Лекция 1.

06.02.2017.
Лектор: Бишаев А.М.

Глава 4. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэфициентами.

§3. Общее решение.

Будем рассматривать системы вида:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(x), \tag{1}$$

где $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ - вектор-функция, $A = \left(a^i_j\right)$, $a^i_j = const$, $i,j = \overline{1,n}$.

Идеология решения уравнения 1:
рассматриваем A на $\bar{\mathbb{R}}_n$. Значит будем искать базис, в котором A будет иметь наиболее простой вид.
Пусть $\{\vec{e_1},...,\vec{e_n}\}$ - исходный базис, $\{\vec{\bar{e}}_1,...,\vec{\bar{e}}_n\}$ - новый базис, S - матрица перехода.

$$\vec{x} = S\vec{\bar{x}};$$

$$\vec{\bar{x}} = S^{-1}\vec{x}.$$

Умножаем 1 на S^{-1}:

$$S^{-1}\dot{\vec{x}} = (S^{-1}\vec{x})' = \dot{\vec{\bar{x}}} = S^{-1}A\vec{x} + S^{-1}\vec{f}(x) = S^{-1}AS\vec{\bar{x}} + S^{-1}\vec{f}(x),$$

$\vec{\bar{f}}(x) = S^{-1}\vec{f}(x)$, $\bar{A} = S^{-1}AS$ - матрица линейного преобразования в новом базисе:

$$\dot{\vec{\bar{x}}} = \bar{A}\vec{\bar{x}} + \vec{\bar{f}}(x).$$

Если система однородная, то:

$$\dot{\vec{\bar{x}}} = \bar{A}\vec{\bar{x}} \tag{2}$$

Вид уравнения 2 не меняется при переходе из одного базиса в другой, значит уравнение допускает это преобразование.

Соответственно задача сводится к нахождению собственных векторов и собственных чисел, так как в базисе, составленном из собственных векторов, матрица линейного преобразования имеет наиболее простой вид.
Напомним, что в:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$\vec{x}$ называется собственным вектором, а λ соответсвенно собственным числом этого вектора.

Значит мы должны решить систему:

$$\big(A - \lambda E\big) \cdot \big(\vec{x}\big) = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \vdots & a_n^n - \lambda \end{pmatrix} \cdot \big(\vec{x}\big) = \vec{0}$$

Требуем, чтобы $det\, \big(A - \lambda E\big) = 0$ Раскрывая этот определитель, получаем:

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + traceA \cdot \lambda^{n-1} + ... + detA = 0.$$

Собственные числа матрицы A - это корни характеристического многочлена $P_n(\lambda)$.

Каждому собственному числу соответствует собственный вектор (или несколько в случае кратных собственных чисел, далее будем для краткости и удобства предполагать, что все собственные числа разные, но для кратных дальнейшие выкладки также справедливы):

$$\vec{h}_1, ..., \vec{h}_n \text{ - линейно независимые.}$$

Значит можем составить из них базис, в нём:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

тогда из 2 получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^1 = \lambda_1 \bar{x}^1, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}^n = \lambda_n \bar{x}^n, \end{cases}$$

и соответственно её решение:

$$\big(\vec{\bar{x}}\big) = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Составляем Ф.С.Р.:

$$\vec{x}_1 = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \vec{x}_n = e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица Ф.С.Р. в старом базисе:

$$\varPhi = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \vec{h}_1 & \cdots & e^{\lambda_n t} \vec{h}_n \end{pmatrix}$$

Общее решение: линейная комбинация векторов Ф.С.Р.

Если корни хар. многочлена комплексные:
Если $\lambda_1 = r + i\omega$ - комплексный корень, то $\exists \lambda_2 = r - i\omega$ также корень.

У комплексного собственного числа будет комплексный собственный вектор:

$$\vec{h}_1 = \vec{c} + i\vec{d},$$

$$\vec{h}_2 = \vec{c} - i\vec{d} = \bar{\vec{h}}_1 \text{ (комплексное сопряжение).}$$

Но нас интересуют только действительные решения.

В Ф.С.Р. содержится:

$$\varphi_1 = e^{(r+i\omega)t}(\vec{c} + i\vec{d}) = e^{rt}(\vec{c} + i\vec{d})(\cos\omega t + i\sin\omega t);$$

$$\varphi_2 = e^{(r-i\omega)t}(\vec{c} - i\vec{d}) = e^{rt}(\vec{c} - i\vec{d})(\cos\omega t - i\sin\omega t).$$

По принципу суперпозиции:

$$\bar{\varphi_1} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = e^{rt}(\vec{c}\cos\omega t - \vec{d}\sin\omega t);$$

$$\bar{\varphi_2} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2i} = e^{rt}(\vec{c}\sin\omega t + \vec{d}\cos\omega t).$$

Что делать, если не хватает собственных векторов для построения базиса?
Мы можем представить характеристический многочлен в виде:

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_m)^{l_m} = (-1)^n\lambda^n + traceA \cdot \lambda^{n-1} + ... + detA,$$

где λ_1,...,λ_m - корни многочлена, l_1,...,l_m - их кратность.

