Algorytmy i struktury danych (Lista 7)

Zadanie 1 Jakie informacje przechowujemy w węźle B-drzewa? Podaj definicję B-drzewa.

```
struct BTnode:
    int t;              // minimum degree
    int n;              // current number of keys
    int* keys;          // array of keys in non-decreasing order
    bool leaf;          // is it a leaf?
    BTnode** children;
end
```

Inne założenia (oprócz zawartych w komentarzach):

1. Węzeł wewnętrzny zawiera $n+1$ wskaźników do synów.
2. Klucze rozdzielają dzieci na przedziały (n+1).
3. Każdy węzeł różny od korzenia musi mieć co najmniej $t-1$ kluczy i co najwyżej $2t-1$ kluczy. (korzeń może mieć od 1 do $2t-1$ kluczy)
4. Wszystkie liście leżą na tej samej wysokości równym h.

Zadanie 2 (2 pkt.) Udowodnij, że żadna z poniższych operacji wykonana na drzewie spełniającym wszystkie warunki B-drzewa, nie prowadzi do ich naruszenia.

(a) `split_child`, przesuwająca środkowy klucz (medianę) z węzła o $2t-1$ kluczach do rodzica, który ma mniej niż $2t-1$ kluczy, a klucze i dzieci na prawo od mediany – do nowego brata dodanego po prawej stronie dzielonego węzła. Skoro mogliśmy przejść do dziecka to znaczy, że rodzic był niepełen i może przyjąć przynajmniej jeden klucz. Więc nie narusza się maksymalnej liczby kluczy w węźle. Węzeł dzielony miał $2t-1$ kluczy, więc bez tego odjętego zostaja nam dwa zestawy po minimalnej liczbie kluczy.

(b) `unsplit_child` odwrotna do `split_child`, sklejająca dwa sąsiednie węzły o minimalnej liczbie kluczy $t-1$ oraz klucz stojący w rodzicu między nimi w jeden nowy węzeł. Zakładamy, że rodzic ma co najmniej t kluczy lub jest korzeniem.

(c) `borrow_from_sibling`, rotacja przenosząca do węzła o minimalnej $t-1$ liczbie kluczy, który ma prawego brata z co najmniej t kluczami, klucz stojący w rodzicu między braćmi i wpisująca na jego miejsce jego miejsce pierwszy klucz brata. Jakie operacje na dzieciach należy dodatkowo wykonać?

Zadanie 3 W B-drzewie o $t = 10$ podaj wzory i wyniki numeryczne określające:

(a) ile kluczy może zawierać korzeń (podaj przedział),
Korzeń zawiera od 1 do 19 kluczy. (max $2t-1$)

(b) ile dzieci może mieć korzeń (podaj przedział),
Korzeń może mieć od 2 do 20 dzieci. (min t max $2t$)

(c) ile kluczy może mieć potomek korzenia (podaj przedział),
Potomek korzenia może mieć od 9 do 19 kluczy. (min $t-1$ max $2t-1$)

(d) ile dzieci może mieć potomek korzenia (podaj przedział),
Potomek korzenia może mieć od 10 do 20 dzieci. (min t max $2t$)

(e) ile maksymalnie węzłów może być na k-tym poziomie (przyjmując, że korzeń to poziom 0)
Na k-tym poziomie może być maksymalnie $(2t)^k$ węzłów.

(f) ile łącznie kluczy może być na k-tym poziomie (podaj przedział).
Nie licząc korzenia dla którego minimum to 1 klicz to na k-tym poziomie może być od $2(t-1)t^{k-1}$ do $(2t-1)(2t)^k$ kluczy. (min $(2min)t^{k-1}$ max $(max)t^k$

Zadanie 4 Jaka jest minimalna, a jaka maksymalna liczba kluczy w B-drzewie mającym h poziomów, przy ustalonej wartości parametru t (patrz Cormen).

