CAPITOLUL 3

MULŢIMI

3.1. Noţiunea de mulţime

Noţiunea matematică de mulţime s-a desprins din conceptele familiare legate de percepţia a ceea ce se numeşte colecţie, clasă, familie, grup, agregat, grămadă, etc., cuvinte sinonime între ele. În istoria matematicii, menţionăm anul 1872, în care Görg Cantor definea conceptul de mulţime astfel: „reuniunea într-un tot a unor obiecte ale intuiţiei sau ale gândirii noastre bine determinate şi diferite între ele.”

Vom înţelege aşadar printr-o mulţime o colecţie de lucruri sau obiecte ce poartă numele de elemente sau membri [1]. Esenţial în înţelegerea conceptului de mulţime este faptul că aceasta e văzută ca un obiect distinct, deşi este formată dintr-o colecţie, chiar nelimitată de obiecte distincte. Obiectele care formează o mulţime trebuie să fie distincte. Nu putem astfel să definim o mulţime în sens matematic pe baza unor obiecte care nu sunt bine „determinate”. Spre exemplu, nu putem vorbi de mulţimea ideilor trecute sau viitoare. Prin urmare, mulţimile şi elementele lor trebuie restricţionate la anumite clase de obiecte clar specificate. Spre exemplu, putem vorbi de mulţimea literelor alfabetului conţinând 26 de elemente, sau de mulţimea pantofilor de tenis, care probabil are un număr foarte mare de elemente. Mai putem vorbi matematic şi de mulţimea universală sau universul, notată uzual cu *U*, şi definită precis ca fiind acea mulţime care conţine toate elementele. Evident, U va conţine, printre altele, şi mulţimea literelor alfabetului şi mulţimea pantofilor de tenis.

În lumea matematică, s-a încetăţenit punctul de vedere în care înţelegem mulţimea ca fiind formată din elemente susceptibile de a avea anumite proprietăţi şi, astfel, de a avea între ele sau cu elemente ale altor mulţimi anumite relaţii. Această idee, clară din punct de vedere matematic, va fi foarte utilă în capitolele care urmează. Uneori, în limbajul contemporan al domeniului ştiinţei calculatoarelor, echivalent cu noţiunea de mulţime întâlnim termenul de set, provenind din literatura de limbă engleză.

Calitatea de membru al unei mulţimi

Un membru al unei mulţimi trebuie gândit ca având proprietatea clară de a fi un obiect distinct x ce este conţinut de mulţimea în cauză, şi notăm cu $x \in A$, ceea ce însemnă că „elementul x aparţine mulţimii A” sau „A îl conţine pe x” sau „x este în A”. Notaţia $x \subset A$ trebuie evitată în situaţia în care prin x înţelegem un membru. Vom vedea că această notaţie se aplică la nivelul relaţiilor între submulţimi. Pe baza aceleiaşi definiţii, putem scrie $x \notin A$ în situaţia în care este adevărat cazul contrar, $\neg x \in A$. Se va citi „x nu aparţine lui A”. Facem remarca următoare, legată de natura membrilor unei mulţimi: mulţimile pot conţine alte mulţimi ca şi membri. Astfel, mulţimea $\{1,\{1\}\}$ este o mulţime, şi putem scrie următoarele proprietăţi: $1 \in M$ şi $\{1\} \in M$.

Definirea mulţimilor

A defini o mulţime înseamnă a descrie elementele ei într-un fel sau altul. Modul direct de a descrie o mulţime este prin listarea sau înşiruirea elementelor sale separate de virgulă şi încadrate de semnul acoladă. Astfel, notăm mulţimea M = {a,b,c} sau N = {a,{b,c}}. O caracteristică importantă a mulţimilor este aceea că nu se admite apariţia repetată a aceloraşi elemente. În anumite situaţii, se utilizează o notaţie eliptică, folosind trei puncte. Spre exemplu: A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} poate fi scrisă şi sub forma A = {1,2,3,…,10} sau A = {1,2,3,…,9,10}. Prin aceste trei puncte se denotă în mod informal o secvenţă de elemente pe care nu mai dorim să o scriem în mod explicit.

Mulţimea care nu are nici un element se numeşte mulţimea vidă (setul vid sau nul), şi se notează cu {} sau ∅. O descriere a mulţimii vide ar putea fi aceea a tuturor numerelor întregi, care nu sunt nici pare, nici impare.

Un alt mod de definire al mulţimilor este descrierea care constă în a enunţa o proprietate restrictivă, caracteristică elementelor mulţimii, şi pe care vrem să o delimităm în cadrul unei mulţimi mai vaste sau de referinţă. În acest caz, o mulţime M va fi definită sub forma $\{x \mid P\}$.

