

Algorytmy i struktury danych (Sortowanie i kopce)

Przyjmując, że $t1[] = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ oraz $t2[] = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ i stosując algorytmy sortujące ściśle wg procedur z pliku `sorty2020.cc` i wykonaj polecenia:

Zadanie 1 Ile dokładnie porównań (między elementami tablicy) wykona `insertionSort(t2)` a ile `insertionSort(t1)`?

Posortowana: $n-1$ porównań. Nieposortowana: $\frac{n(n-1)}{2}$ porównań.
Dla $t1$ wykona 6 porównań. Dla $t2$ wykona 21 porównań.

Zadanie 2 Ile co najwyżej porównań (między elementami tablic) wykona procedura scalająca merge dwie tablice n -elementowe?

W najgorszym przypadku będzie musiała wykonać $2n - 1$ porównań, gdzie elementy rosnące występują naprzemiennie, więc będziemy porównywać każdy element do momentu aż nie trafimy na większy i go nie wpisujemy do tablicy wyjściowej.

Zadanie 3 Jaka jest pesymistyczna złożoność czasowa procedury `mergeSort`? Odpowiedź uzasadnij.

Dla wersji rekurencyjnej i iteracyjnej: $O(n \log n)$

Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$,
gdzie liczba podproblemów to $a = 2$, rozmiar podproblemu to $b = 2$, i mamy n jako liczbę porównań.

$$f(n) = \theta(n^{\log_2 2}) = \theta(n)$$

$$T(n) = \theta(n \log n)$$

Porównujemy elementy i scalamy je w jedną tablicę. W każdym kroku wykonujemy n porównań. W każdym kroku dzielimy tablicę na dwie części o połowie długości. W sumie wykonujemy $\log n$ kroków, scalań. Złożoność czasowa zawsze jest $O(n \log n)$.

Zadanie 4 Ile co najwyżej porównań (między elementami tablicy) wykona procedura `partition`?

Przy jednym wywołaniu `partition` wykona się maksymalnie $n + 1$ porównań. To przypadek, gdy nasze odwrócone elementy są najbliższe pivota lub musimy zamienić stronami każdy z elementów. W obu przypadkach musimy każdą wartość po stronie prawej i lewej porównać z pivotem. Mimalnie są zawsze 2 porównania.

Zadanie 5 Jak jest średnia a jaka pesymistyczna złożoność quickSort. Odpowiedź uzasadnij.

Średnia złożoność czasowa: $O(n \log n)$

Pesymistyczna złożoność czasowa: $O(n^2)$

Pesymistyczną złożoność osiągamy, gdy jako pivot zostanie wybrana wartość najmniejsza lub największa w tablicy. Złożoność kwadratowa wynika ze wzoru

$$T(n) = n + 1 + T(n-1) \rightarrow T(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

czyli możemy posłużyć się sumą ciągu arytmetycznego.

$$T(n) = O(n^2)$$

Zadanie 6 Jaka jest złożoność funkcji buildheap? Przeprowadź dowód - uzasadnij swoją odpowiedź.

Złożoność buildheap wynosi $O(n)$.

Jeśli tablica ma n elementów to $\frac{n}{2}$ elementów jest liśćmi. Do porównań potrzebujemy węzła z dziećmi, więc ich nie mamy z czym porównywać. Pozostałe węzły możemy porównywać z dziećmi, a przy przesiewaniu z dalszymi potomkami. Stąd:

$$2\left(\frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 + \dots\right)$$

Mnożenie przez dwa wynika z sytuacji gdy porównujemy oboje dzieci z rodzicem.

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=1}^{h-1} \frac{n}{2^{i+1}} \cdot i \\ & 2\left(\frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 + \frac{n}{16} \cdot 3 + \frac{n}{32} \cdot 4 + \dots\right) \\ & \frac{n}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots\right) \\ & \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{\frac{1}{1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \\ & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 \\ & \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 0.5 \\ & \frac{1}{8} + \dots = 0.25 \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{n}{2} \cdot 4 = 2n = O(n)$$

Zadanie 7 Ile dodatkowej pamięci wymaga posortowanie tablicy n -elementowej za pomocą algorytmu: radixsort dodatkowa pamięć $O(n + k)$

W punktach (e), (f), (g) zakładamy, że ilość kubeków jest m , a liczby do posortowania mają nie więcej niż k cyfr.

