МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1

по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»

Тема: Дискретные сигналы

Студент гр.8382	________________	Нечепуренко Н.А.
Студент гр.8382	________________	Терехов А.Е.
Преподаватель	________________	Сучков А.И.

Санкт-Петербург

2021

Цели работы

Изучить математическое описание дискретных сигналов и овладеть программными средствами их моделирования.

Основные теоретические положения

В теории цифровой обработки сигналов (ЦОС) принято разделять операции дискретизации по времени и квантования по уровню. Полагая операцию квантования отсутствующей, изучают дискретные сигналы и линейные дискретные системы (ЛДС), а затем, отдельно, – эффекты нелинейной операции квантования.

Дискретным называют сигнал, дискретный по времени и непрерывный по состоянию (уровню), который описывается последовательностью чисел бесконечной разрядности $x(nT)$ или $x(n)$, называемой коротко последовательностью. Значения nT, $n \in \mathbb{Z}_+$, называют дискретным временем, где T – период дискретизации, а n – дискретным нормированным временем.

В теории ЦОС термины «дискретный сигнал» и «последовательность» употребляют в тождественном смысле.

Цифровым называют сигнал, дискретный по времени и квантованный по состоянию (уровню), который описывается последовательностью чисел конечной разрядности – квантованной последовательностью $\tilde{x}(nT)$ или $\tilde{x}(n)$. При компьютерном моделировании под дискретным сигналом условно понимают последовательность чисел максимально возможной разрядности, а под цифровым – последовательность чисел заданной разрядности.

Постановка задачи

С помощью программных средств провести моделирование и анализ дискретных последовательностей. Результаты подкрепить соответствующими графиками и выводами.

Порядок выполнения работы

1. Смоделировать единичный цифровой импульс $\delta_d(k)$ с выводом графиков на интервале дискретного времени $nT \in [0, (N-1)T]$ и дискретного нормированного времени $n \in [0, N-1]$. Пояснить взаимосвязь между дискретным и дискретным нормированным временем и различие между цифровым единичным импульсом и функцией Дирака.
2. Смоделировать дискретный единичный скачок $\sigma_d(k)$ с выводом графиков на интервале дискретного времени $nT \in [0, (N-1)T]$ и дискретного нормированного времени $n \in [0, N-1]$. Пояснить соответствие между дискретным единичным скачком и функцией Хэвисайда, а также чему равна частота дискретизации дискретного единичного скачка.
3. Смоделировать дискретную экспоненциальную функцию $s_1(k)$ с выводом графиков на интервале дискретного времени $nT \in [0, (N-1)T]$ и дискретного нормированного времени $n \in [0, N-1]$. Пояснить соответствие между дискретной и аналоговой экспонентами.
4. Смоделировать дискретный комплексный гармонический сигнал $s_2(k) = C \cdot exp(j\hat{\omega}_0 k)$ с выводом графиков вещественной и мнимой частей на интервале времени $n \in [0, N-1]$. Записать данный сигнал в виде комбинации двух вещественных последовательностей.
5. Вывести графики последовательностей $\delta_d(k)$, $\sigma_d(k)$, и $s_1(k)$, задержанных на m отсчетов, на интервале времени $n \in [0, N-1]$. Записать фор-

мулы задержанных последовательностей.

6. Смоделировать дискретный прямоугольный импульс

$$s_3(k) = \begin{cases} U, & n_0 \le n \le n_0 + n_{imp} - 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

на основе дискретного единичного скачка с выводом графика на интервале времени $n \in [0, N-1]$. Пояснить как выполняется моделирование импульса.

7. Смоделировать линейную комбинацию дискретных гармонических сигналов $s_4(k)$:

$$s_4(k) = a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k) + a_3 x_3(k),$$

где

$$x_i(k) = B_i sin(\hat{\omega}_i k)$$

с выводом графиков последовательностей $x_i(k)$ и $s_4(k)$ на интервале времени $n \in [0, 5N-1]$. Вычислить среднее значение, энергию и среднюю мощность последовательности $s_4(k)$. Пояснить, какие операции при моделировании линейной комбинации сигналов и как определяют указанные характеристики.

8. Смоделировать дискретную затухающую синусоиду $s_5(k) = |a|^k cos(\hat{\omega}_0 k)$ и вывести график на интервале времени $n \in [0, N-1]$. Пояснить операции при моделировании данного сигнала.

9. Вывести график пяти периодов периодической последовательности $s_6(k)$ дискретных прямоугольных импульсов амплитуды U и длительности n_{imp} с периодом, вдвое большим длительности импульса. Пояснить операции при моделировании периодической последовательности.