Egalitatea mulţimilor

Două mulţimi sunt egale, prin definiţie, dacă au aceleaşi elemente, şi în acest caz notăm A = B. Se remarcă aici că nu e importantă ordinea particulară sau aranjamentul elementelor în cadrul unei mulţimi. Spre exemplu mulţimile {x,y,z} şi {z,x,y} sunt egale, deoarece conţin aceleaşi elemente. În cazul în care două mulţimi nu sunt egale, folosim notaţia $A \neq B$. Spre exemplu, mulţimea $\{x,y,z\} \neq \{y,z\}$. Să reamintim ca o primă concluzie privitoare la caracteristicile mulţimilor următoarele:

1) Nu există apariţii repetate de elemente.
2) Nu există ordine particulară sau aranjament între elemente.

Mulţimi finite şi infinite

Conceptul de finit şi infinit este direct legat de operaţia de numărare a elementelor unei mulţimi. Evident, aceasta în situaţia în care o mulţime M este diferită de mulţimea vidă. În cazul în care operaţia de numărare ar fi oprită după un anumit timp, sau ar epuiza elementele numărate, putem spune că mulţimea M este o mulţime finită. Dacă operaţia de numărare nu se opreşte niciodată, atunci M e considerată o mulţime infinită. În lumea reală a experienţei noastre comunicabile, vom avea de a face numai cu mulţimi finite. Cu toate acestea, marele avantaj al definiţiei mulţimilor în matematică este acela de a permite operarea cu mulţimi infinite concepute sau acceptate însă sub forma unor obiecte finite. Spre exemplu, putem defini mulţimea ***N*** infinită a numerelor naturale şi să o manipulăm ca pe un obiect finit distinct.

Mulţimile infinite sunt uneori notate prin listarea unor elemente urmate de trei puncte. De exemplu: $N = \{0,1,2,3,\ldots\}$, $Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$.

Definirea mulţimilor prin proprietăţi

În multe situaţii descrierea mulţimilor prin listarea elementelor e dificil de realizat. Un exemplu comun este acel al numerelor raţionale notate cu Q sau a mulţimilor numerelor reale notate cu R. Unde listarea câtorva din elementele mulţimii nu e definitorie pentru a descrie mulţimea respectivă.

Astfel, se preferă să descriem o proprietate pe care elementele mulţimii respective o satisfac. Spre exemplu, mulţimea numerelor întregi impare poate fi descrisă ca fiind constituită din acele numere întregi care au proprietatea că sunt egale cu 2k+1, k fiind întreg. Astfel, în general dacă admitem p ca fiind o proprietate bine definită atunci putem descrie mulţimea astfel:

$M = \{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}$. De pildă, $Z_{impar} = \{x \mid x = 2k+1, \quad k \text{ este întreg}\}$.

Bineînţeles că putem de asemenea să descriem mulţimi finite prin găsirea proprietăţilor pe care elementele acestora le posedă. Spre exemplu putem descrie mulţimea finită $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} = \{x \mid x \in N, 1 \le x \le 12\}$. De asemenea putem descrie mulţimi prin scrierea expresiilor pentru elementele lor. De exemplu mulţimea pe care o botezăm pară poate fi scrisă sub forma $2k$ unde $k \in Z$.

3.2. Submulţimi

Conceptul de submulţime poate fi introdus în raport cu proprietatea mulţimii univers, U. Astfel, dacă A este una din mulţimile sale, atunci A este numită submulţime a lui U. Aşadar, o mulţime A este numită submulţime a unei alte mulţimi B dacă fiecare element a lui A este de asemenea un element al lui B şi scriem A $\subset$ B. Unii autori folosesc şi relaţia A $\subseteq$ B în care apare şi posibilitatea egalităţii mulţimii A cu B şi care prin definiţie presupune prezenţa pentru orice x a implicaţiei $(x \in A \Rightarrow x \in B)$, adică A = B.

Rezultă din această definiţie că fiecare mulţime A este de fapt o submulţime a ei însăşi. Astfel este adevărat să scriem că A $\subset$ A. De asemenea rezultă din această definiţie că mulţimea vidă este o submulţime a oricărei alte mulţimi Ø$\subset$A.

Dacă e adevărat că A $\subset$ B şi există un anumit element din B care nu aparţine în A, atunci A se numeşte submulţime proprie a lui B. De exemplu mulţimea $\{a,b\}$ este o submulţime proprie a lui $\{a,b,c\}$. Similar N este submulţime a lui Z, Q submulţime a lui R. În cazul în care A nu are proprietatea de a fi submulţimea a lui B putem să scriem A$\not\subset$B. De exemplu $\{a,b\} \not\subset \{a,c\}$ sau $\{-1,0,1\} \not\subset N$.

Facem remarca de a se sesiza diferenţa dintre o submulţime şi un membru al unei mulţimi. De exemplu dacă A este descrisă de elementele $A = \{a,b,c\}$, atunci putem să scriem că $\{a\} \subset A$ şi de asemenea $a \in A$. Însă cele două concepte sunt diferite. Astfel submulţimea A nu e membru al lui $\{a\}$, $\{a\} \notin A$. Dacă luăm alte exemple: Fie A formată din mulţimea $\{a,\{b\}\}$, A = $\{a,\{b\}\}$, $a \in A$, $\{b\} \in A$ şi mulţimea {b} este inclusă în A, $\{\{b\}\} \subset A$, însă $b \notin A$, $\{b\} \not\subset A$,.

