Ряды

Задание 1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)^n\,(n!)^2}{n^n\left((n+1)\,n!\right)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 0\cdot e < 0$$

Ряд сходится

Задание №2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

ряд сходится

Задание №3

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\ln n}$ ← чередование знаков ✓

$$\frac{1}{n+\ln n} > \frac{1}{n+1+\ln(n+1)}$$ очевидно ✓

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{0}{1+\frac{1}{n}} = 0$$ ✓

правило Лопиталя

ряд сходится

Задание №4

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n/2^n \Rightarrow R_n = n\left(\frac{3^n}{2^n}\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{2}{3}-1\right) = -\frac{n}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = -\infty < 1$$ ряд расходится

Задание №5

$f(x) = \ln(16x^2)$, $a = 1$

$$f(x) = \ln(16a^2) + \frac{1}{16a^2}\cdot 32a\,(x-a) + \frac{(-1)\cdot 2}{a^2\cdot 2!}(x-a)^2 + \frac{(-1)(2)(-3)}{a^3\cdot 3!}(x-a)^3 + \ldots =$$

$$= \ln(16a^2) + \frac{2}{a}(x-a) - \frac{1}{a^2}(x-a)^2 + \frac{1}{a^3}(x-a)^3 + \ldots = \ln 16 + 2(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-1)^n$$

Задание №1

интегральное исчисление

$$\int (2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x)\,dx =$$

$$= \frac{2x^3}{3} - x^2 - x - \cos x - \sin x + x\ln x - x + e^x + C =$$

$$= \frac{2x^3}{3} - x^2 - 2x - \cos x - \sin x + x\ln x + e^x + C$$

Задание №2

$$\int (2x + 6xz^2 - 5x^2y - 3\ln z)\,dx = x^2 + \frac{6z^2 \cdot x^2}{2} - \frac{5yx^3}{3} - 3\ln z\, x + C$$

$$= x^2 + 3z^2x^2 - \frac{5}{3}yx^3 - (3\ln z)x + C$$

Задание №3

$$\int_0^{\pi} 3x^2 \sin(2x)\,dx = 3\int_0^{\pi} x^2 \sin(2x)\,dx = 3\left(\frac{2\cos 2x}{2^3} + \frac{2x\sin 2x}{2^2} - \frac{x^2\cos(2x)}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

воспользуемся инф. источниками (не идет у меня интегрирование по частям

$$= 3\left(\left(\frac{\cos 2\pi}{2^2} + \frac{2\pi \overbrace{\sin 2\pi}^{=0}}{2^2} - \frac{\pi^2\cos 2\pi}{2}\right) - \left(\frac{\cos 0}{2^2} + \frac{2\cdot 0 \sin 0}{2^2} - \frac{0^2\cos 0}{2}\right)\right) = 3\left(\frac{1}{4} + 0 - \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{4} - 0 + 0\right) = -\frac{3\pi^2}{2}$$

Задание №4

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int (x+1)^{-1/2}\,d(x+1) = 2(x+1)^{1/2} + C =$$

$$= 2\sqrt{x+1} + C$$

Задание №5.

$$(4x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 6y)\,dx + (2y^3 + xy - 6x)\,dy = 0$$

ДУ первого порядка в полном дифференциале ~~разделяющимися переменными~~

$$\frac{d(4x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 6y)}{dy} = y - 6$$

$$\frac{d(2y^3 + xy - 6x)}{dx} = y - 6$$

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}dx = \int (4x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 6y)\,dx \,; \quad F(x;y) = \frac{4x^3}{3} + \frac{1}{2}y^2 x - 6yx + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = yx - 6x + \varphi'(y) = 2y^3 + xy - 6x$$

$$\varphi'(y) = 2y^3 \,; \quad \int \varphi'(y)\,dy = \int 2y^3\,dy = \frac{y^4}{2} + C$$

$$F(x;y) = \frac{4x^3}{3} + \frac{1}{2}y^2 x - 6yx + \frac{y^4}{2} + C$$

Задание 6.

$y' + y = x^2 y^3$ — уравнение Бернулли

1) $\cancel{y}\; y = 0$; 2) $\frac{y'}{y^3} + \frac{y}{y^3} = x^2$; $z = \frac{1}{y^2}$; $z' = -\frac{2y'}{y^3}$

$$y'/y^3 = \frac{z'}{-2}$$

$\frac{z'}{-2} + z = x^2$; $z' - 2z = -2x^2$; $z = uv$

$$u'v + uv' - 2uv = -2x^2$$

$\begin{cases} v' - 2v = 0 \\ u'v = -2x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} v = e^{2x} \\ \frac{du}{dx} = -\frac{2x^2}{e^{2x}} \end{cases}$ $u = \frac{1}{2}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1)$; $\cancel{z} + C$

(wolfram)

$z = uv = \frac{1}{2}(2x^2 + 2x + 1)\, \cancel{+C}$

$y = \cancel{\ldots} \pm\sqrt{\frac{2}{2x^2 + 2x + 1}} + C$