Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

Кафедра математического анализа

Интерполяция на тетраэдре

Выполнил: студент 2 курса 218 группы
Веселов Андрей Сергеевич

Научный руководитель: Матвеева Юлия Васильевна

Саратов 2023

Цели дипломной работы

- рассмотреть интерполяционные сплайны первой степени одной и двух переменных и оценить погрешность аппроксимации на различных классах функций;
- рассмотреть триангуляции плоских областей и алгоритмы их построения;
- разработать десктопное приложение для построения изученных триангуляций;
- реализовать вычисление аппроксимирующих функций на треугольных сетках, удовлетворяющих условию Делоне, и построение интерполяции в приложении;
- рассмотреть линейную интерполяцию на тетраэдре и оценить погрешность аппроксимации производных.

Пусть на $[a, b]$ задано разбиение $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$.

Определение

Функция $S_{n,\nu}(x)$ называется сплайном степени n дефекта ν ($\nu \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant \nu \leqslant n+1$) с узлами на сетке Δ, если выполняются следующие условия:

а) $S_{n,\nu}(x) = \sum\limits_{\alpha=0}^{n} a_\alpha^i (x - x_i)^\alpha$ *для* $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$;

б) $S_{n,\nu}(x) \in C^{n-\nu}[a, b]$.

Теорема

Пусть дана функция $f(x) \in C[a, b]$. Если сплайн первой степени $S_1(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ на сетке Δ, то справедлива оценка

$$\| S_1(x) - f(x) \|_{C[a,b]} \leqslant \omega(f). \tag{1}$$

Сплайны двух переменных

Пусть в области $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ введена сетка $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$, где

$$\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b, \quad \Delta_y : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_M = d,$$

делящая область Ω на прямоугольные ячейки

$$\Omega_{ij} = \{(x, y) \,|\, x \in [x_i, x_{i+1}],\ y \in [y_j, y_{j+1}]\}, \ \ i = \overline{0, N-1},\ \ j = \overline{0, M-1}.$$

Определение

Функция $S_{n,m,\nu,\mu}(x, y)$ называется сплайном двух переменных степени n дефекта ν ($\nu \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant \nu \leqslant n+1$) по x и степени m дефекта μ ($\mu \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant \mu \leqslant m+1$) по y с линиями склейки на сетке Δ, если выполняются следующие условия:

а) $S_{n,m,\nu,\mu}(x, y) = \sum\limits_{\alpha=0}^{n} \sum\limits_{\beta=0}^{m} a^{ij}_{\alpha\beta}(x - x_i)^{\alpha}(y - y_j)^{\beta}$ *для* $(x, y) \in \Omega_{ij}$,

б) $S_{n,m,\nu,\mu}(x, y) \in C^{n-\nu, m-\mu}[\Omega]$.

Теорема

Пусть дана функция $f(x, y) \in C[\Omega]$. Если сплайн первой степени $S_{1,1}(x, y)$ интерполирует функцию $f(x, y)$ на сетке Δ, то справедлива оценка

$$\| S_{1,1}(x, y) - f(x, y) \|_{C[\Omega]} \leqslant 2\omega(f). \qquad (2)$$

Триангуляции плоских областей

Определение

Триангуляцией называется планарный граф, все внутренние области которого являются треугольниками. Соответствующие элементы триангуляции обычно называют узлами, ребрами и треугольниками.

