

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра методів математичної фізики

## **КУРСОВА РОБОТА**

бакалавра

на тему «**Антиплоска задача теорії пружності для смуги**»

Виконав: здобувач III курсу  
денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика  
Зайцев Микола Дмитрович  
Керівник кандидат фізико-математичних  
наук Журавльова З.Ю.

м. Одеса — 2023 р.

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
Розділ I.....	4
Загальні відомості.....	4
Постановка задачі.....	4
Хід розв’язання задачі.....	5
Розділ II.....	8
Графічні результати.....	8
Висновки.....	12
Список літератури.....	13

## ВСТУП

Дана курсова робота присвячена антиплоскій задачі теорії пружності для смуги, побудові розв'язку задачі при прикладанні навантаження та вивченню переміщень та напружень через побудову графічних розрахунків по області для даної задачі

## РОЗДІЛ I

### 1.1 Загальні відомості

#### *Антиплоска задача теорії пружності*

До тіла прикладене зовнішнє навантаження, направлене вздовж осі  $Oz$  і яке не залежить від змінної  $z$ . Переміщення вздовж вісей  $Ox$  та  $Oy$  малі, ми можемо вважати що вони дорівнюють нулю, тобто  $u = v = 0, w(x, y)$ .

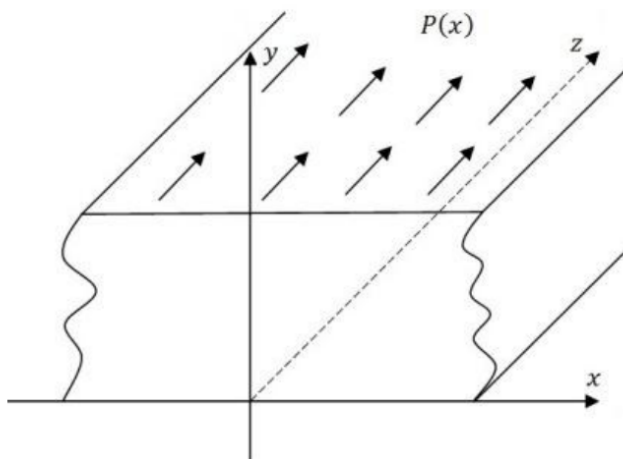
З трьох рівнянь Ламе перші два перетворюються на тотожність, а останнє має вид:

$$G\Delta w + Z = 0 \text{ або } \Delta w = -\frac{Z}{G}$$

За законом Гука будуть відмінні від нуля тільки два напруження:

$$\tau_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x}, \tau_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y}$$

### 1.2 Постановка задачі



Розглянемо пружне тіло у вигляді нескінченної смуги. Нехай край  $y = 0$  нерухомо закріплене, а до краю  $y = a$  прикладено зсувне дотичне навантаження інтенсивності  $p(x)$ .

Рис. 1 Ілюстрація до антиплоскої

задачі теорії пружності для смуги

В цьому випадку тіло буде знаходитися у стані антиплоскої деформації.

Таким чином, треба розв'язати рівняння Лапласа з граничними умовами, та умовами на нескінченності.

Запишемо математичне формулювання крайової задачі.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} = 0, & -\infty < x < +\infty, 0 < y < a \\ w(x, 0) = 0, & \tau_{yz}(x, a) = p(x) \\ w, \frac{\partial w}{\partial x} \rightarrow 0, & \text{при } x \rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

### 1.3 Хід розв'язання задачі

**Перший етап.** Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши повне перетворення Фур'є за змінною  $x$ :

$$w_{\alpha}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) e^{i\alpha x} dx$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\alpha} e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на ядро інтегрального перетворення  $e^{i\alpha x}$  та проінтегруємо по  $x$  у межах від  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right) e^{i\alpha x} dx = 0$$

Перший інтеграл інтегруємо по частинам:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} e^{i\alpha x} dx &= \frac{\partial w}{\partial x} e^{i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial w}{\partial x} e^{i\alpha x} dx = -\alpha w e^{i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \\ &+ \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} w e^{i\alpha x} dx = -\alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} w e^{i\alpha x} dx = -\alpha^2 w_{\alpha}(y) \end{aligned}$$

