Лабораторная работа №2

Практическая линейная лагебра

Андрей Зелепугин

2023

Оглавление

ЗАДАНИЕ 1

Подготовился

Придумал числа a, b, c, d, прочитав задание, так, чтобы было легче. Получил

a=2, b=1/2, c=9, d=3

Придумал

1. Отражение (симметрию) плоскости относительно прямой y = ax, в моём случае относительно y = 2x. Сделать это было нетрудно со знанием того, что вектор $\binom{1}{2}$ после умножения матрицы на него перейдет в себя, умноженного на какой-либо ненулевой коэффициент, для определённости, на 1, то есть в вектор $\binom{1}{2}$, а раз мы задаём симметрию, то проще всего вторым вектором рассмотреть ортогональный данной прямой, то есть $\binom{2}{-1}$ станет $\binom{-2}{1}$, который я умножил на 1, как удобный представитель чисел, больших 0, ибо при умножении на <0, симметрия уйдёт. Решив такую систему уравнений, получил
$$A_1 = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$
2. Отображение всей плоскости в прямую y = bx, у меня y = 0.5x. Действовал иначе: сказал, что есть две λ: одна 0, другая 1, для 0 выбираю то направление, которое схлопнется, для 1 - вектор на прямой y = 0.5x, т. е. $\binom{2}{1}$, ищу обратную матрицу к той, в которой записаны вектора и перемножаю все три. Получил
$$A_2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$
3. Раз уж я предусмотрительно взял c = 9, то и повернуть плоскость мне предстояло на 90° против часовой стрелки.
$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
4. Центральную симметрию плоскости относительно начала координат, то есть такую штуку, чтобы $\binom{1}{0}$ ушёл в $\binom{-1}{0}$ (я снова беру 1 как коэффициент (так можно, это не числа a, b, c, d)), аналогично бы поступил $\binom{0}{1}$. По строкам записываю новые координаты, получаю
$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
5. Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой y = ax, потом поворот на 10d (30) градусов по часовой стрелке. Раз сначала симметрия, а потом поворот, то нужно перемножить матрицы в таком порядке, что справа будет матрица симметрии, а слева – поворота, то есть
$$A_5 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0.5 \\ -0.5 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.12 & 1 \\ 1 & 0.12 \end{pmatrix}.$$
6. Отображение, которое переводит прямую y = 0 в y = 2x и прямую x = 0 в y = 0,5x. Нетрудно догадаться, что действовать для успеха стоит примерно также, как в первых двух заданиях. Прямая y = 0 – это линейные комбинации вектора $\binom{1}{0}$, который долен перейти в $\binom{2}{1}$, а базис прямой x = 0 – это $\binom{0}{1}$. Соответственно, оно превращается в элегантные $\binom{1}{2}$. Выписываем построчно эти координаты, получаем такую матрицу: $A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Отображение, которое переводит прямую y = 2x в y = 0 и прямую y = 0,5x в x = 0. Нетрудно догадаться, что это ровно противоположное действие от оного в п.6. Значит, ищу обратную матрицу: $A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

8. Отображение, которое меняет местами прямые y = ax и y = bx, т. е. y = 2x и y = 0,5x. Для наглядности покажу, какую именно систему я решаю:

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12} = 2, \\ a_{21} + 2a_{22} = 1, \\ 2a_{11} + a_{12} = 1, \\ 2a_{21} + a_{22} = 2. \end{cases} \text{Отсюда} \begin{cases} a_{11} = 2 - 2a_{12}, \\ a_{21} = 1 - 2a_{22}, \\ 4 - 4a_{12} + a_{12} = 1, \\ \cancel{2} - 4a_{22} + a_{22} = \cancel{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 0, \\ a_{21} = 1, \\ a_{21} = 1, \\ a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тут я, конечно, усмехнулся, потому что вспомнил, что специально выбирал эти прямые симметричными относительно y = x, так что возыметь такой результат было весьма предсказуемо.

9. Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади c (9). Важно заметить, что кругу следует остаться кругом. Далее вспоминаем, за что отвечает определитель, смело пользуемся тем, что я выбрал 9, которое квадрат 3 и пишем:

$$A_9 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, detA_9 = 9$$

10. Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в не круг площади d (3). В этом задании важно, чтобы во взаимно ортогональных направлениях наблюдалась разная по величине деформация пространства, и да, говоря о площади в $\mathbb{R}^2$, мы, конечно же подразумеваем невырожденные матрицы.

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 14 & \frac{1}{9} \\ 99 & 1 \end{pmatrix}, detA_{10} = 3.$$

11. Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой y = 0 или y = x. Чтобы с гарантией задать такое отображение, нужно всего лишь утром выполнить… Просмотр практики по линалу, где мы сказали, что у симметричных матриц собственные вектора ортогональны, а чтобы не лежали на вышеупомянутых прямых поставить на главной диагонали различные числа

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов. Беру диагональную матрицу с одинаковыми числами на ней и ставлю число сверху справа.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задаётся вещественной матрицей). Зная, что за комплексную часть отвечает побочная диагональ,

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -99 \\ 99 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.

$$A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Пару отображений, последовательное применение которых даёт различные результаты в зависимости от порядка: AB $\neq$ BA.

$$\mathrm{A}_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{15} = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}_{15} \cdot B_{15} = \begin{pmatrix} 21 & -21 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -3 & -12 \\ 6 & 24 \end{pmatrix} = B_{15} \cdot A_{15}$$

16. Пару отображений, последовательное применение которых даёт одинаковый результат независимо от порядка: AB = BA. Постарался, чтобы матрицы A и B были максимально непохожими друг на друга.

$$\mathrm{A}_{16} = \begin{pmatrix} 1568 & -777 \\ 1984 & 65{,}241 \end{pmatrix}, B_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ЗАДАНИЕ 2

