Mulţimi de numere. Calcul algebric

Mulţimea numerelor naturale

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

Mulţimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

Mulţimea numerelor raţionale sau mulţimea fracţiilor

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;:\; p, q \in \mathbb{Z},\; q \neq 0 \right\}$$

Numerele iraţionale sunt acele numere ce nu pot fi exprimate prin fracţii. De exemplu, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}, \pi, e$.

Mulţimea numerelor raţionale împreună cu cea a numerelor iraţionale formează mulţimea numerelor reale, notată $\mathbb{R}$.

Prin introducerea numărului imaginar $i = \sqrt{-1}$ se obţine mulţimea numerelor complexe

$$\mathbb{C} = \{a + ib \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Operaţii cu numere reale

Fie a un număr real nenul. Opusul lui este numărul $-a$, inversul (răsturnatul) lui este $\frac{1}{a}$, iar modulul sau valoarea lui absolută este $|a| = \begin{cases} a & , \quad a \geq 0 \\ -a & , \quad a < 0 \end{cases}$.

Operaţiile cu numere reale sunt adunarea şi înmulţirea, scăderea fiind adunarea cu opusul, $a - b = a + (-b)$, iar împărţirea fiind înmulţirea cu inversul, $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$. Ridicarea la putere este o înmulţire repetată, $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, de $n-$ori.

Să reamintim câteva din proprietăţile acestor operaţii.

1) 0 este *element neutru pentru adunare*: $a + 0 = a,\ \forall a$.
2) 1 este *element neutru pentru înmulţire*: $a \cdot 1 = a,\ \forall a$.
3) *comutativitatea*: $a + b = b + a$, respectiv $a \cdot b = b \cdot a,\ \forall a, b$.
4) *asociativitatea*: $(a + b) + c = a + (b + c)$, respectiv $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),\ \forall a, b, c$;
5) *distributivitatea*: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ \forall a, b, c$, de unde rezultă

$$(a + b)(x + y) = a \cdot x + a \cdot y + b \cdot x + b \cdot y,$$

respectiv *factorul comun forţat*

$$a + b = c \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right).$$

E. a) $(n+2)(n^2-n) = n\cdot n^2 + n\cdot(-n) + 2n^2 + 2(-n) = n^3 - n^2 + 2n^2 - 2n =$ $= n^3 + n^2 - 2n$ (folosind şi proprietaţile puterilor, regula semnelor la înmulţire, respectiv reducerea termenilor asemenea);

b) factor comun forţat n : $2n+3 = n\left(\frac{2n}{n} + \frac{3}{n}\right) = n\left(2 + \frac{3}{n}\right)$.

T. a) Calculaţi $(n+1)(n+2)$ (**R:** n^2+3n+2);
b) Daţi factor comun forţat "n la puterea cea mai mare" în expresia n^2+3n+2 (**R:** $n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)$).

6) *ordinea efectării operaţiilor*: ridicarea la putere, înmulţirea(împărţirea), adunarea(scăderea); dacă în calcule avem şi paranteze, atunci mai întâi se efectuează operaţiile din paranteze, în ordinea precizată mai sus.
7) *regula semnelor*:

$(-)+(-) = -(adunare)$	**E.** $-2-3 = (-2)+(-3) = -(2+3) = -5$
$(+)+(-) = -(scădere)$	**E.** $2-3 = 2+(-3) = -(3-2) = -1$
$(-)\cdot(-) = (+)$	**E.** $(-2)\cdot(-3) = +6 = 6$
$(-)\cdot(+) = (-)$	**E.** $(-2)\cdot 3 = -6$
$(-)^{par} = (+)$	**E.** $(-3)^2 = +3^2 = 9$
$(-)^{impar} = (-)$	**E.** $(-2)^3 = -(2^3) = -8$.