У другому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} e^{i\alpha x} dx = \frac{d^2}{d^2 y} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) e^{i\alpha x} dx = \frac{d^2}{d^2 y} w_{\alpha}(y)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є до крайових умов вихідної задачі за змінною  $y$  ( $w(x, y) = 0, \frac{\partial w}{\partial y}(x, a) = p(x)$ ), отримуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) e^{i\alpha x} dx|_{y=0} = w_{\alpha}(y)|_{y=0} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial w}{\partial y}(x, a) e^{i\alpha x} dx|_{y=a} = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) e^{i\alpha x} dx|_{y=a} = \frac{d}{dy} w_{\alpha}(y)|_{y=a} = \frac{p_{\alpha}}{G}$$

$$p_{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{i\alpha x} dx$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі у просторі трансформант

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{\alpha}'' - \alpha^2 w_{\alpha}(y) = 0, \quad 0 < y < a \\ w_{\alpha}(y)|_{y=0} = 0, \quad \frac{d}{dy} w_{\alpha}(y)|_{y=a} = \frac{p_{\alpha}}{G} \\ p_{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{i\alpha x} dx \end{array} \right.$$

**Другий етап.** Розв'язання крайової задачі у просторі трансформант.

Одновимірна крайова задача є однорідною крайовою задачею, тому її розв'язок можна записати через ФСР як

$$w_{\alpha}(y) = C_0 ch(\alpha y) + C_1 sh(\alpha y)$$

$$w'_{\alpha}(y) = \alpha C_0 sh(\alpha y) + \alpha C_1 ch(\alpha y)$$

Сталі  $C_0, C_1$  знайдемо з крайових умов

$$w_{\alpha}(0) = 0 \Rightarrow C_0 = 0, \quad w_{\alpha}(y) = C_1 sh(\alpha y)$$

$$w'_\alpha(y) = \alpha C_1 ch(\alpha y), \quad w'_\alpha(a) = \alpha C_1 ch(\alpha a) = \frac{p_\alpha}{G} \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{p_\alpha}{Gach(\alpha a)}$$

$$w_\alpha(y) = \frac{p_\alpha}{Gach(\alpha a)} sh(\alpha y)$$

**Третій етап.** Обернення інтегрального перетворення.

Застосовуючи формулу обернення до отриманого розв'язку у просторі трансформант, отримуємо:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_\alpha}{Gach(\alpha a)} sh(\alpha y) e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi}{Gach(\alpha a)} sh(\alpha y) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha(\xi-x)}}{Gach(\alpha a)} sh(\alpha y) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha(\xi-x) + i\sin\alpha(\xi-x)}{Gach(\alpha a)} \\ sh(\alpha y) d\alpha &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha(\xi-x)}{G\alpha} \frac{1-e^{-2\alpha y}}{1+e^{-2\alpha a}} e^{-\alpha(a-y)} d\alpha \end{aligned}$$

Отримаємо формули для напружень

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin\alpha(\xi-x)}{\alpha} \frac{1-e^{-2\alpha y}}{1+e^{-2\alpha a}} e^{-\alpha(a-y)} d\alpha \\ \tau_{yz} &= G \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha(\xi-x)}{\alpha} \frac{\alpha e^{-\alpha(a-y)} + \alpha e^{-\alpha(y+a)}}{1+e^{-2\alpha a}} d\alpha \end{aligned}$$

## РОЗДІЛ II

### 2.1 Графічні результати

Для побудови графіків ми повинні задати функцію  $p(\xi)$ , а також значення  $G$  (модуль зсуву). Оберемо  $p(\xi) = \cos(\xi)$  на проміжку  $(-1,1)$ , та  $G = 79.3$  (модуль зсуву для сталі). Також оберемо  $a = 10$ .

