



Лабораторная работа №2

Практическая линейная алгебра

Андрей Зелепугин
2023

Оглавление

Задание 1.....	3
Подготовился	4
Придумал	4
Задание 2.....	7
Проанализировал	8
Задание 3.....	10
Визуализировал	11

А ещё я долго спорил с вордом, чтобы он экспортировал шрифт «ALS Gorizont Variable Bold Extra» на заголовки, но этого сделать не получилось никак, кроме print to pdf, так что эта версия с рабочими ссылками, а [тут](#) – более дизайнерская.



ЗАДАНИЕ 1



Подготовился

Придумал числа a, b, c, d , прочитав задание, так, чтобы было легче. Получил

$$a=2, b=1/2, c=9, d=3$$

Придумал

1. **Отражение** (симметрию) плоскости относительно прямой $y = ax$, в моём случае относительно $y = 2x$. Сделать это было нетрудно со знанием того, что вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ после умножения матрицы на него перейдет в себя, умноженного на какой-либо ненулевой коэффициент, для определённости, на 1, то есть в вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, а раз мы задаём симметрию, то проще всего вторым вектором рассмотреть ортогональный данной прямой, то есть $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ станет $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, который я умножил на 1, как удобный представитель чисел, больших 0, ибо при умножении на <0 , симметрия уйдёт. Решив такую систему уравнений, получил

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

2. **Отображение** всей плоскости в прямую $y = bx$, у меня $y = 0.5x$. Действовал иначе: сказал, что есть две λ : одна 0, другая 1, для 0 выбираю то направление, которое схлопнется, для 1 – вектор на прямой $y = 0.5x$, т. е. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ищу обратную матрицу к той, в которой записаны вектора и перемножаю все три. Получил

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

3. **Раз уж** я предусмотрительно взял $c = 9$, то и повернуть плоскость мне предстояло на 90° против часовой стрелки.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **Центральную симметрию** плоскости относительно начала координат, то есть такую штуку, чтобы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ушёл в $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (я снова беру 1 как коэффициент (так можно, это не числа a, b, c, d)), аналогично бы поступил $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. По строкам записываю новые координаты, получаю

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. **Отображение**, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой $y = ax$, потом поворот на $10d$ (30) градусов по часовой стрелке. Раз сначала симметрия, а потом поворот, то нужно перемножить матрицы в таком порядке, что справа будет матрица симметрии, а слева – поворота, то есть

$$A_5 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0.5 \\ -0.5 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.12 & 1 \\ 1 & 0.12 \end{pmatrix}.$$

6. **Отображение**, которое переводит прямую $y = 0$ в $y = 2x$ и прямую $x = 0$ в $y = 0.5x$. Нетрудно догадаться, что действовать для успеха стоит примерно также, как в первых двух заданиях. Прямая $y = 0$ – это линейные комбинации вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, который должен перейти в $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, а базис прямой $x = 0$ – это $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Соответственно, оно превращается в элегантные $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Выписываем построчно эти координаты, получаем такую матрицу: $A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. **Отображение**, которое переводит прямую $y = 2x$ в $y = 0$ и прямую $y = 0,5x$ в $x = 0$. Нетрудно догадаться, что это ровно противоположное действие от одного в п.6.

Значит, ищу обратную матрицу: $A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

8. **Отображение**, которое меняет местами прямые $y = ax$ и $y = bx$, т. е. $y = 2x$ и $y = 0,5x$.

Для наглядности покажу, какую именно систему я решаю:

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12} = 2, \\ a_{21} + 2a_{22} = 1, \\ 2a_{11} + a_{12} = 1, \\ 2a_{21} + a_{22} = 2. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad \begin{cases} a_{11} = 2 - 2a_{12}, \\ a_{21} = 1 - 2a_{22}, \\ 4 - 4a_{12} + a_{12} = 1, \\ 2 - 4a_{22} + a_{22} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 0, \\ a_{21} = 1, \\ a_{21} = 1, \\ a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тут я, конечно, усмехнулся, потому что вспомнил, что специально выбирал эти прямые симметричными относительно $y = x$, так что возыметь такой результат было весьма предсказуемо.

9. **Отображение**, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади с (9). Важно заметить, что кругу следует остаться кругом. Далее вспоминаем, за что отвечает определитель, смело пользуемся тем, что я выбрал 9, которое квадрат 3 и пишем:

$$A_9 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \det A_9 = 9$$

10. **Отображение**, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в не круг площади d (3). В этом задании важно, чтобы во взаимно ортогональных направлениях наблюдалась разная по величине деформация пространства, и да, говоря о площади в \mathbb{R}^2 , мы, конечно же подразумеваем невырожденные матрицы.

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 14 & \frac{1}{9} \\ 99 & 1 \end{pmatrix}, \det A_{10} = 3.$$

11. **Отображение**, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой $y = 0$ или $y = x$. Чтобы с гарантией задать такое отображение, нужно всего лишь утором выполнить... Просмотр практики по линалу, где мы сказали, что у симметричных матриц собственные вектора ортогональны, а чтобы не лежали на вышеупомянутых прямых поставить на главной диагонали различные числа

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

12. **Отображение**, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов. Беру диагональную матрицу с одинаковыми числами на ней и ставлю число сверху справа.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. **Отображение**, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задаётся вещественной матрицей). Зная, что за комплексную часть отвечает побочная диагональ,

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -99 \\ 99 & 0 \end{pmatrix}$$

14. **Отображение**, для которого любой ненулевой вектор является собственным.

$$A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Пару отображений, последовательное применение которых даёт различные результаты в зависимости от порядка: $AB \neq BA$.