Если есть многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + ... + a_n,$$

то мы можем сопоставить ему квадратную матрицу A:

$$P_n(A) = a_0A^n + ... + Ea_n, \text{ где } E \text{ ед. матрица.}$$

Тогда этот матричный многочлен - это матрица (т.е. линейное преобразование) того же размера, что и матрица A.
Множество матричных многочленов - кольцо, причём изоморфное.
Можем записать

$$P_n(x) = a_0(x - \lambda_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (x - \lambda_m)^{l_m},$$

значит матричный многочлен также раскладывается на множители:

$$P_n(A) = a_0(A - \lambda_1E)^{l_1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_mE)^{l_m}$$

Теорема 1. *(Гамильтона - Кэли)*

$$P_n(A) = (-1)^n A^n + ... + detA = O,$$

где O - нулевая матрица.

Тогда
$$O = (-1)^n (A - \lambda_1 E)^{l_1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_m E)^{l_m}.$$
Рассмотрим Q_i - линейные преобразования вида:

$$Q_i = (A - \lambda_1 E)^{l_1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_{i-1} E)^{l_{i-1}} \cdot (A - \lambda_{i+1} E)^{l_{i+1}} \cdot ... \cdot (A - \lambda_m E)^{l_m}$$

Если рассмотреть
$$R_i = ImQ_i,$$
тогда
$$\underbrace{R_1 \oplus ... \oplus R_m}_{\text{прямая сумма}} = \bar{\mathbb{R}^n}.$$
Если выбирать базис как базисы в каждом из подпространств, то получим в нём клеточно-диагональную матрицу.
Посмотрим структуру её клеток:
Обозначим $R_i = R$, $l_i = l$, $\lambda_i = \lambda$ и рассмотрим сужение A на R.

$$\underbrace{R}_{\text{корневые продпр-ва}} = ker(A = \lambda E)^l.$$

Обозначим $A - \lambda E = B$:
$$\forall \bar{x} \in R : \ B^l \bar{x} = O.$$

Теорема 2.
$$kerB \subset kerB^2 \subset ... \subset kerB^l.$$

`Доказательство теоремы 2.`
Доказывем по индукции. Пусть $kerB \subset kerB^2$.
Действительно,
$$\bar{x} \in kerB^2 \ \hookrightarrow \ B^2 \bar{x} = O = B(B\bar{x}),$$
отсюда если
$$x \in kerB : \ B^2 \bar{x} = O, \ \bar{x} \in kerB^2.$$
Пусть $\bar{x} \in kerB^{i-1} \ \hookrightarrow$
$$B^i \bar{x} = B(B^{i-1}\bar{x}) = B \cdot O = O,$$
$$\bar{x} \in kerB^i.$$

Обозначим $kerB = T_1, kerB^2 = T_2$,...$kerB^l = T_l$.

Далее рассмотрим множество $\nu_i = \{\bar{x} \in \nu_i, \text{ если } B^i \bar{x} = O, \text{ а } B^{i-1}\bar{x} \neq O\}$.
ν_1 :
$$B\bar{x} = O,$$
$$(A - \lambda E)\bar{x} = O \text{ - собственное подпространство матрицы } A.$$

$$\begin{aligned} \nu_1 &= T_1, \\ \nu_2 &= T_2 \setminus T_1, \\ &\vdots \\ \nu_i &= T_1 \setminus T_{1-i}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\nu_1 \oplus ... \oplus \nu_l = \bar{\mathbb{R}}^n.$$

Теорема 3. *Пусть* $\{\vec{h}_i\} \in \nu_i$*, тогда*

$$\vec{h}^{\alpha}_{i-j} = B^j \vec{h}^{\alpha}_i \ \in \nu_{i-j} \tag{4.3.7}$$

`Доказательство теоремы 3.`

$$B^{i-j}\vec{h}^{\alpha}_{i-j} = B^{i-j}(B^j\vec{h}^{\alpha}_i) = (B^{i-j}B^j)\vec{h}^{\alpha}_i = \underbrace{B^i\vec{h}^{\alpha}_i = O}_{\text{по определению}} \ .$$

Аналогично

$$B^{i-j-1}\vec{h}^{\alpha}_{i-j} = B^{i-1}\vec{h}^{\alpha}_i \neq O.$$

[ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕ ЗАКОНЧЕНО]

Конец лекции 1.