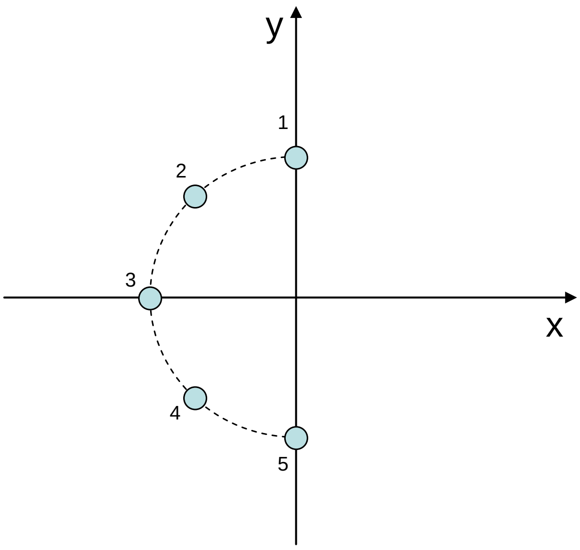
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4125 Fysikk, våren 2014
Faglærer Magnus Lilledahl

Regneøving 7
Innlevering 4. mars

Nødvendige begreper ved løsning av oppgavene: Coulombs lov, Gauss lov, potensial, elektrisk potensiell energi, kapasitans. (T & M, især kap. 21, 22, 23).

Oppgave 1 og 4 er nok de enkleste denne gang.

Oppgave 1 Coulombs lov og enhetsvektorer



Fem ladninger Q er plassert som vist i figuren, alle i en avstand R fra origo.

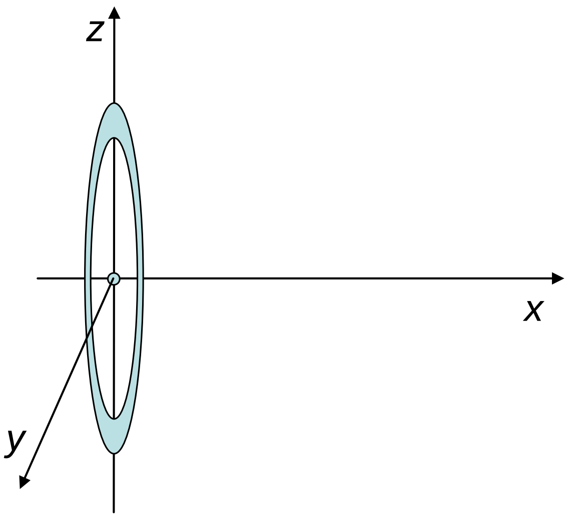
a) Vis at kraften som virker på en testpartikkel med ladning q som befinner seg i origo er gitt ved uttrykket

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \left(1+\sqrt{2}\right)\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{\mathbf{x}}$$

Tips: For å løse denne oppgava på en oversiktlig måte, kan det være lurt å regne med enhetsvektorer! For eksempel, for ladning 2 er $\hat{\mathbf{R}}_2 = \langle 1,-1\rangle/\sqrt{2}$.

b) Lag en skisse hvor alle kreftene (for eksempel $\mathbf{F}_{1q}$) som virker på q tegnes inn. Indiker også totalkrafta $\mathbf{F}$ som virker på q. Hva er totalkrafta på *systemet*?

Oppgave 2 En elektronkanon! ("electron gun")



I denne oppgaven ønsker vi å skyte ut et elektron som opprinnelig befinner seg i ro i origo. En ring med radius R = 3.00 mm og ladning Q = -2.00 nC er plassert rundt elektronet (i *yz*-planet), se figur. "Avtrekkermekanismen" kan for eksempel være at ringen forskyves en infinitesimal strekning i negativ x-retning. Det oppgis at potensialet på symmetriaksen til en ladet ring er $V(r) = kQ/r$, hvor r er avstanden fra et punkt på ringen til et punkt på x-aksen (Uttrykket for V kan selvfølgelig utledes, se lærebok, men den våkne student er nok enig i at uttrykket *må* være riktig!).