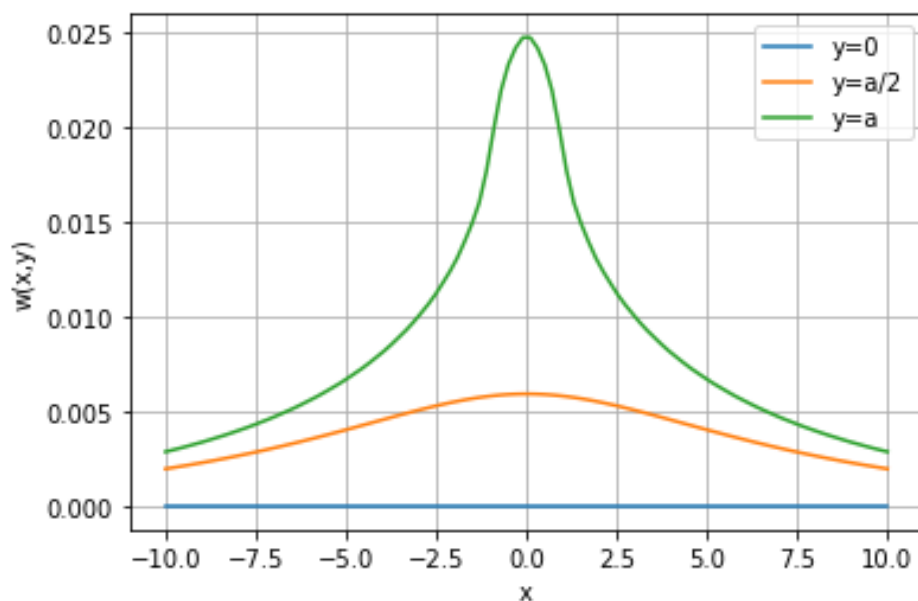


Рис. 2.1 Графік для зміни переміщень по  $0x$  для 3 значень  $y(0, \frac{a}{2}, a)$ .

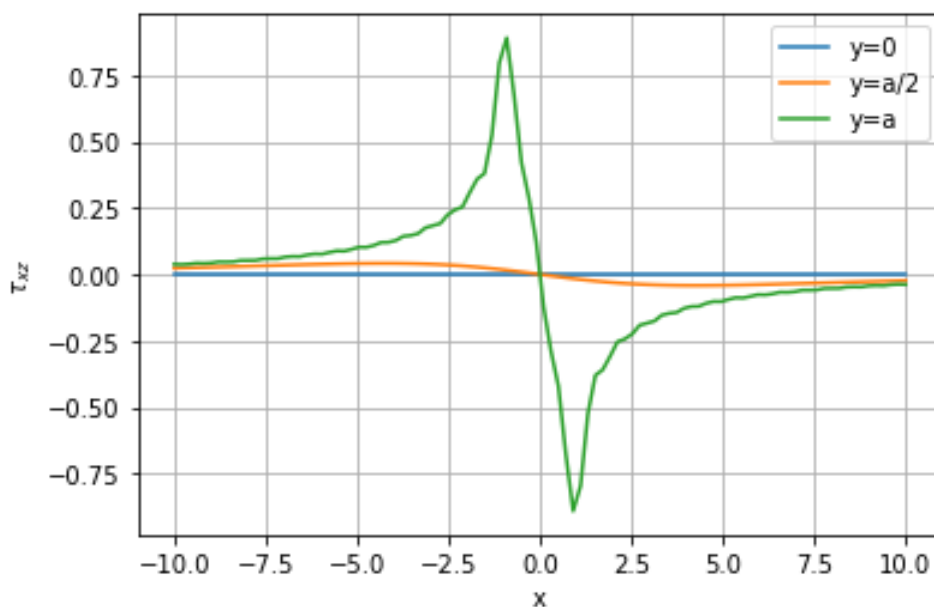


Рис. 2.2 Графік для зміни напружень  $\tau_{xz}$  по  $0x$  для 3 значень  $y$ .