Определение

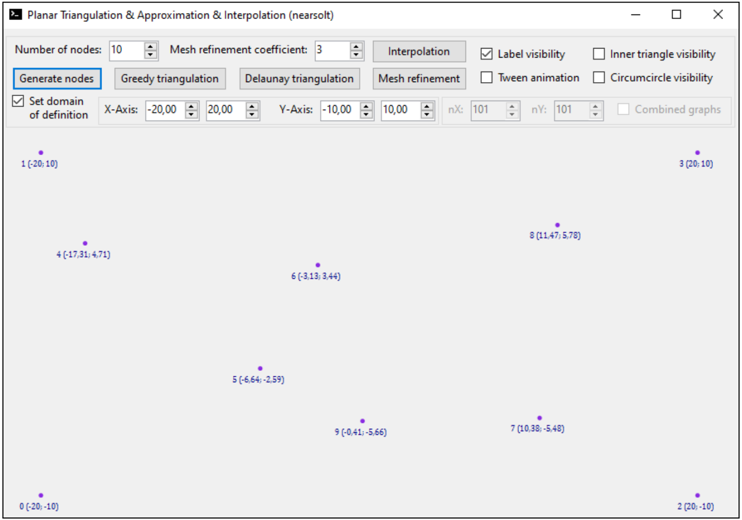
Пусть задан конечный набор точек $\{P_i\}_{i=1}^{N}$ *на плоскости* $\mathbb{R}^2$*.*

Триангуляцией данного набора точек называется совокупность невырожденных треугольников $\{T_j\}_{j=1}^{M}$*, удовлетворяющих условиям:*

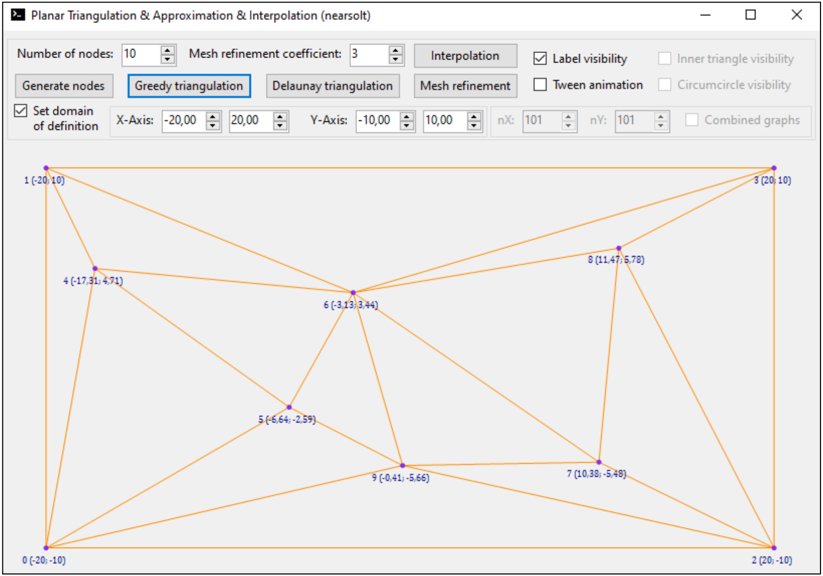
- *любая точка* P_i *является вершиной хотя бы одного треугольника* T_j*;*
- *каждый треугольник* T_j *содержит только три точки из данного набора, являющиеся вершинами этого треугольника.*

Пример

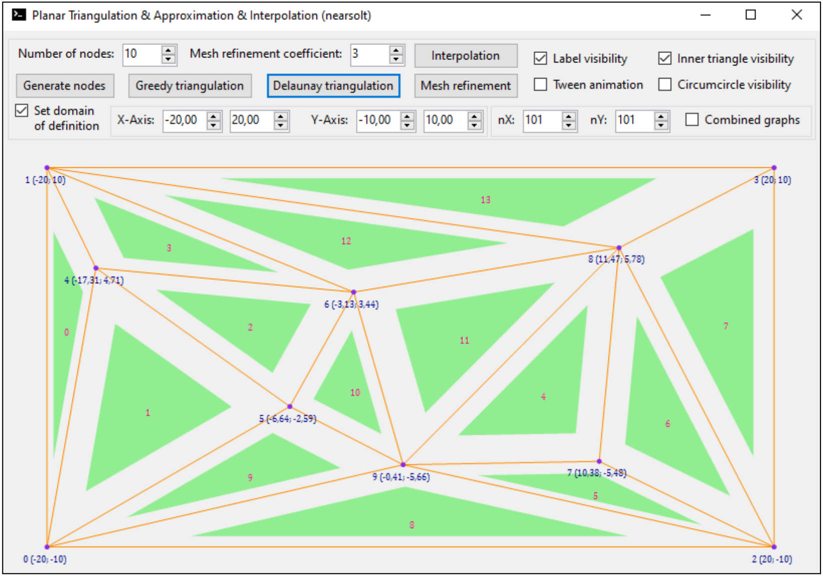
Определим область $\Omega = [-20, 20] \times [-10, 10]$, сгенерируем 10 узлов.



