

## 4.1 Modelo matemático del UNDCMotor

La figura 4.1 muestra el modelo electromecánico lineal de un motor DC como el usado en el UNDCMotor. Aunque este modelo no considera efectos no lineales como la zona muerta, la fricción estática y el juego mecánico, es suficiente para el diseño de sistemas de control de movimiento [5]. Los efectos no lineales son compensados por aparte.

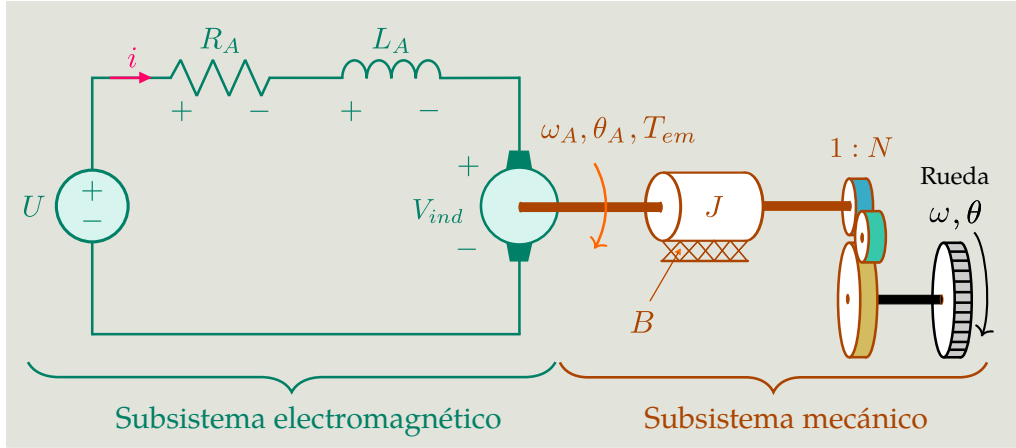


Figura 4.1: Modelo electromecánico del motor DC.

La figura 4.1 nos muestra que el motor DC puede ser descompuesto claramente en dos subsistemas: *el subsistema electromagnético* (verde) y *el subsistema mecánico* (café).

**Subsistema electromagnético.** Consideremos el circuito ilustrado en verde en la figura 4.1. Las variables y parámetros de este circuito se definen así:

- $u(t)$  : Tensión de entrada (V).
- $v_{ind}(t)$  : Fuerza contraelectromotriz (V).
- $i(t)$  : Corriente de armadura (A).
- $R_A$  : Resistencia de armadura ( $\Omega$ ).
- $L_A$  : Inductancia de armadura (H).

Al aplicar la ley de tensiones de Kirchoff, obtenemos la siguiente ecuación:

$$u(t) - iR_A - L_A \frac{di}{dt} - v_{ind}(t) = 0. \quad (4.1)$$

**Subsistema mecánico.** Consideremos el subsistema mecánico ilustrado café en la figu-

ra 4.1. Las variables y parámetros de este sistema son:

$\omega_A$  : Velocidad angular del rotor (rad/s).

$\theta_A$  : Desplazamiento angular del rotor (rad).

$\omega$  : Velocidad angular de salida (después del reductor) (rad/s).

$\theta$  : Desplazamiento angular de salida (después del reductor) (rad).

$\tau_{em}$  : Torque electromagnético generado.

$J$  : Momento de inercia del motor (N·m).

$B$  : Constante de fricción viscosa del motor (A).

$N$  : Relación de engranajes del reductor (adimensional).

Al aplicar las leyes de Newton, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\tau_{em} - J \frac{d\omega_A}{dt} - B \omega_A = 0 \quad (4.2)$$

**Comentario 4.1.1 — ¿Qué pasa con la inercia de la rueda?** Note que el modelo del motor DC presentado en la figura 4.1 y desarrollado en las ecuaciones (4.1) y (4.2) asume que el momento de inercia de la rueda es despreciable. Vamos a examinar el por qué. Denotando por  $M_c$  a la masa de la rueda y por  $R$  a su radio, tenemos que el momento de inercia de la rueda está dado por:

$$J_C = \frac{1}{2} M_C R^2. \quad (4.3)$$

Asimismo, el momento de inercia total del sistema, visto desde el rotor es:

$$J_{eq} = J + \frac{J_C}{N^2}. \quad (4.4)$$

La ecuación (4.3) implica que el momento de inercia  $J_c$  tiene un valor pequeño, dado que la masa  $M_c$  de la rueda es de algunos gramos. Adicionalmente, cuando ese pequeño valor se refleja en el rotor, aparece dividido por el factor  $N^2 = 10000$  (véase la tabla 2.3), de acuerdo con la ecuación (4.4). De esto, concluimos que el momento de inercia de la rueda es despreciable, esto es:

$$J_{eq} \simeq J.$$

Un análisis similar nos lleva a que la fricción viscosa de la rueda también es despreciable.