Mulţimea putere

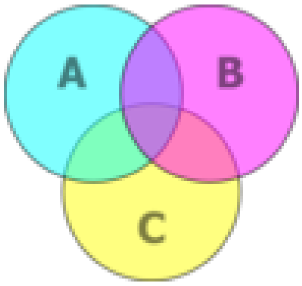
Colecţia tuturor submulţimilor unei mulţimi M se numeşte mulţimea putere a lui M.
Exemplu: Fie mulţimea $M = \{a,b,c\}$.

putere(M) = { Ø, $\{a\},\{b\},\{c\},\{ab\},\{ac\},\{bc\},M\}$.

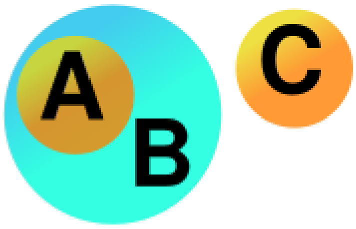
Un aspect interesant legat de o problemă de programare este de a construi puterea a unei mulţimi finite. Această aplicaţie va fi dezvoltată ulterior.

Folosirea diagramelor Euler-Venn

Aceste diagrame sunt folositoare pentru a vizualiza cazurile în care sunt descrise mulţimi. Ele constau din una sau mai multe curbe închise în care interiorul fiecărei curbe reprezintă o mulţime. Spre exemplu, în următoarea diagramă am arătat mulţimile A, B şi C.



În această diagramă am arătat că A este o submulţime a lui B şi mulţimea C nu are nici un element comun cu B.



3.3. Strategii de demonstrare cu submulţimi

Un prim exemplu în care submulţimile aduc o definire precisă este în cazul egalităţii a două mulţimi astfel în aceşti termeni spunem că două mulţimi sunt egale dacă ele sunt submulţimi una celeilalte [1].
$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

Demonstraţie:

Declaraţie	Strategie de demonstrare
$A \subset B$	Pentru un x arbitrar ca element a lui A ($x \in A$) să se arate că $x \in B$
$A \not\subset B$	Se va găsi un element $x \in A \therefore x \notin B$
A = B	Se arată că $A \subset B$ şi $B \subset A$

$$\forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B) \quad \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \quad y \in A \Rightarrow y \in B$$

Pentru situaţia în care vrem să arătăm că A=B atunci pentru oricare x cu proprietatea $x \in A$ avem dubla implicaţie că x↔B. Acest lucru presupune şi două direcţii şi anume o direcţie dacă $x \in A$ atunci $x \in B$ şi acest lucru se arată alegând un obiect arbitrar pe care să-l notăm cu y, şi trebuie să arătăm că $y \in A \Rightarrow y \in B$. Din moment ce am asumat că A = B aceasta înseamnă valabilitatea relaţiei de dublă implicare adică $y \in A \Leftrightarrow y \in B$.

Din moment ce definiţia egalităţii este o declaraţie de tip $\Leftrightarrow$ putem presupune valabilitatea următoarelor două relaţii $y \in A \Rightarrow y \in B$ şi $y \in B \Rightarrow y \in A$ dar trebuie să arătăm în continuare că

$y \in A \Leftrightarrow y \in B$ aşa cum se doreşte. Cealaltă situaţie de a arăta că B este inclus în A se poate dezvolta similar.

Presupunând valabilitatea relaţiei $A \subset B$ şi $(\wedge) B \subset A$ adică faptul că A este o submulţime a lui B şi B submulţime a lui A, înseamnă că trebuie de fapt să arătăm că A = B. Prin definiţie acest lucru este adevărat $\Leftrightarrow$ pentru orice $x \in A \therefore x \in B$. Dacă alegem acum un obiect arbitrar y şi arătăm că $y \in A \therefore y \in B$ adică arătăm că $y \in A \Rightarrow y \in B$ şi $y \in B \Rightarrow y \in A$ şi folosim în continuare pe y în presupunerea că $A \subset B$ obţinem primul caz iar folosindu-l pe y în presupunerea că $B \subset A$ obţinem al doilea caz.

Să se arate că mulţimea $A \subset B$ având următoarele definiţii $A = \{x \mid x \text{ este prim}, \ 42 \le x \le 51\}$ şi $B = \{x \mid x = 4k + 3, \ k \in N\}$.

Demonstraţie: Considerăm pentru început că $x \in A$ şi alegem pentru x valorile 42 şi 51. În continuare arătăm că în intervalul (42,51), x nu satisface proprietatea de a fi prim pentru extremi şi găsim alte numere x=43 şi x=47. Şi putem arăta că:

43 = 4(10) + 3
47 = 4(11) + 3

Astfel în ambele cazuri ale elementului lui A se regăseşte forma elementelor lui B. Astfel $x \in B$ şi $A \subset B$ ceea ce trebuia demonstrat.