Проанализировал

Нашёл образ и ядро придуманных мной отображений из пунктов 1, 2, 13, 14. Где указал вектор – это один из вариантов базисного вектора.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -99 \\ 99 & 0 \end{pmatrix}, A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $im(A_1) = \mathbb{R}^2, ker(A_1) = \vec{\mathbb{0}},$
2. $im(A_2) = \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, ker(A_1) = \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$
13. $im(A_{13}) = \mathbb{R}^2, ker(A_{13}) = \vec{\mathbb{0}},$
14. $im(A_{14}) = \vec{\mathbb{0}}, ker(A_{14}) = \mathbb{R}^2$

Нашёл собственные числа и собственные вектора придуманных вами отображений из пунктов 1-4, 8, 11- 16. Так как в форме разложения представлять красивее, делал это так, где возможно.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix};$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = \mathbb{i}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -\mathbb{i}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix};$
4. $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = -1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$
8. $A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 1, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$
11. $A_{11} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 0.53, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -0.24 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 9.47, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4.24 \\ 1 \end{pmatrix};$
12. $A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$
13. $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -99 \\ 99 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 99\mathbb{i}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -99\mathbb{i}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix};$
14. $A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 0, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 458 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 854 \end{pmatrix}.$
15. $A_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix};$

    $B_{15} = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \lambda_1 = -3 - 7{,}35\mathbb{i}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1.22\mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -3 + 7{,}35\mathbb{i}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1.22\mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix};$

    $A_{15} \cdot B_{15} = \begin{pmatrix} 21 & -21 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 21, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

    $B_{15} \cdot A_{15} = \begin{pmatrix} -3 & -12 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 21, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 0, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix};$
16. $A_{16} = \begin{pmatrix} 1568 & -777 \\ 1984 & 65{,}241 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 816{,}62 - 988{,}43\mathbb{i}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}38 - 0{,}5\mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix},$

    $\lambda_2 \approx= 816{,}62 + 988{,}43\mathbb{i}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}38 + 0.5\mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix}$

    $A_{15} \cdot B_{15} = B_{15} \cdot A_{15} = B_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2: \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$

Нашёл определитель матриц из пунктов 1-5, 9, 10.

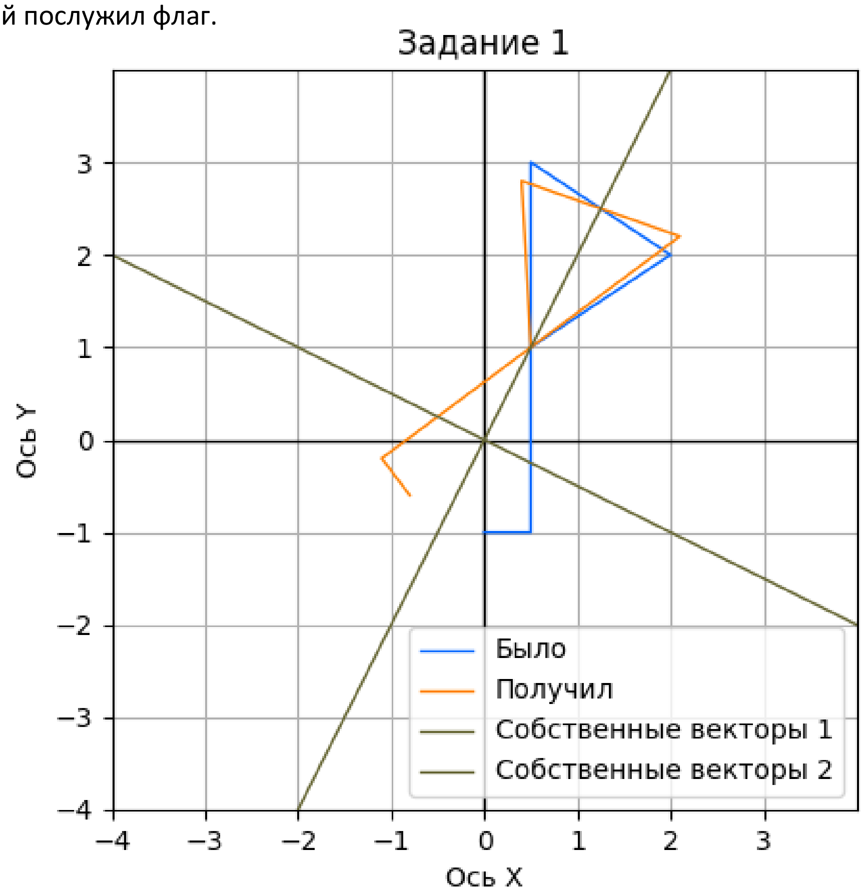
1. $det A_1 = \begin{vmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{vmatrix} = -1,$
2. $det A_2 = \begin{vmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,$
3. $det A_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$
4. $det A_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$
5. $det A_5 = \begin{vmatrix} -0.12 & 1 \\ 1 & 0.12 \end{vmatrix} \approx -1,$
9. $det A_9 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9,$
10. $det A_{10} = \begin{vmatrix} 14 & \frac{1}{9} \\ 99 & 1 \end{vmatrix} = 3,$