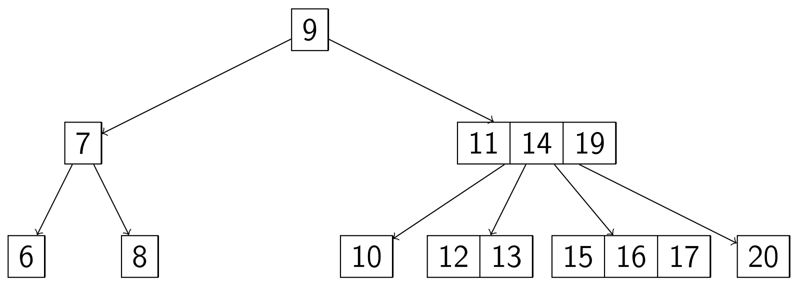
Minimalna:
Gdy korzeń zawiera 1 klucz, a na każdym z pozostałych poziomiomów każdy węzeł zawiera $t-1$ kluczy (minimum).
Na poziomie 1 mamy 2 węzły -> $2(t-1)$ kluczy.
Z czego wynika, że na kolejnym poziomie mamy 2t węzłów, na następnym $2t^2$ itd.
W takim układzie na h poziomie mamy $2t^{h-1}$ węzłów, a każdy z nich zawiera $t-1$ kluczy.
Stąd:

$$\begin{aligned}
n &\geq 1 + 2(t-1)(2t + 2t^2 + ... + 2t^{h-1}) \\
&= 1 + (t-1)\sum_{i=1}^{h} 2t^{i-1} \\
&= 1 + 2(t-1)\frac{t^h - 1}{t-1} \\
&= 2t^h - 1
\end{aligned}$$

Maksymalna:
Gdy korzeń ma maksymalną ilość kluczy $2t-1$, a na każdym z pozostałych poziomów każdy węzeł zawiera $2t-1$ kluczy (maksimum).
Na poziomie 1 mamy max $2t-1$ kluczy razy wezły 2t -> $(2t-1)2t$.
Z czego wynika, że na kolejnym poziomie mamy $(2t-1)2t^2$ kluczy, na następnym $(2t-1)2t^3$ itd.
W takim układzie na h poziomie mamy $(2t-1)2t^h$ kluczy, a każdy z nich zawiera $2t-1$ kluczy.
Stąd:

$$
\begin{aligned}
n &\leq (2t-1) + (2t-1)(2t + (2t)^2 + \ldots + (2t)^h) \\
&= (2t-1) + (2t-1)\sum_{i=1}^{h} (2t)^i \\
&= (2t-1)\sum_{i=0}^{h} (2t)^i \\
&= (2t-1)\frac{(2t)^{h+1} - 1}{2t-1} \\
&= (2t)^{h+1} - 1
\end{aligned}
$$

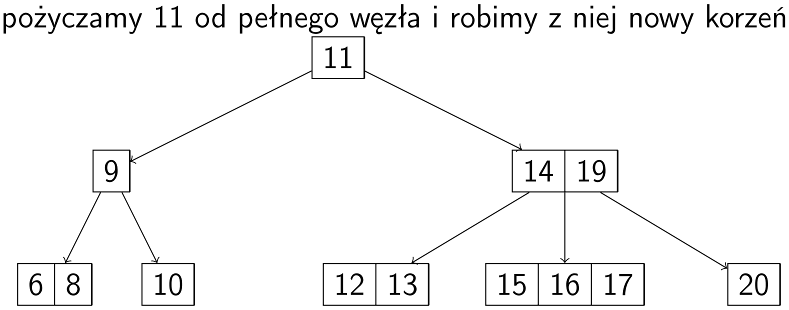
Zadanie 5 Podano na rysunku B-drzewo o $t = 2$:



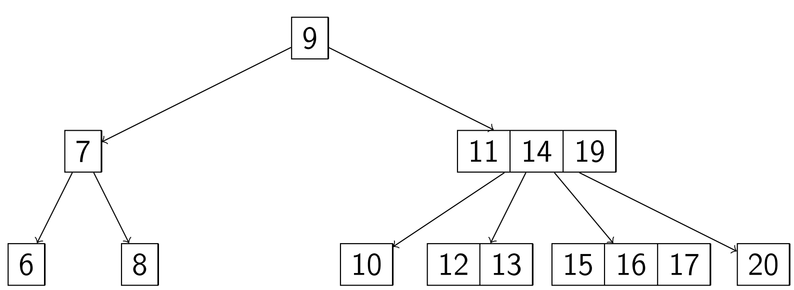
- usuń z tego drzewa 7.

- do drzewa widocznego powyżej dodaj 18.