Cazurile de demonstraţie care arată non incluziunea mulţimilor se tratează astfel: fie două mulţimi A şi B, mulţimea A este $A = \{3k + 1 \mid k \in N\}$, $B = \{4k + 1 \mid k \in N\}$. Să se arate că sunt valabile următoarele relaţii $\therefore A \not\subset B, B \not\subset A$. Prin listarea câtorva elemente din fiecare mulţime $A = \{1,4,7,\ldots\}$, $B = \{1,5,9,\ldots\}$. Putem să arătăm că A nu este inclus în B deoarece $4 \in A, 4 \notin B.$ De asemenea putem să arătăm că $B \subset A$ deoarece $5 \in B, 5 \notin A$.

3.4. Operaţii cu mulţimi

Operaţiile clasice care sunt legate de teoria mulţimilor sunt cele de reuniune, intersecţie şi complementaritate.

Reuniunea mulţimilor

Prin definiţie fie A şi B reuniunea celor două mulţimi este mulţimea căror elemente se află în A şi în B sau atât în A cât şi în B.

Ca definiţie formală $A \cup B = \{x \mid x \in A \ sau \ x \in B\}$

Remarcă: Folosirea cuvântului „sau” în acest context se referă la ambele mulţimi. De exemplu: Dacă $A = \{a, b, c\}$ şi $B = \{c, d\}$ atunci $A \cup B = \{a, b, c, d\}$. Lucru care se arată în diagrama Venn prin haşurarea ambelor mulţimi A şi B.

Proprietăţi a reuniunii

$A \cup \varnothing = A$

Comutativitate
$A \cup B = B \cup A$

Asociativitate
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cup A = A$
$A \subset B$ este adevărat dacă şi numai dacă $A \cup B = B$

Condiţii ale submulţimilor

Menţionăm o proprietate importantă legată de condiţia ca o mulţime să fie submulţime. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Demonstraţie

Din moment ce avem o declaraţie de tip $\Leftrightarrow$ va trebui să demonstrăm două declaraţii şi anume $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$. Presupunem adevărat că $A \subset B$. Bazat pe această premisă trebuie să arătăm că $A \cup B = B$.

Să considerăm $x \in A \cup B$. Urmează de aici că $x \in A$ sau $x \in B$. Din moment ce am presupus că $A \subset B$ urmează că $x \in B$, şi astfel $A \cup B \subset B$. Dar deoarece întotdeauna este adevărat că $B \subset A \cup B$ urmează că $A \cup B = B$. Dovedim astfel prima parte a demonstraţiei. În continuare trebuie să arătăm că $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$. Presupunem adevărat $A \cup B = B$. Dacă $x \in A$ atunci $x \in A \cup B$. Şi din moment ce am presupus că $A \cup B = B$ urmează că $x \in B$ şi prin urmare $A \subset B$.

Operaţiile de reuniune pot fi definite şi pentru o colecţie arbitrară de mulţimi într-un mod natural. Astfel reuniunea a n mulţimi $A_1, \ldots, A_n$ poate fi natural scrisă $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Reuniunea unei colecţii infinite de mulţimi poate fi notată similar $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Dacă notăm că **I** o mulţime de indici şi A este o mulţime pentru fiecare $i \in I$, atunci reuniunea mulţimilor în colecţie poate fi notată: $\bigcup_{i \in I} A_i$. În anumite situaţii este util de a defini mulţimi formate din cuvintele unui anumit limbaj. De exemplu dacă considerăm W ca fiind mulţimea tuturor cuvintelor din limba română, atunci W ar putea fi reprezentat ca o reuniune infinită de mulţimi. Pentru fiecare $i > 0$ fie A_i mulţimea tuturor cuvintelor formate din i litere astfel că W va putea fi scris ca $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. În situaţia în care vrem să limităm numărul de litere dintr-un cuvânt să zicem la 20, atunci W va fi scris reuniunea tuturor mulţimilor A_i până la 20. Să presupunem că vrem să calculăm reuniunea mulţimilor $A_i = \{-2i, 2i\}$, unde i este un număr impar natural. Spre exemplu $A_3 = \{-6, 6\}$, $A_5 = \{-10, 10\}$. Dacă considerăm mulţimea tuturor numerelor naturale impare ca fiind notată cu impar, atunci am putea avea reuniunea impar a_i şi care este -10, -6, -2, 2, 6, 10 etc. $\bigcup_{i \le i_{mar}} A_i = \{\ldots, -10, -6, -2, 2\}$.

Intersecţia mulţimilor

Se defineşte ca fiind mulţimea tuturor elementelor care se află atât în A cât şi în B. Şi se defineşte ca fiind format $A \cap B = \{x | \; x \in A \; si \; x \in B\}$. De exemplu $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$, $A \cap B = \{c\}$.