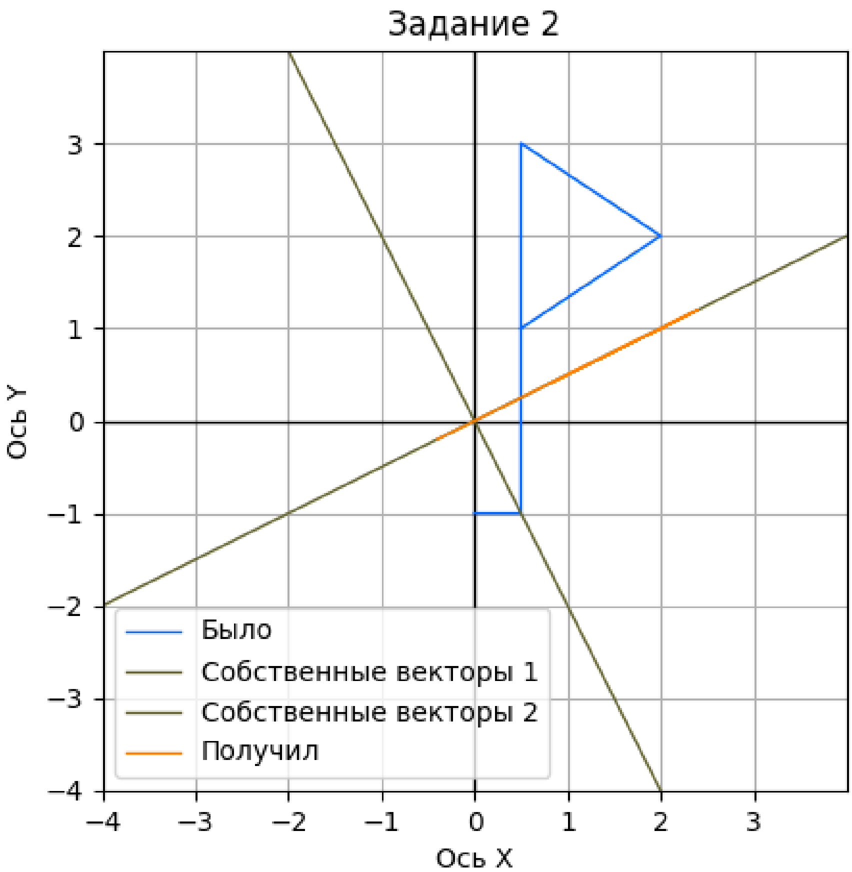
Матрица получается симметричной в 1, 4, 5.