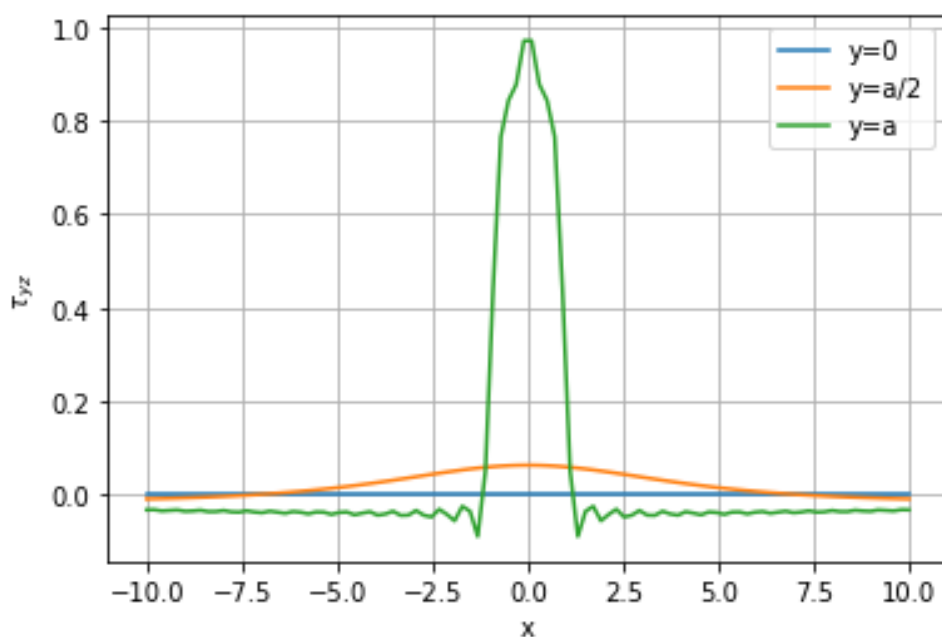


Рис. 2.3 Графік для зміни напружень  $\tau_{yz}$  по  $0x$  для 3 значень  $y$ .

На графіку переміщень ми можемо бачити виконання крайової умови

$w(x, 0) = 0$ , а на графіку напруження  $\tau_{yz}$  ми можемо бачити виконання умови

$$\tau_{yz}(x, a) = p(x), \quad p(x) = \cos(x)$$

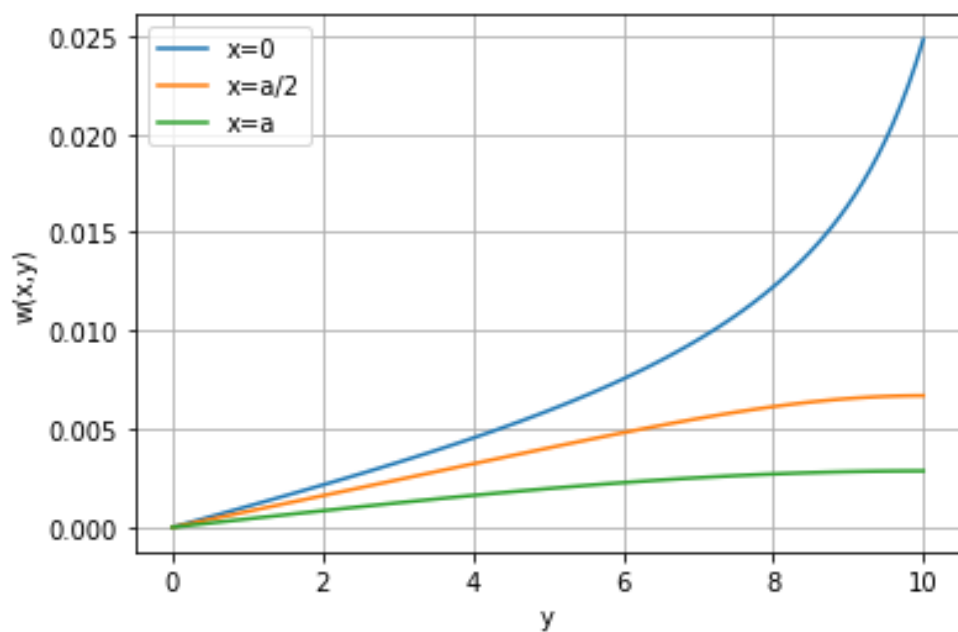


Рис. 3.1 Графік для зміни переміщень по  $0y$  для 3 значень  $x(0, \frac{a}{2}, a)$ .

