Algorytmy i struktury danych (Lista 7)

Zadanie 1 Jakie informacje przechowujemy w węźle B-drzewa? Podaj definicję B-drzewa.

```
struct BTnode:
    int t;              // minimum degree
    int n;              // current number of keys
    int* keys;          // array of keys in non-decreasing order
    bool leaf;          // is it a leaf?
    BTnode** children;
end
```

Inne założenia (oprócz zawartych w komentarzach):

1. Węzeł wewnętrzny zawiera $n + 1$ wskaźników do synów.
2. Klucze rozdzielają dzieci na przedziały (n+1).
3. Każdy węzeł różny od korzenia musi mieć co najmniej $t - 1$ kluczy i co najwyżej $2t - 1$ kluczy. (korzeń może mieć od 1 do $2t - 1$ kluczy)
4. Wszystkie liście leżą na tej samej wysokości równym h.

Zadanie 2 (2 pkt.) Udowodnij, że żadna z poniższych operacji wykonana na drzewie spełniającym wszystkie warunki B-drzewa, nie prowadzi do ich naruszenia.

(a) `split_child`, przesuwająca środkowy klucz (medianę) z węzła o $2t - 1$ kluczach do rodzica, który ma mniej niż $2t - 1$ kluczy, a klucze i dzieci na prawo od mediany – do nowego brata dodanego po prawej stronie dzielonego węzła. Skoro mogliśmy przejść do dziecka to znaczy, że rodzic był niepełen i może przyjąć przynajmniej jeden klucz. Więc nie narusza się maksymalnej liczby kluczy w węźle. Węzeł dzielony miał $2t - 1$ kluczy, więc bez tego odjętego zostaja nam dwa zestawy po minimalnej liczbie kluczy.

(b) `unsplit_child` odwrotna do `split_child`, sklejająca dwa sąsiednie węzły o minimalnej liczbie kluczy $t - 1$ oraz klucz stojący w rodzicu między nimi w jeden nowy węzeł. Zakładamy, że rodzic ma co najmniej t kluczy lub jest korzeniem.

(c) `borrow_from_sibling`, rotacja przenosząca do węzła o minimalnej $t - 1$ liczbie kluczy, który ma prawego brata z co najmniej t kluczami, klucz stojący w rodzicu między braćmi i wpisująca na jego miejsce jego miejsce pierwszy klucz brata. Jakie operacje na dzieciach należy dodatkowo wykonać?

Zadanie 3 W B-drzewie o $t = 10$ podaj wzory i wyniki numeryczne określające:

(a) ile kluczy może zawierać korzeń (podaj przedział),
Korzeń zawiera od 1 do 19 kluczy. (max $2t - 1$)

(b) ile dzieci może mieć korzeń (podaj przedział),
Korzeń może mieć od 2 do 20 dzieci. (min t max $2t$)

(c) ile kluczy może mieć potomek korzenia (podaj przedział),
Potomek korzenia może mieć od 9 do 19 kluczy. (min $t-1$ max $2t-1$)

(d) ile dzieci może mieć potomek korzenia (podaj przedział),
Potomek korzenia może mieć od 10 do 20 dzieci. (min t max $2t$)

(e) ile maksymalnie węzłów może być na k-tym poziomie (przyjmując, że korzeń to poziom 0)
Na k-tym poziomie może być maksymalnie $(2t)^k$ węzłów.

(f) ile łącznie kluczy może być na k-tym poziomie (podaj przedział).
Nie licząc korzenia dla którego minimum to 1 klicz to na k-tym poziomie może być od $2(t-1)t^{k-1}$ do $(2t-1)(2t)^k$ kluczy. (min $(2min)t^{k-1}$ max $(max)t^k$

Zadanie 4 Jaka jest minimalna, a jaka maksymalna liczba kluczy w B-drzewie mającym h poziomów, przy ustalonej wartości parametru t (patrz Cormen).