8) *operaţii cu puteri*: $a, b, n > 0$

$$0^n = 0\ ;\quad 1^p = 1 \qquad a^0 = 1\ ;\quad a^1 = a\quad ;\quad a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$
$$a^p\cdot a^q = a^{p+q} \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^p : a^q = a^{p-q}$$
$$(a^p)^q = a^{p\cdot q} \qquad (a\cdot b)^p = a^p\cdot b^p$$

E. $(3^4\cdot 3^6) : (3^3)^4 = 3^{4+6} : 3^{3\cdot 4} = 3^{10} : 3^{12} = 3^{10-12} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

9) *operaţii cu fracţii*:

- *amplificarea*: ${}^{n/}\frac{a}{b} = \frac{n\cdot a}{n\cdot b}$ (înmulţirea cu acelaşi număr nenul a numărătorului şi numitorului);

E. Amplificând cu 3 fracţia $\frac{2}{5}$ se obţine $\frac{3\cdot 2}{3\cdot 5} = \frac{6}{15}$.

- *simplificarea*: $\frac{n\cdot a}{n\cdot b}^{\backslash n} = \frac{a}{b}$ (împărţirea numărătorului şi a numitorului la acelaşi număr nenul)

E. Fracţia $\frac{15}{9}$ se poate simplifica cu 3: $\frac{15}{9} = \frac{\cancel{3}\cdot 5}{\cancel{3}\cdot 3} = \frac{5}{3}$.

Simplificarea unei fracţii se face numai dacă numărătorul şi numitorul pot fi scrişi sub formă de produs. O fracţie ce nu se mai poate simplifica se numeşte *ireductibilă*. **Nu** putem simplifica o fracţie dacă la numărător sau numitor este o sumă (Mai întâi se efectuează acea sumă sau se dă factor comun).

E. a) Este greşită simplificarea cu 6 în fracţia $\frac{6+2n}{6}$. Dar, dând factor comun la numărător

pe 2, avem $\dfrac{6+2n}{6}=\dfrac{2(3+n)}{2\cdot 3}=\dfrac{3+n}{3}$, după simplificarea cu 2.
Fracţia rezultată nu mai poate fi simplificată.

b) În fracţia $\dfrac{3x+12y}{x+4y}$ **nu** putem simplifica x cu x sau y cu y. Dar, dând factor comun, avem $\dfrac{3x+12y}{x+4y}=\dfrac{3(x+4y)}{x+4y}=\dfrac{3}{1}=3$, după simplificarea cu $x+4y$.

T. Simplificaţi, dacă se poate, următoarele fracţii:

a) $\dfrac{12}{18}$ (**R:** $\dfrac{2}{3}$); *b*) $\dfrac{5+6}{5}$ (**R:** $\dfrac{11}{5}$); *c*) $\dfrac{n^2+n}{2n+2}$ (**R:** $\dfrac{n}{2}$).

- *adunarea*: $\dfrac{p}{r}\pm\dfrac{q}{r}=\dfrac{p\pm q}{r}$

Observăm că fracţiile trebuie să aibă acelaşi numitor; dacă nu au, fracţiile se aduc la acelaşi numitor prin amplificare:

E. *a*) $\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\cdot 4}{2\cdot 3}-\dfrac{3\cdot 1}{3\cdot 2}=\dfrac{8}{6}-\dfrac{3}{6}=\dfrac{8-3}{6}=\dfrac{5}{6}$;

b) $2+\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{1}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{5\cdot 2}{5\cdot 1}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{10}{5}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{10+2}{5}=\dfrac{12}{5}$.

T. Efectuaţi:

a) $\dfrac{4}{7}+\dfrac{3}{7}$ (**R:** 1); *b*) $1-\dfrac{4}{5}$ (**R:** $\dfrac{1}{5}$); *c*) $\dfrac{5}{4}+\dfrac{2}{5}$ (**R:** $\dfrac{33}{20}$.)

- *înmulţirea*: $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{p}{q}=\dfrac{a\cdot p}{b\cdot q}$ (simplificând eventual fracţia rezultată)

E. *a*) $\dfrac{10}{9}\cdot\dfrac{6}{25}=\dfrac{10\cdot 6}{9\cdot 25}$. Nu efectuăm înmulţirile deoarece fracţia poate fi simplificată: $\dfrac{10\cdot 6}{9\cdot 25}=\dfrac{2\cdot\cancel{5}\cdot 2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 3\cdot\cancel{5}\cdot 5}=\dfrac{4}{15}$.

b) $6\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{1}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{6\cdot 3}{1\cdot 4}=\dfrac{18^{\backslash 2}}{4}=\dfrac{9}{2}$; observăm că înmulţirea unei fracţii cu un număr întreg **nu** este o amplificare. Putem scrie ca o regulă: $p\cdot\dfrac{a}{b}=\dfrac{p\cdot a}{b}$.

T. Efectuaţi:

a) $\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{21}{8}$ (**R:** $\dfrac{3}{2}$); *b*) $5\cdot\dfrac{4}{5}$ (**R:** 4); *c*) $\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{n+1}{n+2}$ (**R:** $\dfrac{n}{n+2}$.)

