

ЛЕКЦИЯ 1.

06.02.2017.

Лектор: Бишаев А.М.

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ.

§3. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ.

Будем рассматривать системы вида:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t), \quad (1)$$

где $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ - вектор-функция, $A = (a_j^i)$, $a_j^i = \text{const}$, $i, j = 1, \bar{n}$.

Идеология решения уравнения **1**:

рассматриваем A на \mathbb{R}_n . Значит будем искать базис, в котором A будет иметь наиболее простой вид.

Пусть $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ - исходный базис, $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ - новый базис, S - матрица перехода.

$$\vec{x} = S\vec{\bar{x}};$$

$$\vec{\bar{x}} = S^{-1}\vec{x}.$$

Умножаем **1** на S^{-1} :

$$S^{-1}\dot{\vec{x}} = (S^{-1}\vec{x})' = \dot{\vec{\bar{x}}} = S^{-1}A\vec{x} + S^{-1}\vec{f}(t) = S^{-1}AS\vec{\bar{x}} + S^{-1}\vec{f}(t),$$

$\vec{\bar{f}}(t) = S^{-1}\vec{f}(t)$, $\bar{A} = S^{-1}AS$ - матрица линейного преобразования в новом базисе:

$$\dot{\vec{\bar{x}}} = \bar{A}\vec{\bar{x}} + \vec{\bar{f}}(t).$$

Если система однородная, то:

$$\dot{\vec{\bar{x}}} = \bar{A}\vec{\bar{x}} \quad (2)$$

Вид уравнения **2** не меняется при переходе из одного базиса в другой, значит уравнение допускает это преобразование.

Соответственно задача сводится к нахождению собственных векторов и собственных чисел, так как в базисе, составленном из собственных векторов, матрица линейного преобразования имеет наиболее простой вид.

Напомним, что в:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

\vec{x} называется собственным вектором, а λ соответственно собственным числом этого вектора.

Значит мы должны решить систему:

$$(A - \lambda E) \cdot (\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \vdots & a_n^n - \lambda \end{pmatrix} \cdot (\vec{x}) = \vec{0}$$

Требуем, чтобы $\det(A - \lambda E) = 0$ Раскрывая этот определитель, получаем:

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \text{trace} A \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \det A = 0.$$

Собственные числа матрицы A - это корни характеристического многочлена $P_n(\lambda)$.

Каждому собственному числу соответствует собственный вектор (или несколько в случае кратных собственных чисел, далее будем для краткости и удобства предполагать, что все собственные числа разные, но для кратных дальнейшие выкладки также справедливы):

$$\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n - \text{линейно независимые.}$$

Значит можем составить из них базис, в нём:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

тогда из **2** получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^1 = \lambda_1 \bar{x}^1, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}^n = \lambda_n \bar{x}^n, \end{cases}$$

и соответственно её решение:

$$(\vec{\bar{x}}) = (C_1 e^{\lambda_1 t} \quad \dots \quad C_n e^{\lambda_n t}).$$

Составляем Ф.С.Р.:

$$\vec{x}_1 = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{x}_n = e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица Ф.С.Р. в старом базисе:

$$\Phi = (e^{\lambda_1 t} \vec{h}_1 \quad \dots \quad e^{\lambda_n t} \vec{h}_n)$$

Общее решение: линейная комбинация векторов Ф.С.Р.

Если корни хар. многочлена комплексные:

Если $\lambda_1 = r + i\omega$ - комплексный корень, то $\exists \lambda_2 = r - i\omega$ также корень.

У комплексного собственного числа будет комплексный собственный вектор:

$$\vec{h}_1 = \vec{c} + i\vec{d},$$

$$\vec{h}_2 = \vec{c} - i\vec{d} = \vec{h}_1^* \text{ (комплексное сопряжение).}$$

Но нас интересуют только действительные решения.

В Ф.С.Р. содержится:

$$\varphi_1 = e^{(r+i\omega)t}(\vec{c} + i\vec{d}) = e^{rt}(\vec{c} + i\vec{d})(\cos \omega t + i \sin \omega t);$$

$$\varphi_2 = e^{(r-i\omega)t}(\vec{c} - i\vec{d}) = e^{rt}(\vec{c} - i\vec{d})(\cos \omega t - i \sin \omega t).$$

По принципу суперпозиции:

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = e^{rt}(\vec{c} \cos \omega t - \vec{d} \sin \omega t);$$

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2i} = e^{rt}(\vec{c} \sin \omega t + \vec{d} \cos \omega t).$$

Что делать, если не хватает собственных векторов для построения базиса?