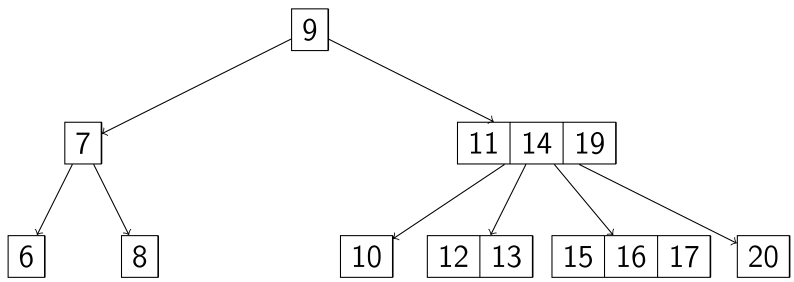
Minimalna:
Gdy korzeń zawiera 1 klucz, a na każdym z pozostałych poziomiomów każdy węzeł zawiera $t-1$ kluczy (minimum).
Na poziomie 1 mamy 2 węzły -> $2(t-1)$ kluczy.
Z czego wynika, że na kolejnym poziomie mamy 2t węzłów, na następnym $2t^2$ itd.
W takim układzie na h poziomie mamy $2t^{h-1}$ węzłów, a każdy z nich zawiera $t-1$ kluczy.
Stąd:

$$\begin{aligned} n &\geq 1+(t-1)(2t+2t^2+...+2t^{h-1}) \\ &= 1+(t-1)\sum_{i=1}^{h} 2t^{i-1} \\ &= 1+2(t-1)\frac{t^h-1}{t-1} \\ &= 2t^h-1 \end{aligned}$$

Maksymalna:
Gdy korzeń ma maksymalną ilość kluczy $2t-1$, a na każdym z pozostałych poziomów każdy węzeł zawiera $2t-1$ kluczy (maksimum).
Na poziomie 1 mamy max $2t-1$ kluczy razy wezły 2t -> $(2t-1)2t$.
Z czego wynika, że na kolejnym poziomie mamy $(2t-1)2t^2$ kluczy, na następnym $(2t-1)2t^3$ itd.
W takim układzie na h poziomie mamy $(2t-1)2t^h$ kluczy, a każdy z nich zawiera $2t-1$ kluczy.
Stąd:

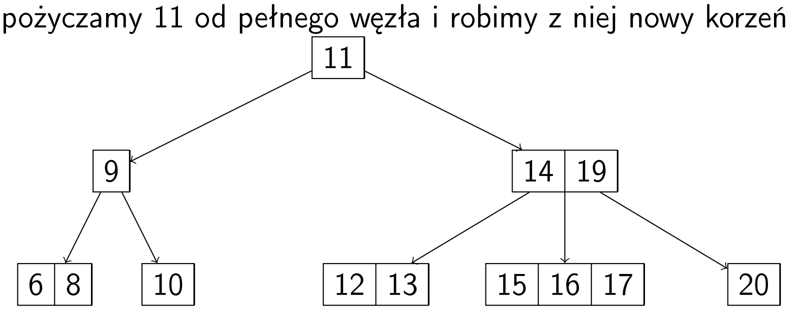
$$
\begin{aligned}
n &\le (2t-1) + (2t-1)(2t + (2t)^2 + \ldots + (2t)^h) \\
&= (2t-1) + (2t-1)\sum_{i=1}^{h}(2t)^i \\
&= (2t-1)\sum_{i=0}^{h}(2t)^i \\
&= (2t-1)\frac{(2t)^{h+1}-1}{2t-1} \\
&= (2t)^{h+1}-1
\end{aligned}
$$

Zadanie 5 Podano na rysunku B-drzewo o $t = 2$:

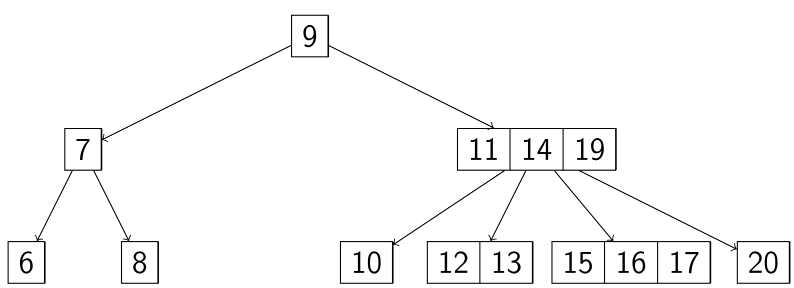


- usuń z tego drzewa 7.
- do drzewa widocznego powyżej dodaj 18.

