рисунке (4) показана относительная погрешность численного решения. В ячейке, соответствующей разрыву относительная погрешность достигает ≈ 0.4 , однако в соседних ячейках погрешность уже на порядок ниже, а через несколько ячеек погрешность стремится к нулю. Эффект, вызываемый численной диффузией возможно устранить только сильным усложнением схемы (четвертым порядком точности), либо введением специальной искусственной вязкости, тогда фронт ударной волны уширится, и максимальное значение относительной погрешности будет меньше.

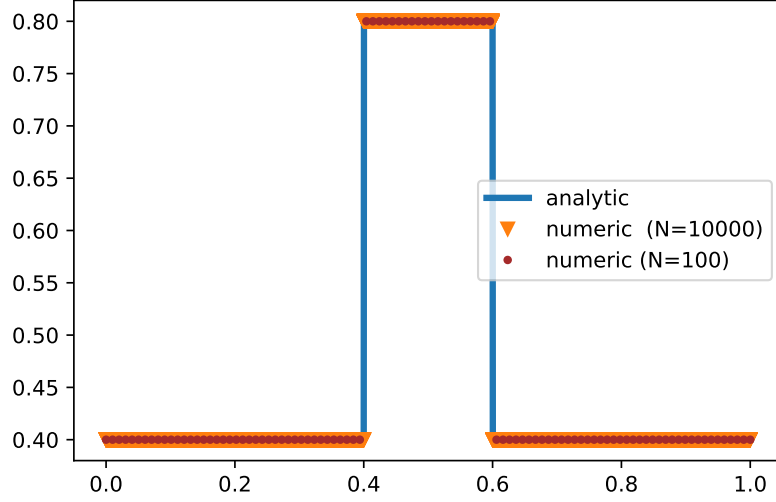


Рис. 2: Начальное распределение плотности. Линией показано точное значение, маркерами - соответствующий численный аналог для сетки с количеством ячеек 100 и 10000.

3 Задача о гидродинамическом разрыве

3.1 Основные уравнения

Уравнения идеальной гидродинамики в дифференциальной форме относительно неподвижной системы отсчёта:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \rho \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon + p \right) \mathbf{v} \right\} = 0, \quad (13)$$

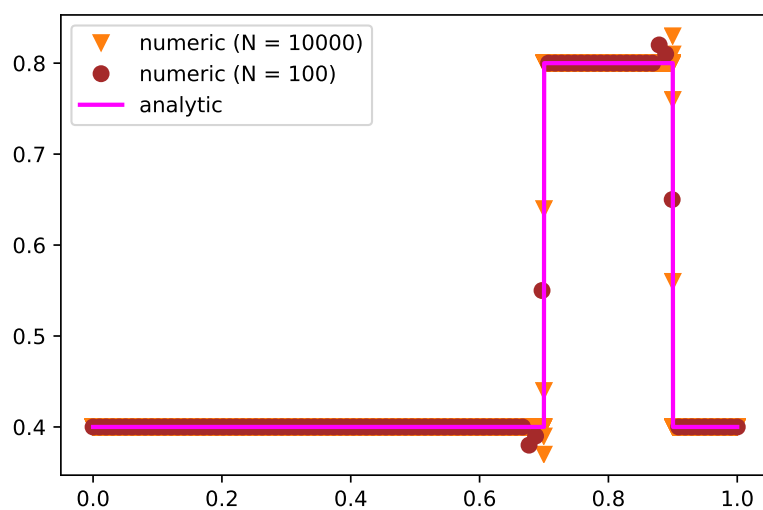


Рис. 3: Распределение плотности в момент времени $t = 0.3$ секунды. Точное решение показано синей линией. Численное решение показано треугольными маркерами для сетки с 10 000 ячеек, численное решение для сетки со 100 ячейками показано круглыми маркерами.

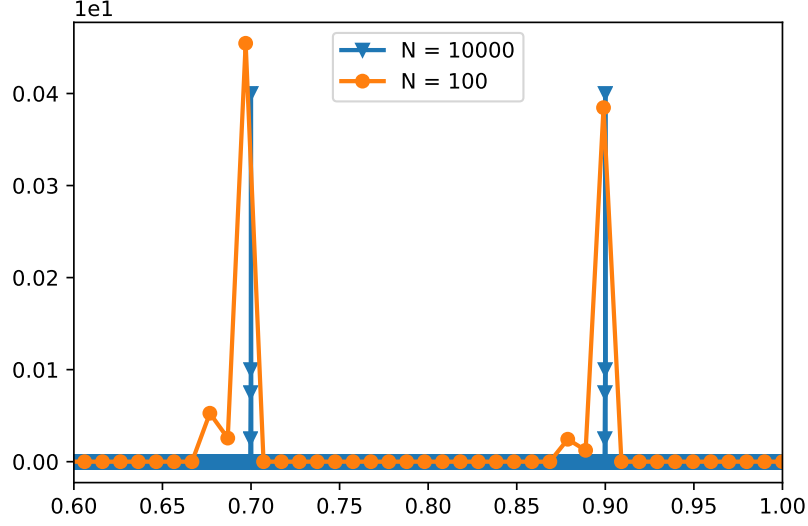


Рис. 4: Относительная погрешность численного решения. Показано два случая (в зависимости от количества ячеек), по оси абсцисс выбран масштаб, где ошибка наиболее сильно проявляется.

