Laboratory work 4

Practical discrete math

Prepared by: **Andrey Zelepugin**
Date: **12.11.23**
Visit: **Forta.org**

Оглавление

Задание 1. Непрерывно придумал. 3
Задание 2. Непрерывное моделирование. 4
Задание 3. Надискретизировал....8
Задание 4. Моделирование дискретности. 9
Задание 5. Осциллятор!....16

Задание 1. Непрерывно придумал.

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Системы для каждого случая:

1. Система асимптотически устойчива, при этом если x(0) = v1, то x(t) ∈ Span{v1}, а если x(0) = v2, то x(t) ∈ Span{v2} при всех t ≥ 0.
   Перемножил обратную матрицу для матрицы собственных векторов на заранее выдуманные собственные числа и на собственные вектора.
   Придумал:
   $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -11x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -11x_2 + x_1 \end{cases} A_1 = \begin{pmatrix} -11 & 1 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}, \lambda_1 = -12, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -10, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$
2. Система неустойчива, при этом у матрицы A не существует двух неколлинеарных собственных векторов.
   Оставил один из предыдущих собственных векторов, второй 1 0, раз ЛЗ, и верхнетреугольная матрица с одинаковыми числами на диагонали, перемножил.
   Придумал:
   $$\begin{cases} \dot{x}_1 = 21x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 23x_2 \end{cases} A_2 = \begin{pmatrix} 21 & -1 \\ 1 & 23 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 22, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$
3. Система неустойчива, при этом если $x(0) = v1$, то $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$.
   Перемножил ровно те же матрицы, что в первом с точностью до минуса перед 12.
   $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -11x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -11x_2 + x_1 \end{cases} A_3 = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = -10, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 12, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$
   Что означает, что система будет неустойчива, но если траектория начнётся ровно на v1, то придёт в 0, ибо есть хоть одна растущая экспонента (тут в 12-й).
4. Система асимптотически устойчива, при этом матрица A ∈ R2 имеет комплексные собственные вектора вида v1 ± v2i ∈ C2.
   Для того, чтобы её задать, использую овеществление, вещественные части пусть будут -10, то есть дающие затухающие экспоненты, не забываю, что в вещественных числах матрице придётся иметь сопряженные корни, и перемножу такие матрицы:
   $$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = A_4 = \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix},$$
   $$\lambda_1 = -10 + i, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 + i \\ 1 + i \end{pmatrix}, \lambda_2 = -10 - i, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 - i \\ 1 - i \end{pmatrix};$$
5. Система неустойчива, при этом матрица A имеет такие же собственные вектора, как в предыдущем пункте, возьму и превращу -10 в 10.
   $$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = A_5 = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix},$$
   $$\lambda_1 = 10 + i, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 + i \\ 1 + i \end{pmatrix}, \lambda_2 = 10 - i, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 - i \\ 1 - i \end{pmatrix};$$
6. Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица A имеет собственные вектора такие же, как в пункте 4. Значит, матрица просто устойчива. Рассмотрю вращение. Учитывая то, что у меня собственные вектора выбраны весьма предусмотрительно, вращение будет задаваться ровно также, как и для обычных собственных векторов, совпадающих с осями координат.
   $$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
   $$\lambda_1 = 0 + i, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 + i \\ 1 + i \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0 - i, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 - i \\ 1 - i \end{pmatrix};$$

Задание 2. Непрерывное моделирование.

Были определены сугубо ненулевые начальные условия, для которых будет проводиться совершенно непрерывное моделирование: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