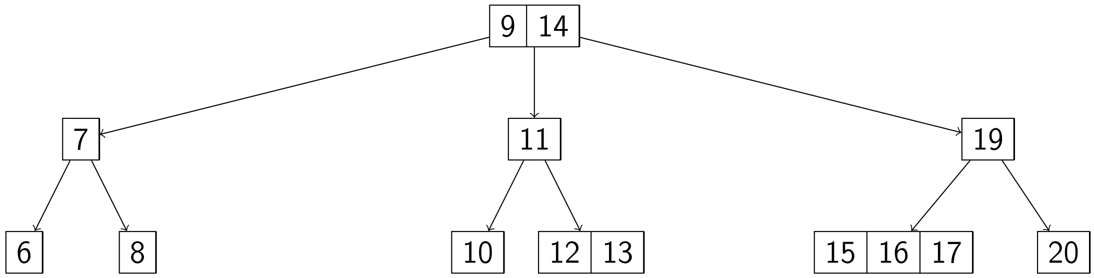
Nie wchodzimy do dziecka o minimalnej liczbie ani maksymalnej liczbie węzłów. Dlatego od razu pożyczamy 11 od pełnego węzła i robimy z niej nowy korzeń.



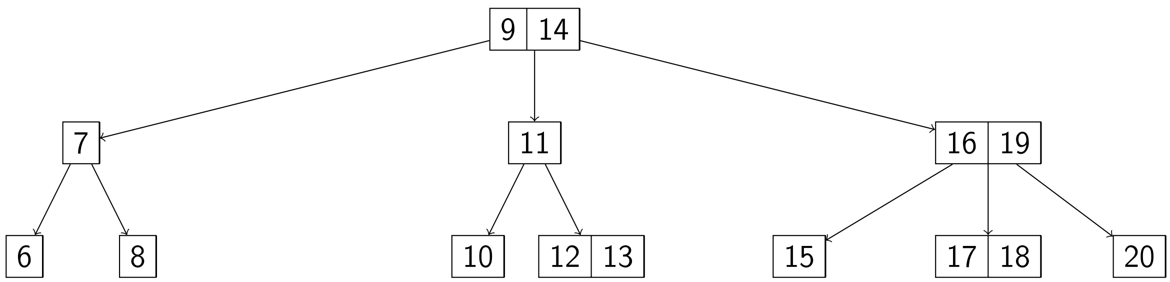
Dodanie 18:



Analogicznie jak wcześniej nie wchodzimy do pełnego węzła, tylko od razu robimy split i 14 idzie do góry.

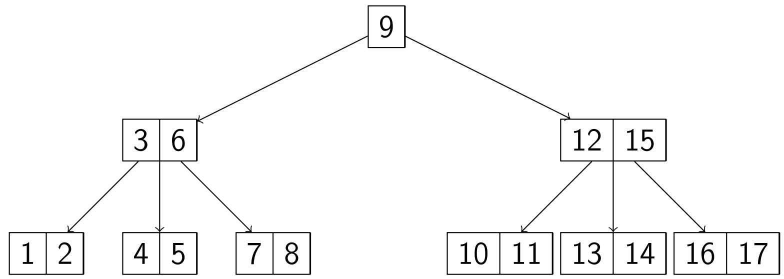


Widząc znowu pełny węzeł robimy split i 16 idzie do rodzica.

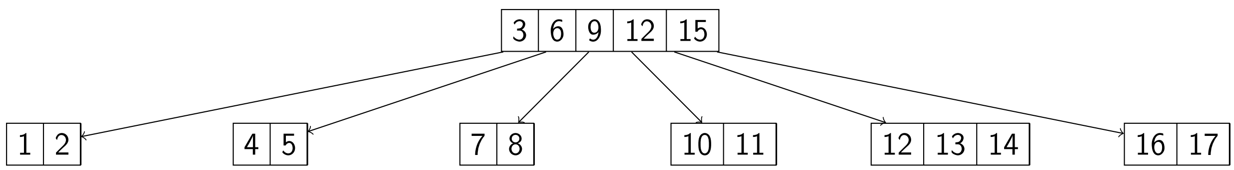


Zadanie 6 (2 pkt.) Do pustego B-drzewa o $t = 2$ wstaw kolejno 22 litery swojego imienia i nazwiska oraz adresu. Następnie usuń w tej samej kolejności w jakiej były wstawiane.

Zadanie 7 Narysuj B-drzewo o $t = 3$ zawierające dokładnie 17 kluczy na trzech poziomach: korzeń, jego dzieci i wnuki. Następnie usuń z tego drzewa korzeń.



Dzieci korzenia mają minimalną liczbę kluczy, więc robimy po prostu unsplit.



Teraz możemy usunąć 9. Jednak nie możemy zastąpić jej najmniejszym kluczem prawego dziecka, dlatego robimy unsplit dzieci.