- *împărţirea*: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{p}{q}}=\dfrac{a}{b}:\dfrac{p}{q}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{q}{p}$ (înmulţirea cu răsturnatul)

E. *a*) $\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{2}{n}}=\dfrac{a}{2}:\dfrac{2}{n}=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{an}{4}$; *b*) $\dfrac{2}{\frac{7}{2}}=2:\dfrac{7}{2}=2\cdot\dfrac{2}{7}=\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{7}=\dfrac{4}{7}$;

c) $\dfrac{\frac{8}{3}}{3}=\dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{1}}=\dfrac{8}{3}:\dfrac{3}{1}=\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{9}$; *d*) $\dfrac{1}{\frac{p}{q}}=1:\dfrac{p}{q}=1\cdot\dfrac{q}{p}=\dfrac{q}{p}$.

T. Efectuaţi:

a) $\dfrac{18}{7}:\dfrac{15}{14}$ (**R:** $\dfrac{12}{5}$); *b*) $10:\dfrac{4}{5}$ (**R:** $\dfrac{25}{2}$); *c*) $\dfrac{n}{n+1}:\dfrac{n+1}{n+2}$ (**R:** $\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.)

- *ridicarea la putere*: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

E. $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{3^2}{4^2}=\dfrac{9}{16}$.

10) *operaţii cu radicali*: $a,b>0$

$$\begin{array}{ll} \sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a & b\sqrt{a}=\sqrt{ab^2} \\ m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a} & \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab} \\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}} & \sqrt[p]{a^n}=a^{\frac{n}{p}} \end{array}$$

E. *a*) $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=(2+5-3)\sqrt{3}=4\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$;

c) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{15}{5}}=\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$

e) $\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$;

f) *raţionalizare*: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot 1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

g) *amplificarea cu conjugata*:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot 1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3+\sqrt{6}-\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}=\sqrt{3}+\sqrt{2}. \end{aligned}$$

h) scrierea cu ajutorul puterilor:

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{1+x^{\frac{3}{4}}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+x^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot (1+x^{\frac{3}{4}})^{-\frac{1}{2}}.$$

T. Efectuaţi:

a) $4\sqrt{2}-6\sqrt{2}+\sqrt{8}$ (**R:** 0); *b*) $\dfrac{4+\sqrt{20}}{2}$ (**R:** $2+\sqrt{5}$);

c) $\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+5^2}$ (**R:** $5\sqrt{2}$); *d*) $\sqrt{5}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ (**R:** $\sqrt{2}$).

11) *formule de calcul prescurtat*:

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \qquad a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$
$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Se folosesc la:

E. *a*) Efectuarea calculelor şi reducerea termenilor asemenea:

$$\begin{aligned}(n-2)^2+2(n-1)(n+1) &= n^2-2n\cdot 2+2^2+2(n^2-1^2)\\ &= n^2-4n+4+2n^2-2 = 3n^2-4n+2.\end{aligned}$$

b) La amplificarea cu conjugata putem scrie direct (vezi 10 e):

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2 = 3-2 = 1.$$

c) Construirea pătratului unui binom: $a^2-4a+4 = a^2-2a\cdot 2+2^2 = (a-2)^2$.
Expresia $x^2+6x = x^2+2x\cdot 3$ nu reprezintă pătratul unui binom. Deoarece $(x+b)^2 = x^2+2x\cdot b+b^2$, observăm că b ar fi 3 şi că lipseşte 3^2. Atunci adunăm şi scădem 3^2, adică $x^2+6x = x^2+2x\cdot 3+3^2-3^2 = (x+3)^2-9$, ceea ce reprezintă scrierea sub *formă canonică* a funcţiei de gradul al doilea.
Analog $u^2+5u+1 = u^2+2u\cdot\dfrac{5}{2}+1 = u^2+2u\cdot\dfrac{5}{2}+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+1 =$
$= \left(u+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}+1 = \left(u+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{21}{4}$.