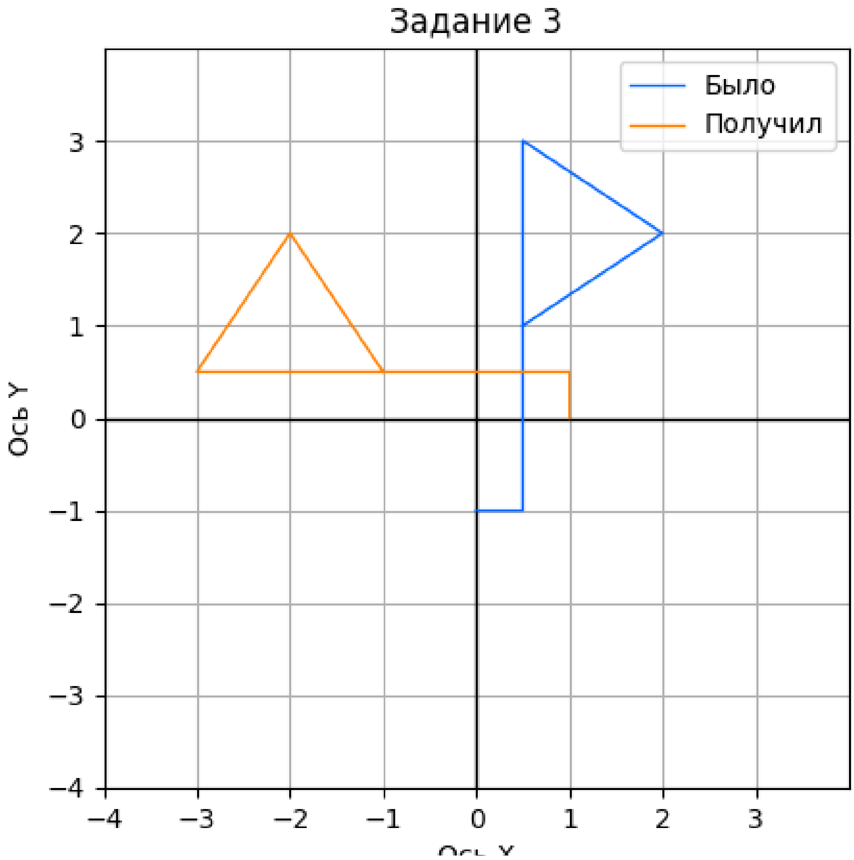
ЗАДАНИЕ 3

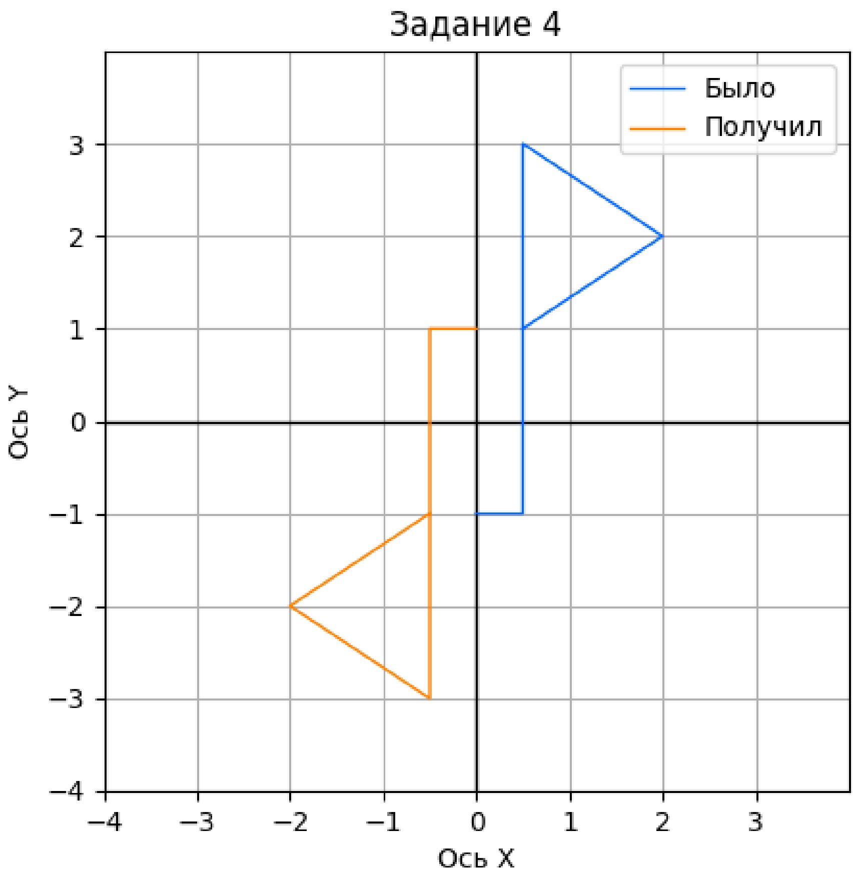
Визуализировал

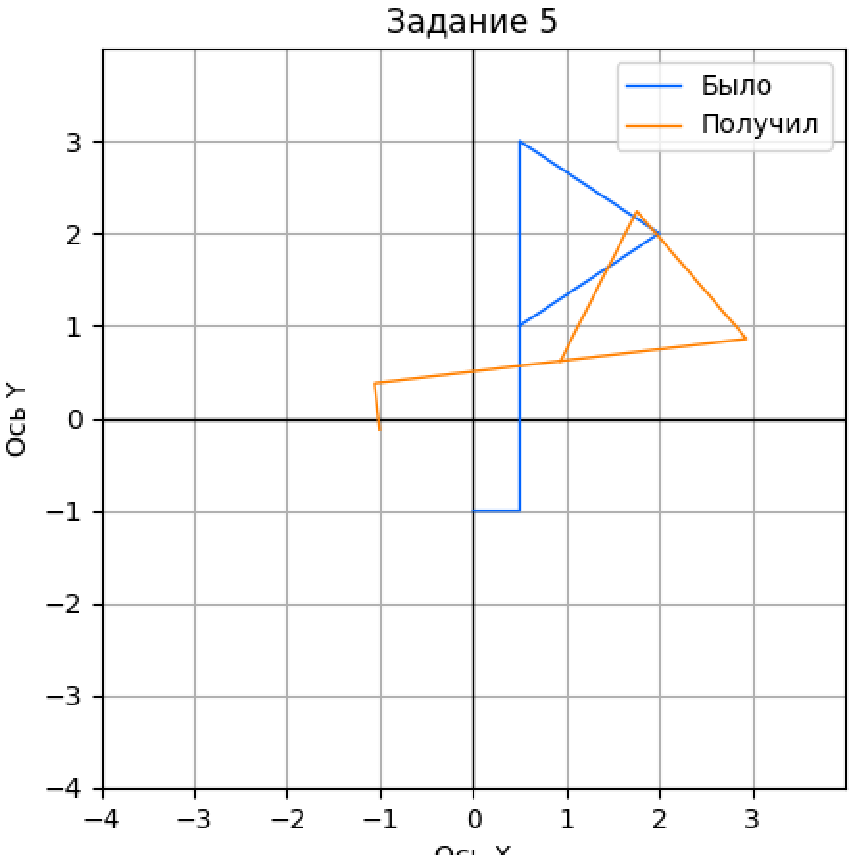
Фигурой послужил флаг.

