

## Algorytmy i struktury danych (Sortowanie i kopce)

Przyjmując, że  $t1[] = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  oraz  $t2[] = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$  i stosując algorytmy sortujące ściśle wg procedur z pliku `sorty2020.cc` i wykonaj polecenia:

**Zadanie 1** Ile dokładnie porównań (między elementami tablicy) wykona `insertionSort(t2)` a ile `insertionSort(t1)`?

Posortowana:  $n-1$  porównań. Nieposortowana:  $\frac{n(n-1)}{2}$  porównań.  
Dla  $t1$  wykona 6 porównań. Dla  $t2$  wykona 21 porównań.

**Zadanie 2** Ile co najwyżej porównań (między elementami tablic) wykona procedura scalająca `merge` dwie tablice  $n$ -elementowe?

W najgorszym przypadku będzie musiała wykonać  $2n - 1$  porównań, gdzie elementy rosnące występują naprzemiennie, więc będziemy porównywać każdy element do momentu aż nie trafimy na większy i go nie wpisujemy do tablicy wyjściowej.

**Zadanie 3** Jaka jest pesymistyczna złożoność czasowa procedury `mergeSort`? Odpowiedź uzasadnij.

Dla wersji rekurencyjnej i iteracyjnej:  $O(n \log n)$

Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej:  $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$ ,  
gdzie liczba podproblemów to  $a = 2$ , rozmiar podproblemu to  $b = 2$ , i mamy  $n$  jako liczbę porównań.

$$f(n) = \theta(n^{\log_2 2}) = \theta(n)$$

$$T(n) = \theta(n \log n)$$

Porównujemy elementy i scalamy je w jedną tablicę. W każdym kroku wykonujemy  $n$  porównań. W każdym kroku dzielimy tablicę na dwie części o połowie długości. W sumie wykonujemy  $\log n$  kroków, scalań. Złożoność czasowa zawsze jest  $O(n \log n)$ .

**Zadanie 4** Ile co najwyżej porównań (między elementami tablicy) wykona procedura `partition`?

Przy jednym wywołaniu `partition` wykona się maksymalnie  $n + 1$  porównań. To przypadek, gdy nasze odwrócone elementy są najbliższe pivota lub musimy zamienić stronami każdy z elementów. W obu przypadkach musimy każdą wartość po stronie prawej i lewej porównać z pivotem. Mimalnie są zawsze 2 porównania.

**Zadanie 5** Jak jest średnia a jaka pesymistyczna złożoność quickSort. Odpowiedź uzasadnij.

Średnia złożoność czasowa:  $O(n \log n)$

Pesymistyczna złożoność czasowa:  $O(n^2)$

Pesymistyczną złożoność osiągamy, gdy jako pivot zostanie wybrana wartość najmniejsza lub największa w tablicy. Złożoność kwadratowa wynika ze wzoru

$$T(n) = n + 1 + T(n-1) \rightarrow T(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

czyli możemy posłużyć się sumą ciągu arytmetycznego.

$$T(n) = O(n^2)$$

**Zadanie 6** Jaka jest złożoność funkcji buildheap? Przeprowadź dowód - uzasadnij swoją odpowiedź.

Złożoność buildheap wynosi  $O(n)$ .

Jeśli tablica ma  $n$  elementów to  $\frac{n}{2}$  elementów jest liśćmi. Do porównań potrzebujemy węzła z dziećmi, więc ich nie mamy z czym porównywać. Pozostałe węzły możemy porównywać z dziećmi, a przy przesiewaniu z dalszymi potomkami. Stąd:

$$2\left(\frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 + \dots\right)$$

Mnożenie przez dwa wynika z sytuacji gdy porównujemy oboje dzieci z rodzicem.

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=1}^{h-1} \frac{n}{2^{i+1}} \cdot i \\ & 2\left(\frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 + \frac{n}{16} \cdot 3 + \frac{n}{32} \cdot 4 + \dots\right) \\ & \frac{n}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots\right) \\ & \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{\frac{1}{1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \\ & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 \\ & \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 0.5 \\ & \frac{1}{8} + \dots = 0.25 \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{n}{2} \cdot 4 = 2n = O(n)$$