Dacă $A \cap B = Ø$ este vid atunci se spune că A şi B sunt disjuncte. În diagrama Venn intersecţia este reprezentată:

<u>Proprietăţi</u>:

$A \cap Ø = Ø$

$A \cap B = B \cap A$

Asociativitate

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cap A = A$

$A \subset B$ dacă şi numai dacă $A \cap B = A$

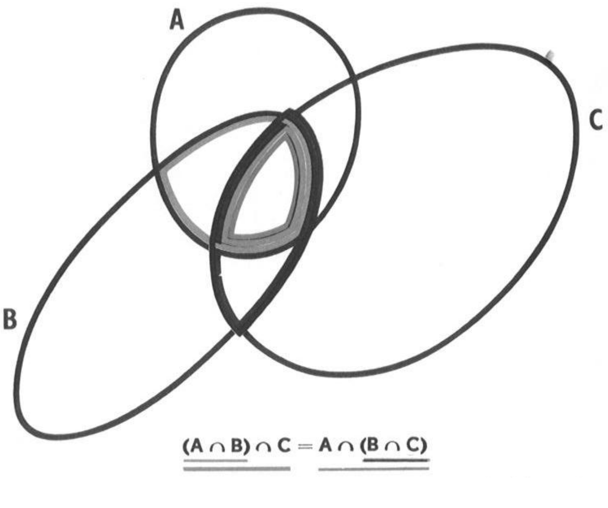
Ultima proprietate se va demonstra similar cu cea din cazul proprietăţii de reuniune.

Operaţia de intersecţie de asemenea poate fi reprezentată pentru o colecţie arbitrară de mulţimi. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$. Intersecţia seturilor numerelor infinite: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$.

Putem avea intersecţii infinite, de exemplu considerând mulţimea $A_i = \{x \mid x \in N \; si \; x \le i, -i \le x \le i\}$. Atunci vom avea o mulţime infinită pentru valoarea i natural respectiv o mulţime finită pentru un indice i impar.

Verificarea proprietăţii de asociativitate a intersecţiei şi reuniunii

Fie 3 mulţimi A, B, C. Reprezentaţi-le cu diagrama „frunză de trifoi”. Oricare ar fi mulţimile A,B,C avem formula $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Acest lucru îl mai exprimăm spunând că intersecţia este asociativă. Formula $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ arată că cele două moduri de a situa parantezele la gruparea $A \cap B \cap C$ dau acelaşi rezultat. Aşadar notăm: $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (A \cap C)$. Acest lucru se observă clar din construcţia diagramei [6]:



Construim $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
În mod similar se demonstrează şi asociativitatea pentru reuniune.

3.5. Diferenţe de mulţimi

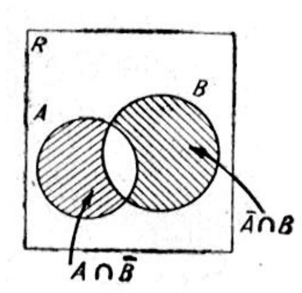
Dacă B $\subset$ A, se poate defini diferenţa dintre A şi B care este formată din elementele care aparţin lui A, fără să aparţină lui B:

$$D = A \cap \overline{B}$$

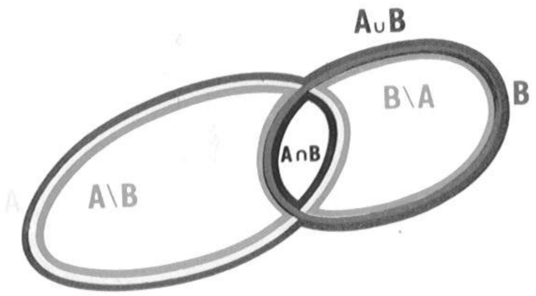
Mai putem nota diferenţa $A \setminus B$ este mulţimea obiectelor care sunt elemente ale lui A şi nu ale lui B. Termenul $A \setminus B$ se citeşte „A fără B”. Se mai întâlnesc de asemenea notaţii privitoare la definiţii $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ şi nu $x \in B\}$, $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$.

Exemplu:
Fie $A = \{a,b,c\}$ şi fie $B = \{c,d\}$, $A \setminus B = \{a,b\}$

În diagrama următoare se poate observa prin zonele haşurate diferenţele dintre mulţimile $A \setminus B$ şi $B \setminus A$ [5].