Мы можем представить характеристический многочлен в виде:

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{l_m} = (-1)^n \lambda^n + \text{trace} A \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \det A,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ - корни многочлена, l_1, \dots, l_m - их кратность.

Если есть многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + \dots + a_n,$$

то мы можем сопоставить ему квадратную матрицу A :

$$P_n(A) = a_0 A^n + \dots + E a_n, \text{ где } E \text{ ед. матрица.}$$

Тогда этот матричный многочлен - это матрица (т.е. линейное преобразование) того же размера, что и матрица A .

Множество матричных многочленов - кольцо, причём изоморфное.

Можем записать

$$P_n(x) = a_0(x - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_m)^{l_m},$$

значит матричный многочлен также раскладывается на множители:

$$P_n(A) = a_0(A - \lambda_1 E)^{l_1} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_m E)^{l_m}$$

Теорема 1. (Гамильтона - Кэли)

$$P_n(A) = (-1)^n A^n + \dots + \det A = O,$$

где O - нулевая матрица.

Тогда

$$O = (-1)^n (A - \lambda_1 E)^{l_1} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_m E)^{l_m}.$$

Рассмотрим Q_i - линейные преобразования вида:

$$Q_i = (A - \lambda_1 E)^{l_1} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_{i-1} E)^{l_{i-1}} \cdot (A - \lambda_{i+1} E)^{l_{i+1}} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_m E)^{l_m}$$

Если рассмотреть

$$R_i = \text{Im} Q_i,$$

тогда

$$\underbrace{R_1 \oplus \dots \oplus R_m}_{\text{прямая сумма}} = \mathbb{R}^n.$$

Если выбирать базис как базисы в каждом из подпространств, то получим в нём клеточно-диагональную матрицу.

Посмотрим структуру её клеток:

Обозначим $R_i = R$, $l_i = l$, $\lambda_i = \lambda$ и рассмотрим сужение A на R .

$$\underbrace{R}_{\text{корневые подпр-ва}} = \ker(A - \lambda E)^l.$$

Обозначим $A - \lambda E = B$:

$$\forall \bar{x} \in R : B^l \bar{x} = O.$$

Теорема 2.

$$\ker B \subset \ker B^2 \subset \dots \subset \ker B^l.$$

Доказательство теоремы 2.

Докажем по индукции. Пусть $\ker B \subset \ker B^2$.

Действительно,

$$\bar{x} \in \ker B^2 \Leftrightarrow B^2 \bar{x} = O = B(B\bar{x}),$$

отсюда если

$$x \in \ker B : B^2 \bar{x} = O, \bar{x} \in \ker B^2.$$

Пусть $\bar{x} \in \ker B^{i-1} \Leftrightarrow$

$$B^i \bar{x} = B(B^{i-1} \bar{x}) = B \cdot O = O,$$

$$\bar{x} \in \ker B^i.$$

Обозначим $\ker B = T_1, \ker B^2 = T_2, \dots, \ker B^l = T_l$.

Далее рассмотрим множество $\nu_i = \{\bar{x} \in \nu_i, \text{ если } B^i \bar{x} = O, \text{ а } B^{i-1} \bar{x} \neq O\}$.

ν_1 :

$$B\bar{x} = O,$$

$(A - \lambda E)\bar{x} = O$ - собственное подпространство матрицы A .

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= T_1, \\
\nu_2 &= T_2 \setminus T_1, \\
&\vdots \\
\nu_i &= T_1 \setminus T_{1-i}.
\end{aligned}$$

Ясно, что

$$\nu_1 \oplus \dots \oplus \nu_l = \bar{\mathbb{R}}^n.$$

Теорема 3. Пусть $\{\vec{h}_i\} \in \nu_i$, тогда

$$\vec{h}_{i-j}^\alpha = B^j \vec{h}_i^\alpha \in \nu_{i-j} \quad (4.3.7)$$

Доказательство теоремы 3.

$$B^{i-j} \vec{h}_{i-j}^\alpha = B^{i-j} (B^j \vec{h}_i^\alpha) = (B^{i-j} B^j) \vec{h}_i^\alpha = \underbrace{B^i \vec{h}_i^\alpha}_{\text{по определению}} = O.$$

Аналогично

$$B^{i-j-1} \vec{h}_{i-j}^\alpha = B^{i-1} \vec{h}_i^\alpha \neq O.$$

[ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕ ЗАКОНЧЕНО]

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 1.

Все вопросы и замечания можно направлять [сюда](#).