Hausaufgabenblatt 1

Lineare Algebra 1 WS 22/23

Eingereicht von Yuchen Guo (Matr.Nr. 480788) und Meng Zhang (Matr.Nr. 484981).
Tutor*in: Name

Aufgabe 1.1

(i)

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3$ und zeigen die Gleichung $S(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ durch vollständige Induktion.

(i) Induktions-Anfang $n = 0$.

Es ist $S(0) = 0$ und $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$, also gilt die Formel für $n = 0$.

(ii) Induktions-Schritt $n \to n + 1$. Wir nehmen an, dass $S(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ (Induktions-Voraussetzung) und müssen zeigen, dass daraus die Formel $S(n+1) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ folgt.

Dies sieht man so:

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 && \text{Induktions-Voraussetzung} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

□

(ii)

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $S(n) = \prod_{k=1}^{n} k^k$ und zeigen die Ungleichheit $S(n) \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ durch vollständige Induktion.

(i) Induktions-Anfang $n = 1$.

Es ist $S(1) = 1$ und $n^{\frac{1(1+1)}{2}} = 1$, also gilt die Formel für $n = 1$.

(ii) Induktions-Schritt $n \to n + 1$.

Wir nehmen an, dass $S(n) \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ (Induktions-Voraussetzung) und müssen zeigen, dass daraus die Formel $S(n+1) \leq (n+1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ folgt.

Dies sieht man so:

$$
\begin{aligned}
S(n+1) &= S(n) \cdot (n+1)^{(n+1)} \\
&\leq n^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{(n+1)} && \text{Induktions-Voraussetzung} \\
&= n^{\frac{n^2+n}{2}} (n+1)^{(n+1)} \\
&= n^{\frac{n^2}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot (n+1)^n \cdot (n+1) \\
&< (n+1)^{\frac{n^2}{2}} \cdot (n+1)^{\frac{n}{2}} \cdot (n+1)^n \cdot (n+1) && \text{Lemma Aufgabe 1.1.ii.1} \\
&= (n+1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung $n(n+1)$ und $(n+1)(n+2)$ sind durch 2 teilbar.
Lemma Aufgabe 1.1.ii.1 Für alle $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$n^k < (n+1)^k.$$

Beweis. Diese Behauptung folgt aus der Anordnungs-Axiome, nämlich:

$$0 \leq x < y \quad \text{und} \quad 0 \leq a < b \implies ax < by.$$

(i) Induktions-Anfang $k = 1$.

Es ist $n^1 < (n+1)^1$, also gilt die Formel für $k = 1$.

(ii) Induktions-Schritt $k \to k+1$.

Wir nehmen an, dass $n^k < (n+1)^k$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ (Induktions-Voraussetzung) und müssen zeigen, dass daraus die Formel $n^{k+1} < (n+1)^{k+1}$ folgt.

$$
\begin{aligned}
n^{k+1} &= n^k \cdot n \\
&< n \cdot (n+1)^k \\
&< (n+1) \cdot (n+1)^k \\
&= (n+1)^{k+1}
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 1.2

(i)

Zuerst formen wir die Aussage explizit in Form $A \implies B$ um.
A: n ist eine natürliche Zahl.
B: n und $n+1$ sind teilerfremd.

Beweis. Die Beweisführung erfolgt nach der Methode des Widerspruchsbeweises, das heißt, es wird gezeigt, dass die Annahme, die natürliche Zahlen n und $n+1$ nicht teilerfremd sind, zu einem Widerspruch führt. Angenommen, dass n und $n+1$ nicht teilerfremd sind und es somit einer Teiler $k \in \mathbb{N}$ gibt. Seien $p, q \in \mathbb{N}$, dann gilt $n = p \cdot k$ und $n + 1 = q \cdot k$. Insbesondere,

$$(n+1) - n = (p-q) \cdot k = 1$$

Es existiert aber nur eine Lösung in der Menge der natürlichen Zahlen, die diese Gleichung erfüllt, nämlich

$$p - q = 1 \quad \wedge \quad k = 1.$$

Daraus folgt, dass $k = 1$ gilt und im Widerspruch zur Annahme n und $n+1$ teilerfremd sind. □

(ii)

A: Es gibt keine zwei natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$.
B: $a^2 - b^2 = 10$.