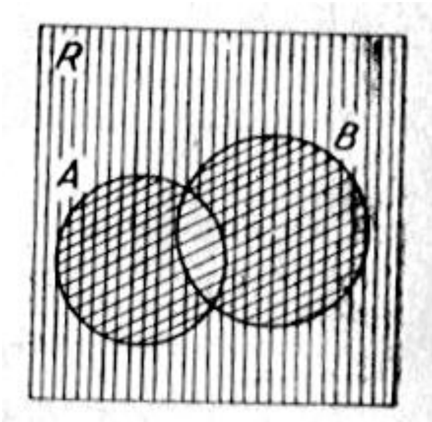
Acelaşi lucru se poate observa şi în următoarea reprezentare [6]:



Reprezentarea prin mulţimi poate fi foarte utilă în specificaţii de probleme. De exemplu: Dacă A este mulţimea lalelelor din acest magazin iar B mulţimea florilor galbene din acest magazin, atunci $A \cap B$ este mulţimea lalelelor galbene (din acest magazin). $A \cup B$ este mulţimea florilor din acest magazin care satisfac cel puţin una din cele două condiţii: să fie o lalea sau să fie galbenă. $A \setminus B$ este mulţimea lalelelor (din magazin) care nu sunt galbene. $B \setminus A$ este mulţimea florilor galbene (din magazin) care nu sunt lalele. Dacă nu există lalele galbene în magazin, atunci $A \cap B = \emptyset$. Spunem atunci că mulţimile A şi B sunt disjuncte. S-ar putea ca toate lalelele din magazin să fie galbene. Această situaţie se exprimă imediat în două moduri diferite, însă echivalente: $A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.

Introducem conceptul de diferenţă simetrică sau mai adesea numit sumă disjunctivă a lui A şi B. Aceasta este formată din elementele care aparţin lui A sau exclusiv aparţin lui B şi se notează S=A$\oplus$B.

În termenii reuniunii intersecţiei şi a complementului putem exprima următoarea relaţie $A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$ [5].



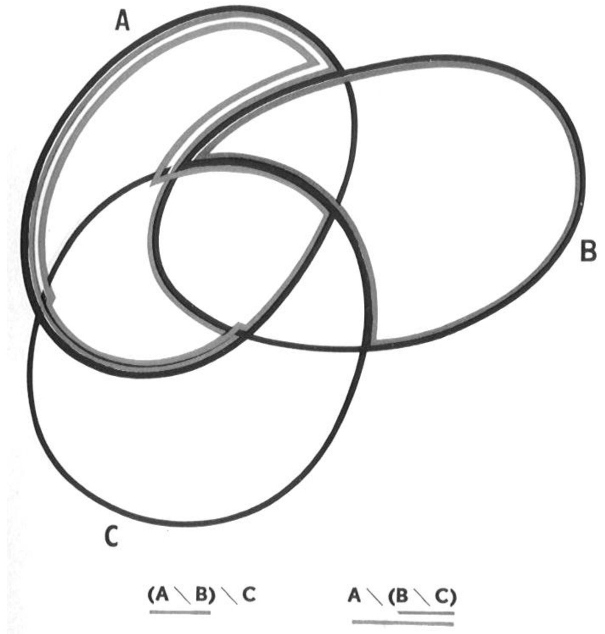
Într-un univers desenăm A şi B două mulţimi şi haşurăm oblic $A \cup B$; zona haşurată vertical este $\overline{A \cap B}$; zona haşurată în ambele moduri este $(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$, ea fiind identică cu $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Formal exprimăm regula de diferenţă prin următoarea relaţie $A \oplus B = \{x \mid x \in A \; sau \; x \in B \; dar \; nu \; ambele\}$.

În termenii reuniunii intersecţiei şi diferenţei putem exprima următoarea relaţie: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$, care poate fi demonstrată pe baza diagramelor Venn.

Suma disjunctivă se bucură de următoarele proprietăţi:

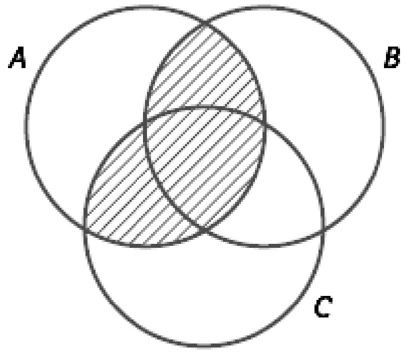
$A \oplus B = B \oplus A$ (comutativitate)
$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (asociativitate)
$A \oplus \emptyset = A = \emptyset \oplus A$ (există un element neutru)
$A \oplus A = \emptyset$ (existenţa unui simetric)
$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ (distributivitate faţă de intersecţie)

Diferenţa are o proprietate importantă de ne asociativitate. Am văzut că „$\cap$" şi „$\cup$" sunt asociative. Ne propunem să comparăm expresiile: $(A \setminus B) \setminus C$ şi $A \setminus (B \setminus C)$ [6]:



3.6. Operaţii combinate cu mulţimi

Există mai multe proprietăţi utile care pot fi observate prin combinarea diferitelor operaţii prin mulţimi. Utilizarea diagramelor Venn apare adesea folositoare în încercarea de a vizualiza mulţimile construite pe baza diferitelor operaţii.
Spre exemplu $A\cap(B\cup C)$ este reprezentată de către regiunile haşurate din figură.



