Лекция 3.

21.02.2017.
Лектор: Бишаев А.М.

Глава 5. Матричная экспонента.

Рассматриваем задачу Коши:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \tag{5.1.1}$$

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

В доказательстве основой теоремы было:

$$\vec{x}^0 = \vec{x}_0,$$

$$\vec{x}^1 = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} A\vec{x}_0(\tau)d\tau,$$

$$\vec{x}^2 = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} A\vec{x}^1(\tau)d\tau = \vec{x}_0 + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2}\vec{x}_0,$$

И так далее...

$$\vec{x}^n = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} A\vec{x}^{n-1}(\tau)d\tau = \vec{x}_0 + A(t-t_0) + \frac{A^n(t-t_0)^n}{n!}\vec{x}_0.$$

Было показано, что этот итерационный процесс сходится:

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!}\vec{x}_0 \text{ - решение.}$$

Определение 1. *Введём матричную экспоненту:*

$$e^{(t-t_0)A} = E + \sum_{k-1}^{\infty} \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!}. \tag{5.1.2}$$

Решение уравнения 5.1.1 записывается через матричную экспоненту следующим образом:

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0. \tag{5.1.3}$$

Свойства матричной экспоненты:
1. $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1 A} \cdot e^{t_2 A}$.
Доказательство: рассмотрим задачу Коши:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0.$$

Тогда решение:

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0,$$

$$\vec{x}(t_1) = e^{t_1 A}\vec{x}_0.$$

Далее рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{\vec{z}} = A\vec{z}, \quad \vec{z}(0) = e^{t_1A}\vec{x}_0.$$

Её решение:

$$\vec{z}(t) = e^{tA}(e^{t_1A}\vec{x}_0).$$

Мы хотим доказать, что

$$\vec{x}(t+t_1) = \vec{z}(t).$$

$$\vec{x}(t_1) = e^{t_1A}\vec{x}_0 = \vec{z}_0.$$

Две интегральные кривые пересекаются в одной точке, значит по основной теореме:

$$\vec{x}(t+t_1) = \vec{z}(t) \quad \forall t,$$

значит $\vec{x}(t_1+t_2) = \vec{z}(t_2)$,

$$e^{(t_1+t_2)A}\vec{x}_0 = e^{t_2A}(e^{t_1A}\vec{x}_0),$$

$$e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A} \cdot e^{t_2A}.$$

2. $e^{tA} \cdot e^{-tA} = E$.
Доказательство:

$$e^{0\cdot A} = E = e^{(t+(-t))A} = e^{tA} \cdot e^{-tA}.$$

3. $(e^{tA})'_t = Ae^{tA} = e^{tA}A$.
Доказательство: У нас была задача 5.1.1 и решение задавалось формулой 5.1.3:

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0.$$

Подставим его в уранение:

$$(e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0)' = Ae^{(t-t_0)A}\vec{x}_0,$$

поскольку $\vec{x}_0$ и t_0 произвольные:

$$(e^{tA})' = Ae^{tA}.$$

Перестановочность следует из определения.
Вообще говоря, $e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$. Но есть случай, когда эта формула имеет место.

Теорема 1. *Если $AB = BA$, то $e^A \cdot e^B = e^{A+B} = e^B \cdot e^A$.*

`Доказательство теоремы 1.`
См. учебник Романко.

Далее рассмотрим способ построения матричной экспоненты:
У нас есть базис

$$\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$$

переходим к

$$\{\vec{\bar{e}}_1, ..., \vec{\bar{e}}_n\}$$

$$(\vec{\bar{e}}_1 \quad ... \quad \vec{\bar{e}}_n) = (\vec{e}_1 \quad ... \quad \vec{e}_n)S.$$

Теорема 2. *Пусть S - матрица перехода и $\bar{A} = S^{-1}AS$ - матрица A в новом базисе. Тогда:*

$$e^{\bar{A}} = S^{-1}e^{A}S. \tag{5.1.4}$$

`Доказательство теоремы 2.`

$$e^{\bar{A}} = E + \bar{A} + \frac{\bar{A}^2}{2} + ... + \frac{\bar{A}^n}{n!} ... = E + S^{-1}AS + \frac{(S^{-1}AS)^2}{2} + ... + \frac{(S^{-1}AS)^n}{n!} + ...$$