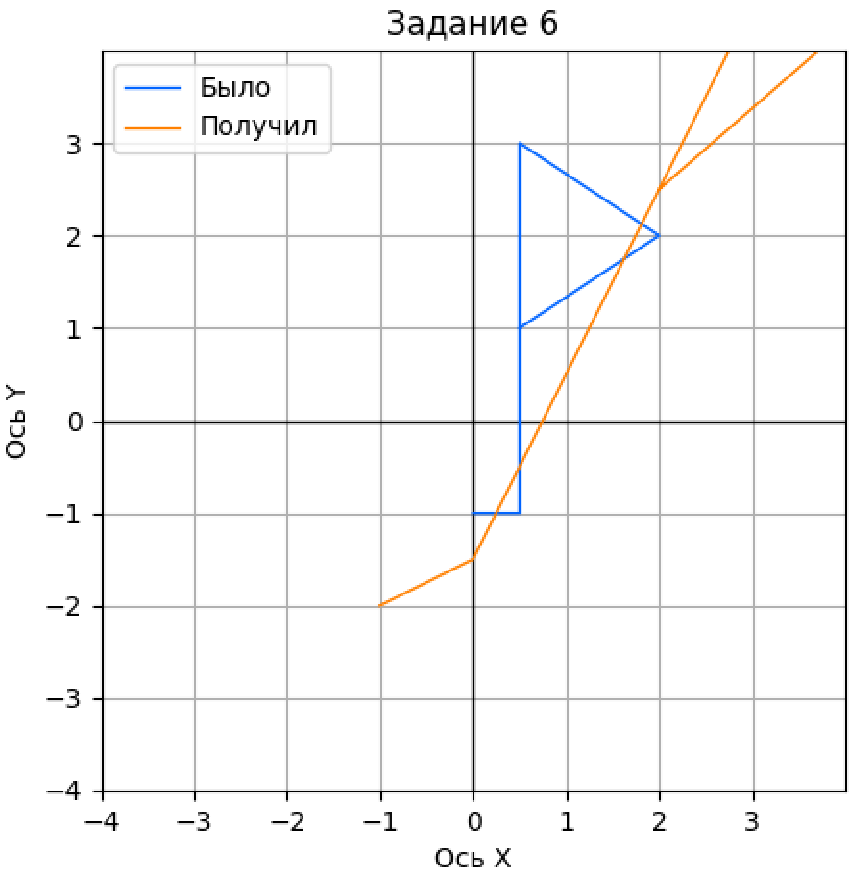




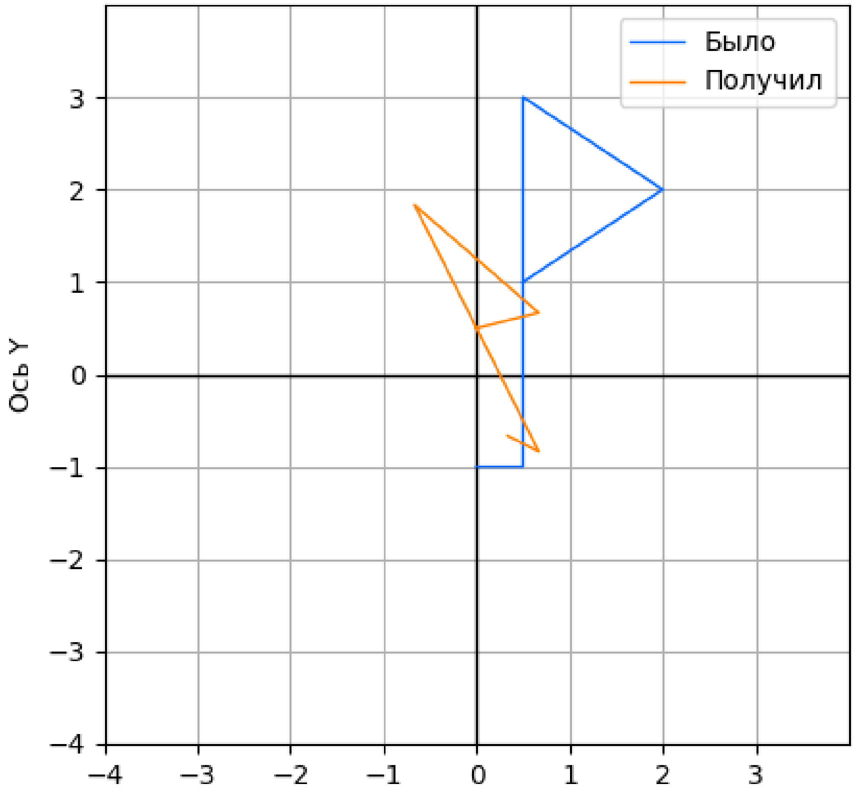

Задание 3
Было
Получил
Ось Y
Ось X


Задание 4
Было
Получил
Ось Y
Ось X

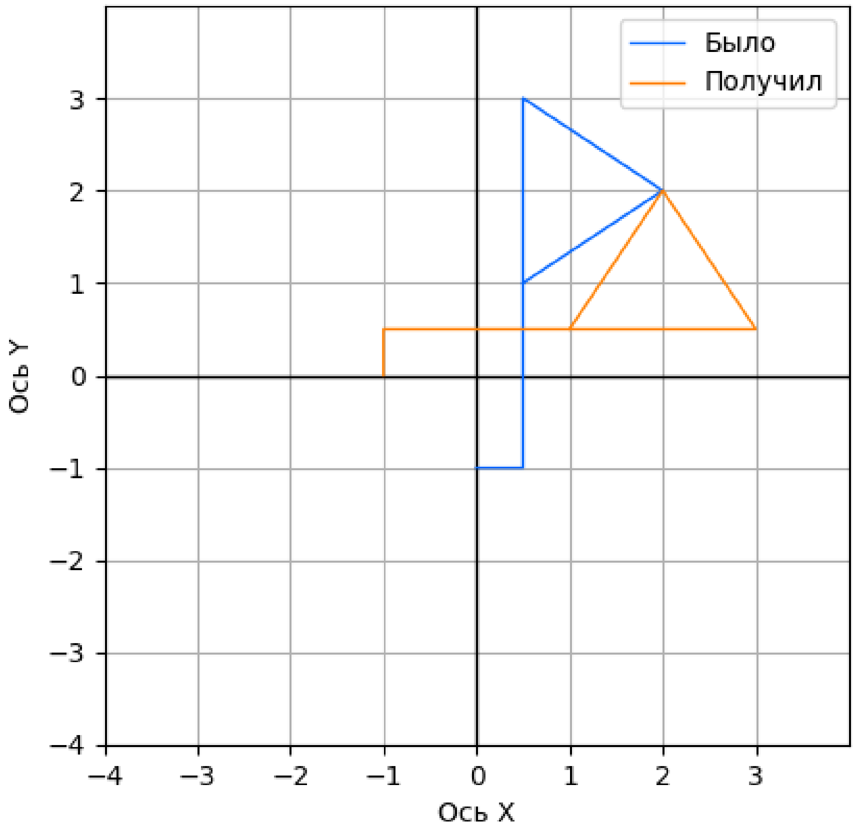

Задание 5
Было
Получил
Ось Y
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

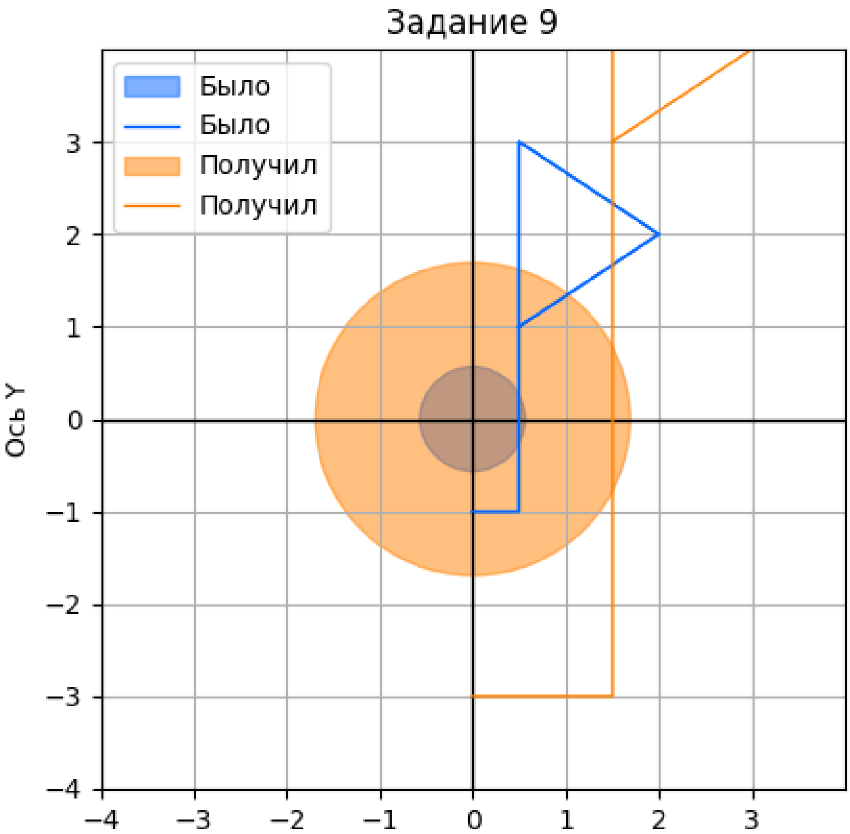

Задание 6
Было
Получил
Ось Y
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
Ось X