T. Scrieţi sub forma canonică x^2+4x+5, respectiv y^2-3y-1.
(**R:** $(x+2)^2+1$, $\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}$)

d) *Descompunerea în factori*:

$x^2-9 = x^2-3^2 = (x-2)(x+2)$ din formula diferenţei de pătrate;
$x^4-16 = (x^2)^2-4^2 = (x^2-4)(x^2+4) = (x^2-2^2)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$;
$x^3-2x^2+x =?$ aici nu avem încă formulă, dar observăm factorul comun x, deci
$x^3-2x^2+x = x\left(\dfrac{x^3}{x}-\dfrac{2x^2}{x}+\dfrac{x}{x}\right) = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$;
$x^3-8 = x^3-2^3 = (x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2) = (x-2)(x^2+2x+4)$ din formula diferenţei de

cuburi.

Ex.1. *a*) Simplificaţi expresia $E = \dfrac{xy}{x^2+y^4}$ în cazul $x = y = \dfrac{1}{n}$.

b) Evaluaţi $F = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ pentru $x = \dfrac{1}{2}$ şi $y = 2$.

Rezolvare: *a*) Înlocuim x şi y în E. Avem:

$$E = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2+(\frac{1}{n})^4} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^4}} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n^4}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}$$

b) Înlocuim $x = \dfrac{1}{2}$ şi $y = 2$ în F. Obţinem:

$$E = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}.$$

T. Calculaţi $E = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ în cazul $x = \dfrac{1}{n}, y = \dfrac{1}{n^2}$. (**R:** $E = \dfrac{1}{2}$.)

Ex.2. Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile:

a) $A = \dfrac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}$; *b*) $B = n\cdot\left(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+2n+1} - 1\right)$;

c) $C = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2}} \cdot \dfrac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$, $x, y > 0$.

Rezolvare: *a*) Folosim "înmulţirea cu răsturnata":

$$A = \frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n} = \frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^n\cdot 3n} = \frac{n+1}{3n},$$

unde am folosit că $3^{n+1} = 3^n\cdot 3^1$ pentru a putea simplifica.
b) Întâi efectuăm operaţia din paranteză, aducând la acelaşi numitor; apoi înmul-ţim:

$$\begin{aligned}
B &= n\cdot\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n+1} - \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+1}\right) = n\cdot\left(\frac{n^2+3n+2-(n^2+2n+1)}{n^2+2n+1}\right)\\
&= n\cdot\left(\frac{n^2+3n+2-n^2-2n-1}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{n^2+2n+1} = \frac{n(n+1)}{n^2+2n+1}\\
&= \frac{n(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Am ţinut cont de semnul minus din faţa parantezei şi am observat pătratul perfect de la numitor, putând simplifica.
c) Vom calcula separat radicalul, respectiv fracţia:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2} &= \sqrt{1-\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}}\\
&= \sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}}\\
&= \sqrt{\frac{(x^4+2x^2y^2+y^4)-(x^4-2x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2}}\\
&= \sqrt{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4-x^4+2x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}}\\
&= \sqrt{\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}}=\frac{2xy}{x^2+y^2}\\
\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{2x^3+2xy^2-(2x^3-2xy^2)}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{2x^3+2xy^2-2x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

Înlocuim în expresie şi obţinem:

$$C = \frac{1}{\frac{2xy}{x^2+y^2}}\cdot\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2+y^2}{2xy}\cdot\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y}{x^2+y^2},$$

unde la final am simplificat cu $2xy$, respectiv x^2+y^2.

T. Simplificaţi expresiile:

a) $A=\frac{4^n}{n}:\frac{4^{n-1}}{n-1}$; **R:** $A=\frac{4n-4}{n}$

b) $B=n\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}-1\right)$; **R:** $B=\frac{n}{n+1}$

c) $C=\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}\cdot\frac{2x(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$; **R:** $C=\frac{-2}{x^2+1}$.

Ex.4. Fie egalitatea $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$.
a) Stabiliţi dacă egalitatea este verificată pentru $x=\sqrt{2}, y=-1, z=1+\sqrt{2}$.
b) Scrieţi egalitatea dată sub forma $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ şi determinaţi $a,b,c\in\mathbb{R}, R>0$.
Rezolvare: *a)* Înlocuind valorile lui x,y,z în egalitatea dată obţinem:
$(\sqrt{2})^2+(-1)^2+(1+\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+4(-1)-4=0$ sau $2+1+1+2\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}-8=0$, adică $-2=0$, fals. Deci egalitatea nu este verificată.
b) Construim pătratele unor binoame. Avem: $x^2-2x+1-1+y^2+2y\cdot 2+2^2-$ $-2^2+z^2-4=$ sau $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$, de unde, prin identificare cu egalitatea dată în enunţ, rezultă $a=1, b=-2, c=0, R=3$.