Beweis. Es gilt für alle $a, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, die Aussagen

$$(a+k)^2 - a^2 > (a+1)^2 - a^2 \tag{1}$$

$$(a+1)^2 - a^2 > a^2 - (a-1)^2 \tag{2}$$

Aus (1) folgt, dass $a^2 - b^2$ ist genau dann minimum, wenn $b = a - 1$ ist. Aus (2) folgt, dass je größer a ist, desto größer $a^2 - b^2$ ist. Es gilt $6^2 - 5^2 = 11$ und $5^2 - 4^2 = 9$. Wir wissen auch von (1) und (2), dass für alle andere Kombinationen von zwei natürlichen Zahlen, die Differenz ihrer Quadrate immer größer als 11 oder kleiner als 9 ist. Deshalb gibt es keine zwei natürlichen Zahlen, sodass die Differenz ihrer Quadrate gleich 10 ist. □

(iii)

A: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
B: $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \vee \quad a + c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \vee \quad b + c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Die Beweisführung erfolgt nach der Methode des indirekten Beweises, das heißt, es wird gezeigt, dass die Aussage $\neg B \implies \neg A$ gilt.

Beweis. $\neg B$: Es gibt $a, b, c \in \mathbb{R}$. Die Summen $a + b$, $a + c$, $b + c$ sind rational.
$\neg A$: $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
Angenommen, $p_{1,2,3}, q_{1,2,3}$ sind ganze Zahlen, p_n und q_n sind teilerfremd.

$$
\begin{aligned}
a + b &= \frac{p_1}{q_1} \\
a + c &= \frac{p_2}{q_2} \\
b + c &= \frac{p_3}{q_3} \\
b &= \frac{1}{2}(a+b) + (b+c) - (a+c) \\
&= \frac{p_1 q_2 q_3 + p_3 q_1 q_2 - p_2 q_1 q_3}{q_1 q_2 q_3}
\end{aligned}
$$

Damit sind a, b, c rational, also $\neg A$ ist wahr. $\neg B \implies \neg A$ ist bewiesen. $\square$

Aufgabe 1.3

(i)

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	f
w	f	w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	f	f	f
f	w	w	w	w	f	w	w
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

(ii)

Aus Wahrheitstafel ...

A	B	$A \vee B$	$\neg A \wedge B$	$A \vee \neg B$	$A \wedge (A \vee B)$	$A \vee (\neg A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
w	w	w	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
f	w	w	w	f	f	w	f
f	f	f	f	w	f	f	f

... folgt:

$$
\begin{aligned}
A \wedge (A \vee B) &= A \\
A \vee (\neg A \wedge B) &= A \vee B \\
(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) &= A
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.4

A(n)	Daisy wohnt hier	Gustav schüchtern	Farbe des Autos	Geschwindigkeit
Do	w	f	r	r
Ti	f	f	g	r
Tri	f	w	b	r
Tra	f	f	b	l
Nr.	m	n	p	q

Angenommen, dass zwei Aussagen von Donald sind wahr, dann

- m, n wahr;

  dann Aussagen p, q von Tri müssen wahr sein. also w,f,b,r ist wahr. In diesem Fall hätte Don 3 wahre Aussagen gemacht.

- m, p wahr;

  dann Aussagen n, q von Tri und Tra müssen gleichzeitig wahr sein, nicht möglich.

- m, q wahr;

  dann Aussagen n, p von Tra müssen wahr sein, Don hätte 3 wahre Aussagen.

- n, p wahr;

  dann Aussagen m, q von Tri müssen wahr sein, Don hätte 3 wahre Aussagen.

- n, q wahr;

  dann wäre f f g/b r wahr. Dann hätte Ti 3 wahre Aussagen.

- p, q wahr;

  dann hätte Tri 3 wahre Aussagen gemacht.

Alle Möglichkeiten werden ausgeschlossen. Dagobert hat sich vertan.