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{15} = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$
$$A_{15} \cdot B_{15} = \begin{pmatrix} 21 & -21 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -3 & -12 \\ 6 & 24 \end{pmatrix} = B_{15} \cdot A_{15}$$

16. Пару отображений, последовательное применение которых даёт одинаковый результат независимо от порядка: $AB = BA$. Постарался, чтобы матрицы A и B были максимально непохожими друг на друга.

$$A_{16} = \begin{pmatrix} 1568 & -777 \\ 1984 & 65,241 \end{pmatrix}, B_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



ЗАДАНИЕ 2



Проанализировал

Нашёл образ и ядро придуманных мной отображений из пунктов 1, 2, 13, 14. Где указал вектор – это один из вариантов базисного вектора.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -99 \\ 99 & 0 \end{pmatrix}, A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $im(A_1) = \mathbb{R}^2, ker(A_1) = \vec{0}$,
2. $im(A_2) = \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, ker(A_1) = \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
13. $im(A_{13}) = \mathbb{R}^2, ker(A_{13}) = \vec{0}$,
14. $im(A_{14}) = \vec{0}, ker(A_{14}) = \mathbb{R}^2$

Нашёл собственные числа и собственные вектора придуманных вами отображений из пунктов 1-4, 8, 11- 16. Так как в форме разложения представлять красивее, делал это так, где возможно.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = i, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -i, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$;
4. $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = -1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
8. $A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 1, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
11. $A_{11} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 0.53, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -0.24 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 9.47, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4.24 \\ 1 \end{pmatrix}$;
12. $A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
13. $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -99 \\ 99 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 99i, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -99i, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$;
14. $A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 0, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 458 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 854 \end{pmatrix}$.
15. $A_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;
 $B_{15} = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \lambda_1 = -3 - 7,35i, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1.22i \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -3 + 7,35i, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1.22i \\ 1 \end{pmatrix}$;
 $A_{15} \cdot B_{15} = \begin{pmatrix} 21 & -21 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 21, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $B_{15} \cdot A_{15} = \begin{pmatrix} -3 & -12 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 21, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;
16. $A_{16} = \begin{pmatrix} 1568 & -777 \\ 1984 & 65,241 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 816,62 - 988,43i, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,38 - 0,5i \\ 1 \end{pmatrix}$,
 $\lambda_2 \approx 816,62 + 988,43i, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,38 + 0,5i \\ 1 \end{pmatrix}$
 $A_{15} \cdot B_{15} = B_{15} \cdot A_{15} = B_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2: \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$

Нашёл определитель матриц из пунктов 1-5, 9, 10.

$$1. \det A_1 = \begin{vmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{vmatrix} = -1,$$

$$2. \det A_2 = \begin{vmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$3. \det A_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$4. \det A_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$5. \det A_5 = \begin{vmatrix} -0.12 & 1 \\ 1 & 0.12 \end{vmatrix} \approx -1,$$

$$9. \det A_9 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9,$$

$$10. \det A_{10} = \begin{vmatrix} 14 & \frac{1}{9} \\ 99 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

Матрица получается симметричной в 1, 4, 5.



