Capitolul 4

Calculul diferenţial în $\mathbb{R}$

4.1 Breviar teoretic şi exemple

Fie funcţia $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi punctul interior $x_0 \in (a, b)$.

Definiţia 4.1.1. Spunem că funcţia f este derivabilă în punctul x_0 dacă există limita finită $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Observaţia 4.1.1. Notăm cu $f'(x_0) \overset{not}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ derivata funcţiei f în punctul x_0.

Propoziţia 4.1.1. *Funcţia f este diferenţiabilă în x_0 dacă f este derivabilă în x_0 iar expresia diferenţialei este $d_{x_0} f = f'(x_0)dx$.*

Definiţia 4.1.2. Funcţia f este derivabilă(diferenţiabilă) pe (a, b) dacă este derivabilă(diferenţiabilă) în orice punct din intervalul (a, b).

Propoziţia 4.1.2 (Reguli de derivare)**.** *Fie funcţiile $f, g : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile pe (a, b) atunci avem că:*

- *funcţiile $f + g$ şi αf sunt derivabile pe (a, b) şi în plus avem formula de calcul a derivatei $(f + g)' = f' + g', (\alpha f)' = \alpha f', \forall \alpha \in \mathbb{R}$;*
- *funcţia $f \cdot g$ este derivabilă pe (a, b) şi în plus avem formula de calcul a derivatei $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;*

- *funcţia* $\frac{f}{g}$ *este derivabilă pe* (a, b) *şi în plus avem formula de calcul a derivatei*
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ *dacă* $g(x) \neq 0$.

Propoziţia 4.1.3 (Reguli de diferenţiere)**.** *Fie funcţiile* $f, g : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diferenţiabile pe* (a, b) *atunci avem că:*

- *funcţiile* $f + g$ *şi* αf *sunt diferenţiabile pe* (a, b) *şi în plus avem formula de calcul a diferenţialei* $df + dg = df + dg, d(\alpha f) = \alpha df, \forall \alpha \in \mathbb{R}$*;*

- *funcţia* $f \cdot g$ *este diferenţiabilă pe* (a, b) *şi în plus avem formula de calcul a diferenţialei* $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$*;*

- *funcţia* $d\frac{f}{g}$ *este diferenţiabilă pe* (a, b) *şi în plus avem formula de calcul a diferenţialei*
$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$ *dacă* $g(x) \neq 0$.

Propoziţia 4.1.4.

- *Fie funcția* $f : I \to J$ *derivabilă într-un punct* $x_0 \in I$ *şi funcţia* $g : J \to \mathbb{R}$ *este derivabilă în punctul* $y_0 = f(x_0) \in J$ *atunci funcţia compusă* $h = g \circ f$ *este derivabilă în* $x_0 \in I$ *şi în plus avem formula de calcul a derivatei* $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$*;*

- *Dacă funcţia* f *este bijectivă(inversabilă) şi derivabilă în* x_0 *atunci inversa sa* f^{-1} *este derivabilă în punctul* $y_0 = f(x_0)$ *şi avem relaţia* $f^{-1\prime}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Derivata de ordin n a funcţiei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ în x_0 se defineşte prin recurenţă astfel $f^{(n)}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$, $n \geq 2$.

Diferenţiala de ordin n a funcţiei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ în x_0 se defineşte prin recurenţă astfel $d^n(f(x)) = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Propoziţia 4.1.5 (Regula lui Leibniz)**.** *Dacă* f, g *sunt două funcţii derivabile de* n *ori pe* $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ *atunci funcţia* $f \cdot g$ *este derivabilă de* n *ori pe* (a, b) *şi are loc formula:* $(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (f(x))^{(n-k)} \cdot (g(x))^{(k)}$.