**Zadanie 7** Ile dodatkowej pamięci wymaga posortowanie tablicy n-elementowej za pomocą algorytmu:

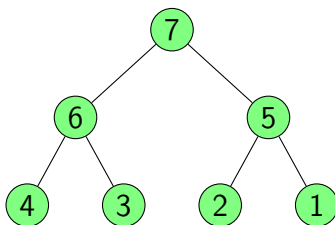
- mergesort, złożoność pamięciowa  $O(n)$  dodatkowa pamięć  $O(n)$
- quicksort, złożoność pamięciowa  $O(n)$  dodatkowa pamięć  $O(n)$
- heapsort, złożoność pamięciowa  $O(n)$   
nie potrzebujemy dodatkowej pamięci  $\rightarrow O(1)$ , ponieważ sortujemy w miejscu
- insertionsort, złożoność pamięciowa  $O(n)$   
dodatkowa pamięć  $O(1)$
- countingsort, złożoność pamięciowa  $O(n)$   
dodatkowa pamięć  $O(n)$
- bucketsort, złożoność pamięciowa  $O(n)$   
dodatkowa pamięć  $O(n + m)$
- radixsort, złożoność pamięciowa  $O(n)$   
dodatkowa pamięć  $O(n + k)$

W punktach (e), (f), (g) zakładamy, że ilość kubełków jest  $m$ , a liczby do posortowania mają nie więcej niż  $k$  cyfr.

**Zadanie 8** Jaka jest średnia a jaka pesymistyczna złożoność czasowa algorytmu:

- mergesort  $n \log n$
- quicksort  $n \log n$
- heapsort  $n \log n$   $n^2$
- insertionsort  $n^2 n^2$
- countingsort  $n + k$   $n + k$
- bucketsort  $n + m$   $n + m$
- radixsort  $n k$   $n k$  W punktach (e), (f), (g) zakładamy, że ilość kubełków jest  $m$ , a liczby do posortowania mają nie więcej niż  $k$  cyfr.

**Zadanie 9** Udowodnij, że wysokość (ilość poziomów na których występują węzły) kopca n-elementowego wynosi  $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$



$$i = \text{ostatnie dziecko z dziećmi} = n/2 - 1$$

$$i = 0$$

$$2(2(2 * 0 + 1) + 1) + 1 \dots < n$$

Maksymalna ilość węzłów w kopcu o wysokości  $h$ :

$$n(h) = 2^h - 1$$

$$n(h - 1) = 2^{h-1} - 1$$

Minimalna ilość węzłów w kopcu o wysokości  $h$ :

$$n(h - 1) + 1 = 2^{h-1} - 1 + 1 = 2^{h-1}$$

Ilość węzłów w kopcu o wysokości  $h$ :

$$2^{h-1} \leq n < 2^h$$

$$h - 1 \leq \log_2 n < h$$

$$h \leq \log_2 n + 1 < h + 1$$

$$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

**Zadanie 10** Który element tablicy  $t$  jest (a) lewym dzieckiem (b) prawym dzieckim (c) ojcem, elementu  $t[i]$  w procedurze heapsort?

$$(a) t[2i + 1]$$

$$(b) t[2i + 2]$$

$$(c) t[\lfloor \frac{i - 1}{2} \rfloor]$$

**Zadanie 11** Czy ciąg 23, 17, 14, 6, 13, 10, 1, 5, 7, 12 jest kopcem?

Nie jest to kopiec ze względu na to że 7 jest większa od swojego rodzica, którym jest 6.

**Zadanie 12** Zilustruj działanie procedury buildheap dla ciągu 5,3,17,10,84,19,6,22,9. Narysuj na kartce wygląd tablicy/kopca po każdym wywołaniu procedury przesiej.

**Zadanie 13** Zasymluj działanie polifazowego mergesorta dla tablicy 9,22,6,19,14,10,17,3,5. Na każdym etapie sortowania scala się sąsiadujące listy rosnące.

$$9, 22 || 6, 19 || 14 || 10, 17 || 3, 5$$

$$6, 9, 19, 22 || 10, 14, 17 || 3, 5$$

$$6, 9, 10, 14, 17, 19, 22 || 3, 5$$

$$3, 5, 6, 9, 10, 14, 17, 19, 22$$

**Zadanie 14** Zasymluj działanie mergesort( $t_2$ ).

**Zadanie 15** Zasymluj działanie partition( $t_2, 7$ ).

**Zadanie 16** Zasymluj działanie partition( $t_2, 7$ ) w przypadku gdyby piwotem zamiast  $t[n/2]$  było  $t[0]$

**Zadanie 17** Patrz 5.

**Zadanie 18** Napisz wzór na numer kubetka, do którego należy wrzucić liczbę  $x$  w sortowaniu kubetkowym, jeśli kubetków jest  $n$ , a elementy tablicy mieszczą się przedziale  $(a, b)$ . Numeracja zaczyna się od 0

**Zadanie 19** Jak obliczyć  $k$ -tą od końca cyfrę w liczby  $x$ ? Jak obliczyć ilość cyfr liczby  $x$ ? Przyjmujemy układ dziesiętny. Jak wyniki zmieniają się w układzie pozycyjnym o 1000 cyfr?