Proprietăţi combinate ale reuniunii şi intersecţiei

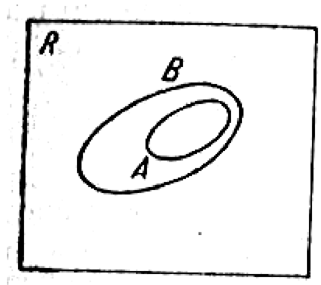
a) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (distributivitatea faţă de reuniune)
b) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (distributivitatea faţă de intersecţie)
c) $A\cap(A\cup B)=A$ (legea absorbţiei)
d) $A\cup(A\cap B)=A$ (legea absorbţiei)

Proprietăţile enunţate se pot demonstra folosind diagrame Venn.

3.7. Alte forme ale incluziunii

În loc să scriem: $A \subset B$ putem tot aşa de bine să scriem $A \cap B = A$ sau $A \cup B = B$ sau în sfârşit $A \cap \overline{B} = Ø$ şi $\overline{A} \cup B = R$, R fiind mulţimea de referinţă.

Folosind legile de reuniune intersecţie şi echivalenţă relaţia de incluziune capătă următoarea formă $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = Ø$. Această relaţie se poate de asemenea reprezenta pe baza diagramei din figură [5].



Se pune problema de a demonstra proprietăţile enunţate anterior în continuare prezentând proprietatea a distributivităţii: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

arătăm că $x \in A \cap (B \cup C) \therefore x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

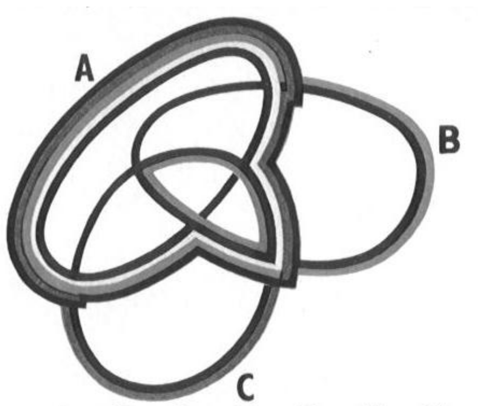
$x \in A \cap (B \cup C)$ dacă şi numai dacă x ∈ A si x ∈ B ∪ C

dacă şi numai dacă x ∈ A si fie x ∈ B sau x ∈ C

dacă şi numai dacă fie (x ∈ A si x ∈ B) sau (x ∈ A si x ∈ C)

dacă şi numai dacă x ∈ (A ∩ B) ∪(A ∩ C) QED

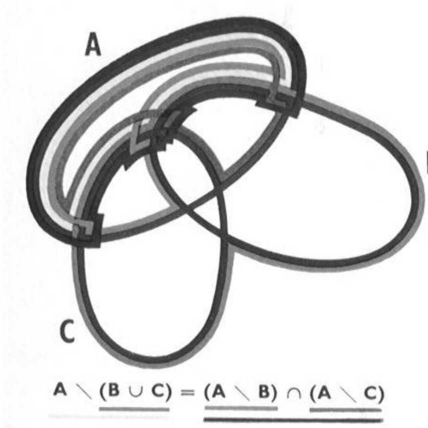
Proprietatea B se demonstrează după următorul procedeu [6]:

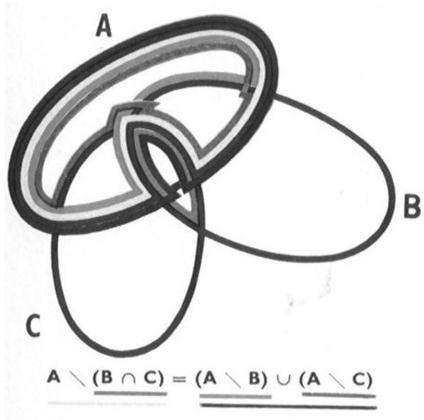


3.8. Antidistributivitatea

$\forall A, B, C \Rightarrow A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Interpretăm aceste formule spunând că diferenţa este antidistributivă la dreapta în raport cu reuniune şi cu intersecţia [1][5][6].





Proprietăţi ale complementului

a) $(A')' = A$ sau $\overline{(\overline{A})} = A$
b) $Ø' = U \quad U' = Ø$
c) $A \cap A' = Ø \quad A \cup A' = U$
d) $A \subset B$ dacă şi numai dacă $B' \subset A'$
e) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
f) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
g) $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$
h) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

3.9. Numărarea mulţimilor finite

Mărimea unei mărimi se numeşte cardinalitatea sa. De exemplu dacă $S = \{a, b, c\}$ atunci cardinalitatea lui S, $|S| = |\{a, b, c\}| = 3$

$A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,4,6,8\}$
$|A \cup B| = 7 \quad A \cap B = \{2,4\} \quad |A \cap B| = 2$

În situaţia în care cunoaştem valorile pentru cardinalitatea lui A a luiB şi a intersecţiei celor două putem afla cardinalitatea reuniunii lor: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ [1].