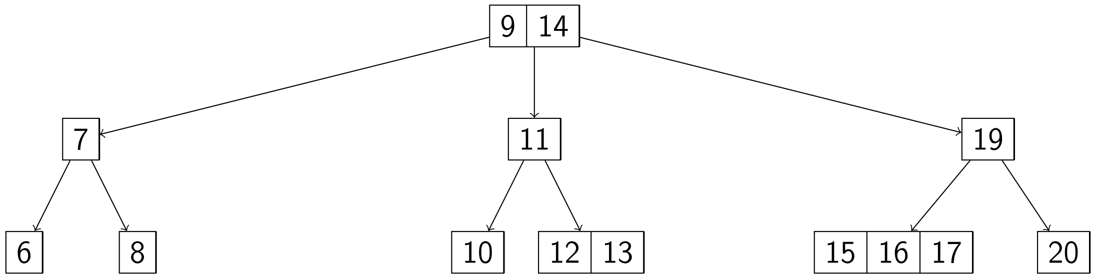
Nie wchodzimy do dziecka o minimalnej liczbie ani maksymalnej liczbie węzłów. Dlatego od razu pożyczamy 11 od pełnego węzła i robimy z niej nowy korzeń.



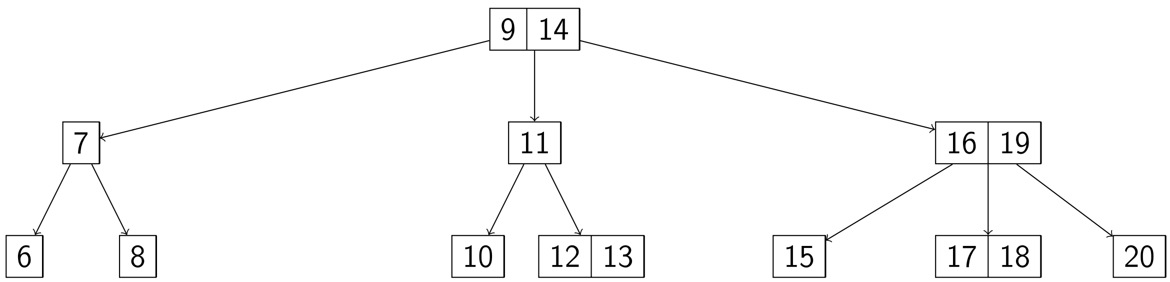
Dodanie 18:



Analogicznie jak wcześniej nie wchodzimy do pełnego węzła, tylko od razu robimy split i 14 idzie do góry.

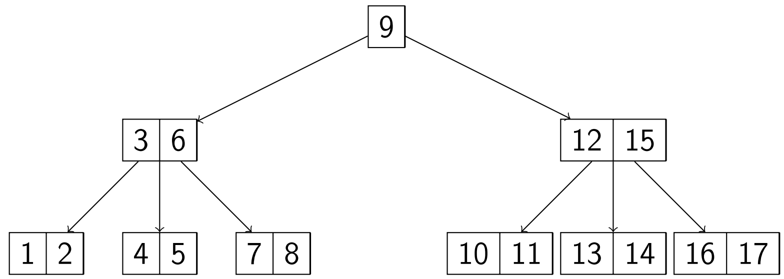


Widząc znowu pełny węzeł robimy split i 16 idzie do rodzica.

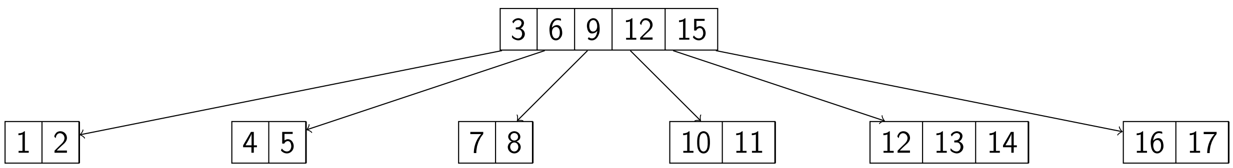


Zadanie 6 (2 pkt.) Do pustego B-drzewa o $t = 2$ wstaw kolejno 22 litery swojego imienia i nazwiska oraz adresu. Następnie usuń w tej samej kolejności w jakiej były wstawiane.

Zadanie 7 Narysuj B-drzewo o $t = 3$ zawierające dokładnie 17 kluczy na trzech poziomach: korzeń, jego dzieci i wnuki. Następnie usuń z tego drzewa korzeń.



Dzieci korzenia mają minimalną liczbę kluczy, więc robimy po prostu unsplit.



Teraz możemy usunąć 9 i zastąpić ją najmniejszym kluczem prawego dziecka.