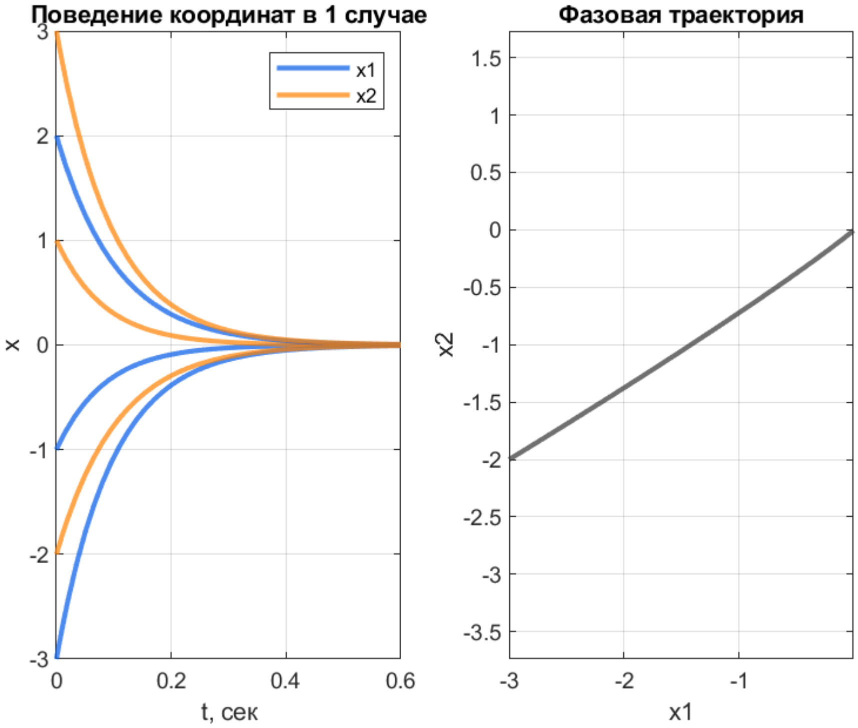


Рис.1 Визуализация пункт 1

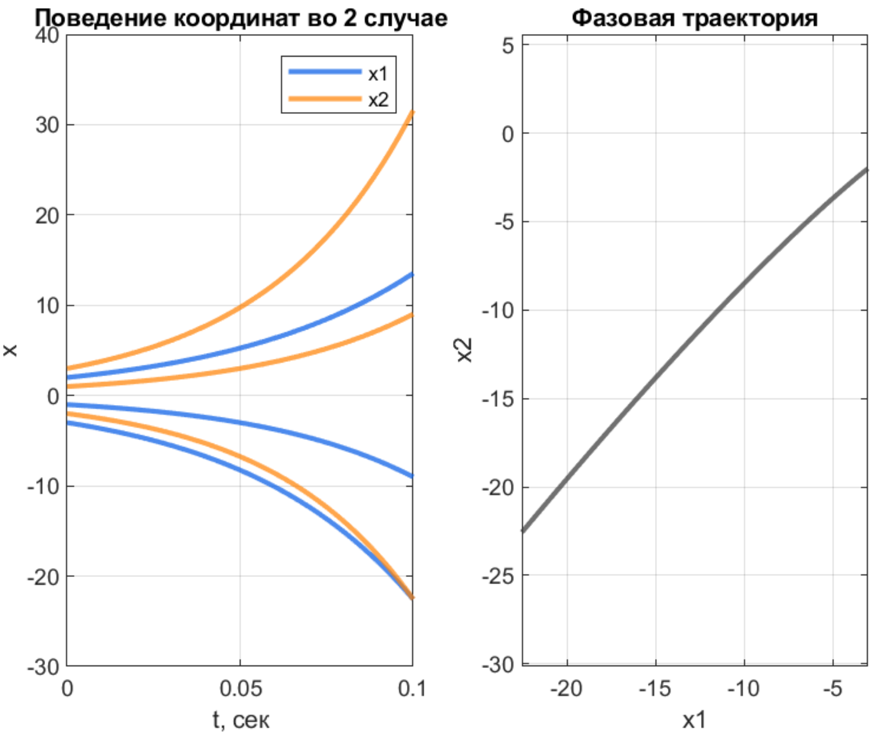


Рис.2 Визуализация пункт 2

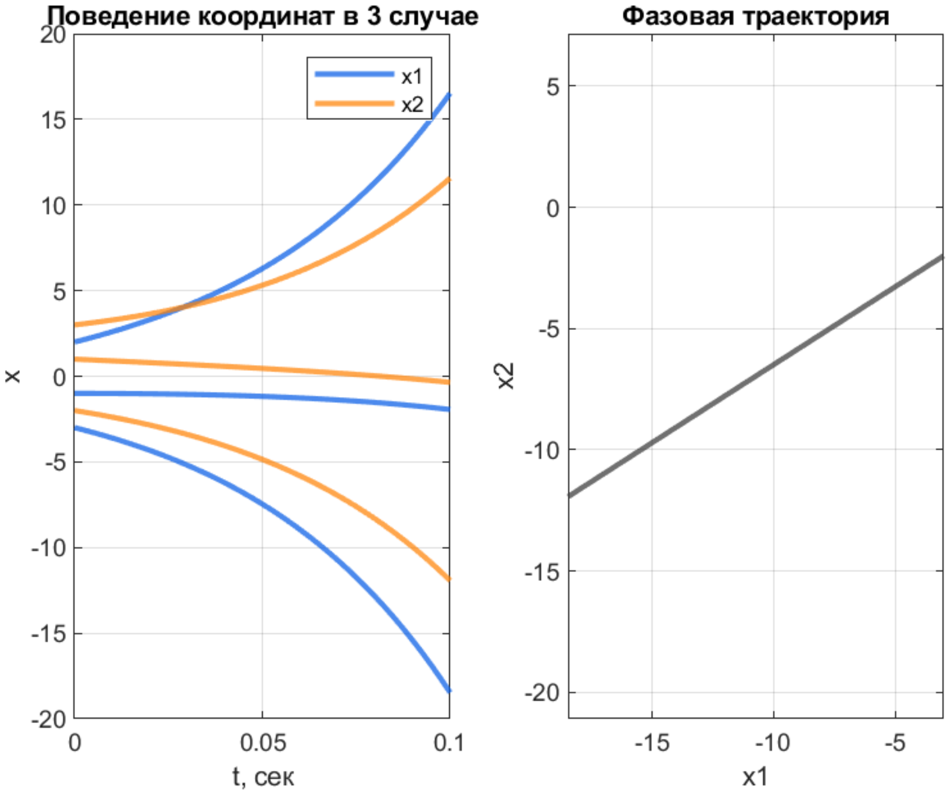


Рис.3 Визуализация пункт 3

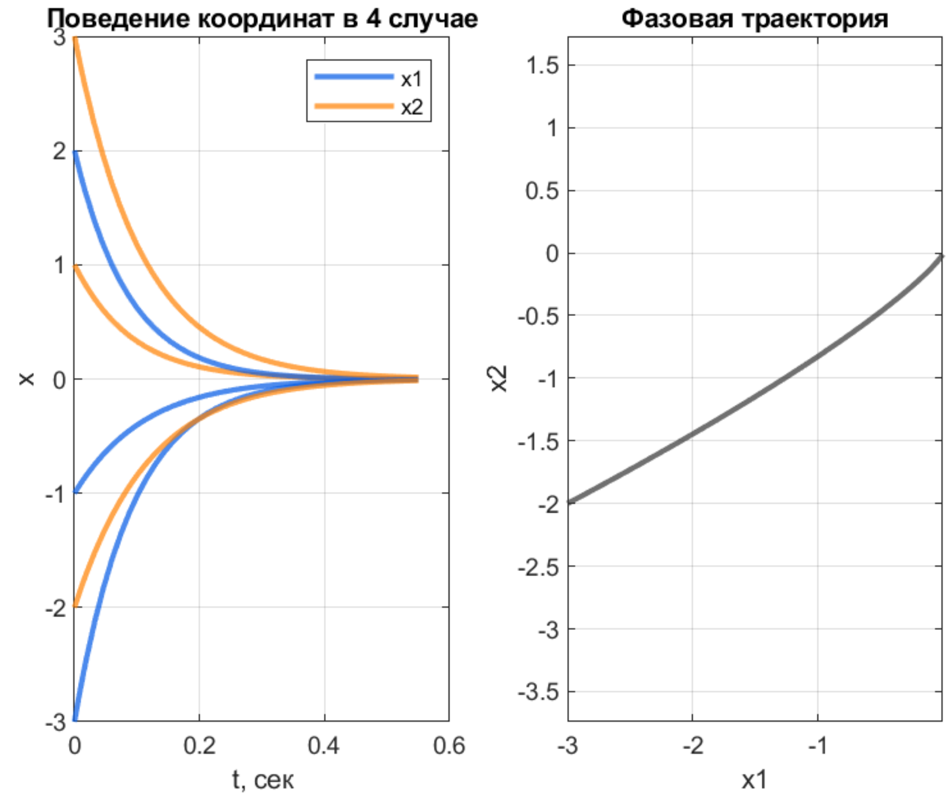


Рис.4 Визуализация пункт 4

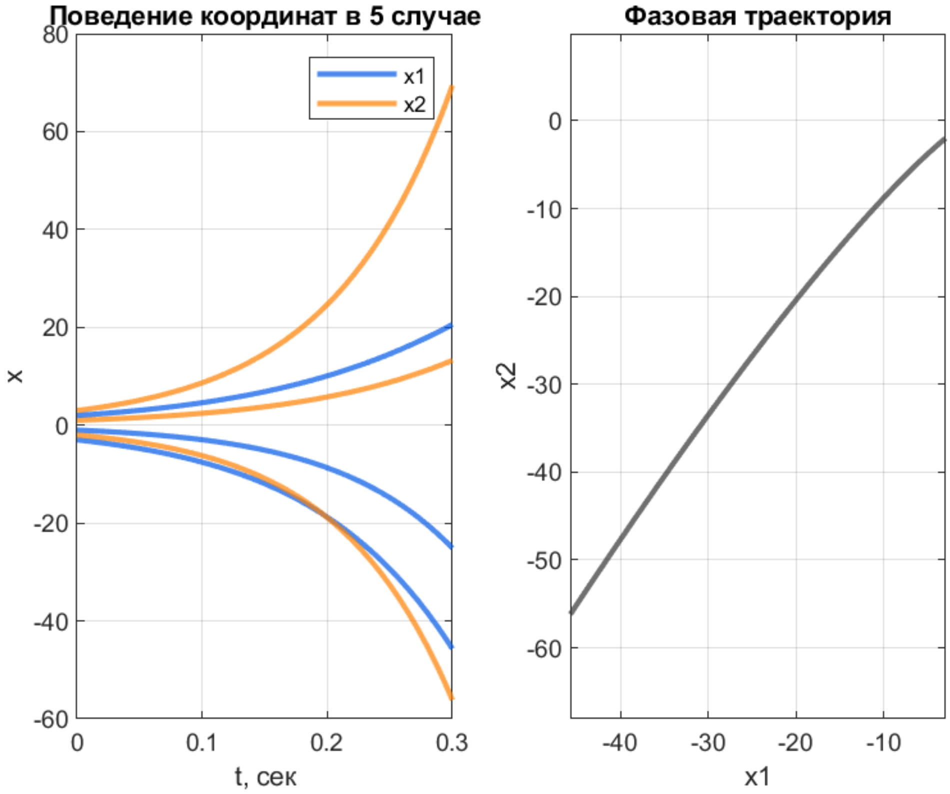


Рис.5 Визуализация пункт 5

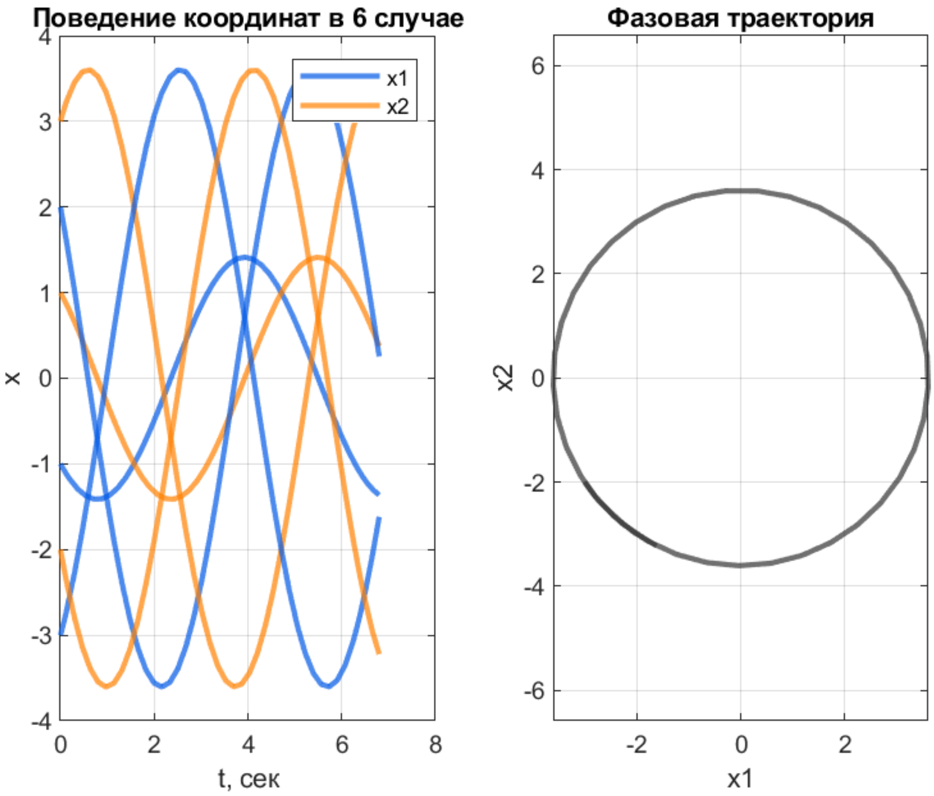


Рис.6 Визуализация пункт 6

В результате наблюдения и анализа графиков можно сделать нижеследующие выводы:

1) К системе 1 применима характеристика «крайне устойчива»: за 0,6 секунды из всех начальных положений векторы переместились в (0,0), причём ветви графика, соответствующие $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$, симметричны, что является, вероятно, следствием выбора ортогональных собственных векторов. Достаточно красивый график, несмотря на то, какие идеи он в себе несёт. С одной стороны, гармония, с другой – всё тлен.
2) Вижу обоснования называть вторую систему крайне неустойчивой в силу десятикратной разницы между начальными и конечными координатами точек, достигнутой за одну десятую секунды. При этом обращаю внимание на то, что собственный и присоединенный вектор не были ортогональны, а $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$, не оказались в симметричных положениях. Более того, фазовая траектория отклоняется от прямой линии, что является свидетельством присутствия некоторой доли вращения в данном движении.
3) Третья система за 0,2 секунды достигает отмети 100 по одной из координатных осей, фазовая траектория прямая, нет вращения, нет комплексности. Сравнительно долго траектория, начавшаяся в $\vec{x}_3$, слабо отклоняется, более того, однажды достигает по одной координате нуля. Она мне нравится не так, как первая система, та была противоположностью, если бы мы продлили время в сторону отрицательного, то они бы сошлись в 0, остаётся только развернуть график и вот, всё сошлось в 0. Можно использовать как руководство по подмене понятий для того, чтобы придумать аналогию (а тов. Сталин говорил, что любая аналогия ложна) и утверждать, что это одно и то же. На самом деле система 3 есть всё разрастающийся хаос.
4) Четвертый вариант системы асимптотически устойчив в силу того, что все точки в итоге сходятся в 0. Фазовая траектория не прямая, см. собственные вектора и числа. Все дороги ведут в Рим.
5) В пятой системе присутствует неустойчивость, изгиб фазовой траектории и асимметрия относительно оси времени (проходящей через 0 по x) также говорит о доле вращения.
6) Для шестой системы на графиках поведения координат во времени видны синусоиды, то есть проекции координат вращающейся точки на оси, а при достаточном времени, фазовые траектории замыкаются до полной окружности. Амплитуда не меняется, траектории и не сходятся с одной стороны, и не имеют причин для обратного процесса с другой. Это устойчивость. Наглядное отображение белки в колесе, даже применимо к студентам, которые раз за разом делают сегодня задания на завтра, завтра на послезавтра и так далее, по выходным лабы по линалу, раз за разом одно и то же, и всё надеются, что вот-вот скоро найдут время сделать лабу по языку С.

Задание 3. Надискретизировал.

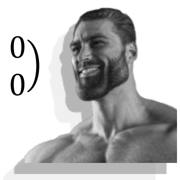
Выбрал константу *c* = 0,00000000000000000000000000000000000000001, *d* = 99999+458 𝕚.

Посмотрел, что некрасиво не рисовать графики для 9-11, и убрал мнимость, ещё позже понял, что графики продолжили находится в идеале (такое множество, любая линейная комбинация элементов которого принадлежит ему) некрасивости из-за гигантизма, и 99999 превратились в 9. Такой первоначальный выбор был не случаен, в третьем задании не было ограничений на вещественность.

В результате тщательной аналитической работы с использованием имеющихся знаний были выведены следующие матрицы, отвечающие указанным перед ними собственным числам:

1. Первая $\lambda_{1,2} = -1$ $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. Вторая $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{i}$ $A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. Третья $\lambda_{1,2} = \pm\mathbb{i}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *Она не диагональная, ибо не все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.
4. Четвёртая $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{i}$ $A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
5. Пятая $\lambda_{1,2} = 1$ $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. Шестая $\lambda_{1,2} = -0{,}00000000000000000000000000000000000000001$ $A_6 = \begin{pmatrix} -0{,}00000000000000000000000000000000000000001 & 1 \\ 0 & -0{,}00000000000000000000000000000000000000001 \end{pmatrix}$
7. Седьмая $\lambda_{1,2} = \pm 0{,}00000000000000000000000000000000000000001\mathbb{i}$ $A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}00000000000000000000000000000000000000001 \\ -0{,}00000000000000000000000000000000000000001 & 0 \end{pmatrix}$
8. Восьмая $\lambda_{1,2} = 0{,}00000000000000000000000000000000000000001$ $A_8 = \begin{pmatrix} 0{,}00000000000000000000000000000000000000001 & 1 \\ 0 & 0{,}00000000000000000000000000000000000000001 \end{pmatrix}$
9. Девятая $\lambda_{1,2} = -9$ $A_9 = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$
10. Десятая $\lambda_{1,2} = \pm 9\mathbb{i}$ $A_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$
11. Одиннадцатая $\lambda_{1,2} = 9$ $A_{11} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
12. Двенадцатая $\lambda_{1,2} = 0$ $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -500 & 0 \end{pmatrix}$



Задание 4. Моделирование дискретности.

Были определены сугубо ненулевые начальные условия, для которых дискретно будет проводиться дискретное моделирование: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Системы, оказавшиеся комплексными (9-11) изобразить не представляется возможным. По оси x на левой части каждого графика отложен шаг.