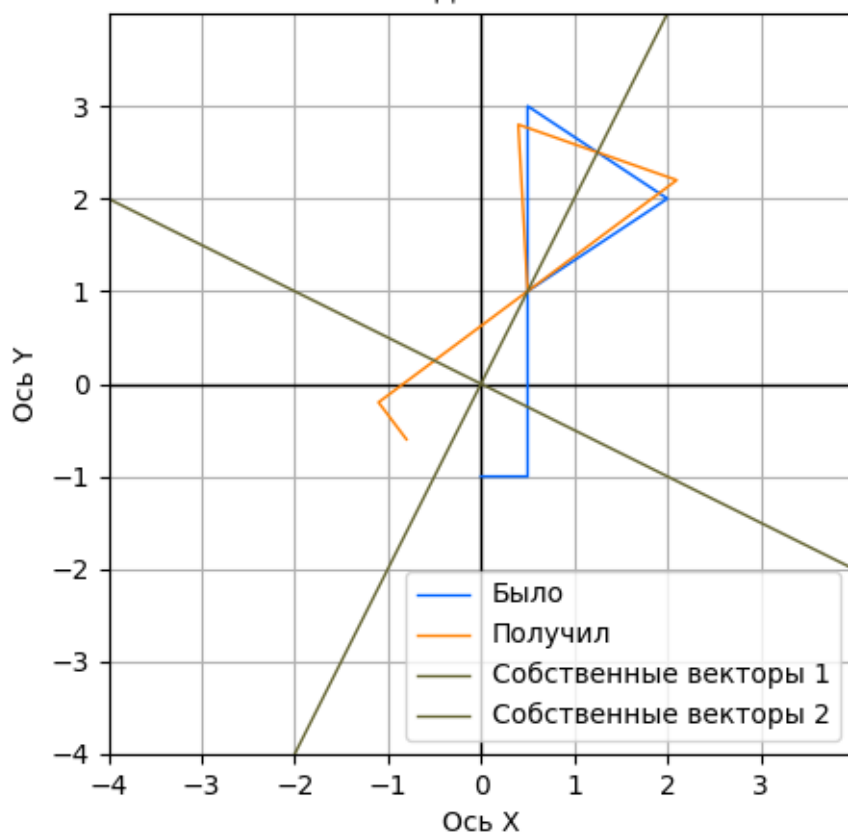
ЗАДАНИЕ 3



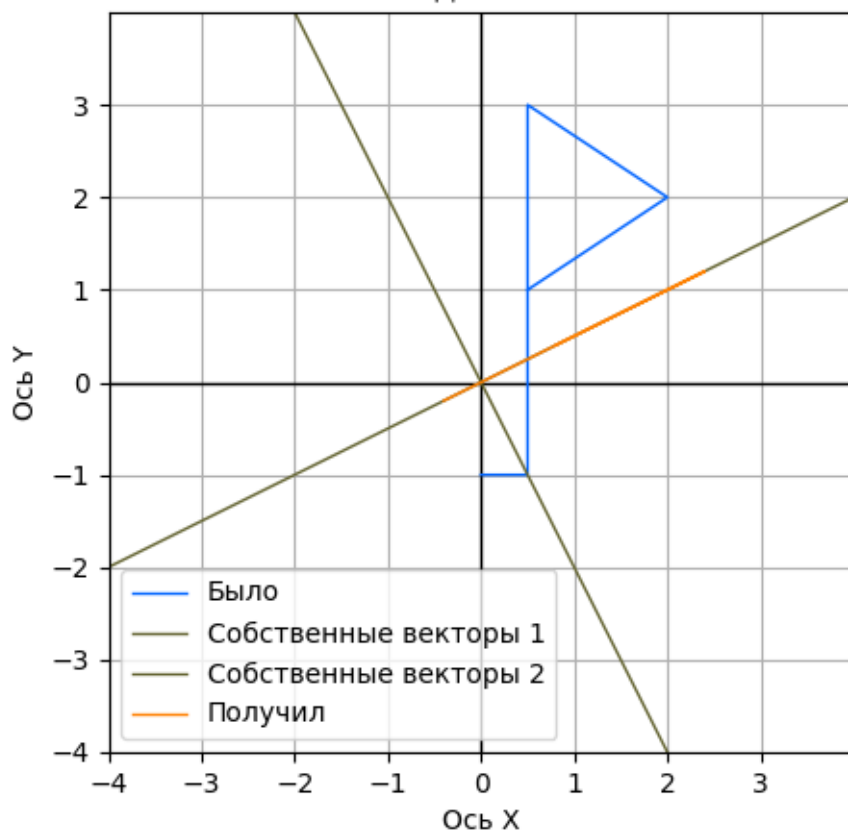
Визуализировал

Фигурой послужил флаг.