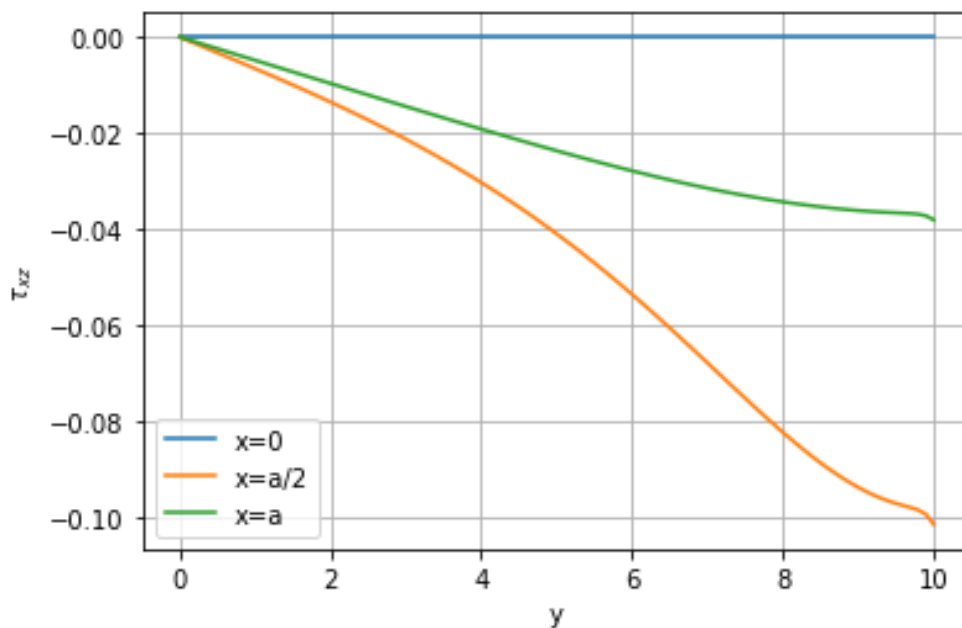


Рис. 3.2 Графік для зміни напружень  $\tau_{xz}$  по  $0y$  для 3 значень  $x$ .

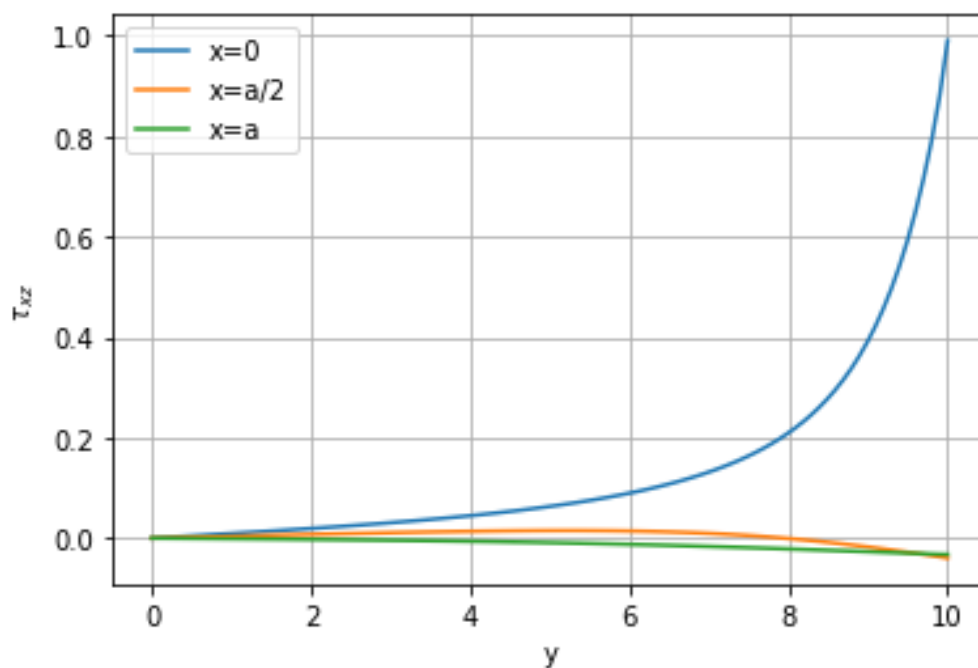


Рис. 3.3 Графік для зміни напружень  $\tau_{yz}$  по  $0y$  для 3 значень  $x$ .