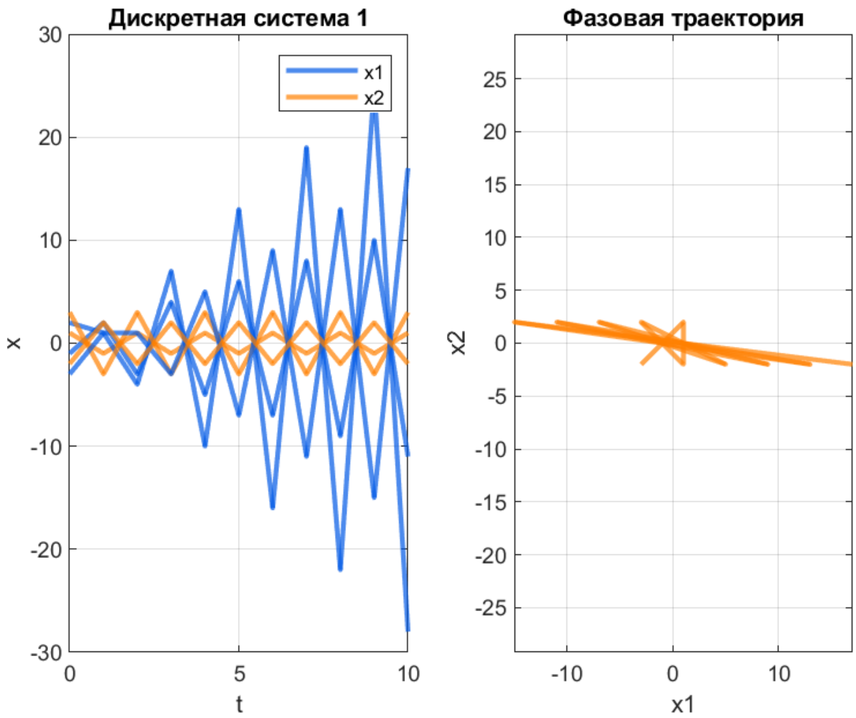


Рис.7 визуализация дискретной системы 1

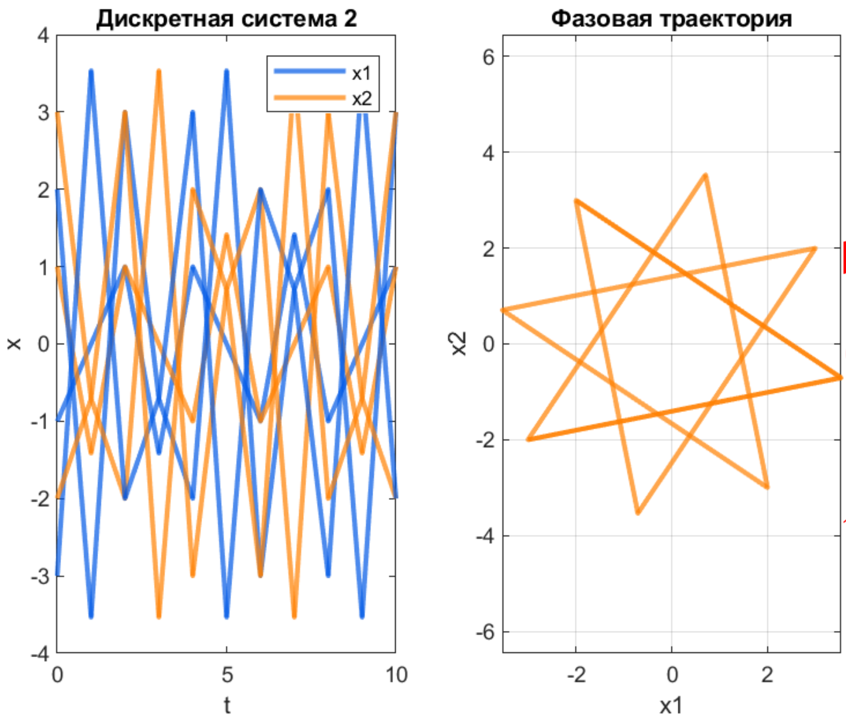


Рис.8 визуализация дискретной системы 2

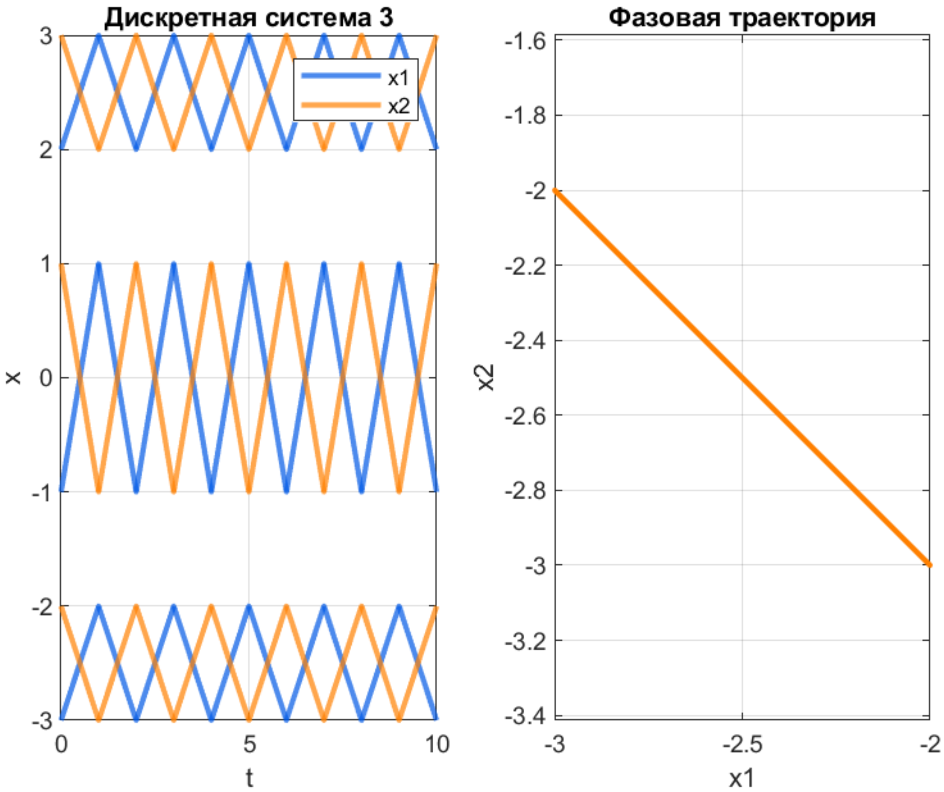


Рис.9 визуализация дискретной системы 3

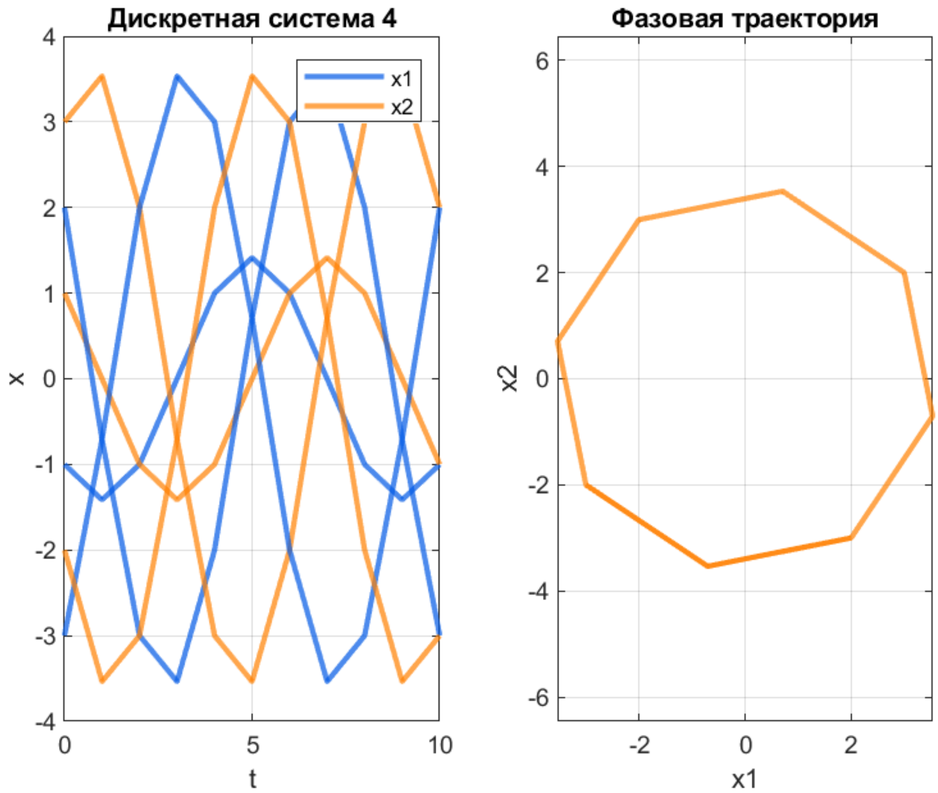


Рис.10 визуализация дискретной системы 4

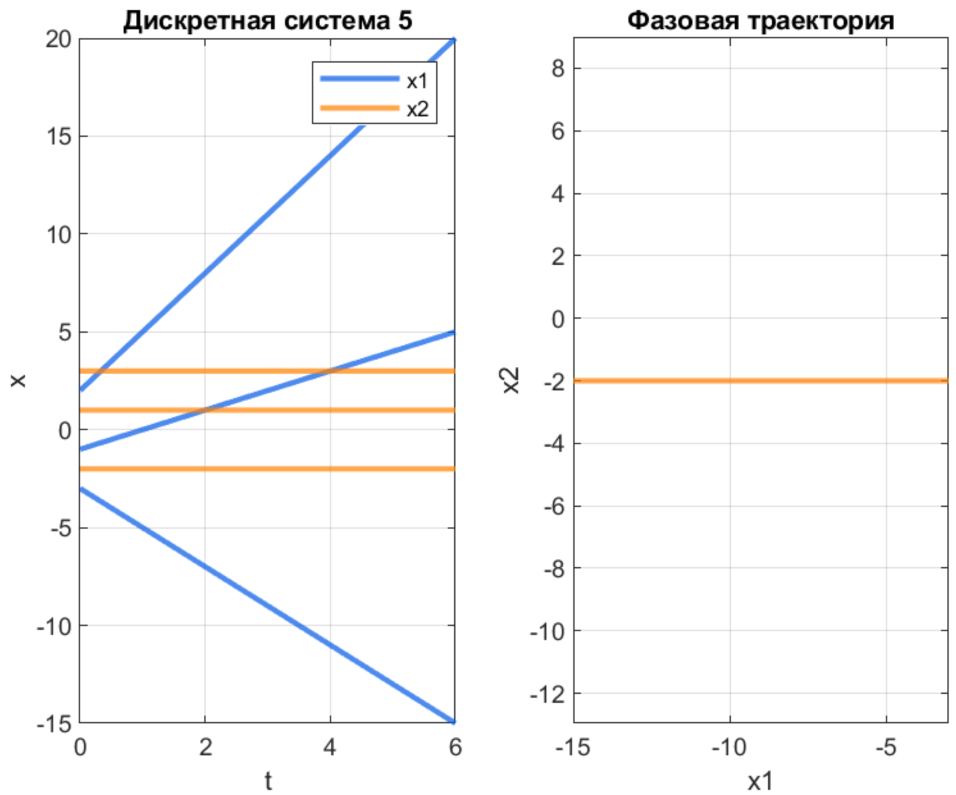


Рис.11 визуализация дискретной системы 5

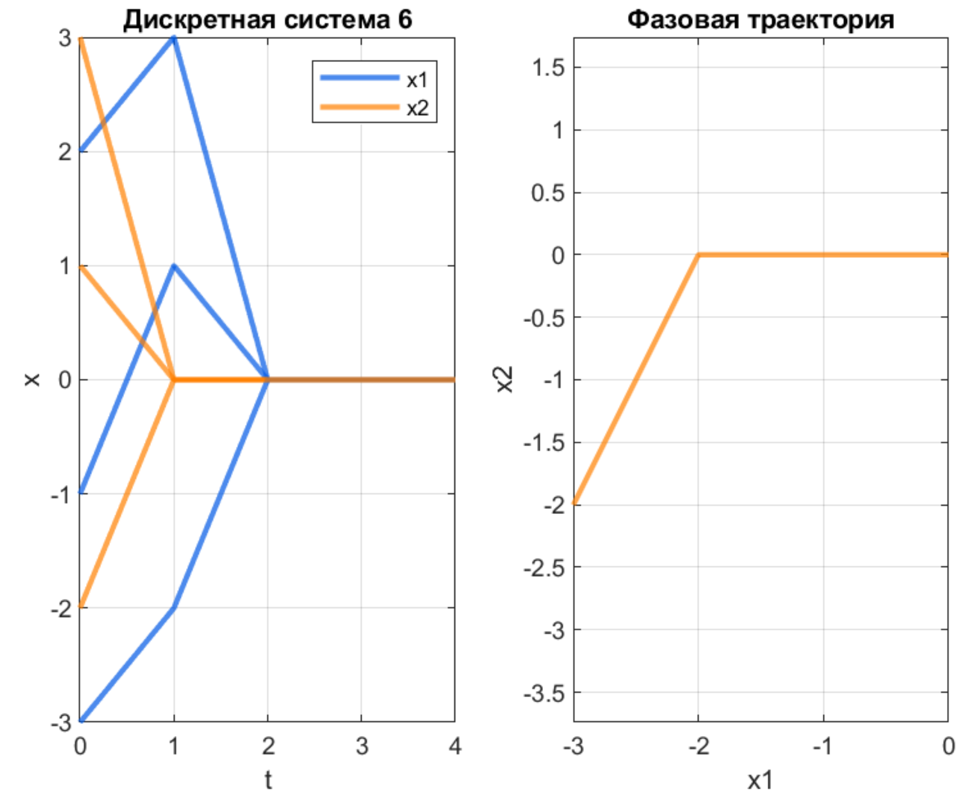


Рис.12 визуализация дискретной системы 6

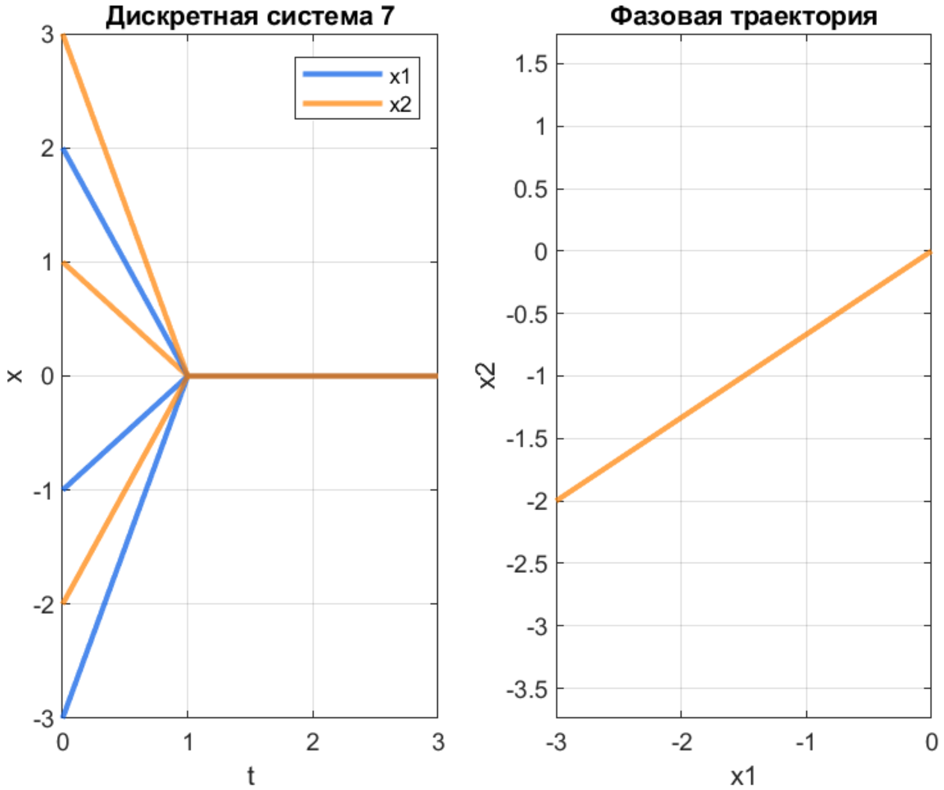


Рис.13 визуализация дискретной системы 7

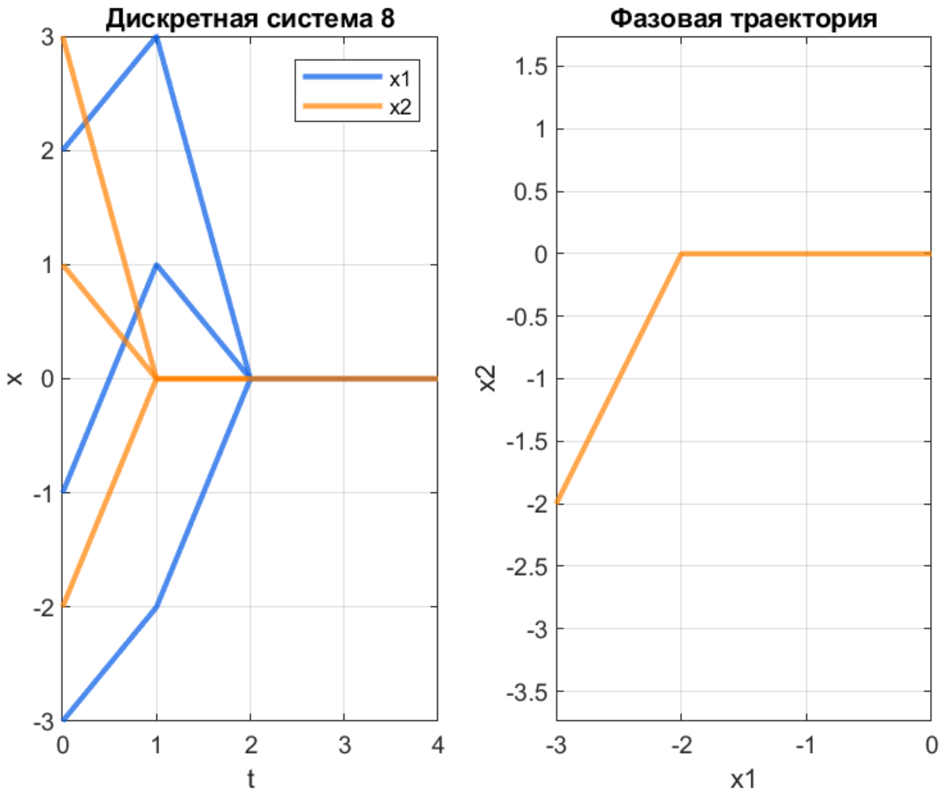


Рис.14 визуализация дискретной системы 8

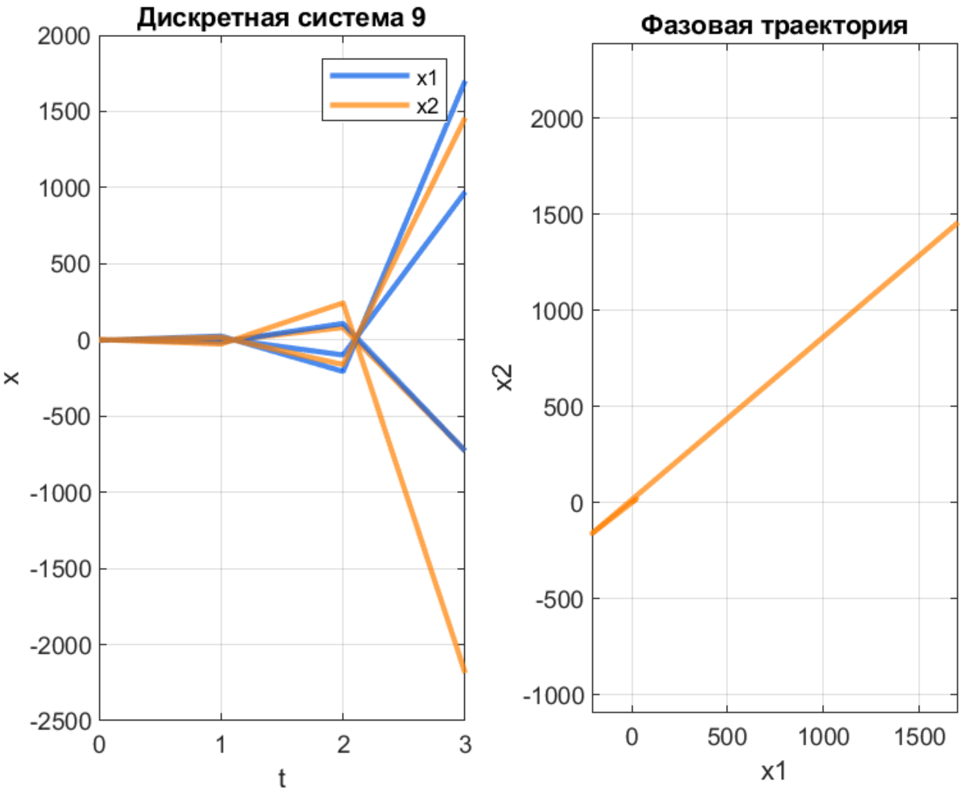


Рис.15 визуализация дискретной системы 9