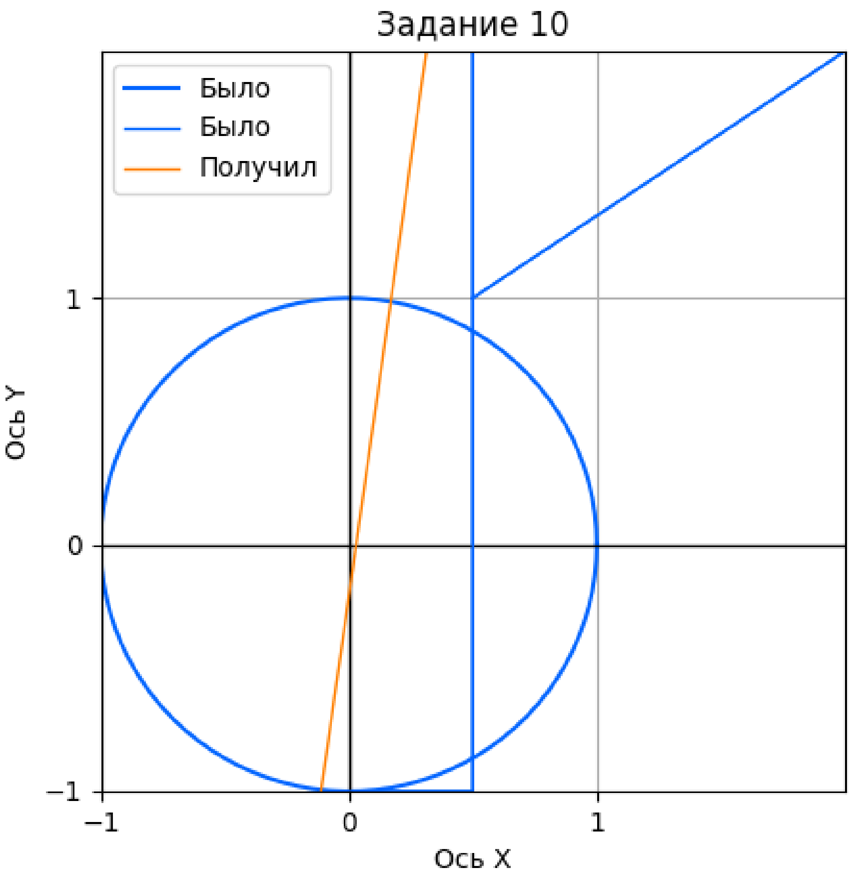
Задание 7

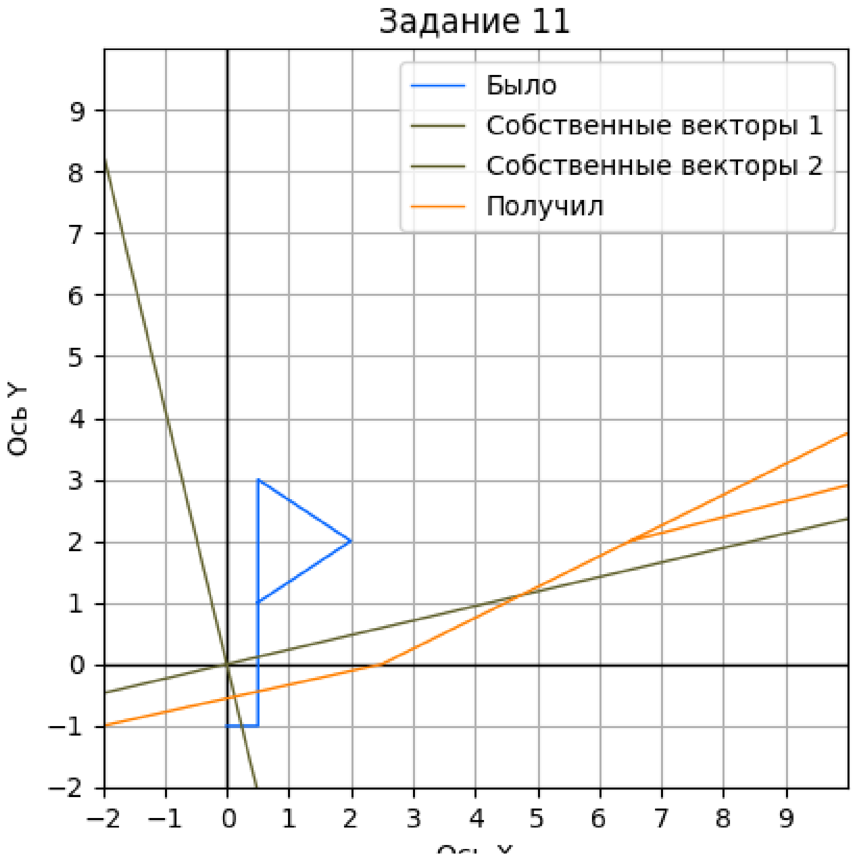


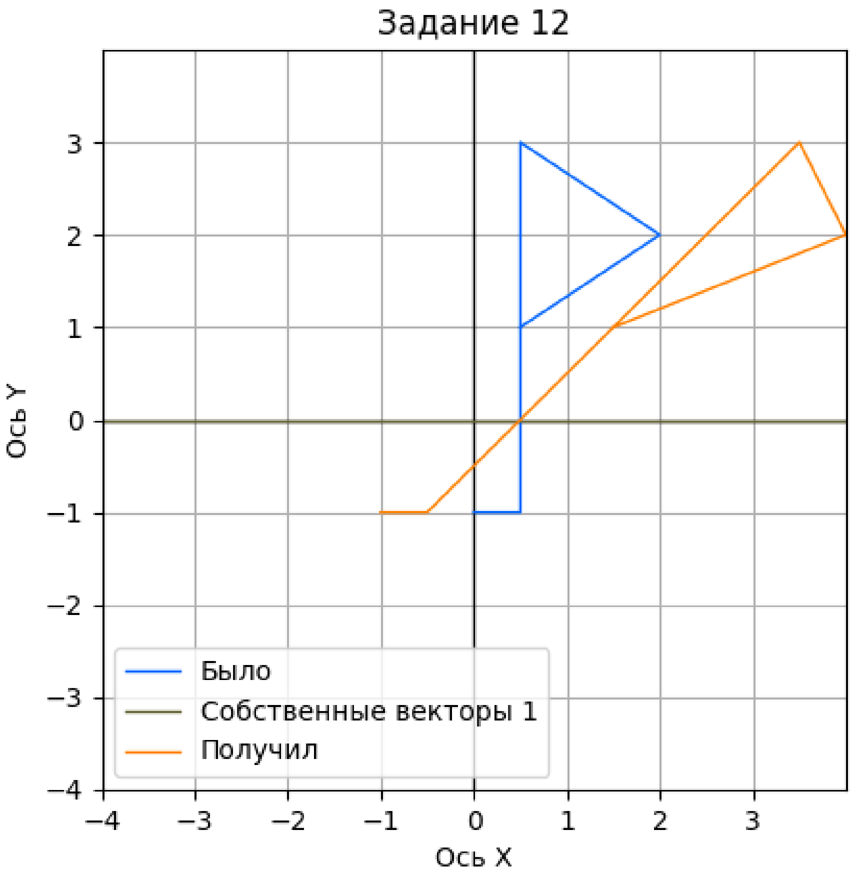
Задание 8