Această regulă se poate descoperi prin desenare a diagramelor Venn. Se extinde la 3 sau mai multe mulţimi:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| \\ &= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

Exemple [1]

1. Presupunem că avem A, B, C care sunt formate din uneltele necesare a trei muncitori pentru execuţia unei lucrări. Pentru convenienţă să notăm muncitorii cu A, B şi C. Presupunem că muncitorii folosesc în comun anumite unelte şi de asemenea să presupunem că A foloseşte 8 unelte, B 10 unelte şi C 5 unelte. Presupunem că A şi B folosesc 2 unelte şi B şi C folosesc în comun 2 unelte. În fine mai presupunem că A, B, C folosesc împreună 3 unelte. Câte unelte trebuie pentru terminarea lucrării? $|A \cup B \cup C| = ?$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 18$$

2. Presupunem că există 200 de studenţi din anul I care participă la cursurile de calculatoare, matematică şi fizică. Rezultatele au arătat că 90 de studenţi participă la calculatoare, 110 la matematică şi 60 la fizică. Mai departe 20 de studenţi participă la calculatoare şi matematică. 20 de studenţi participă la calculatoare şi fizică şi 30 la matematică şi fizică. Ne interesează să aflăm care sunt studenţii care participă la cele trei cursuri. Să numim cele trei grupe C, M, P. Prin urmare vrem să aflăm $|C \cap M \cap P|$.

$$|C| = 90$$

$$|M| = 110$$

$$|P| = 60$$

$$|C \cap M| = 20$$

$$|C \cap P| = 20$$

$$|M \cap P| = 30$$

$200 \geq |C| + |M| + |P| - |C \cap M| - |C \cap P| - |M \cap P| + |C \cap M \cap P| =$ 90 + 110 + 60 – 20 – 20 – 30 + $|C \cap M \cap P|$ = 190 + $|C \cap M \cap P|$.

$$|C \cap M \cap P| \leq 10$$

3.10. Numărarea diferenţelor dintre mulţimi

A = {1, 3, 5, 7, 9} B = {2, 3, 4, 8, 10} A-B = {1, 5, 7, 9} $|A - B| = 4$

În situaţia în care cunoaştem cardinalul lui A şi cardinalul lui $A \cap B$ sau cardinalul lui A-B, atunci $|A - B| = |A| - |A \cap B|$. Regula se poate afla direct prin diagramele lui Venn. Există două cazuri speciale de tip „*dacă atunci*” care pot fi verificate intuitiv.

Dacă $B \subset A$ atunci $|A - B| = |A| - |B|$

Dacă $A \cap B$ = Ø atunci $|A - B| = |A|$

Dorim să aflăm câte unelte sunt necesare fiecărui muncitor adică unelte care nu sunt împărţite cu alţii, de exemplu muncitorul A are nevoie de o ladă de scule de mărimea $|A - (B \cup C)|$. Putem calcula această valoare folosind atât regula diferenţă
cât şi regula de reuniune. Astfel

$$|A - (B \cup C)| = |A| - |A \cap (B \cup C)| = |A| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| =$$

$$= |A| - (|(A \cap B)| + |(A \cap C)| - |A \cap B \cap C|) = 8 - (3 + 2 - 2) = 5$$

5 unelte personale sunt ale muncitorului A.

Exerciţii şi probleme

1. Fie A, B şi C trei mulţimi oarecare. Arătaţi că dacă $A \cup C = B \cup C$ şi $A \cap C = B \cap C$, atunci $A = B$.
(**Indicaţie:** Fie $x \in A$, atunci $x \in A \cup C$ este adevărat.)

2. Fie A, B şi C trei mulţimi oarecare. Arătaţi că:

$(C - (A \cup B)) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) = C.$

3. Fie A, B şi C trei mulţimi oarecare. Dacă $A \subset B$ (adică, A este o submulţime a lui B sau A este egală cu B), arătaţi că $(C - B) \cap A = \emptyset$.

4. Fie $A = \{2k + 7 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ și $B = \{4k + 3 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.
a) Este $A \subset B$?
b) Este $B \subset A$?

5. Desenați o diagramă Venn pentru trei mulțimi A, B, C, cu unele zone umbrite. Apoi găsiți o expresie pentru a reprezenta zona umbrită.

6. Fie $A = \{2k + 5 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ și $B = \{2k + 3 \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Arătați că $A = B$.

7. Găsiți o regulă pentru reuniunea a trei mulțimi: $|A \cup B \cup C| = ?$

8. Trei programe utilizează un grup de procesoare după cum urmează, unde A, B și C reprezintă mulțimile de procesoare folosite de cele trei programe:
$|A| = 20$, $|B| = 40$, $|C| = 60$, $|A \cap B| = 10$, $|A \cap C| = 8$, $|B \cap C| = 6$.
Dacă există 100 de procesoare disponibile, care este valoarea lui $|A \cap B \cap C|$?