Докажем формулу:

$$\forall k \quad (S^{-1}AS)^k = S^{-1}A^kS \tag{5.1.5}$$

(индукция) $\quad k = 1$ очевидно,
$k = 2:$

$$(S^{-1}AS)^2 = (S^{-1}AS)(S^{-1}AS) = S^{-1}ASS^{-1}AS = S^{-1}A^2S.$$

$k = n - 1:$

$$(S^{-1}AS)^{n-1} = S^{-1}A^{n-1}S.$$

$k = n:$

$$(S^{-1}AS)^n = (S^{-1}AS)^{n-1}(S^{-1}AS) = (S^{-1}A^{n-1}S)(S^{-1}AS) = S^{-1}A^nS.$$

Тогда:

$$e^{\bar{A}} = E + S^{-1}AS + \frac{S^{-1}A^2S}{2} + ... + \frac{S^{-1}A^nS}{n!} + ... = S^{-1}e^AS.$$

Построим матричную экспоненту в Жордановом базисе:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} A_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k^2 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tA_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tA_k} \end{pmatrix}$$

Пусть A_l - сужение преобразования A на подпространство $Q_l = Ker(A - \lambda_l E)^{k_l}$.
Обозначим
$\lambda_l = \bar{\lambda}, \quad k_l = l.$

Если $\lambda_1, ..., \lambda_l$ - собственные вектора, то:

$$A_l = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_l \end{pmatrix}$$

$$e^{tA_l} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_l} \end{pmatrix}$$

Пусть A_l - Жорданова клетка длины l:

$$\vec{e}_1 \text{ - собственный вектор,}$$

$$\vec{h}_1 \text{ - первый присоединенный вектор,}$$

$$\vec{h}_{l-1} \text{ - последний присоединенный вектор;}$$

$$\{\vec{e}_1, \vec{h}_1, ..., \vec{h}_{l-1}\}$$

$$A - \bar{\lambda}E = B,$$

$$A = \bar{\lambda}E + B,$$

$$e^{tA} = e^{\bar{\lambda}Et} \cdot e^{tB}.$$

$$e^{\bar{\lambda}tE} = \begin{pmatrix} e^{t\bar{\lambda}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\bar{\lambda}} \end{pmatrix}$$

$$e^{tB} = E + tB + ... + \frac{t^{l-1}B^{l-1}}{(l-1)!} + \underbrace{\sum_{k=l}^{\infty} \frac{t^k B^k}{k!}}_{\text{по построению } 0} = E + tB + ... + \frac{t^{l-1}B^{l-1}}{(l-1)!}.$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{l-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{l-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & & 1 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & t & & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{\bar{\lambda} E t} \cdot e^{tB}:$$

$$e^{tA} = e^{\bar{\lambda} t} \begin{pmatrix} 1 & t & & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Метод вариации постоянной:
Система уравнений с постоянными коэфициентами:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t). \tag{5.1.6}$$

Будем искать решение в виде:

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C}(t), \quad \vec{C}(t) \text{ - неизвестная вектор-функция.}$$

$$(e^{tA}\vec{C})' = Ae^{tA}\vec{C} + \vec{f},$$

$$Ae^{tA}\vec{C} + e^{tA}\vec{C}' = Ae^{tA}\vec{C} + \vec{f},$$

$$e^{tA}\vec{C}' = \vec{f},$$

$$\vec{C} = \vec{C}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A}\vec{f}(\tau)d\tau.$$

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C}_0 + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-\tau A}\vec{f}(\tau)d\tau.$$

Пример 1.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = a_1\vec{x} + b_1\vec{y}, \\ \dot{\vec{y}} = a_2\vec{x} + b_2\vec{y}; \end{cases}$$

λ_1 и λ_2 - действительные собственные числа матрицы A.

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t}C + e^{\lambda_2 t}B,$$

где C и B - неизвестные матрицы.
Дифференцируем:

$$Ae^{tA} = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}C + \lambda_2 e^{\lambda_2 t}B.$$

Так как это верно при любых t, то можем подставить $t = 0$:

$$\begin{cases} E = C + B, \\ A = \lambda_1 C + \lambda_2 B. \end{cases}$$

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $det \neq 0$, находим C и B.
Если имеется больше неизвестных, то дифференцируем несколько раз и получаем определитель Вандермонда.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, *то:*

$$e^{tA} = e^{\lambda t} C + e^{\lambda t} t B,$$

и далее аналогично.

Конец лекции 3.

Все вопросы и замечания можно направлять сюда.