где ε – удельная внутренняя энергия. Для идеального газа она выражается как:

$$\varepsilon = \frac{kT}{m(\gamma - 1)} = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (14)$$

где γ – показатель адиабаты (отношение теплоемкостей), m – масса молекулы (либо атома), k – постоянная Больцмана, T – температура.

Уравнения гидродинамики можно записать в консервативной форме следующим образом, где векторы физических величин и потоков равны, соответственно:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ (\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 + p) v \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Тогда разностная схема для решения уравнений идеальной гидродинамики двухшаговым методом Лакса-Вендроффа будет выглядеть следующим образом:

Вспомогательный шаг:

$$\rho_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\rho_j^n + \rho_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}, \quad (16)$$

$$(\rho v)_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} ((\rho v)_j^n + (\rho v)_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right)_{j+1/2}^{n+1/2} = & \\ & \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right)_j^n + \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right)_{j+1}^n \right) \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta x}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для вычисления потоков примитивные переменные — v, ε выражаются из вектора консервативных переменных \mathbf{u} . Давление определяется с помощью полученных значений из уравнения состояния:

$$p = \rho \varepsilon (\gamma - 1). \quad (19)$$

Потоки и, соответственно, новые значения примитивных переменных вычисляются после каждого промежуточного и основного шага.

Основной шаг:

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho v)_{j+1/2}^{n+1/2} - (\rho v)_{j-1/2}^{n+1/2} \right), \quad (20)$$

$$(\rho v)_j^{n+1} = (\rho v)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho v^2 + p)_{j+1/2}^{n+1/2} - (\rho v^2 + p)_{j-1/2}^{n+1/2} \right), \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon\right)_j^{n+1} &= \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon\right)_j^n - \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\left\{ \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 + p \right\} v \right)_{j+1/2}^{n+1/2} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\left\{ \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 + p \right\} v \right)_{j-1/2}^{n+1/2} \right]. \quad (22)
\end{aligned}$$

3.2 Начальные условия

Рассмотрим задачу о распаде произвольного разрыва со следующими начальными условиями:

$$\begin{cases} \rho|_{t_0} = 1; & 0 \leq x \leq 1, \\ v|_{t_0} = 0; & 0 \leq x \leq 1, \\ p|_{t_0} = 3; & 0 \leq x < 0.5, \\ p|_{t_0} = 1; & 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (23)$$

Эти условия соответствуют перепаду давления (существующей перегородкой) на отметке $x = 0.5$. В момент времени $t = 0$ перегородку убирают и в расчётной области вправо (вдоль оси x) начинает распространяться ударная волна.

3.3 Аналитическое решение

Задача о распаде произвольного разрыва - стандартная задача нахождения аналитического решения нестационарных уравнений механики сплошных сред. В случае, соответствующим заданным начальным условиям решения уже известны и опубликованы рядом

авторов, например - (Зельдович, Ландау).

В произвольный момент времени, решения для различных областей будут иметь вид (слева-направо):

Невозмущенное вещество слева:

$$x < 0.5 - c_L t \quad \begin{cases} v(x) = 0 \\ \rho(x) = \rho_L \\ p(x) = p_L \end{cases} \quad (24)$$

Волна разрежения:

$$0.5 - c_L t < x < (v_2 - c_2)t \quad \begin{cases} v(x) = v_2 \frac{x + c_L t}{(v_2 - c_2 + c_L)t} \\ \rho(x) = \rho_L \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v(x)}{c_L} \right)^{\frac{2}{\gamma - 1}} \\ p(x) = p_L \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v(x)}{c_L} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \end{cases} \quad (25)$$

Область между волной разрежения и контактным разрывом:

$$(v_2 - c_2)t < x < v_2 t \quad \begin{cases} v(x) = v_2 \\ \rho(x) = \rho_2 \\ p(x) = p_2 \end{cases} \quad (26)$$

Область между контактным разрывом и ударной волной:

$$v_2 t < x < Dt \quad \begin{cases} v(x) = v_2 \\ \rho(x) = \rho_1 \\ p(x) = p_2 \end{cases} \quad (27)$$

Невозмущенное вещество справа:

$$v_2 t < x < Dt \quad \begin{cases} v(x) = 0 \\ \rho(x) = \rho_R \\ p(x) = p_R \end{cases} \quad (28)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $c_L = \sqrt{\gamma \frac{p_L}{\rho_L}}$ — скорость звука в невозмущенной среде слева, $v_2, p_2, c_2 = \sqrt{\gamma \frac{p_2}{\rho_2}}$ — параметры газа между фронтом ударной волны и контактным разрывом, D — скорость ударной волны. Требуемые параметры определяются из следующей системы уравнений, отвечающей законам сохранения и условиям Гюгоню:

$$\rho_1 = \rho_R \frac{D}{D - v_2}, \quad (29)$$

$$D = \frac{p_2 - p_R}{\rho_R v_2}, \quad (30)$$

$$\frac{p_L}{\rho_L^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma}, \quad (31)$$

$$p_2 = p_R \frac{(\gamma + 1)\rho_1 - (\gamma - 1)\rho_R}{(\gamma + 1)\rho_R - (\gamma - 1)\rho_1}, \quad (32)$$

$$v_2 = \frac{2}{\gamma - 1} (c_L - c_2) = \frac{2c_L}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \right). \quad (33)$$