10. Сделать выводы.

Вариант заданий

Переменная	**Назначение**	**Значение**
N_B	Номер варианта	10
N	Длина последовательности	30
T	Период дискретизации	0.001
a	Основание экспоненты	0.85
C	Амплитуда гармонического сигнала	1
$\hat{\omega}_0$	Частота гармонического сигнала	$\frac{\pi}{6}$
m	Задержка	5
U	Амплитуда импульса	10
n_0	Начальный момент импульса	3
n_{imp}	Длина импульса	5
B_1, B_2, B_3	Амплитуды гармонических сигналов	$1.5, 5.7, 2.2$
$\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3$	Частоты гармонических сигналов	$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}$
a_1, a_2, a_3	Коэффициенты линейной комбинации гармонических сигналов	$1.5, 0.7, 1.4$

Выполнение работы

1. Цифровой единичный импульс $\delta_d(k)$ имеет следующий вид

$$\delta_d(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

График единичного цифрового импульса на отрезках дискретного и дискретного нормированного времени приведен на рисунках 1 и 2.

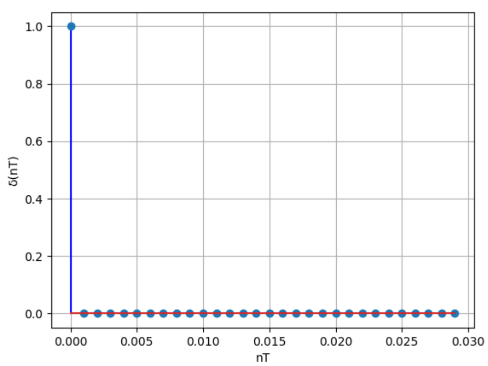

Рисунок 1 – Цифровой единичный импульс $\delta_d(nT)$

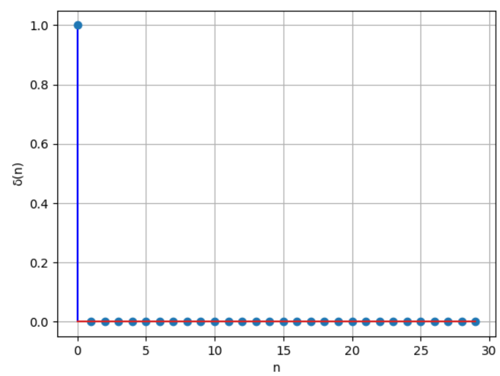

Рисунок 2 – Цифровой единичный импульс $\delta_d(n)$

Значения nT называют дискретным временем, в частном случае, при $T = 1$ – дискретное нормированное время. Здесь T – период дискретизации, обратная величина к частоте дискретизации.

Функция Дирака отличается от цифрового единичного импульса по определению

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Функция Дирака используется в аналоговых системах. Функция в таком виде не представима в рамках ограничений машинной арифметики. Цифровой единичный импульс обладает свойствами функции Дирака и может быть использован для дискретных систем.

2. Дискретный единичный скачок $\sigma_d(k)$ имеет вид

$$\sigma_d(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

График единичного скачка на отрезках дискретного и дискретного нормированного времени приведен на рисунках 3 и 4.

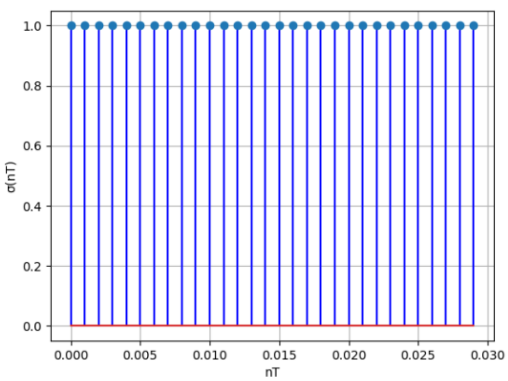

Рисунок 3 – Дискретный единичный скачок $\sigma_d(nT)$

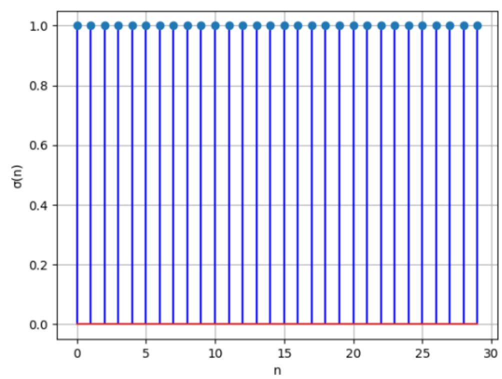

Рисунок 4 – Дискретный единичный скачок $\sigma_d(n)$

Единичный скачок является дискретным аналогом функции Хэвисайда, определенной на вещественной прямой

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}$.