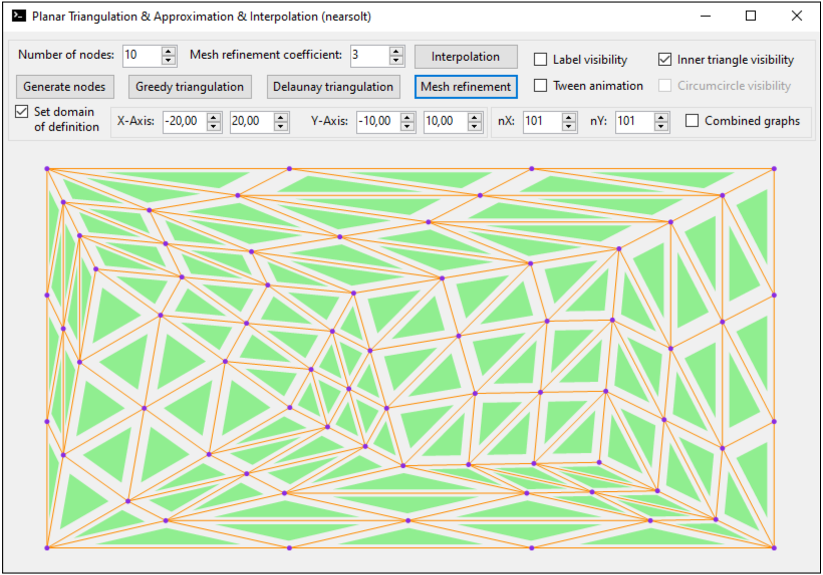
Построение жадной триангуляции



Построение триангуляции Делоне



Построение триангуляции методом измельчения



Рассмотрим задачу аппроксимации вещественнозначной функции двух переменных $z = f(x, y)$ по экспериментальным данным, которые представляют собой набор значений $\{z_i\}_{i=1}^{N}$ в случайно разбросанных по области определения точках (x_i, y_i), $i = \overline{1, N}$.

Экспериментальные данные обозначим через

$$A = \left\{ XY, Z : \; XY = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}, \; Z = \{z_i\}_{i=1}^{N} \right\}.$$

Требуется найти такую функцию $G(A, x, y)$, которая в некотором заданном смысле соответствовала бы неизвестной функции $f(x, y)$ и могла быть использована в расчетах вместо нее.

Вычисление аппроксимирующих функций

Пример

Пусть дана функция $f(x, y) = \cos(x)\sin(0.5y)x + y$, определенная в области $\Omega = [4, 10] \times [-10, -2]$. Сгенерируем 100 узлов, случайно разбросанных по области определения Ω.

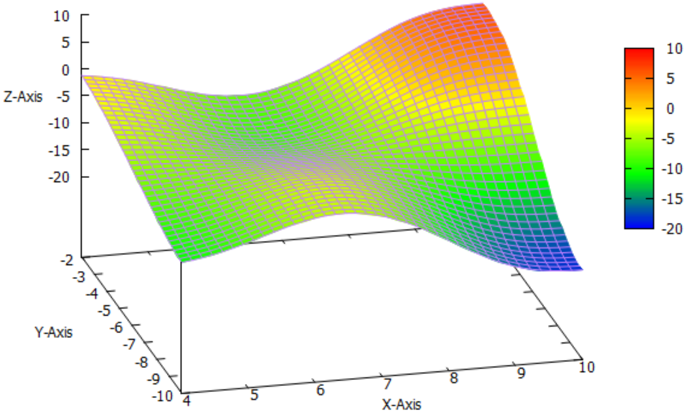


Рис.: График функции $f(x, y)$.