**Ecuaciones algebraicas:** La relación entre los dominios electromagnético y mecánico está dada por la siguientes ecuaciones:

$$\tau_{em} = \mu i, \quad (4.5)$$

$$V_{ind} = \mu \omega_A, \quad (4.6)$$

$$\omega = \omega_A / N. \quad (4.7)$$

La ecuación (4.5) y la ecuación (4.6) se desprenden, respectivamente, de la ecuación de fuerza de Lorentz y de la ley de Faraday<sup>1</sup>. La ecuación (4.7) es la relación del reductor de engranajes del motor.

**Modelo en espacio de estados:** La salida de interés de nuestro sistema es la velocidad angular  $\omega$  (o del desplazamiento angular  $\theta$ ) después del reductor. Combinando y organizando las ecuaciones (4.1), (4.2), (4.5) y (4.6), obtenemos la siguiente representación de estado del motor DC:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_A}{L_A} & -\frac{\mu}{L_A} \\ \frac{\mu}{JN} & -\frac{B}{JN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

La descripción de estado de la ecuación (4.8) nos permite obtener la función de transferencia del motor a partir de la siguiente ecuación [4]:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + d \quad (4.9)$$

**Resultado 4.1.2 — Función de transferencia del motor D.C en velocidad.** Usando la ecuación (4.9) con

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_A}{L_A} & -\frac{\mu}{L_A} \\ \frac{\mu}{JN} & -\frac{B}{JN} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0,$$

obtenemos la siguiente función de transferencia que relaciona la entrada  $U(s)$  (tensión en el dominio de Laplace) con  $Y(s)$  (velocidad angular en el dominio de Laplace):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mu}{JL_A N s^2 + (BL_A + JNR_A)s + \mu^2 + BR_A} \quad (4.10)$$

En aplicaciones típicas, incluido el UNDCmotor, es usual considerar que la inductancia del subsistema eléctrico es despreciable (esto es,  $L_A = 0$ ), con lo cual tendremos el siguiente modelo simplificado:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{\tau s + 1}. \quad (4.11)$$

<sup>1</sup>Para una explicación física detallada, remitimos al lector al excelente libro de Chiasson [5].

En que  $\alpha$  y  $\tau$  se definen como:

$$\alpha = \frac{\mu}{\mu^2 + BR_A},$$

$$\tau = \frac{JNR_A}{\mu^2 + BR_A}.$$

**Resultado 4.1.3 — Función de transferencia en desplazamiento angular.** Denotemos por  $Y_\theta(s)$  al desplazamiento angular en el dominio de Laplace. Puesto que la velocidad angular es la derivada del desplazamiento angular, tenemos que:

$$Y(s) = sY_\theta(s). \quad (4.12)$$

Substituyendo  $Y_\theta(s)$  de la ecuación (4.12) en la ecuación (4.10), obtenemos la función de transferencia entre la tensión y el desplazamiento angular  $Y_\theta(s)$ :

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\mu}{s(JL_A N s^2 + (BL_A + JNR_A)s + \mu^2 + BR_A)}. \quad (4.13)$$

Asimismo, usando la ecuación (4.11) podemos obtener una función de transferencia simplificada, dada por:

$$\frac{Y_\theta(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{s(\tau s + 1)}. \quad (4.14)$$

## 4.2 Identificación del UNDCMotor

### 4.2.1 Modelo estático

Es natural comenzar investigando el comportamiento estacionario de un sistema bajo control. Esto se hace mediante una curva que muestra el valor en estado estacionario de la salida (en este caso, la velocidad del motor DC) para diferentes valores de la variable de entrada (en este caso la tensión aplicada). A esta curva se le denomina *Modelo Estático del Sistema* [1].

El modelo estático se puede obtener experimentalmente de varias formas. Una manera habitual es ajustar un valor constante de entrada y medir la salida en estado estacionario. Esto da un punto del modelo estático. Este procedimiento se repite para cubrir todo el rango de entradas.

El siguiente código permite obtener directamente el modelo estático del UNDCMotor:

```
1 motor1 = MotorSystemIoT()
2 get_static_model(motor1)
```

Como resultado de aplicar esta función se despliega la figura 4.2.

**Comentario 4.2.1 — Ganancia estática del sistema.** La pendiente de la curva de la figura 4.2 nos dice cuánto cambia la velocidad para pequeños cambios en la tensión de entrada. Grandes variaciones en la ganancia indican que el problema de control puede ser difícil. Por ejemplo, observamos que el UNDCMotores difícil de controlar para