Частота дискретизации дискретного единичного скачка равна

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.001} = 1\text{кГц}$$

3. Дискретная экспоненциальная функция $s_1(k)$ определяется как

$$s_1(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ a^k, & k \geq 0 \end{cases}$$

где k – целое число.

График дискретной экспоненциальной функции приведен на рисунках 5 и 6.

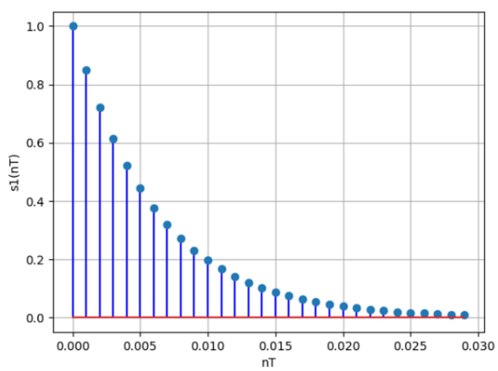

Рисунок 5 – Дискретная экспоненциальная функция $s_1(nT)$

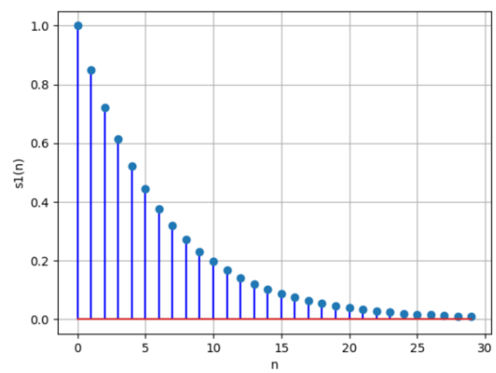

Рисунок 6 – Дискретная экспоненциальная функция $s_1(n)$

Аналоговая экспонента определена на вещественной прямой и не обращается в ноль для значений меньше нуля.

4. Графики вещественной и мнимой частей дискретного комплексного гармонического сигнала $s_2(k) = C \cdot exp(j\hat{\omega}_0 k)$ приведены на рисунках 7 и 8 соответственно.

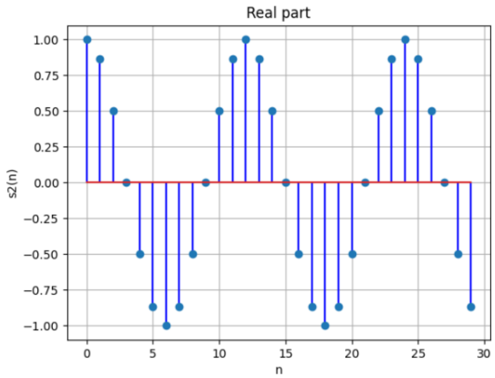

Рисунок 7 – Вещественная часть дискретного комплексного гармонического сигнала $s_2(k)$

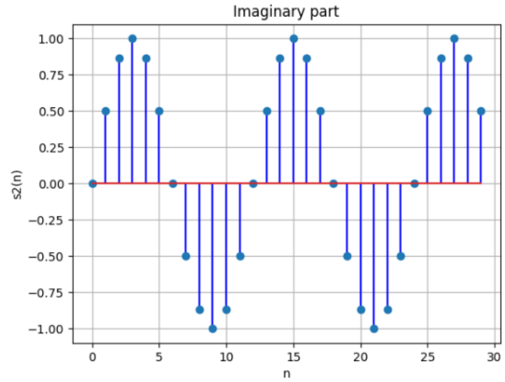

Рисунок 8 – Мнимая часть дискретного комплексного гармонического сигнала $s_2(k)$

Используя формулу Эйлера

$$e^{j\phi} = cos\phi + jsin\phi$$

можно записать данный сигнал в виде комбинации двух вещественных последовательностей

$$s_2(k) = cos(\frac{\pi k}{6}) + jsin(\frac{\pi k}{6})$$

5. Графики последовательностей $\delta_d(k)$, $\sigma_d(k)$ и $s_1(k)$, задержанных на 5 отсчетов приведены на рисунках 9, 10 и 11.