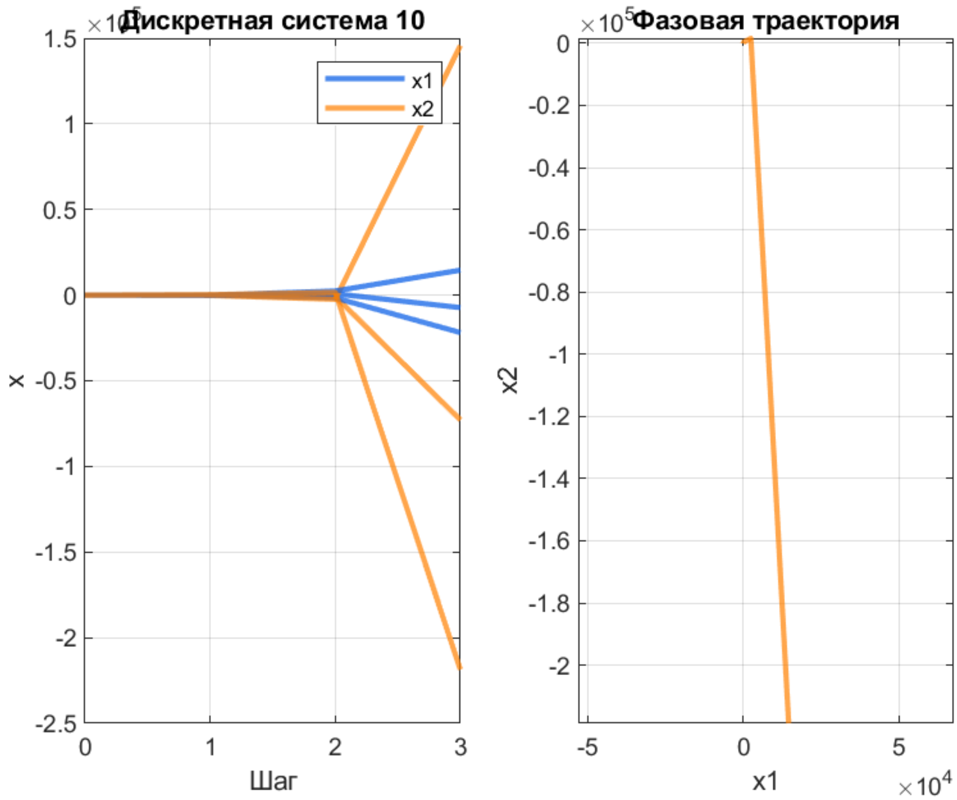


Рис.16 визуализация дискретной системы 10

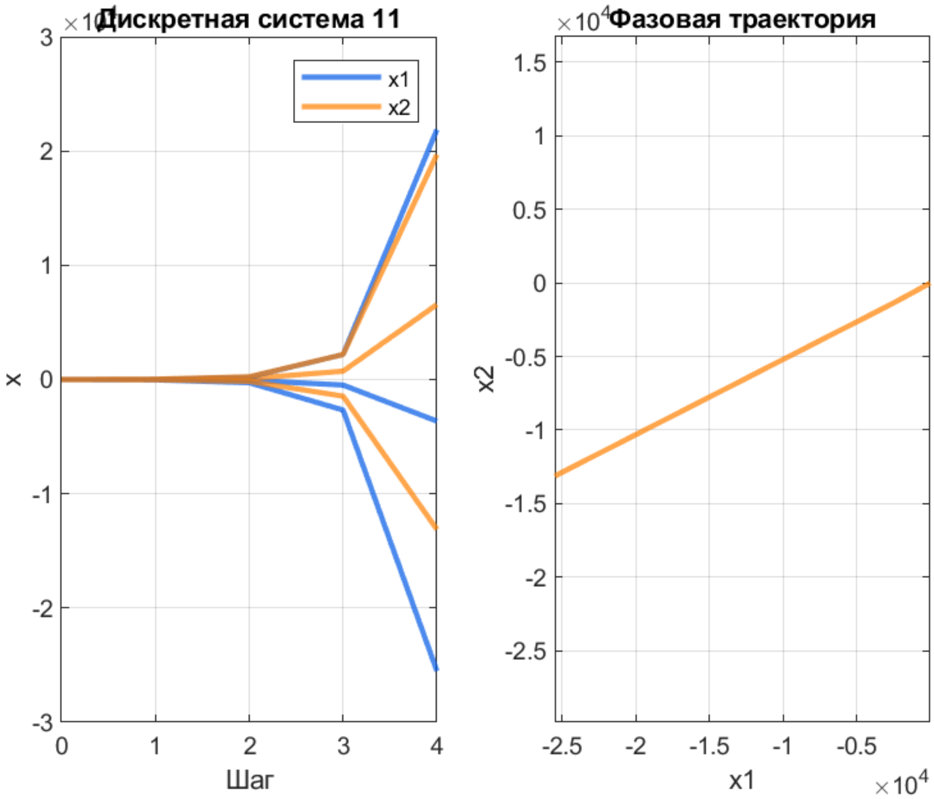


Рис.17 визуализация дискретной системы 11

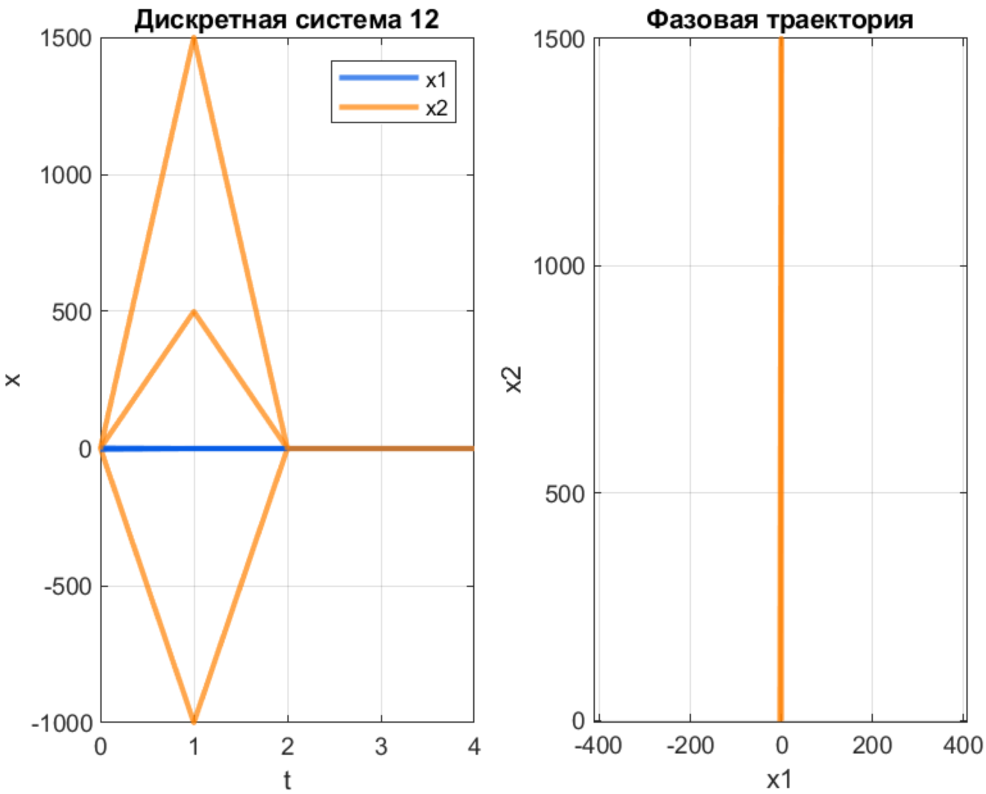


Рис.18 визуализация дискретной системы 12

Далее мною был проведён анализ проделанной работы, исполнитель в моём лице получил отпуск с перерывом на чай, по результатам которого можно сказать, помимо того, что фазовые траектории не гладкие кривые, следующее:

1) Есть траектория, занимающаяся просто колебаниями, это x2, а x1 таким свойством не обладает из-за добавки одного x2 (см. матрицу)
2) Откровенно говоря, то, что при таких СЧ фазовый портрет сложится в звезду было для меня неочевидно, особенно учитывая то, что хоть и наблюдаются определённые тенденции и периодичность хотя бы в пиках, сами по себе траектории жутко колбасит что жутко хорошо стыкуется и с внутренним состоянием, и с той музыкой, которую я в тот момент слушал.
3) Предсказуемо, имея такую матрицу, получить систему с такими свойствами. Координаты меняются местами.
4) Данная система своим поведением явно перекликается с шестой системой первого набора. , тем не менее, дискретная система – это $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{i}$ $A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,

   а непрерывная $A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Следует заметить, во-первых, определитель $detA_4 = detA_6 = 1$, а также и то, что

${A_4}^{2n+1}$ =примерно то же, что и она сама, ${A_4}^{2n}$=единицы на главной или побочной диагонали.