Exemplul 4.1.1. Calculaţi derivatele de ordin n ale următoarelor funcţii:

$$a)\quad f(x)=\frac{1}{2x^2-x-1}, \forall x\notin\left\{1,-\frac{1}{2}\right\};\quad b) f(x)=x^2\cdot e^{-x};$$
$$c)\quad f(x)=x\cdot\ln(x+1);\qquad d) f(x)=e^{2x}\cdot\sin(3x).$$

Soluţie: a) Sriem funcţia $f(x)=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{B}{x-1}$ de unde prin identificare vom obţine sistemul

$$\begin{cases} A+2B &= 0\\ -A+B &= 1\end{cases}$$

care admite soluţiile $A=-\dfrac{2}{3}, B=\dfrac{1}{3}$ de unde rezultă descompunerea funcţiei în fracţii simple $f(x)=-\dfrac{2}{3}\cdot(2x+1)^{-1}+\dfrac{1}{3}\cdot(x-1)^{-1}$. Deducem derivatele funcţiei f:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{2}{3}\cdot(-1)(2x+1)^{-2}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot(-1)(x-1)^{-2}\cdot 1\\
f''(x) &= -\frac{2}{3}\cdot(-1)(-2)(2x+1)^{-3}\cdot 2^2+\frac{1}{3}\cdot(-1)(-2)(x-1)^{-3}\cdot 1\\
f^{(k)}(x) &= \cdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}}{3}\cdot n!(2x+1)^{-n-1}+(-1)^n\frac{1}{3}\cdot n!(x-1)^{-n-1}\cdot 1
\end{aligned}$$

b) Aplicăm regula lui Leibniz pentru determinarea derivatei de ordinul n:

$$\begin{aligned}
(x^2\cdot e^{-x})^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k(e^{-x})^{(n-k)}\cdot(x^2)^{(k)}=C_n^0(e^{-x})^{(n)}\cdot(x^2)^{(0)}+\\
&= C_n^1(e^{-x})^{(n-1)}\cdot(x^2)^{(1)}+C_n^2(e^{-x})^{(n-2)}\cdot(x^2)^{(2)}=\\
&= (-1)^n e^{-x}\cdot x^2+n(-1)^{n-1}e^{-x}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}e^{-x}\cdot 2
\end{aligned}$$

unde $(e^{(ax)})^{(n)}=a^n\cdot e^{(ax)}$ iar $(x^2)'=2x, (x^2)''=2, (x^2)^{(k)}=0, \forall k\geq 3$.

c) Aplicăm regula lui Leibniz pentru determinarea derivatei de ordinul n:

$$(x\ln(x+1))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\ln(1+x))^{(n-k)}(x)^{(k)}$$

unde $x' = 1, x^{(k)} = 0, \forall k \geq 2$ respectiv $(\ln(1+x))' = \dfrac{1}{1+x}$, $(\ln(1+x))'' = (-1)(1+x)^{(-2)}$ de unde prin recurenţă obţinem:

$$\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{(-n)}$$

deci:

$$\begin{aligned}(x\ln(x+1))^{(n)} &= (\ln(1+x))^{(n)} \cdot x + n(\ln(1+x))^{(n-1)} = \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{(-n)} \cdot x + \\ &+ n(-1)^{n-2}(n-2)!(1+x)^{(-n+1)}\end{aligned}$$

d) Determinăm derivata de ordin n a funcţiei $\sin(ax)$.

$$\begin{aligned}(\sin(ax))^1 &= a\cos(ax) = a\sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) \\ (\sin(ax))^2 &= a^2\cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = a^2\sin\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right) \\ \cdots &= \cdots \\ (\sin(ax))^{(n)} &= a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

aplicând regula lui Leibniz deducem următoarele calcule:

$$\begin{aligned}(e^{2x}\sin(3x))^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{2x})^{(n-k)} \cdot (\sin(3x))^{(k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}(e^{2x}) \cdot (3^k \sin\left(3x + k\frac{\pi}{2}\right))\end{aligned}$$

Exemplul 4.1.2. Determinaţi derivata de ordin n a funcţiei $f(x) = e^{ax} \cdot \cos(bx)$.