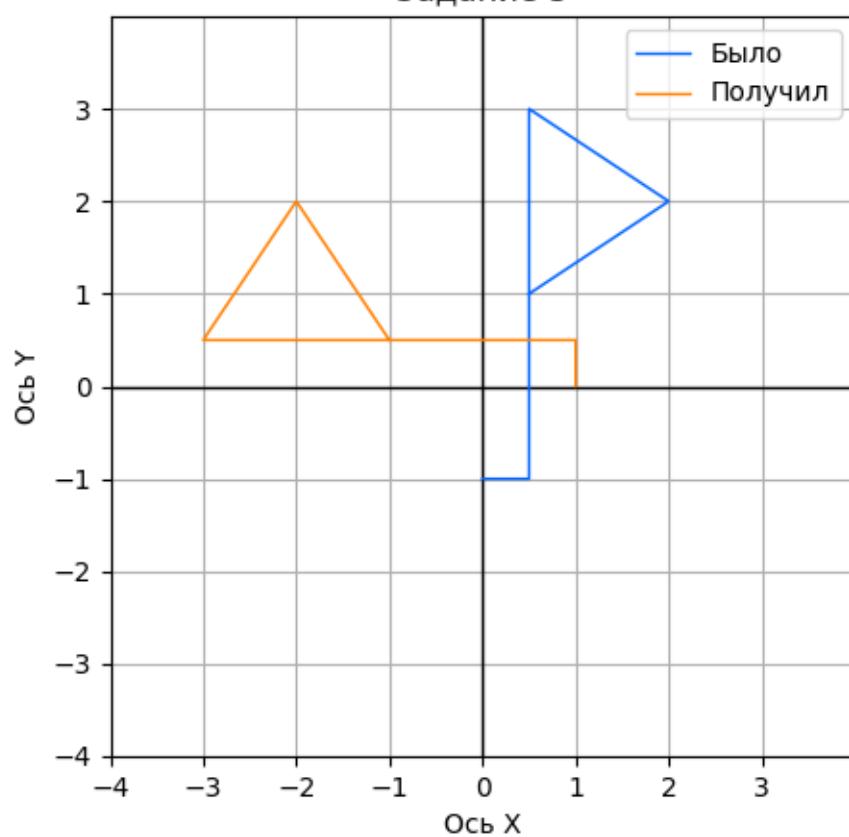
Задание 1



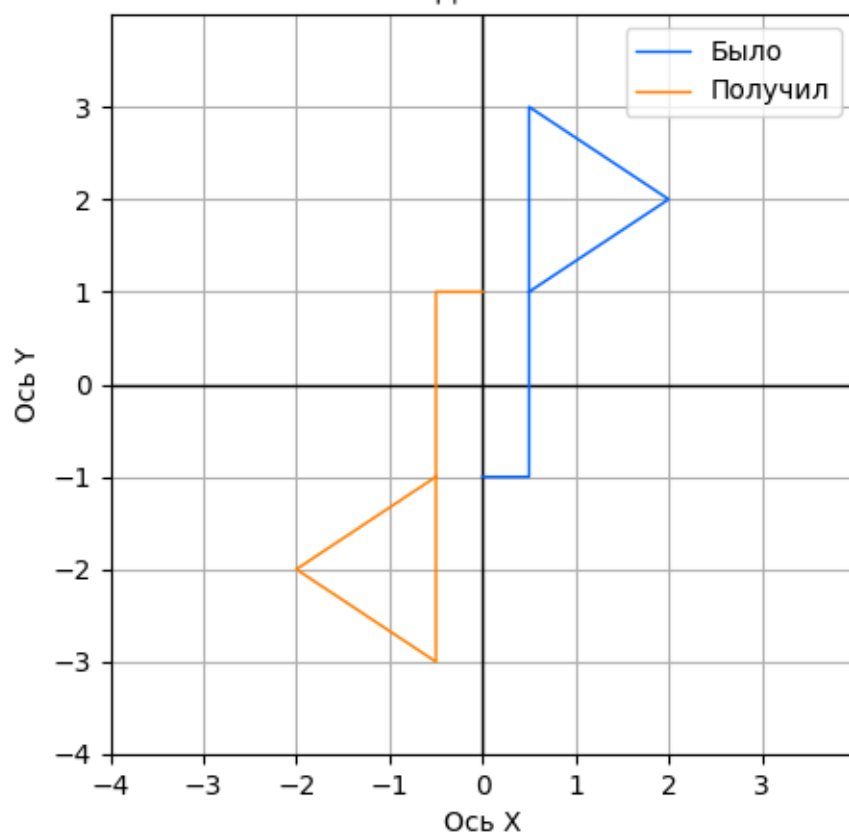
Задание 2



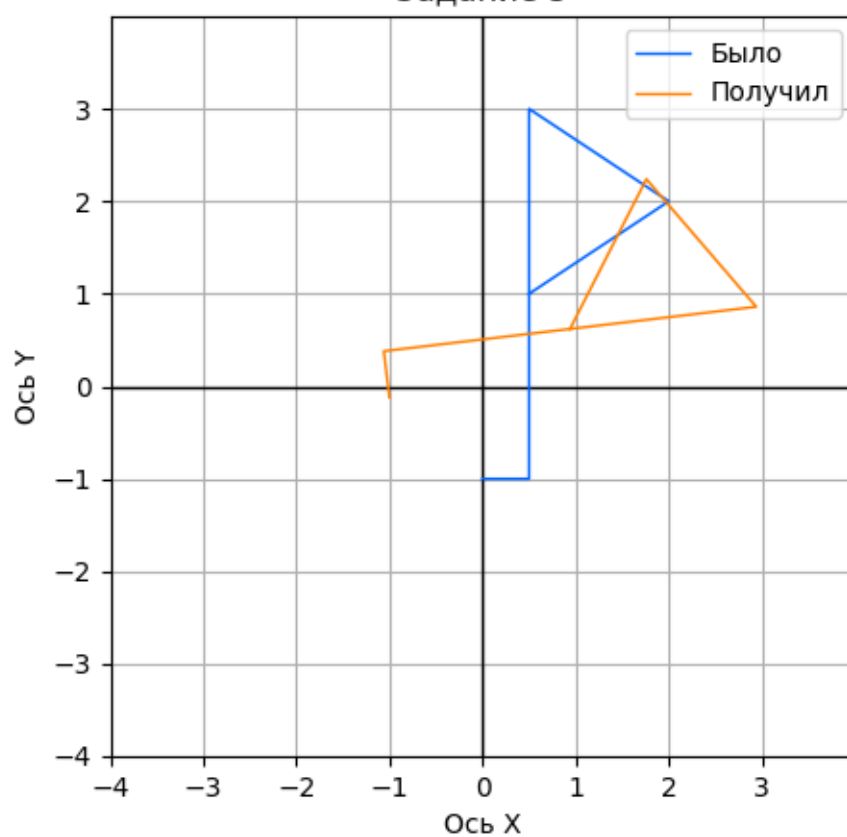
Задание 3



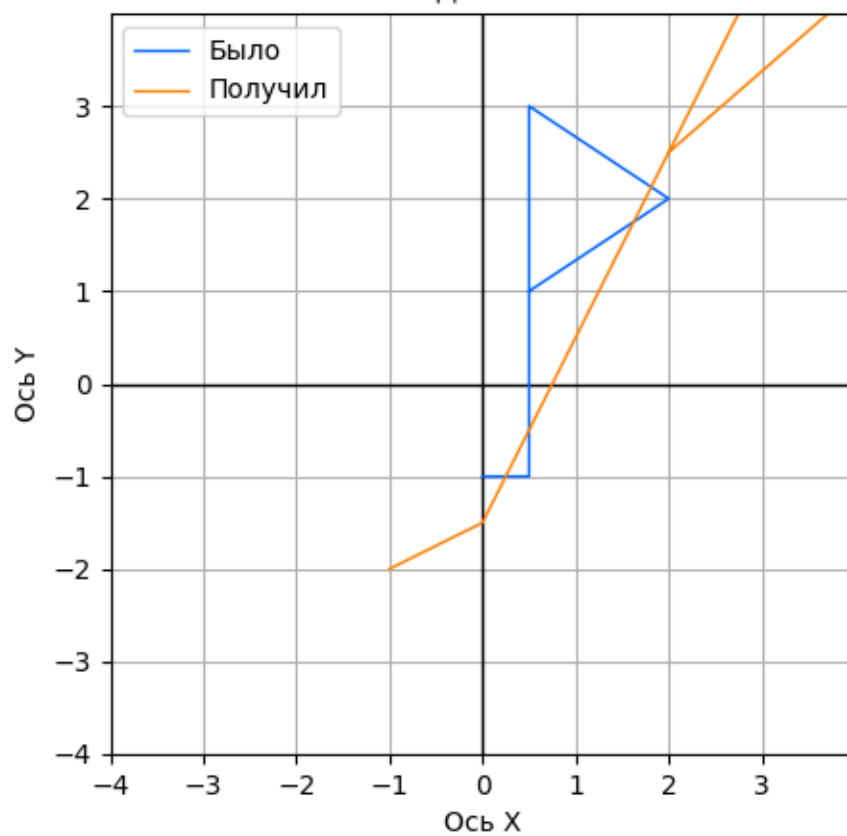
Задание 4



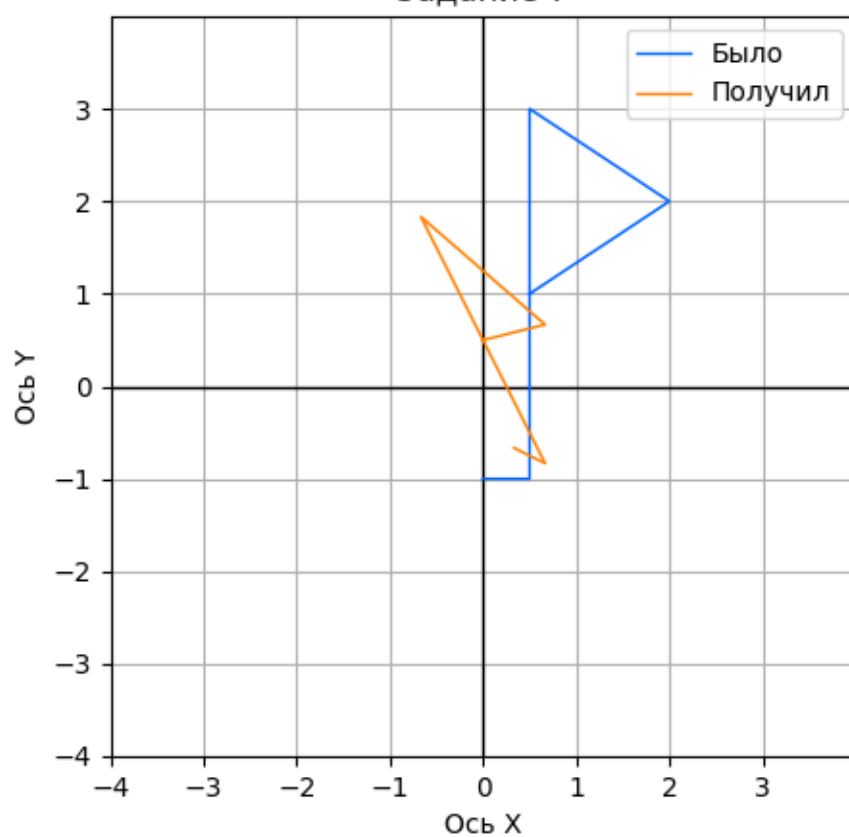
Задание 5



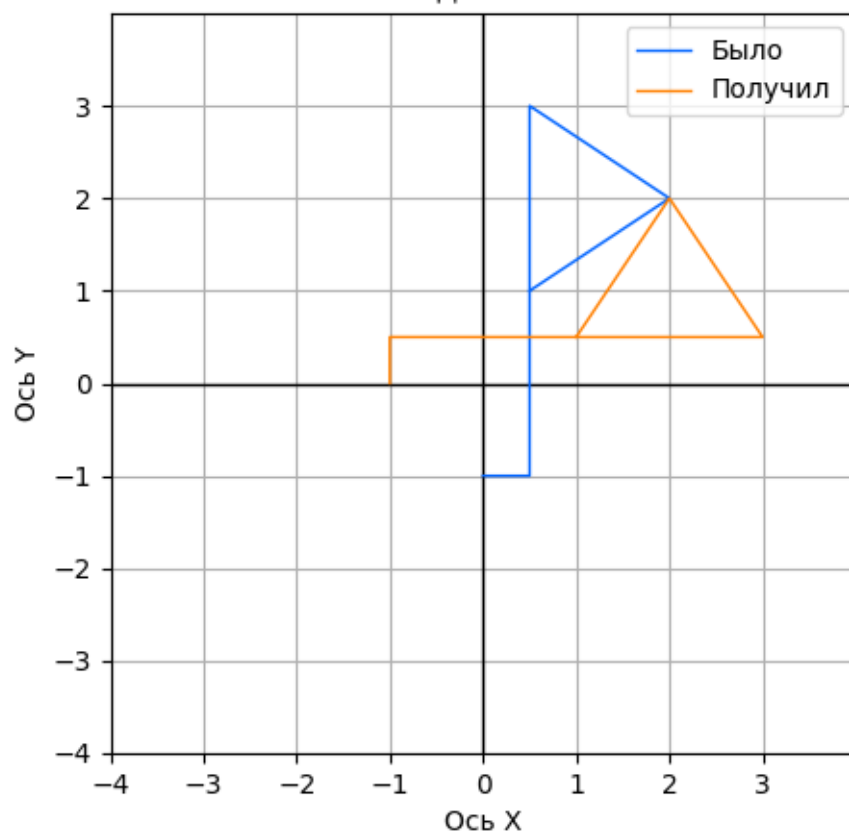
Задание 6