Operaţii cu numere complexe

Pentru un număr complex scris sub forma algebrică $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, a reprezintă *partea sa reală*, iar ib *partea imaginară* (b fiind *coeficientul părţii imaginare*). *Conjugatul* lui z este $\overline{z} = a - ib$, iar *modulul* lui z este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

E. Pentru $z = 3-4i$, avem $a = 3, b = -4$ şi $\overline{z} = 3+4i$, iar $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

T. Calculaţi $\overline{z}$ şi $|z|$ pentru $z = i$. (**R:** $\overline{z} = -i,\ |z| = 1$)

Pentru două numere complexe $z_1 = a_1 + ib_1$ şi $z_2 = a_2 + ib_2$ se definesc operaţiile:
- adunarea: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- produsul cu un scalar real: $pz_1 = pa_1 + ipb_1$
- înmulţirea: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

E. Pentru $z_1 = 1 + 2i$ şi $z_2 = 1 - i$ avem
$z_1 + z_2 = 1 + 2i + 1 - i = (1 + 1) + (2i - i) = 2 + i$,
$3z_1 = 3(1 + 2i) = 3 + 6i$,
$z_1z_2 = (1 + 2i)(1 - i) = 1 - i + 2i - 2i^2 = 1 + i - 2(-1) = 3 + i$,
$z_1^2 = (1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2i + (2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$.

T. Pentru $z_1 = 2 + 5i$ şi $z_2 = -i$ calculaţi $z_1 - z_2, 3z_1, z_1z_2, z_1^2$.
(**R:** $2 + 6i,\ 6 + 15i,\ 5 - 2i,\ -21 + 20i$)

La extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr negativ ţinem cont că $\sqrt{-1} = i$ în mulţimea numerelor complexe. De exemplu $\sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$.

E. Să simplificăm fracţia $\dfrac{2+\sqrt{-16}}{2}$. Mai întâi $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1} = 4i$. Atunci $\dfrac{2+\sqrt{-16}}{2} = \dfrac{2+4i}{2} = \dfrac{2(1+2i)}{2} = 1 + 2i$.

Dacă avem o fracţie cu numitor număr complex, aceasta trebuie amplificată cu conjugatul acelui număr complex pentru a putea identifica partea reală, respectiv partea imaginară.

E. $\dfrac{2+i}{1+2i} = \dfrac{(1-2i)(2+i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{2+i-4i-2i^2}{1^2-(2i)^2} = \dfrac{4-3i}{5} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}i$.

T. Amplificaţi fracţia $\dfrac{i}{1+i}$ cu conjugatul numitorului. (**R:** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$)

Ex. Evaluaţi $E = \dfrac{z^2+2}{1+z}$ pentru $z = 1 + i$.

Rezolvare: Avem $E = \dfrac{(1+i)^2+2}{1+1+i} = \dfrac{1+2i-1+2}{2+i} = \dfrac{(2-i)(2+2i)}{(2-i)(2+i)} =$
$= \dfrac{4-2i+4i+2}{4+1} = \dfrac{6}{5} + \dfrac{2}{5}i$.

Test

1. Aflaţi valoarea expresiei $E = \dfrac{xy}{x+y}$ pentru $x = \dfrac{1}{2}$ şi $y = -\dfrac{1}{3}$.

2. Calculaţi $u = \sqrt{3^2+4^2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{8}$.

3. Aduceţi expresia $n \cdot \left(\dfrac{n^2+2n+2}{n^2+n} - 1\right)$ la forma cea mai simplă.

4. Calculaţi $E = z^2 + \overline{z} - |z|^2$ pentru $z = 2 + 3i$.

Rezolvarea Testului
- pe pagina următoare :)

1. Se înlocuieşte x şi y şi se obţine:

$$E = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{1} = -1.$$

2. Sub radical facem calculele, fracţia se amplifică cu conjugata. Avem

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{9+16} - \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \sqrt{4\cdot 2} \\ &= \sqrt{25} - \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + 2\sqrt{2} = 5-\sqrt{2}+1+2\sqrt{2} = 6+\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. Avem:

$$n\cdot\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+n}-1\right) = n\cdot\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+n}-\frac{n^2+n}{n^2+n}\right) = n\cdot\frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n+1}.$$

4. Avem $E = (2+3i)^2 + (2-3i) - (\sqrt{2^2+3^2})^2 = 4+12i-9+2-3i-13 = 16+9i$.