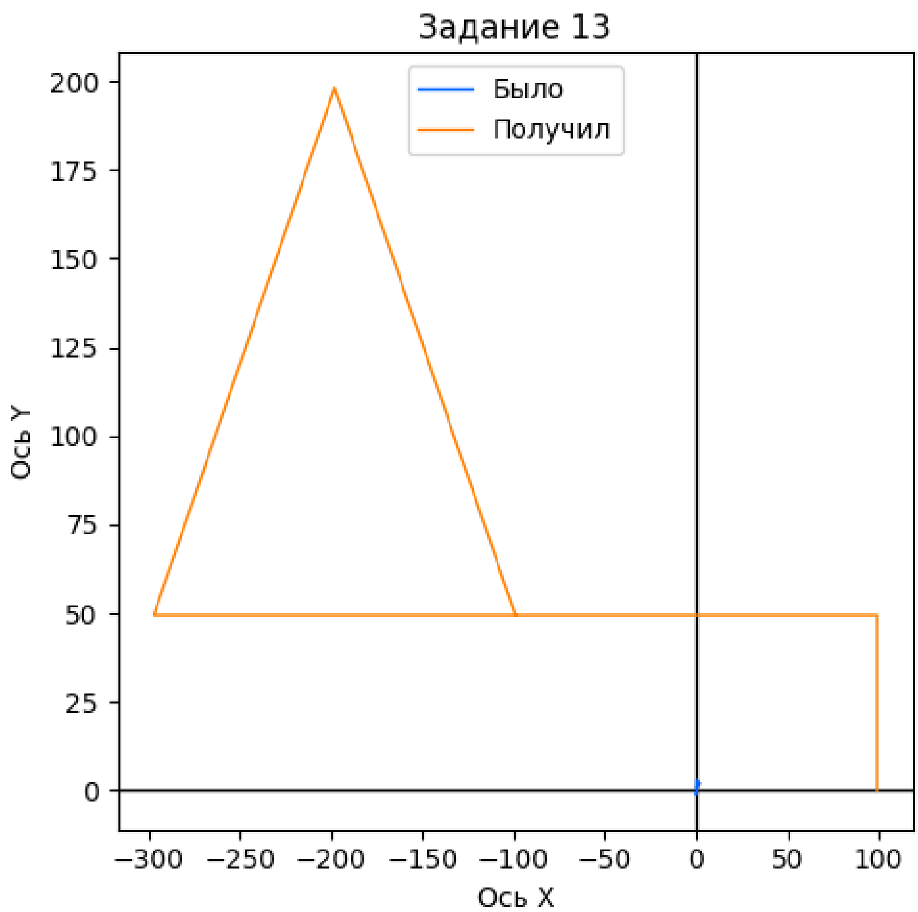


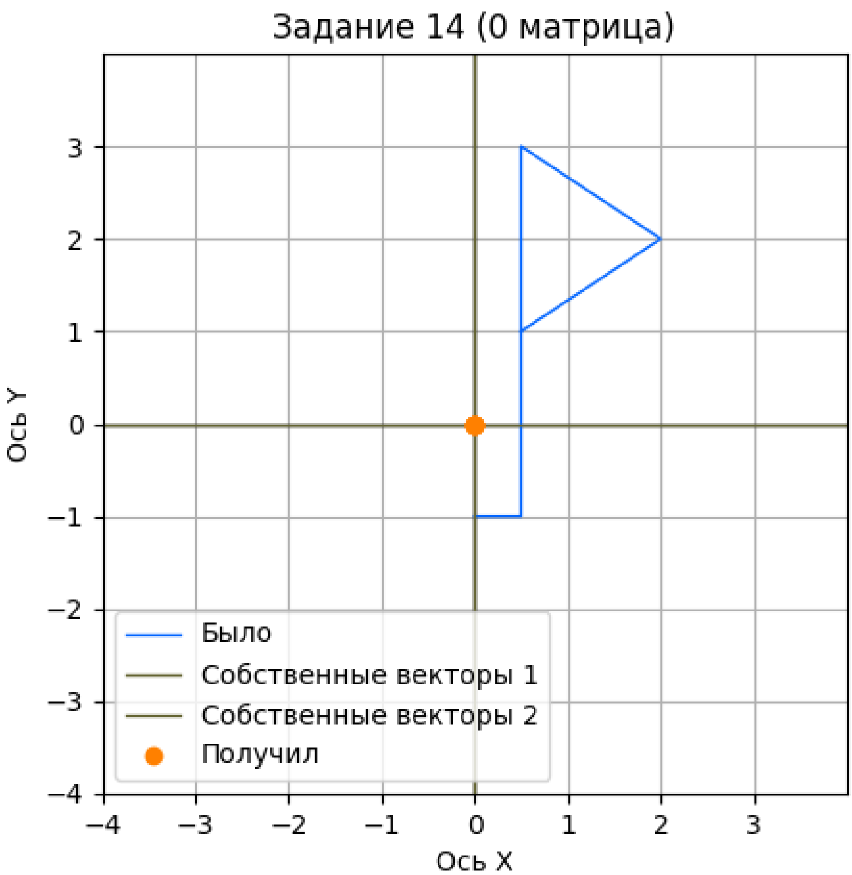

Задание 9
Было
Было
Получил
Получил
Ось Y
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3