5) Заметно, что все оранжевые линии графика, соответствующие координате x2, остаются горизонтальными, что говорит о том, что вторая координата остаётся неизменной, что явно видно из последней строки матрицы. Остальные изменяются линейно, тоже закономерно.
6) Шестая, седьмая и восьмая системы явно стабильны. Не зря это всё нильпотентные матрицы. Также на примере 6 и 8 систем видно, что знак собственных чисел (в отличие от непрерывного случая) не играет важнейшей роли, главное, что они внутри единичной окружности.
7) Девятая, десятая и номер 11 нестабильны и готовы уничтожить мир.
8) Двенадцать – аннигиляторная пушка. Сначала одну из координат выкидывает на 500,  а потом умножает на 0.

Итого, подробно отвечая, ничего нового не открыто: в дискретном случае собственные числа внутри единичной окружности на комплексной плоскости – асимптотически устойчива, вне – нет, а собственное число принадлежит единичной окружности – надо смотреть внимательно, это может быть как устойчиво (2 и 3), так и нет (1).

К сожалению, на изображение собственных чисел на комплексной плоскости не остаётся времени, ещё необходимо завершить оформление и пятое задание, а сама задача тривиальна, мой читатель, я уверен, справится с ней даже и в уме, представив всю картину.

Задание 5. Осциллятор!

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2,\\ \dot{x}_2 = ax_1 + bx_2\end{cases} A_0 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$$

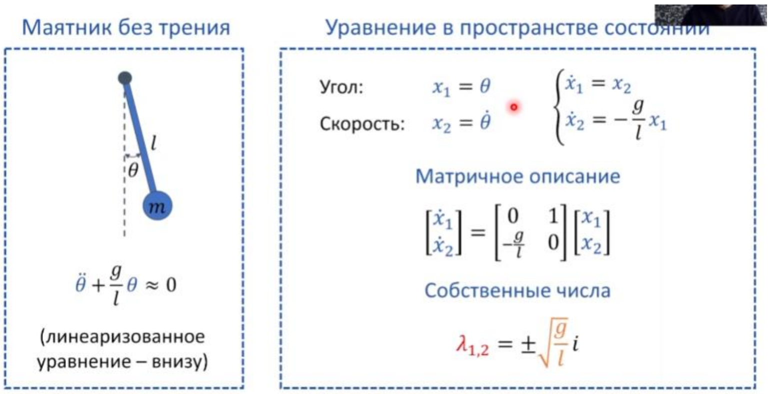
$$A_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\pi & 0\end{pmatrix}, \lambda_1 = \frac{\pi}{2}\mathbb{i}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}-0{,}56\mathbb{i}\\ 1\end{pmatrix}, \lambda_2 = -\frac{\pi}{2}\mathbb{i}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0{,}56\mathbb{i}\\ 1\end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\pi & -7\end{pmatrix}, \lambda_1 = -6{,}52, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}-0{,}15\\ 1\end{pmatrix}, \lambda_2 = -0{,}48, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-2{,}07\\ 1\end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \pi & 0\end{pmatrix}, \lambda_1 = \frac{\pi}{2}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}0{,}56\\ 1\end{pmatrix}, \lambda_2 = -\frac{\pi}{2}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-0{,}56\\ 1\end{pmatrix};$$

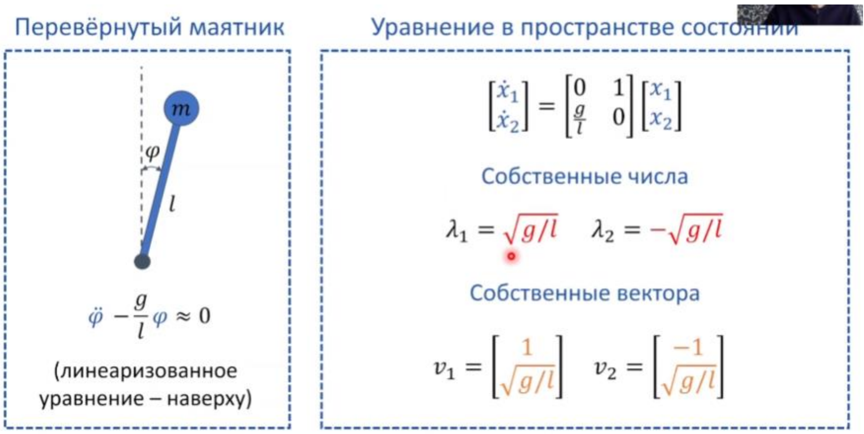
$$A_4 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \pi & -7\end{pmatrix}, \lambda_1 = -7{,}42, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}-0{,}13\\ 1\end{pmatrix}, \lambda_2 = 0{,}42, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2{,}36\\ 1\end{pmatrix};$$

Первое – это фигура Лиссажу, соответственно, и система такой будет. Кто делал 3.00 по физике, сразу узнает графики синусоид от времени и самой фигуры. А так-то типичнейший линеаризованный маятник без трения.



Второе – дороги, ведущие в Рим, а вернее, те, кто по ним идут и чертят ботинками гладкие кривые, приходящие в 0. Или маятник с трением, кому что роднее.

Третья система – вероятно, «какой-нибудь» линеаризованный у верхнего положения маятник подошёл бы.



Четвёртая – система, для описания которой отлично подойдёт несчастный маятник с трением, линеаризованный около верхнего положения (картинки нет). Ни в коем случае не путать с третьей