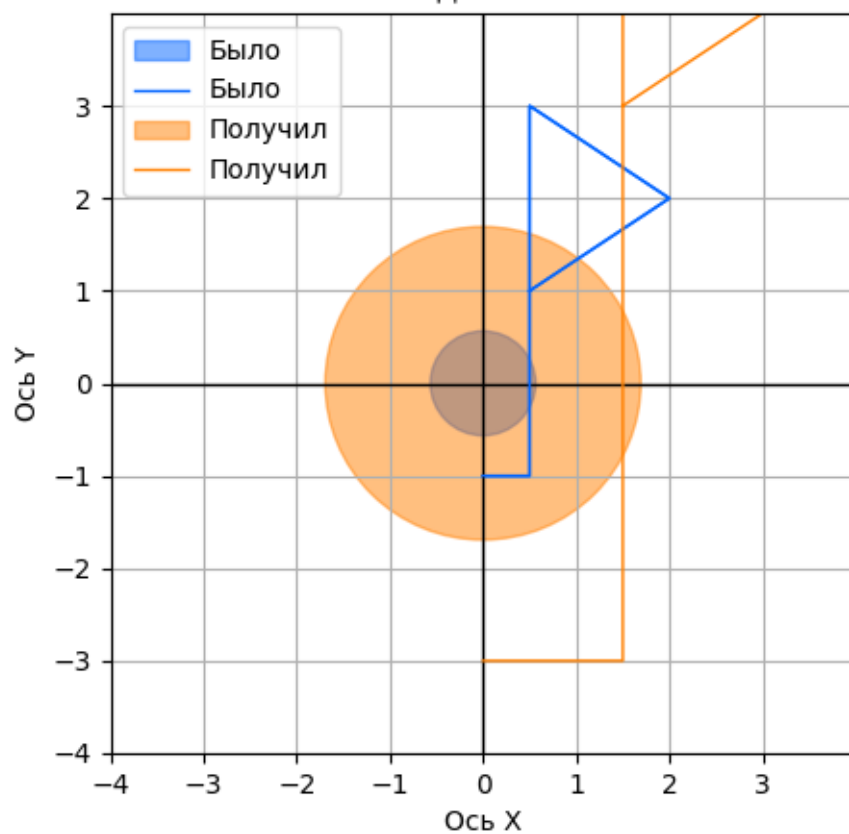
Задание 7



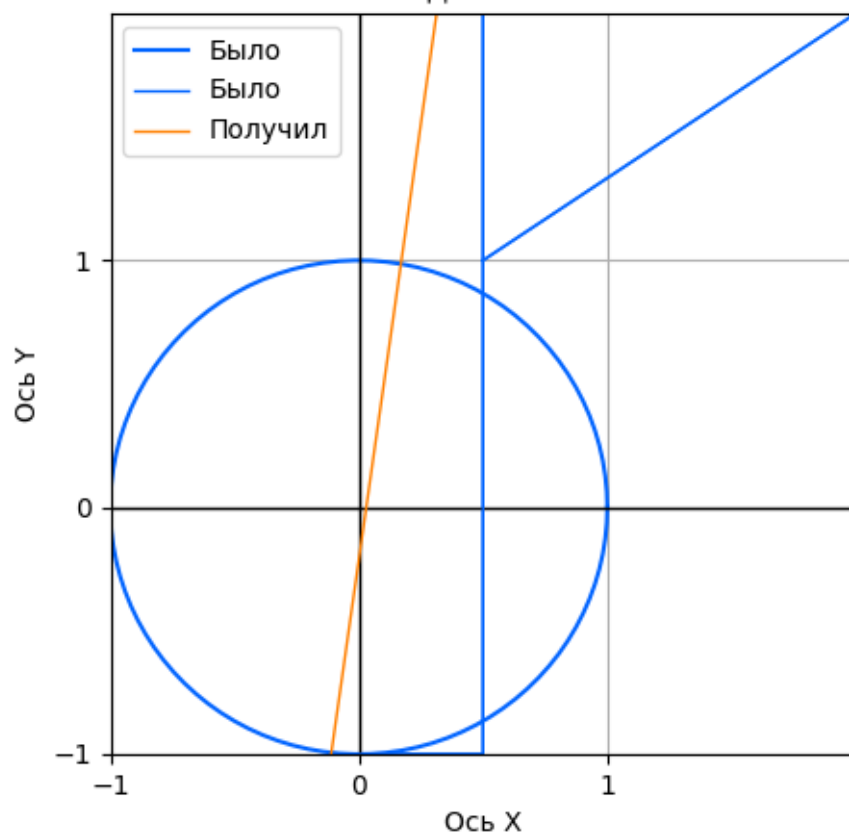
Задание 8



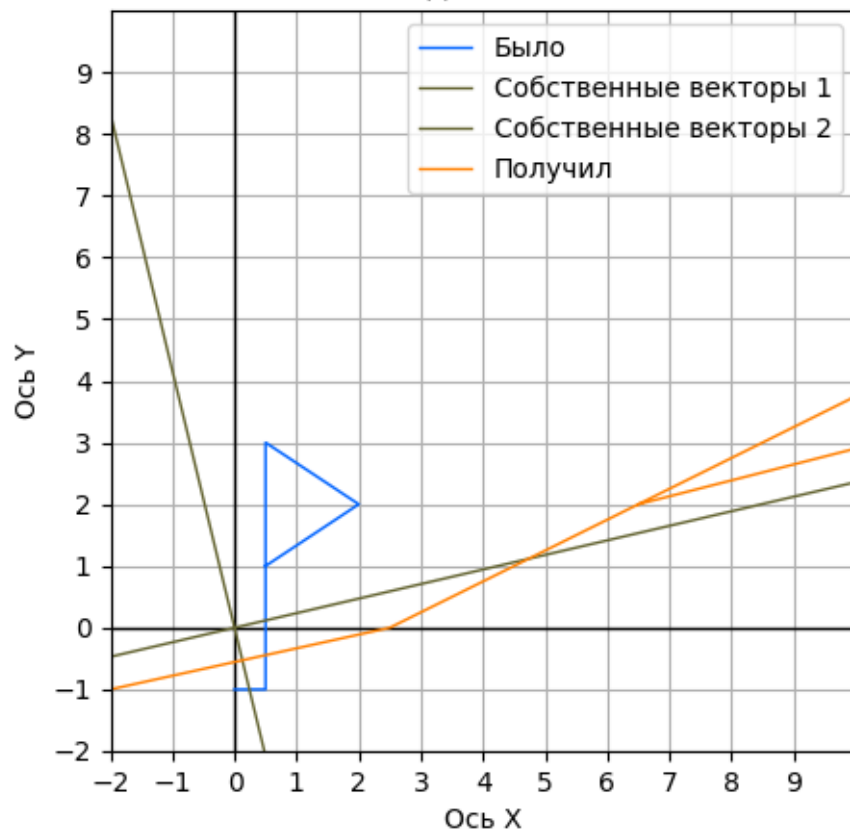
Задание 9



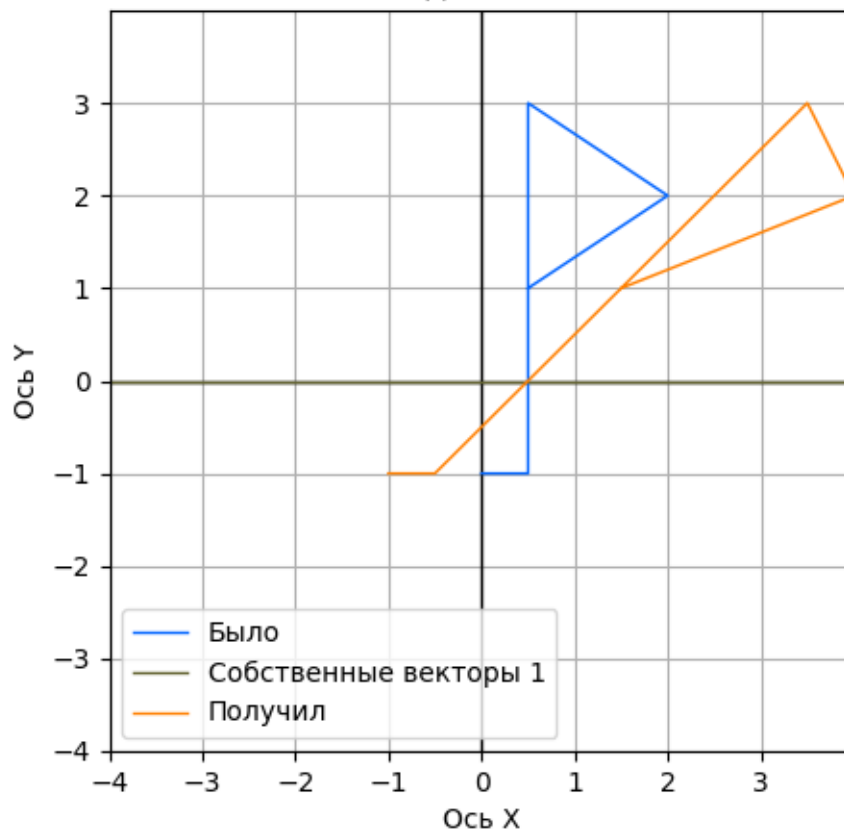
Задание 10



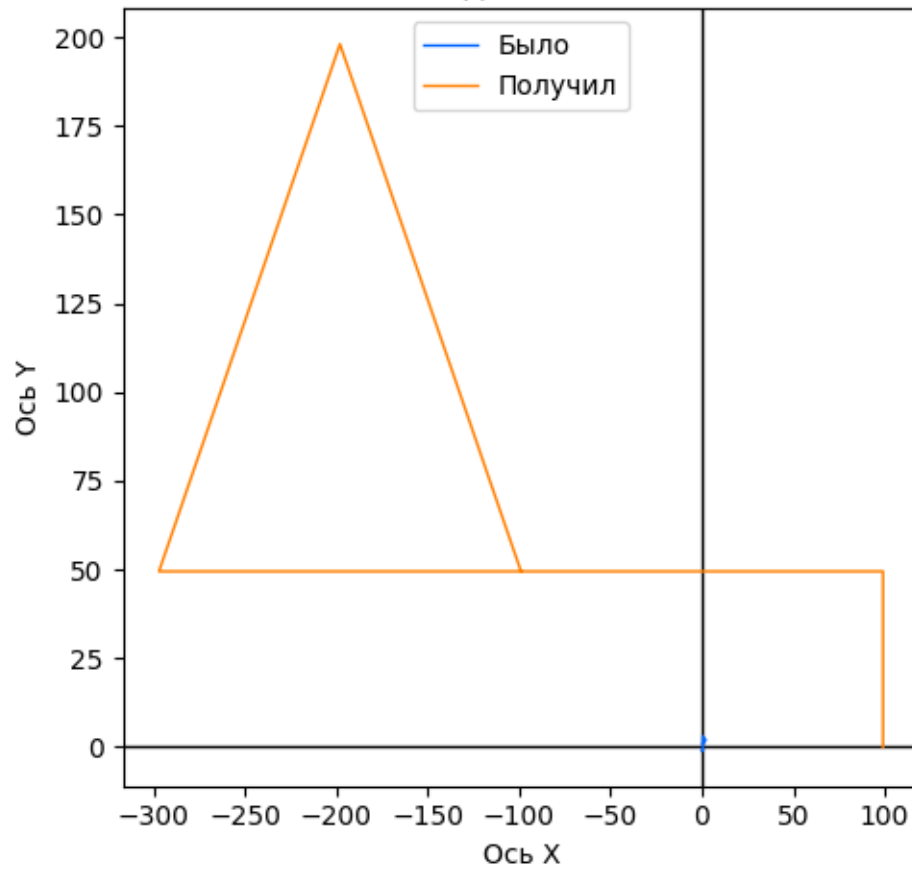
Задание 11



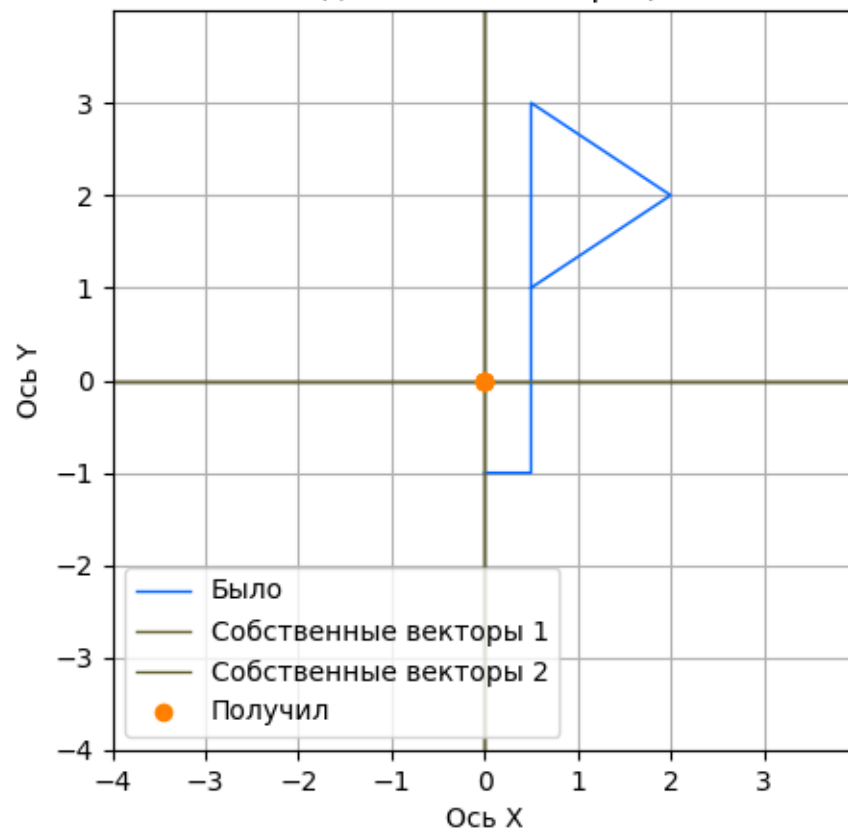