Soluţie: Deducem derivata de ordin n a funcţiei e^{ax}.
Avem $(e^{ax})' = e^{ax} \cdot \underbrace{(ax)'}_{=a}$, $(e^{ax})'' = ae^{ax} \cdot \underbrace{(ax)'}_{=a} = a^2e^{ax}$ de unde deducem prin recurenţă formula derivatei de ordin n adică

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

Determinăm derivata de ordin n a funcţiei $\cos(bx)$.

$$\begin{aligned}
(\cos(bx))^1 &= -b\sin(bx) = b\cos\Big(bx + \frac{\pi}{2}\Big)\\
(\cos(bx))^2 &= -b^2\sin\Big(bx + \frac{\pi}{2}\Big) = b^2\cos\Big(bx + 2\frac{\pi}{2}\Big)\\
\cdots &= \cdots\\
(\cos(bx))^{(n)} &= b^n\cos\Big(bx + n\frac{\pi}{2}\Big)
\end{aligned}$$

aplicând regula lui Leibniz deducem următoarele calcule:

$$\begin{aligned}
(e^{ax}\cos(bx))^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{ax})^{(n-k)}\cdot(\cos(bx))^{(k)} =\\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}(e^{ax})\cdot(b^k\cos\Big(bx + k\frac{\pi}{2}\Big))
\end{aligned}$$

Propoziţia 4.1.6 (Formula lui Taylor)**.** *Fie funcţia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcţie de n+1 ori derivabilă în vecinătatea punctului $x_0\in(a,b)$. Atunci avem formula lui Taylor de ordin n :*

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

unde $T_n(x)$ se numeşte polinomul lui Taylor de gradul n asociat funcţiei f în punctul x_0, $R_n(x)$ se numeşte restul de ordinul n al formulei lui Taylor iar $u\in(x_0,x)$.

Exemplul 4.1.3. Dezvoltaţi polinomul x^3-3x^2+2x+5 după puterile binomului $x+1$.

Soluţie: Fie funcţia $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ determinăm următoarele derivate:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2, f''(x) = 6x - 6, f'''(x) = 6$$

de unde deducem că $f^{(n)}(x) = 0, \forall n \geq 4$. Deci restul formulei lui Taylor este 0 şi atunci avem formula lui Taylor asociată funcţiei f în punctul $x_0 = -1$:

$$f(x) = \underbrace{f(-1)}_{-1} + \underbrace{\frac{f'(-1)}{1!}}_{11}(x+1) + \underbrace{\frac{f''(-1)}{2!}}_{-6}(x+1)^2 + \underbrace{\frac{f'''(-1)}{3!}}_{1}(x+1)^3$$

Propoziţia 4.1.7 (Formula lui Maclaurin)**.** *Dacă în formula lui Taylor facem pe* $x_0 = 0$ *atunci avem formula lui Maclaurin:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

unde $\theta \in (0, 1)$.

Exemplul 4.1.4. Să se scrie formula lui Maclaurin pentru următoarele funcţii: a) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = \ln(1 + x), x > -1$; c) $f(x) = \sin(x), x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = arctg(x), x \in \mathbb{R}$.

Soluţie:a) Avem că derivata de ordin n a funcţiei $f(x) = e^x$ este $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \geq 0$ de unde rezultă că $f^{(n)}(0) = 1, \forall n \geq 0$. Atunci formula lui Maclaurin devine:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k + \frac{e^{\theta \cdot x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1},\ \theta \in (0, 1).$$

adică

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \frac{e^{\theta \cdot x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1},\ \theta \in (0, 1).$$

b) Avem că derivata de ordin n a funcţiei $f(x) = \ln(x + 1)$ este $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (1 + x)^{-n}, \forall n \geq 1$ de unde rezultă că $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!, \forall n \geq 1$.