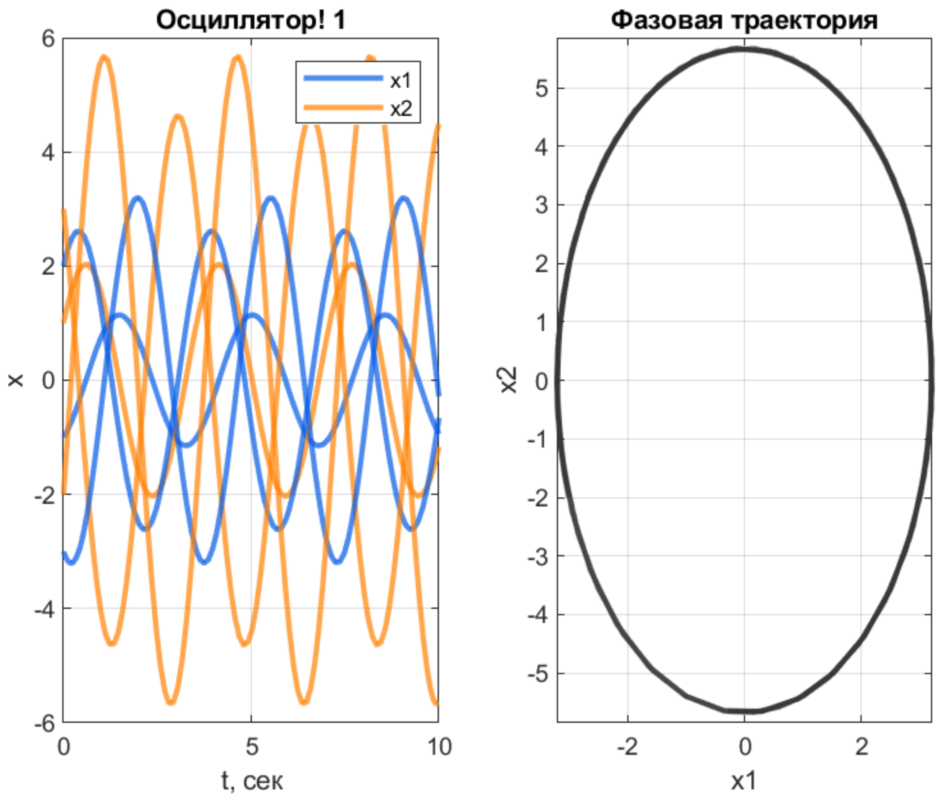


Рис.19 визуализация осциллятора? 1

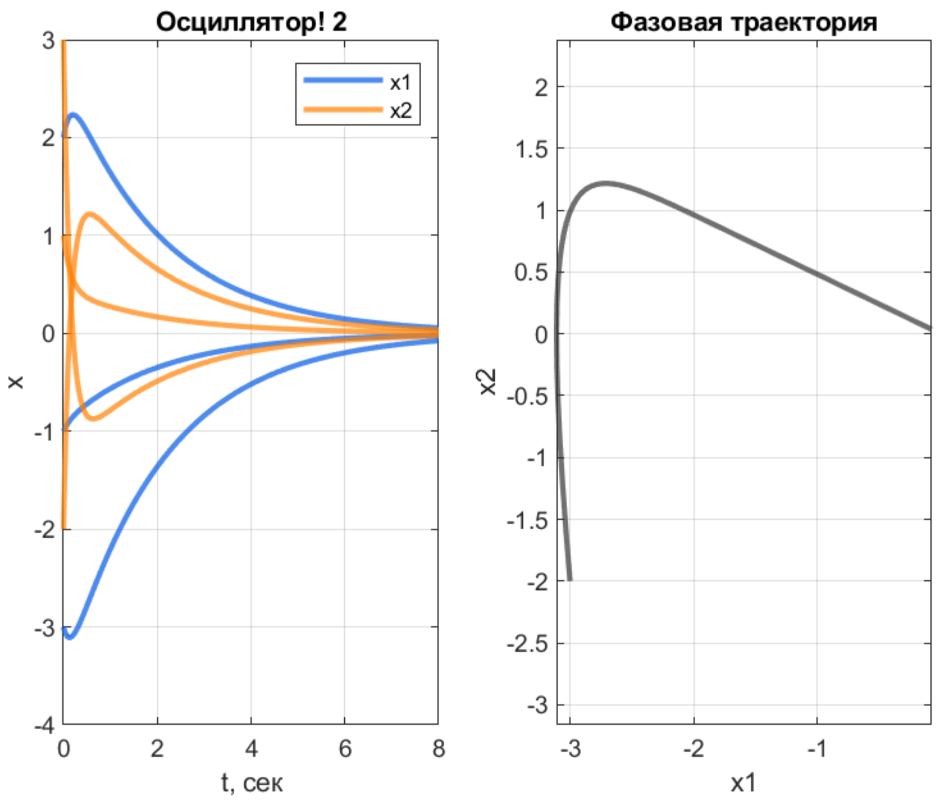


Рис.20 визуализация осциллятора? 2

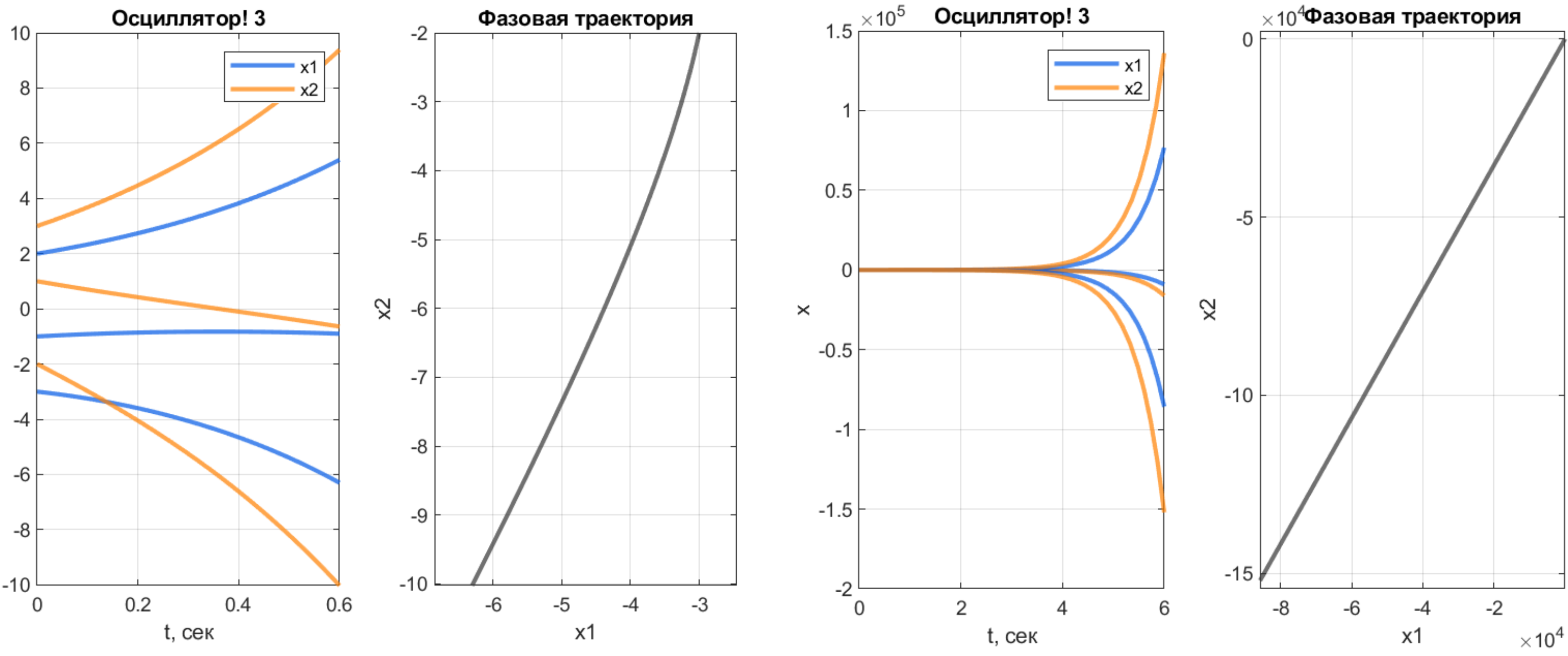


Рис.21 визуализация осциллятора? 3

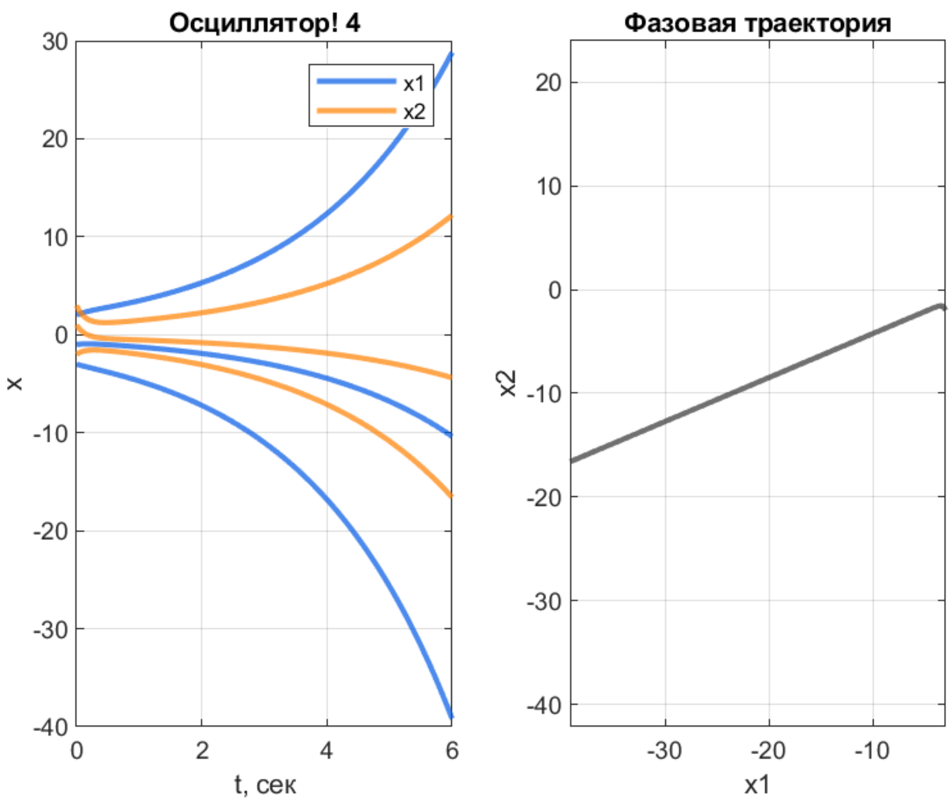


Рис.22 визуализация осциллятора? 4

Также на малом временном интервале можно неумышленно наивно полагать, что фазовый портрет третьего случая не прямая, но, если дать больше времени, он выпрямит спину. С чем связано такое поведение: у меня нет опции дать себе время на подумать, скоро очень срок сдачи, сил тоже нет, мотивации нет, и вообще, не то чтобы с каждым днём растёт настроение...

Первая устойчива и вращается, о чём красноречиво на этапе записи матрицы говорят числа разных знаков по побочной диагонали.

Вторая асимптотически устойчива.

Третью и крайнюю недопустимо описывать термином «устойчивы», скорее, наоборот. Они неустойчивы.

Интерпретировать переменные x1 и x1 в виде начальных условий вполне естественно для нас, учащихся на курсе практической линейной алгебры, конкретизируя, x1 и x2 в понимании линейных алгебраиков есть одна измеряемая величина и её динамика первого порядка соответственно. А является, в случае примеров с маятником, отношение g к длине. Б – трение, антитрение, ускорение или антиускорение, суть динамика второго порядка от той величины, что мы задали для изучения.

В любом случае, системы разобраны, матрицы придуманы, поведение проанализировано.

Да прибудет с нами сила