На графіку напруження  $\tau_{yz}$  ми можемо бачити виконання умови

$$\tau_{yz}(0, a) = p(x) = \cos(x) = 1$$

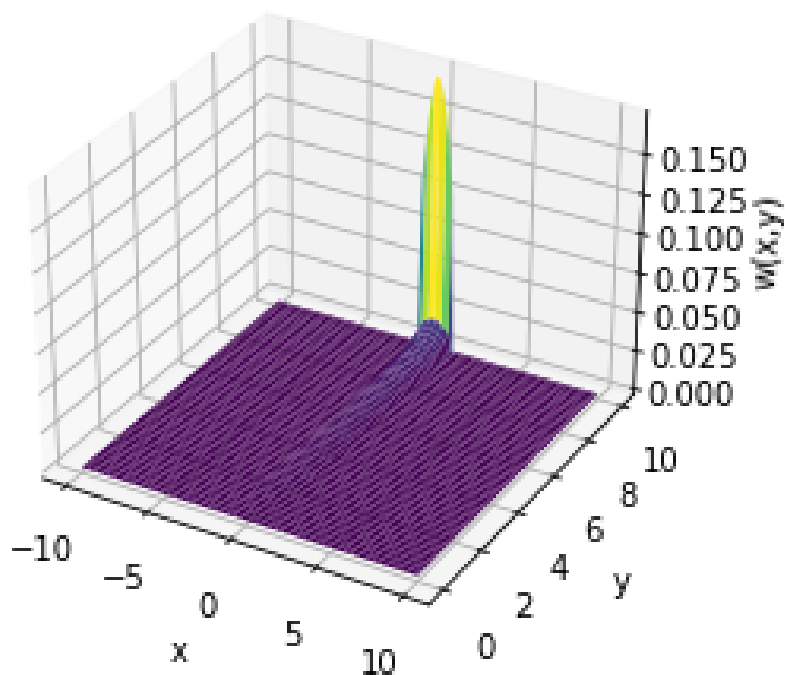
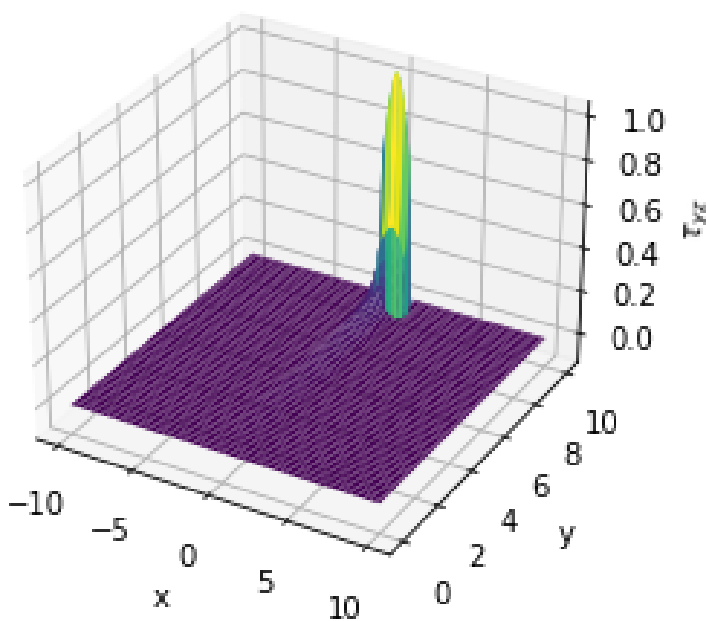


Рис. 4.1 Тривимірний графік переміщень для  $x \in (-a, a)$ ,  $y \in (0, a)$ .



#### 4.3 Тривимірний графік напружень $\tau_{yz}$

На графіку переміщень ми можемо бачити виконання крайової умови

$w(x, 0) = 0$ , а на графіку напруження  $\tau_{yz}$  ми можемо бачити виконання умови

$$\tau_{yz}(x, a) = p(x), \quad p(x) = \cos(x)$$

## ВИСНОВКИ

У роботі було розглянуто антиплоську задачу теорії пружності для смуги, було побудовано розв'язок задачі при прикладеному механічному навантаженню, виведено формули для переміщень та напружень, а також побудовано графіки в заданій області для переміщень та напружень. Отримані результати можуть бути використані задачі для смуги що послаблена тріщиною.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Г. Я. Попов Навчальний посібник з курсу “Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень” / Г. Я. Попов, В. В. Реут, Н. Д. Вайсфельд — Одеса: Астропринт, 2005. — 183 с.
2. Г. Я. Попов Навчальний посібник з курсу “Метод розривних розв’язків в задачах математичної фізики” / Г. Я. Попов, С. А. Абдиманатов, В. В. Єфімов, А. І. Ігліков — Караганда: Изд.КарГУ, 1993. — 96 с.