Atunci formula lui Maclaurin devine:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n \cdot (1+\theta \cdot x)^{-n-1}}{(n+1)} \cdot x^{n+1},\ \theta \in (0,1).$$

c) Avem derivatele funcţiei $f(x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x); \\ f'(x) &= \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \\ f''(x) &= -\sin(x) = -\underbrace{\sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)}_{\sin(x+\pi)}; \\ f^{(k)}(x) &= \cdots \\ f^{(n)}(x) &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

de unde deducem că $f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & , \ n = 2k \\ (-1)^k & , \ n = 2k+1 \end{cases}$ de unde formula lui Maclaurin pentru funcţia $f(x) = \sin(x)$ este:

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{\sin(\theta x)}{(2n)!}x^{2n}$$

d) Fie $f(x) = arctg(x)$ de unde prin derivare obţinem că:$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sau $tg(f(x)) = x$ de unde prin înlocuire în expresia de mai sus deducem formula

$$f'(x) = (\cos(f(x)))^2) = \cos(f(x)) \cdot \sin\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)$$

Avem

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -\sin(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \sin\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) + \\
&+ \cos(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \cos\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= f'(x)\cos\left(2f(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= f'(x)\sin\left(2f(x) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= (\cos(f(x)))^2 \cdot \sin\left(2f(x) + \frac{2\pi}{2}\right). \\
f'''(x) &= 2\cos(f(x)) \cdot -\sin(f(x)) \cdot f'(x)\sin\left(2f(x) + \frac{2\pi}{2}\right) + \\
&+ (\cos(f(x)))^2 \cdot 2\cos\left(2f(x) + \frac{2\pi}{2}\right) \cdot f'(x) = \\
&= 2(\cos(f(x)))^3 \cos\left(3(x) + \frac{2\pi}{2}\right) = \\
&= 2(\cos(f(x)))^3 \sin\left(3(x) + \frac{3\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

de unde deducem că derivata de ordinul n a funcţiei $f(x) = arctg(x)$ este dată de formula:

$$
f^{(n)}(x) = (n-1)!(cos(f(x)))^n \cdot \sin\left(nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right).
$$

iar $f^{(n)}(0) = (n-1)!\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & , \ n = 2k \\ (-1)^k(2k)! & , \ n = 2k+1 \end{cases}$ de unde formula lui Maclaurin este:

$$
arctg(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} + \frac{f^{(2n+1)}(\theta x)}{(2n+1)!}
$$

unde $\theta \in (0,1)$ atunci formula lui Maclaurin devine:

$$
arctg(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{(n-1)}x^{(2n-1)}}{2n-1} + \frac{(-1)^n \cos(u)\sin\left((2n+1)u\right)}{2n+1}
$$

unde $u = arctg(\theta x), \theta \in (0,1)$.

4.2 Serii Taylor

Definiţia 4.2.1. Numim seria de puteri seria de forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ care este convergentă pe mulţimea $C=(x_0-R, x_0+R)$ unde $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ sau $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Fie seria de puteri $S: C\to\mathbb{R}, S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ atunci seria derivatei sau a integralei are aceeaşi mulţime de convergenţă adică mulţimea C.

Teorema 4.2.1 (Seria Taylor)**.** *Fie funcţia $f: \mathbb{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admite derivate mărginite de orice ordin în vecinătatea punctului $x_0\in\mathbb{I}$ atunci avem dezvoltarea în serie Taylor:*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Teorema 4.2.2 (Seria Maclaurin)**.** *Dacă în dezvoltarea seriei Taylor facem pe $x_0=0$ obţinem dezvoltarea în serie Maclaurin:*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Exemplul 4.2.1. Să se dezvolte în serie Taylor funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^x$ în jurul punctului $x=1$.

Soluţie: Avem $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x, f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x, \ldots$ dar

$$f^{(n)}=C_n^0(e^x)^{(n)}x^{(0)}+C_n^1(e^x)^{(n)}x^{(1)}=xe^x+ne^x=(x+n)e^x$$

de unde deducem că $f^{(n)}(1)=(n+1)e$ de unde deducem dezvoltarea:

$$xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)e}{n!}(x-1)^n$$

Exemplul 4.2.2. Dezvoltaţi funcţia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + x)(2 + x)$ în serie Mac-Laurin.

