Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования

МАГИСТЕРСКАЯ РАБОТА
студента 248 группы В. Л. Мыльцина

Саратовский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского

Кафедра математического анализа

Научный руководитель: доцент, к. ф.-м. н., доцент
В. Г. Тимофеев

13 июня 2023г.

Цель работы: изучение неравенств типа Колмогорова и родственных с ними задач.

Задачи:

- Построение неравенств типа Колмогорова или Ландау - Колмогорова
- Восстановление полного доказательства теоремы о неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой.
- Нахождение величины погрешности восстановления значений оператора дифференцирования для функции одной переменной с ограниченной третьей производной.
- Получение точных констант в неравенствах для функций с ограниченной третьей производной.
- Построение экстремальных функций, для которых точные неравенства обращаются в равенство с наилучшей константой.
- Разработка алгоритма для сравнения производных функций с соответствующими им операторами дифференцирования.

Содержание работы

Задача. Пусть X и Y - банаховы пространства; $F : X \to Y$ - некоторый оператор (необязательно линейный) с областью определения $D(A) \subset X$; Q - некоторый класс элементов из $D(A)$; $\mathscr{L}(N) = \mathscr{L}(N; X, Y)$ - множество линейных ограниченных операторов из X в Y, норма $||T|| = ||T||_{X \to Y}$ не превосходит числа $N \geqslant 0$. Величина

$$U(T) = \sup\{||Ax - Tx||_Y : x \in Q\} \tag{1}$$

является уклонением оператора $T \in \mathscr{L}(N)$ от оператора A на классе Q, а

$$E(N) = E(N; A, Q) = \inf\{U(T) : T \in \mathscr{L}(N)\} \tag{2}$$

есть наилучшее приближение оператора A множеством ограниченных операторов $\mathscr{L}(N)$ на классе Q. Задача состоит в вычислении или исследовании величины $E(N)$, нахождении экстремального оператора, на котором в (2) достигается нижняя грань.

Definition

Многочлены вида

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = x^n + C_n^2 x^{n-2}(x^2-1) + C_n^4 x^{n-4}(x^2-1)^2 + \ldots = \tag{3}$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}(x^2-1)^k x^{n-2k},$$

названы многочленами Чебышёва первого рода.

Рекуррентное соотношение для определения многочленов Чебышёва:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{4}$$

Theorem

Для произвольной функции $f(x)$ определенной со своими n производными на полупрямой верны соотношения

$$\mu_k(f) \leqslant P_{nk}\mu_0^{\frac{n-k}{n}}(f)\mu_n^{\frac{k}{n}}(f), \tag{5}$$

где $P_{nk} = \dfrac{n^2(n^2-1)(n^2-2^2)...(n^2-(k-1)^2)\left((2n-1)!!\right)^{\frac{k}{n}}}{n^2(n^2-1)(n^2-2^2)...(n^2-(n-1)^2)\left((2k-1)!!\right)^{\frac{k}{n}}}$,
$k = 1, 2, ..n$,
$\mu_k(f)$,$\mu_0(f)$, $\mu_n(f)$ – *наибольшие значения на полупрямой абсолютных величин функции и ее k-ой и n-ой производных.*

Для доказательства теорем воспользуемся интегральным представлением

$$\int\limits_0^{3h} F'''(t)\Phi_j(t)dt = F''(t)\ \Phi_j(t)\Big|_0^{3h} - \int\limits_0^{3h} F''(t)\Phi'(t)dt =$$

$$= -F''(0)\Phi_j(0) - \left(F'(t)\Phi_j'(t)\Big|_0^{3h} - \int\limits_0^{3h} F'(t)\Phi_j''(t)dt \right) =$$

$$= -F''(0)\Phi_j(0) + F'(0)\Phi_j'(0) - \left(F(t)\Phi_j''(t)\Big|_0^{3h} - \int\limits_0^{3h} F(t)d\Phi_j''(t) \right) = \tag{6}$$

$$= -F''(0)\Phi_j(0) + F'(0)\Phi_j'(0) - F(0)\Phi_j''(0) + \int\limits_0^{3h} F(t)d\Phi_j''(t).$$

Пусть класс A функций u такой, что u является непрерывной функцией, u'' - абсолютно непрерывной функцией и выполнены условия

$$||u||_C \leqslant \alpha \ \wedge \ ||u'''||_{L_\infty} \leqslant \beta.$$

Решим следующие задачи. Для класса функций A при найдем

1. величину
$$\omega_1(\alpha,\beta) = \sup\left\{\left\|\frac{du}{dx}\right\|_C : u \in A\right\}, \qquad (7)$$
2. наилучшее приближение
$$E_{1,3}(N) = \inf_{||S||_C^C \leqslant N} \sup_{u \in Q} \left\|\frac{du}{dx} - S_{1,3}\right\|_C, \qquad (8)$$
на множестве $Q = \{u : u \in C, u \in A, \left\|\frac{d^3u}{dx^3}\right\|_{L_\infty} \leqslant \beta\}$, $||S_{i,3}||_C^C \leqslant N$, $i = 1, 2$, $N > 0$;
3. вычислена величина погрешности восстановления значений оператора дифференцирования для случая $\mathfrak{M} = \mathscr{O}$ или $\mathfrak{M} = \mathscr{L}$
$$\nu_{\alpha,1}(\mathfrak{M}) = \inf_{S \in \mathfrak{M}} \sup_{u \in Q, v \in C, ||u-v||_C < \alpha} \left\|\frac{du}{dx} - S_{1,3}\right\|_C. \qquad (9)$$

Theorem (3.1)

В задаче (7)

$$\omega_1(\alpha,\beta) = \mu_1 \leqslant \frac{3\sqrt[3]{9}}{2}\mu_0^{\frac{2}{3}}\mu_3^{\frac{1}{3}}. \tag{10}$$

и оператор наилучшего приближения имеет вид

$$S_{1,3}(F,x) = \frac{1}{6h}\left\{-8F(x) + 9F(x+h) - F(x+3h)\right\}, \; h = \sqrt[3]{\frac{\mu_0}{\mu_3}}. \tag{11}$$

Theorem (3.2)

Наилучшее приближение в задаче (8) *в случае первой производной*

$$E_{1,3}(N) = \frac{9\mu_3}{2N^2}.$$

.