Максимальное значение погрешности аппроксимации равно 9.641.

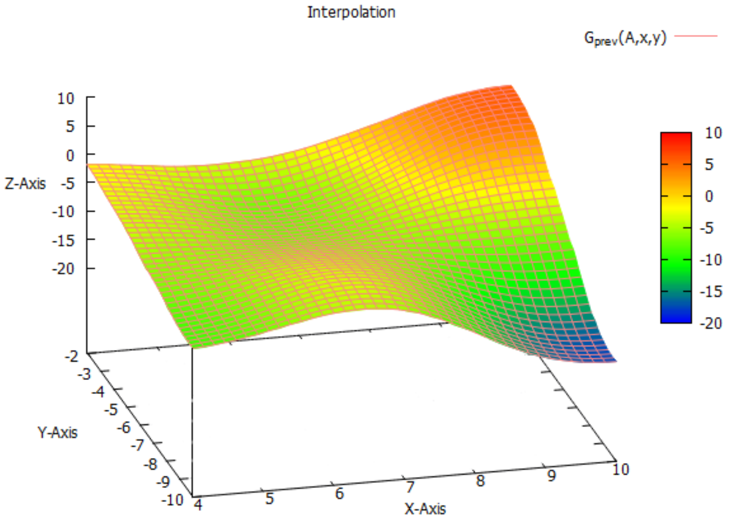


Рис.: График $G_{prev}(A, x, y) \in \Omega = [4, 10] \times [-10, -2]$ $(h_x = 0.06,\ h_y = 0.08)$.

Максимальное значение погрешности аппроксимации равно 3.228.

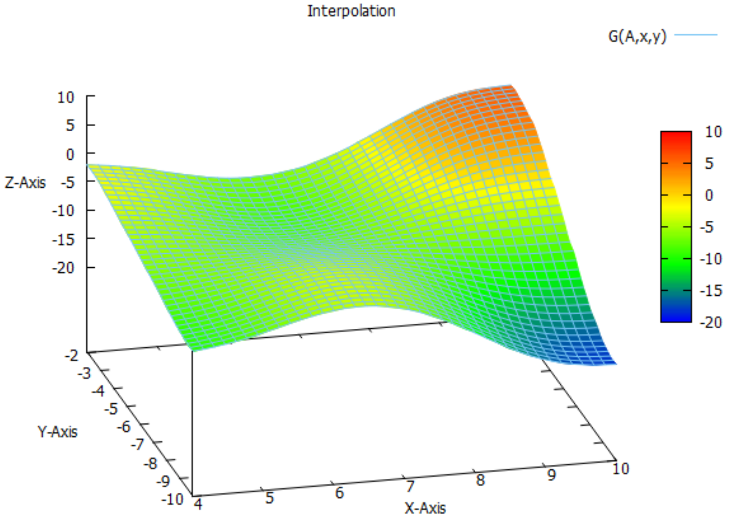


Рис.: График $G(A, x, y) \in \Omega = [4, 10] \times [-10, -2]$ ($h_x = 0.06,\ h_y = 0.08$).

Линейная интерполяция на тетраэдре

Пусть задан некоторый тетраэдр $\bar{T} = (A_i)_{i=1}^4$ с вершинами A_i, $i = \overline{1,4}$. Функция f определена на $\bar{T}$ и непрерывна вместе с любыми своими производными до второго порядка включительно.

Требуется построить полином $P = P[f]$ первой степени, который в вершинах A_i $(i = \overline{1,4})$ тетраэдра $\bar{T}$ интерполирует функцию f:

$$f(A_i) = P(A_i), \quad i = \overline{1,4}.$$

Теорема

Для любой функции $f \in W(M)$ и любого единичного вектора ξ справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \xi} \right\| \lesssim \frac{MR}{\sin(\varphi)}, \tag{3}$$

где

$$R = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} R_i, \quad \sin(\varphi) = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant 4,\, i \neq j} \sin(\varphi_{ij}).$$

Спасибо за внимание!