Задание 10
Было
Было
Получил
Ось Y
1
0
−1
−1
0
1
Ось X


Задание 11
Было
Собственные векторы 1
Собственные векторы 2
Получил
Ось Y
Ось X

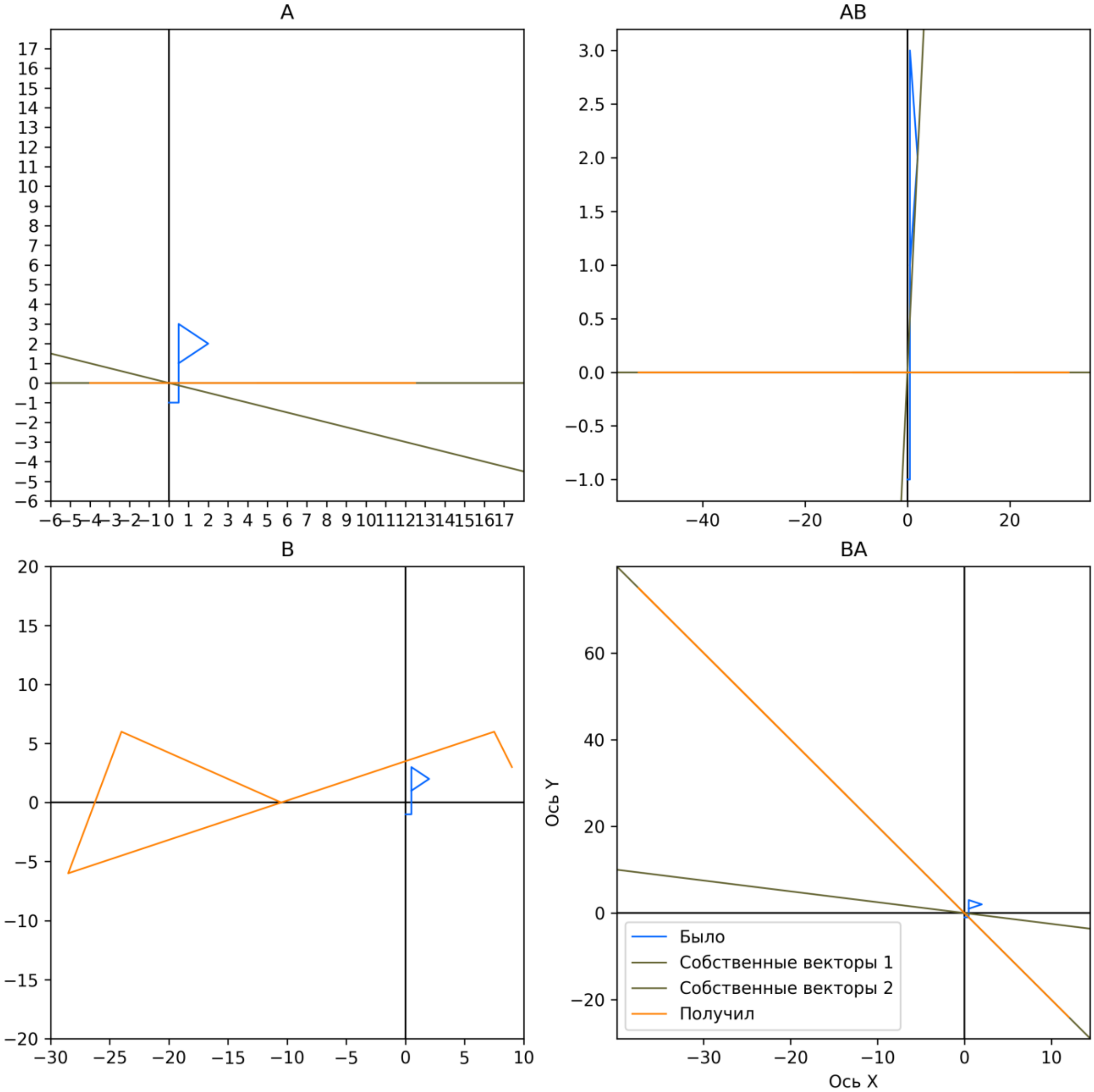

Задание 12
Было
Собственные векторы 1
Получил
Ось Y
Ось X


Задание 13
Было
Получил
200
175
150
125
100
75
50
25
0
Ось Y
−300
−250
−200
−150
−100
−50
0
50
100
Ось X


Задание 14 (0 матрица)
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
Ось Y
Было
Собственные векторы 1
Собственные векторы 2
Получил
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
Ось X

В 15 я честно поленился рисовать комплексные собственные вектора у B_{15}:

$$B_{15} = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \lambda_1 = -3 - 7{,}35\mathbb{i}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1.22\mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -3 + 7{,}35\mathbb{i}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1.22\mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Фычв

В задании 16 у матрицы A_{16} тоже получились комплексные собственные векторы, так что их я не рисовал. У остальных матриц, которые суть нулевые можно выбрать любые два ЛНЗ вектора и нельзя будет оспорить, что они собственные, просто потому, что $\mathbb{0}$ матрица всё пространство по любым направлениям сжимает в точку. Также прошу обратить внимание, что у матрицы A_{16} это не я из ничего получил флажок, а в масштабе 4000 по каждой из осей флаг неотличим от точки.