Soluţie: Avem $f(x) = \ln(1 + x) + \ln(2 + x)$ de unde deducem că $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} = (x+1)^{(-1)} + (x+2)^{(-1)}$, $f''(x) = (-1)(x+1)^{(-2)} + (-1)(x+2)^{(-2)}$ deci derivata de ordin n admite forma

$$f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{(-n)} + (-1)^{n-1}(n-1)!(x+2)^{(-n)}$$

de unde deducem că $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1 + 2^{-n})$ de unde deducem dezvoltarea în serie Maclaurin:

$$\ln(x+1)(x+2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(1+2^{-n})}{n} x^n$$

Exemplul 4.2.3. Dezvoltaţi funcţia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+2}$ în serie Maclaurin.

Soluţie: Avem $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}$ unde vom ţine cont de dezvoltarea

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad t \in (-1, 1)$$

deci

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad \frac{x}{2} \in (-1, 1)$$

sau

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot x^n, \quad x \in (-2, 2)$$

Exemplul 4.2.4. Dezvoltaţi funcţia $f : (0, 2) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3-x}$ în serie Taylor în vecinătatea punctului $x_0 = 1$.

Soluţie: Avem $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{2}}$ unde vom ţine cont de dezvoltarea

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad t \in (-1, 1)$$

deci

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n, \quad \frac{x-1}{2} \in (-1, 1)$$

sau

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (x-1)^n$$

Exemplul 4.2.5. Dezvoltaţi funcţia $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ în serie Maclaurin .

Soluţie: Avem

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$$

de unde deducem relaţia

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \right)$$

ţinem cont de suma unei serii geometrice

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot t^k, \quad t \in (-1, 1)$$

avem că funcţia de integrat este de forma

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) t^n = \sum_{n=0, n=2p}^{\infty} (1 + (-1)^n) t^n = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} 2t^{2p} \end{aligned}$$

deci funcţia f admite dezvoltarea în serie Maclaurin de forma:

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\sum_{p=0}^{\infty} 2t^{2p} dt \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\int_0^x t^{2p} dt \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$$

4.3 Probleme propuse

1. Calculaţi derivatele de ordin n pentru următoarele funcţii:

$$a)\quad f(x)=\frac{1}{x^2-2x+1}, \forall x\neq 1;\quad b) f(x)=(2x-1)\cdot e^{-2x};$$
$$c)\quad f(x)=(2x-1)\cdot\ln(2x+1);\quad d) f(x)=e^{3x}\cdot\cos(2x).$$

2. Dezvoltaţi în serie Taylor următoarele funcţii în punctele specificate:
a) $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}, x\neq -\dfrac{1}{2}, x_0=1$;b) $f(x)=x\cos(x), x_0=\dfrac{\pi}{2}$;
c) $f(x)=x-\ln(1+x), x_0=1$.

3. Dezvoltaţi în serie Mac-Laurin următoarele funcţii $f:[0,+2)\rightarrow\mathbb{R}$:
a) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$; b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$;c) $f(x)=x\sin(x)$;d) $f(x)=e^x-e^{-x}$;
e) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Bibliografie

[1] Stan Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[2] Gheorghe Procopiuc, *Probleme de analiză matematică*, Iaşi, 2007.

[3] Ioan Goleţ, *Analiză Matematică*,Editura Politehnica, Timişoara,2011.

[4] Nicolae Cofan, Dan Popescu, *Analiză Matematică Noţiuni teoretice şi probleme*,Editura Eurobit, Timişoara,2013.

[5] P. Flondor, O. Stănaşilă, *Lecţii de analiză matematică*, Editura ALL, Bucureşti, 1996.

[6] Tania Costache, *Analiză Matematică,culegere de probleme*, Editura Printech, Bucureşti, 2001.