Algorytm	Pamięć
mergesort	$O(n)$
quicksort	$O(n)$
heapsort	$O(1)$
insertionsort	$O(1)$
countingsort	$O(n + m)$
bucketsort	$O(n + m)$
radixsort	$O(n + k)$

Zadanie 8 Jaka jest średnia a jaka pesymistyczna złożoność czasowa algorytmu:

Algorytm	Średnia	Pesymistyczna
mergesort	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
quicksort	$O(n \log n)$	$O(n^2)$
heapsort	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
insertionsort	$O(n^2)$	$O(n^2)$
countingsort	$O(n + m)$	$O(n + m)$
bucketsort	$O(n + m)$	$O(n^2)$
radixsort	$O(nk)$	$O(nk)$

Zadanie 9 Udowodnij, że wysokość (ilość poziomów na których występują węzły) kopca n -elementowego wynosi $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

Maksymalna ilość węzłów w kopcu o wysokości h :

$$n(h) = 2^h - 1$$

$$n(h - 1) = 2^{h-1} - 1$$

Minimalna ilość węzłów w kopcu o wysokości h :

$$n(h - 1) + 1 = 2^{h-1} - 1 + 1 = 2^{h-1}$$

Ilość węzłów w kopcu o wysokości h :

$$2^{h-1} \leq n < 2^h$$

$$h - 1 \leq \log_2 n < h$$

$$h \leq \log_2 n + 1 < h + 1$$

$$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

Zadanie 10 Który element tablicy t jest (a) lewym dzieckiem (b) prawym dzieckim (c) ojcem, elementu $t[i]$ w procedurze heapsort?

$$(a)t[2i + 1]$$

$$(b)t[2i + 2]$$

$$(c)t[\lfloor \frac{i - 1}{2} \rfloor]$$

Zadanie 11 Czy ciąg 23, 17, 14, 6, 13, 10, 1, 5, 7, 12 jest kopcem?

Nie jest to kopiec ze względu na to że 7 jest większa od swojego rodzica, którym jest 6.

Zadanie 12 Zilustruj działanie procedury buildheap dla ciągu 5,3,17,10,84,19,6,22,9. Narysuj na kartce wygląd tablicy/kopca po każdym wywołaniu procedury przesiej.

Zadanie 13 Zasymluj działanie polifazowego mergesorta dla tablicy 9,22,6,19,14,10,17,3,5. Na każdym etapie sortowania scala się sąsiadujące listy rosnące.

9, 22||6, 19||14||10, 17||3, 5
 6, 9, 19, 22||10, 14, 17||3, 5
 6, 9, 10, 14, 17, 19, 22||3, 5
 3, 5, 6, 9, 10, 14, 17, 19, 22

Zadanie 14 Zasymluj działanie mergesort(t2).

$t2[] = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$
 $7, 6, 5||4, 3, 2||1$
 $6, 7||3, 4||1||2, 5$
 $3, 4, 6, 7||1||2, 5$
 $1||2, 3, 4, 5, 6, 7$
 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

Zadanie 15 Zasymluj działanie partition(t2,7).

$t2[] = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$
 $x = 4, k = 0, n = 6, swap => 1, 6, 5, 4, 3, 2, 7$
 $x = 4, k = 1, n = 5, swap => 1, 2, 5, 4, 3, 6, 7$
 $x = 4, k = 2, n = 4, swap => 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
 $return 3;$

Zadanie 16 Zasymluj działanie partition(t2,7) w przypadku gdyby piwołem zamiast $t[n/2]$ było $t[0]$

$t2[] = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$
 $x = 7, k = 6, n = 6$
 $return 6;$

Zadanie 17 Patrz 5.

Zadanie 18 Napisz wzór na numer kubetka, do którego należy wrzucić liczbę x w sortowaniu kubetkowym, jeśli kubetków jest n , a elementy tablicy mieszczą się przedziale (a, b) . Numeracja zaczyna się od 0.

$$\text{Kubetek } k = \lfloor \frac{n}{b-a}(x-a) \rfloor$$

Zadanie 19 Jak obliczyć k -tą od końca cyfrę w liczby x ? Jak obliczyć ilość cyfr liczby x ? Przyjmujemy układ dziesiętny. Jak wyniki zmieniają się w układzie pozycyjnym o 1000 cyfr?

m różnych cyfr:

$$k_w = \left\lfloor \frac{x}{m^k} \right\rfloor \mod m$$

dla $x = 123456, k = 3, m = 1000, k_w = 3$

$$\frac{123456}{1000^3} = 0.123456 \rightarrow 0 \mod 1000 = 0$$