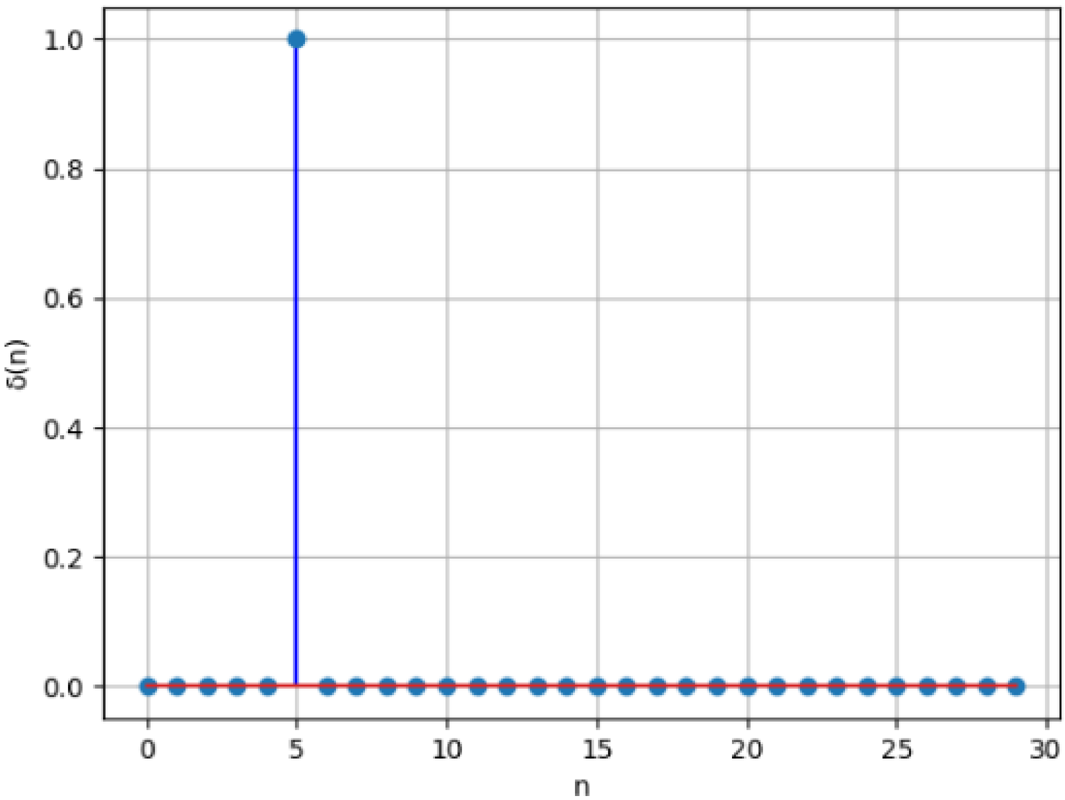

Рисунок 9 – Задержанный цифровой единичный импульс $\delta_d(n)$

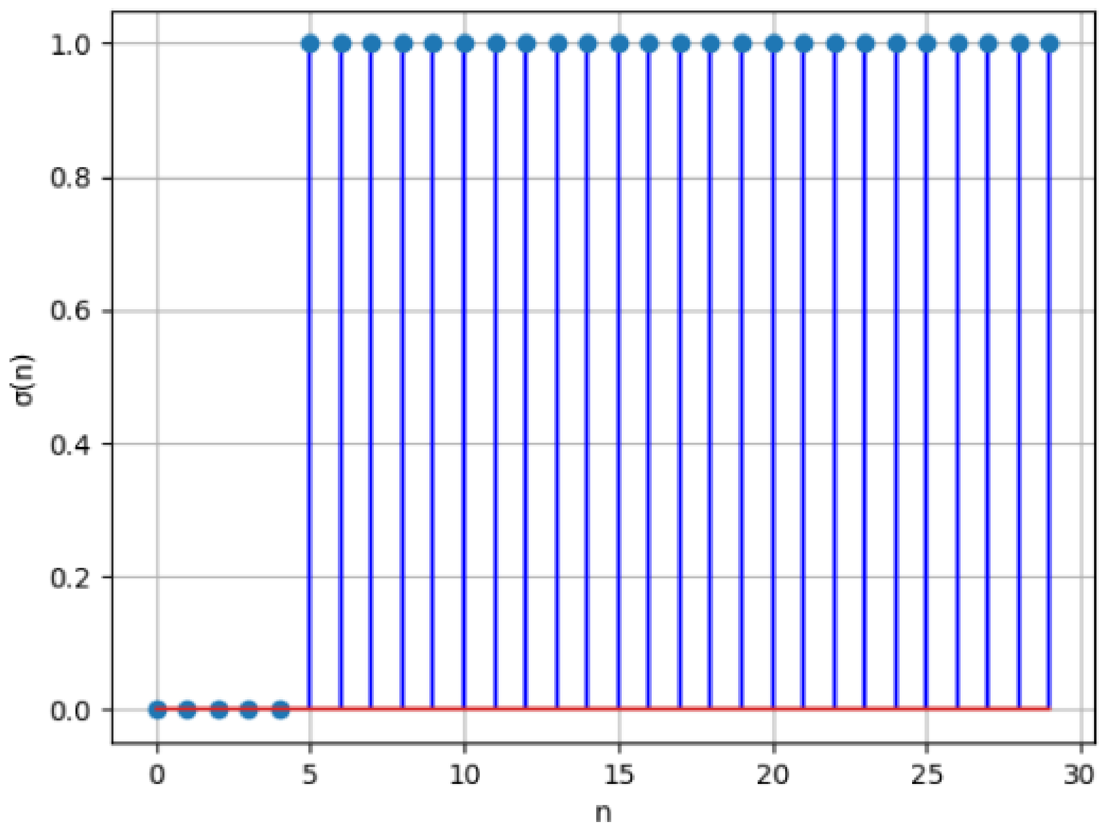

Рисунок 10 – Задержанный дискретный единичный скачок $\sigma_d(n)$

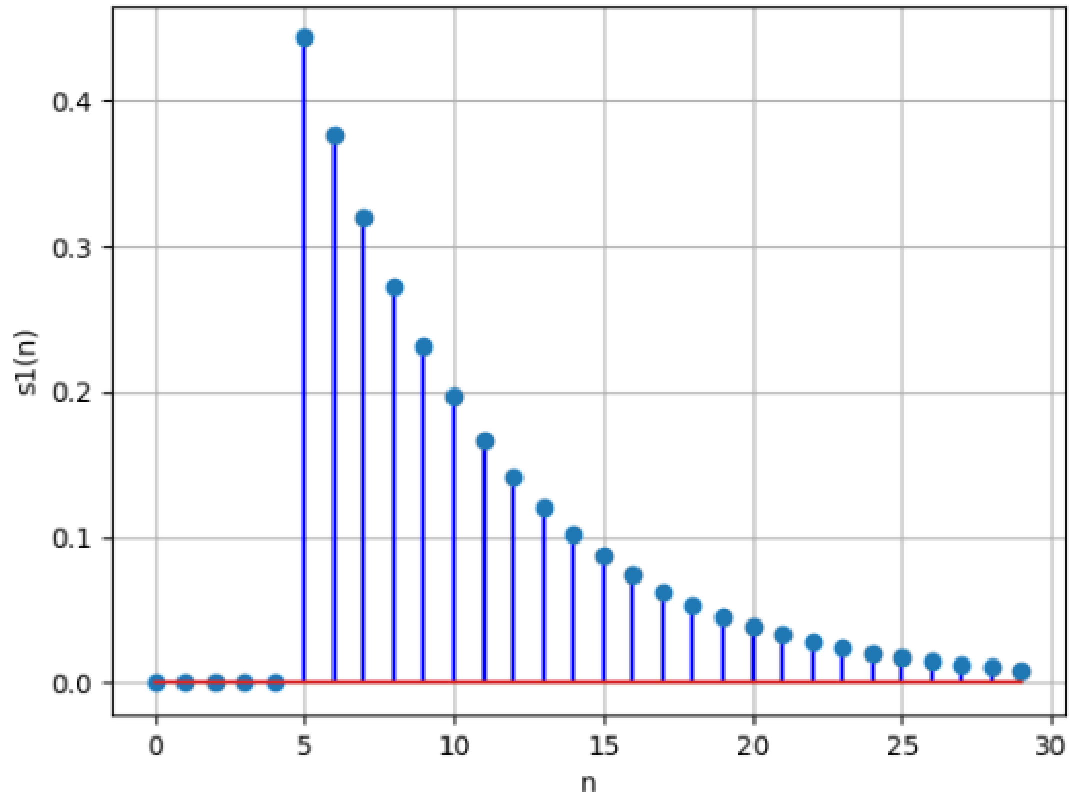

Рисунок 11 – Задержанная дискретная экспоненциальная функция $s_1(n)$

В общем виде формулы с задержкой на m отсчетов имеют следующий вид ($\in \mathbb{Z}$):

$$\delta_d(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

$$\sigma_d(k-m) = \begin{cases} 1, & k \geq m \\ 0, & k < m \end{cases}$$

$$s_1(k-m) = \begin{cases} 0, & k < m \\ a^k, & k \geq m \end{cases}$$

6. Дискретный прямоугольный импульс имеет вид

$$s_3(k) = \begin{cases} U, & n_0 \leq n \leq n_0 + n_{imp} - 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