Задание 12



Задание 13

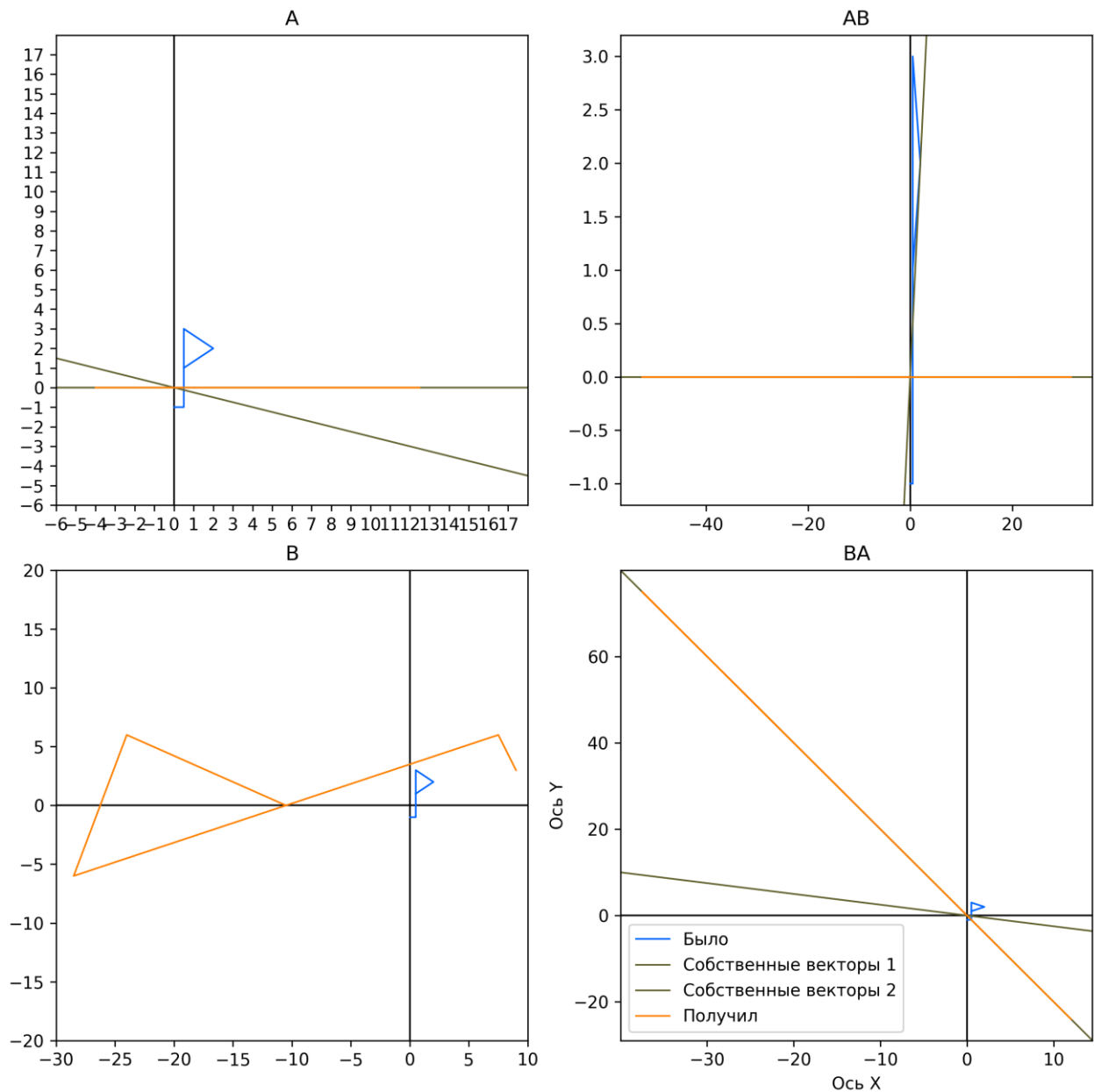


Задание 14 (0 матрица)



В [15](#) я честно поленился рисовать комплексные собственные вектора у B_{15} :

$$B_{15} = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \lambda_1 = -3 - 7,35i, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1,22i \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -3 + 7,35i, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1,22i \\ 1 \end{pmatrix}.$$



ФЫЧВ

В задании [16](#) у матрицы A_{16} тоже получились комплексные собственные векторы, так что их я не рисовал. У остальных матриц, которые суть нулевые можно выбрать любые два ЛНЗ вектора и нельзя будет оспорить, что они собственные, просто потому, что \mathbb{O} матрица всё пространство по любым направлениям сжимает в точку. Также прошу обратить внимание, что у матрицы A_{16} это не я из ничего получил флажок, а в масштабе 4000 по каждой из осей флаг неотличим от точки.

