Лекция 2.

14.02.2017.
Лектор: Бишаев А.М.

Глава 4. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэфициентами.

Ранее было показано, что

$$\vec{h}^{\alpha}_{i-j} = B^i \vec{h}^{\alpha}_i. \tag{4.3.7}$$

(см. лекцию 1)

Положим $i = 1$, $j = 0$.

$$B\vec{h}^{\alpha}_1 = 0,$$

$$\vec{h}^{\alpha}_1 \text{ - собственный вектор.}$$

Пусть таких векторов будет $r \geqslant 1, \quad r < l:$

$$\{\vec{h}^1_1, ..., \vec{h}^r_1\}$$

Положим $i = 2$, $j = 1$.

$$B\vec{h}^{\alpha}_2 = \vec{h}^{\alpha}_1. \tag{4.3.8}$$

Утверждение: $\exists \vec{\widetilde{h}}_1 \in T_1:$

$$B\vec{h}^{\alpha}_2 = \vec{\widetilde{h}}^{\alpha}_1,$$

$$\vec{\widetilde{h}}^{\alpha}_1 = \sum_{k=1}^{r} C_k \vec{h}^k_1 \text{ - разложение по найденному базису.}$$

Следует из 4.3.7.

Решешние уравнения 4.3.8 - общее решение однородного + некое решение неоднородного:

$$\vec{\widetilde{h}}_2 = \vec{x}^r + \sum_{k=1}^{r} C_k \vec{h}^k_1.$$

В качестве базиса в T_1 возьмём:

$$\vec{h}^1_1, ..., \vec{h}^{r-1}_1, \vec{\widetilde{h}}_1.$$

Далее положим $i = 3$, $j = 1$.

$$B\vec{h}^{\alpha}_3 = \vec{\widetilde{h}}_2 = \vec{x}^r + \sum_{k=1}^{r} C_k \vec{h}^k_1.$$

Аналогично далее $\vec{h}^{\alpha}_3, \vec{h}^{\alpha}_4, ...$

Базис в T_2:

$$\vec{h}^1_1, ..., \vec{h}^{r-1}_1, ..., \vec{\widetilde{h}}_1, \vec{\widetilde{h}}_2.$$

Аналогично далее.

Получем базис в R:

$$\vec{h}_1^1, ..., \vec{h}_1^{r-1}, ..., \vec{\widetilde{h}}_1, \vec{\widetilde{h}}_2, ..., \vec{\widetilde{h}}_{l-r+1}$$

Покажем, что это базис (по индукции): $i = 1$:

$$\vec{h}_1^1, ..., \vec{h}_1^{r-1}, ..., \vec{\widetilde{h}}_1 \text{ - базис в } T_1.$$

Пусть

$$\vec{h}_1^1, ..., \vec{h}_1^{r-1}, ..., \vec{\widetilde{h}}_1, ..., \vec{\widetilde{h}}_{i-r-1} \text{ - базис.}$$

Решение $B\vec{h}_i = \vec{\widetilde{h}}_{i-r-1}$:

$$\vec{h}^\alpha = \vec{x}^i + \sum_{k=1}^{r} \beta_k \vec{h}_1^k.$$

Фиксируем некоторые β_k и обозначаем это за $\vec{\widetilde{x}}^i$. Тогда в T_i:

$$\vec{h}_1^1, ..., \vec{h}_1^{r-1}, ..., \vec{\widetilde{h}}_1, ..., \vec{\widetilde{h}}_{i-r-1}, \vec{\widetilde{x}}^i.$$

Берём линейную комбинацию:

$$\sum_{k=1}^{r-1} \alpha_k \vec{h}_1^k + \alpha_r \vec{\widetilde{h}}_1 + ... + \alpha_{i-r-1} \vec{\widetilde{h}}_{i-r-1} + \alpha_{i-r} \vec{\widetilde{x}}^i = \vec{0}.$$

И действуем на неё преобразованием B^{i-1} :

$$B^{i-1}[...] = \vec{0} = \alpha_{i-r} \vec{\widetilde{h}}_1.$$

Тогда $\alpha_{i-r} = 0$. Значит по предположению индукции

$$\vec{h}_1^1, ..., \vec{h}_1^{r-1}, ..., \vec{\widetilde{h}}_1, ..., \vec{\widetilde{h}}_{i-r-1}, \vec{\widetilde{x}}^i \text{ - базис.}$$

Покажем, что любой вектор из T_i раскладывается по этому базису:

$$y \in T_i,$$

Пусть $y \in \nu_i$:

$$y - \vec{\widetilde{x}}^i \in T_i.$$

Теорема доказана.