Theorem (3.3)

Для первой производной величина погрешности восстановления имеет вид

$$\nu_{\alpha,1}(\mathscr{O}) = \nu_{\alpha,1}(\mathscr{L}) = \frac{3\sqrt[3]{9}\alpha^{\frac{2}{3}}}{2}. \tag{12}$$

Здесь $\alpha = \mu_0$, $\beta = \mu_3 = 1$.

Для класса функций A при найдем

1. величину
$$\omega_2(\alpha,\beta) = \sup\left\{\left\|\frac{d^2u}{dx^2}\right\|_C : u \in A\right\}; \tag{13}$$
2. наилучшее приближение
$$E_{2,3}\left(N\right) = \inf_{||S||_C^C \leqslant N} \sup_{u\in Q} \left\|\frac{d^2u}{dx^2} - S_{2,3}\right\|_C, \tag{14}$$
на множестве $Q = \{u : u \in C, u \in A, \left\|\frac{d^3u}{dx^3}\right\|_{L_\infty} \leqslant \beta\}$, $||S_{i,3}||_C^C \leqslant N$, $i = 1, 2$, $N > 0$;
3. вычислена величина погрешности восстановления значений оператора дифференцирования для случая $\mathfrak{M} = \mathscr{O}$ или $\mathfrak{M} = \mathscr{L}$
$$\nu_{\alpha,2}\left(\mathfrak{M}\right) = \inf_{S\in\mathfrak{M}} \sup_{u\in Q, v\in C, ||u-v||_C<\alpha} \left\|\frac{d^2u}{dx^2} - S_{2,3}\right\|_C. \tag{15}$$

Theorem (3.4)

В задаче (13) *величина* $\omega_2(\alpha, \beta)$ *имеет вид*

$$\omega_2(\alpha, \beta) = \mu_2 \leqslant 2\sqrt[3]{3}\mu_0^{\frac{1}{3}}\mu_3^{\frac{2}{3}}. \tag{16}$$

Theorem (3.5)

Величина наилучшего приближения в случае второй производной равна

$$E_{2,3} = -\mu_3 \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{N}}.$$

и оператор наилучшего приближения имеет вид

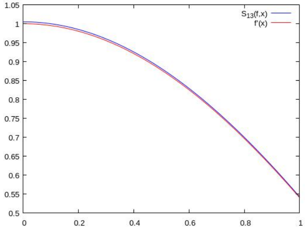
$$S_{2,3}(F, x) = \frac{1}{3h^2}\left[2F(x) - 3F(x+h) + F(x+3h)\right], \ h = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{\mu_0}{\mu_3}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{17}$$

Theorem (3.6)

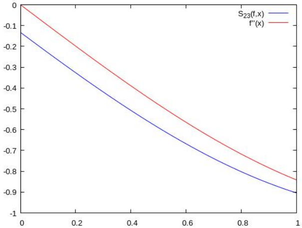
Для второй производной величина погрешности восстановления имеет вид

$$\mathscr{E}(\alpha) = \nu_\alpha(\mathscr{O}) = \nu_\alpha(\mathscr{L}) = 2\sqrt[3]{3}\alpha^{\frac{1}{3}}. \tag{18}$$

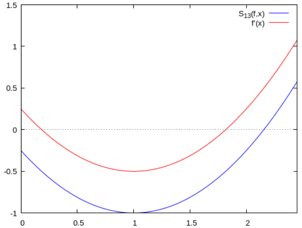
Здесь $\alpha = \mu_0$, $\beta = \mu_3 = 1$.



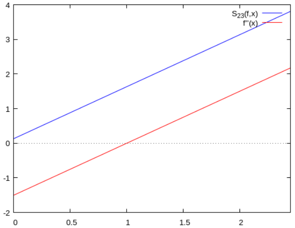
$S_{1,3}\left(f,x\right),\ f\left(x\right)=\sin x$



$S_{2,3}\left(f,x\right),\ f\left(x\right)=\sin x$



$S_{1,3}\left(f,x\right),$
$f\left(x\right)=4(x-1)^3-3(x-1)$



$S_{2,3}\left(f,x\right),$
$f\left(x\right)=4(x-1)^3-3(x-1)$

1. Найдены величины ω_1 и ω_2.
2. Найдено наилучшее приближение оператора дифференцирования.
3. Найдена величина погрешности восстановления значений оператора дифференцирования для функции одной переменной с ограниченной третьей производной на классе функций заданных с ошибкой.
4. Получены неравенства типа Колмогорова или Ландау - Колмогорова. Получено решение родственных задач.
5. Найдены точные константы в неравенствах для $n = 3$ и построены операторы наилучшего приближения и восстановления для $\frac{du}{dx}$ и $\frac{d^2u}{dx^2}$ на классе функций A.
6. Построены экстремальные функции, для которых точные неравенства обращаются в равенство с наилучшей константой.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!