a) Sett opp et uttrykk for potensialet $V(x)$ som skyldes ringen. Finn deretter potensialet i origo. (Svar: -5.99 kV)
b) Hva er den potensielle energien til elektronet når det ligger i "startgropa", og i det øyeblikk det passerer x = 10.0 cm? Hvor stort arbeid har feltet gjort på elektronet når det har flyttet seg denne strekningen? ($W = 9.3 \cdot 10^{-16}$ J)
c) Hva er elektronets hastighet når det passerer x = 10.0 cm? ($v = 4.5 \cdot 10^{7}$ m/s)
d) Forklar kort hvorfor $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(x)\hat{\mathbf{x}}$ på symmetriaksen. Du husker fra forelesningene at $\mathbf{E}$ kan beregnes fra $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V$. Filosofér litt høyt for deg selv om at potensialet V(**r**) er et skalarfelt, mens det elektriske feltet **E**(**r**) er et vektorfelt! Deretter, beregn $E(x)$, og vis at $E(0) = 0$ (Som forventet?).
e) Du blir innkalt som konsulent, fordi sjefen din ikke klarer å overskue om det kan lønne seg å sette inn ytterligere en ring, med radius R_2 = 5.00 mm og ladning Q_2 = +10.0 nC ved $x = a$ = 1.00 cm. Du synes spørsmålet er temmelig ullent formulert, men bestemmer deg for å gi sjefen litt "grunnlagsmateriale" (som det heter i industrien). Du setter derfor opp et nytt uttrykk for potensialet, $V_{II}(x)$, og plotter (ved hjelp av Python) både $V(x)$ (fra oppgave a) og $V_{II}(x)$ i intervallet x = -0.01 til 10.0 cm. Deretter forklarer du kort for sjefen hva dette innebærer.

Nyttig ekstraoppgave for de ambisiøse og arbeidslystne:

f) Bruk uttrykket for **E**(**r**) til å finne krafta $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F\hat{\mathbf{x}}$ på x-aksen. Vis ved hjelp av definisjonen på mekanisk arbeid at direkte integrasjon gir samme svar for arbeid som du har funnet i b) (altså, uten ringen i oppgave e)).

Kommentar: Elektronkanoner brukes mye i eksperimentell forskning, og er også en del av grunnlaget for "gammeldagse" TV'er (altså, ikke-flatskjermer).

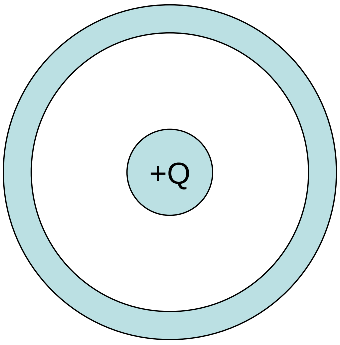
Oppgave 3 Denne oppgava er fryktelig vanskelig å løse uten Gauss' lov!

Vi ser i denne oppgava på en uendelig lang kompakt sylinder med radius a og uniform ladningsfordeling ρ.

a) Forklar hvorfor sylinderen må være laget av et materiale som ikke leder strøm (isolator)!
b) Vi ønsker nå å bruke Gauss lov for å finne det elektriske feltet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (Sagt på en annen måte: vi ønsker *ikke* å bruke Coulombs lov, for det blir veldig ugreitt!). Forklar hvorfor det er lurt å velge en sylinderformet integrasjonsflate S som er konsentrisk med isolatoren, og som har radius r og endelig lengde L. Forklar også hvorfor Gauss-sylinderens endeflater ikke bidrar til fluksintegralet $\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{A}$.
c) Vis at det elektriske feltet er gitt ved

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} \qquad \text{for } 0 \le r < a \text{, og}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}} \qquad \text{for } r > a.$$



d) Vi legger nå en uendelig lang hul sylinder av en perfekt leder uten netto ladning med indre radius b og ytre radius c ($c > b > a$) konsentrisk om lederen beskrevet ovenfor. Forklar hvorfor feltet inne i lederen er null! Hva blir overflateladningene σ_b (på indre overflate) og σ_c (på ytre overflate)?

Hint:
i) SI-enhet for overflateladning er C/m^2.
ii) Gauss' lov er enkleste måte å løse denne oppgava også!
iii) Finn ladningene Q_b og Q_c først!

e) Vi antar at a = 2.00 cm, b = 5.00 cm, c = 7.00 cm og ρ = 15.0 nC/m^3. Plott E(r) i intervallet $0 \le r \le 15$ cm.

Oppgave 4 – Partikler i likevekt?

En positiv ladning (proton) q_1 er plassert på den negative x-aksen i x = -1.0 m og en negativ ladning (elektron) q_2 er plassert i origo.

a) Kan en negativ ladning q_3 være i likevekt (slik at totalkraften på den er null) mellom x = 1.0 m and x = 10.0 m, gitt at den må sitte på x-aksen?
   Bruk Python til å plotte kraften på q_3 fra q_2 mellom x = 1.0 m og x = 10.0 m. Plott så kraften på q_3 fra q_1. Addér de to kreftene og plott disse.
b) Hvilken typisk verdi for q_1 kan gi likevekt? Plott et slikt tilfelle.
c) Er ladningen i stabil likevekt?
d) Har verdien til den elektriske permittiviteten innflytelse på resultatet?
   Hva skjer hvis alle ladninger dobles?