$B = A - \lambda E$, составляем матрицу A в полученном базисе.

$$(A - \lambda E)\vec{h}_2^\alpha = \vec{h}_1^\alpha,$$

$$A\vec{h}_2^\alpha = \vec{h}_1^\alpha + \lambda E \vec{h}_2^\alpha.$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_r & 1 & \\ & 0 & & & \bar{\lambda} & 1 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$A\vec{\tilde{h}}_2 = \lambda\vec{\tilde{h}}_2{}^{+}\vec{\tilde{h}}_1$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

$C = \lambda E$ размера $r \times r$, D размера $(n-r) \times (n-r)$:

$$D = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & & 0 & \\ & \bar{\lambda} & 1 & & 0 \\ 0 & & \bar{\lambda} & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

матрица D называется Жордановой клеткой.

Построение базиса:

$$(A-)\vec{h}_1 = B\vec{h}_1 = 0,$$

$\vec{e}_1$ - собственный вектор.

$$\begin{cases} (A-\lambda E)\vec{h}_1 = B\vec{h}_1 = \vec{e}_1, \\ \qquad \cdots \\ (A-\lambda E)\vec{h}_{l-1} = \vec{h}_{l-2}; \end{cases} \tag{4.3.9}$$

Система 4.3.9 называется Жордановой цепочкой.
$\vec{h}_1$ - первый присоединенный вектор,
$\vec{h}_i$ - i-ый присоединенный вектор.
В этом базисе:

$$A = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & & 0 & \\ & \bar{\lambda} & 1 & & 0 \\ 0 & & \bar{\lambda} & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Размера l. Если A - Жорданова клетка, то:

$$\dot{\bar{\vec{x}}} = \bar{A}\bar{\vec{x}}.$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^1 = \lambda\bar{x}^1 + \bar{x}^2, \\ \qquad \cdots \\ \dot{\bar{x}}^{n-1} = \lambda\bar{x}^{n-1} + \bar{x}^n, \\ \dot{\bar{x}}^n = \lambda\bar{x}^n. \end{cases}$$

Делаем замену $\vec{x} = e^{\lambda t}\vec{y}$.

$$\dot{y}^1 e^{\lambda t} + \lambda y^1 e^{\lambda t} = \lambda y^1 e^{\lambda t} + y^2 e^{\lambda t}.$$

Итого получаем:

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = y^2, \\ \quad \cdots \\ \dot{y}^{n-1} = y^n, \\ \dot{y}^n = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t + ... + \frac{C_n t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \cdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{\bar{x}} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t + ... + \frac{C_n t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \cdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

Но это в Жордановом базисе.
Матрица перехода:

$$S = \left\| \vec{e}_1 \quad \vec{h}_1 \quad \cdots \quad \vec{h}_{n-1} \right\|,$$

$$\vec{x} = S\vec{\bar{x}}.$$

$$\vec{x} = C_1 e^{\lambda t} \vec{e}_1 + C_2 e^{\lambda t} (t\vec{e}_1 + \vec{h}_1) + ... + C_n e^{\lambda t} (\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \vec{e}_1 + ... + \vec{h}_{n-1}).$$

ФСР:

$$\vec{e}_1, e^{\lambda t}(t\vec{e} + \vec{h}_1) \text{ и так далее.}$$

Максимальная степень многочлена, получившегося в ФСР: $n-1$, где n - размер Жордановой клетки.

[Глава 5 перенесена в следующую лекцию.]

Конец лекции 2.

Все вопросы и замечания можно направлять сюда.