и может быть выражен как

$$s_3(k) = U \cdot \sum_{i=n_0}^{n_0+n_{imp}-1} \delta_d(k-i)$$

что может быть использовано для моделирования.

График дискретного прямоугольного импульса для заданных параметров ($U = 10$, $n_{imp} = 5$, $n_0 = 3$) приведен на рисунке 12.

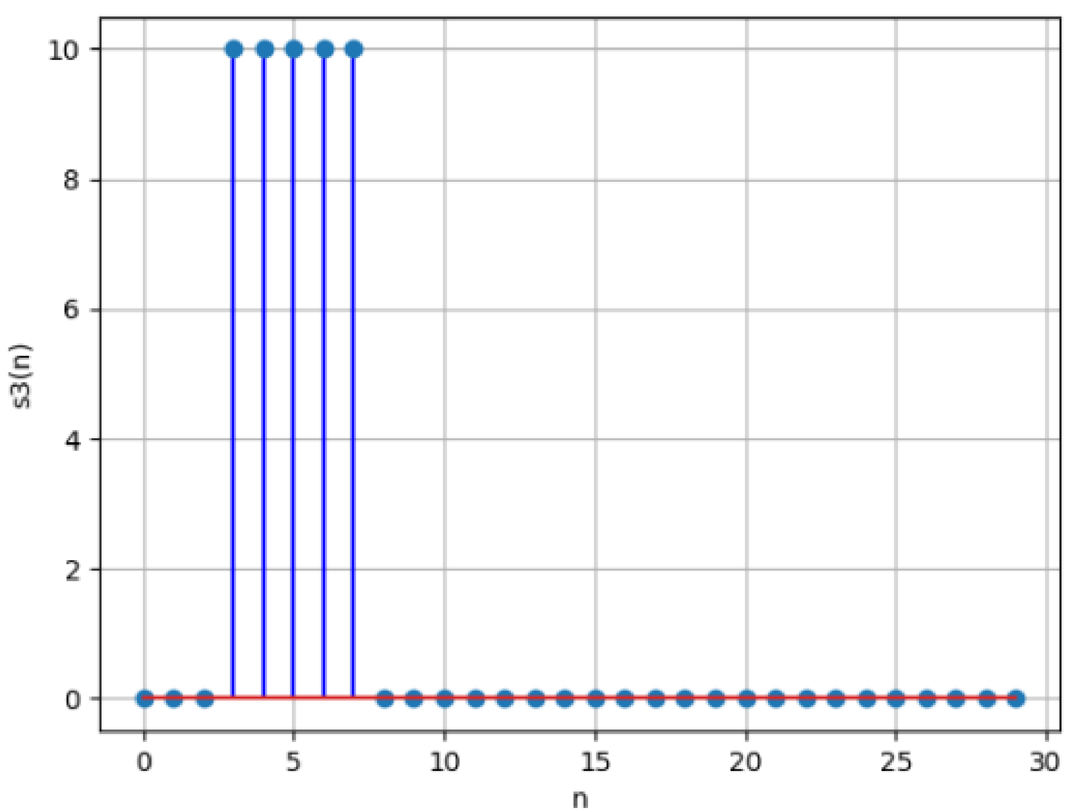

Рисунок 12 – Дискретный прямоугольный импульс $s_3(n)$

7. Линейная комбинация дискретных гармонических сигналов $s_4(k)$ имеет вид

$$s_5(k) = a_1x_1(k) + a_2x_2(k) + a_3x_3(k),$$

где

$$x_i(k) = B_i sin(\hat{\omega}_i k)$$

Для заданных параметров

$$s_4(k) = 1.5 \cdot 1.5sin(\frac{\pi k}{4}) + 0.7 \cdot 5.7sin(\frac{\pi k}{8}) + 1.4 \cdot 2.2sin(\frac{\pi k}{16})$$

Графики последовательностей $x_i(k)$ приведены на рисунках 13, 14, 15, график их линейной комбинации приведен на рисунке 16.

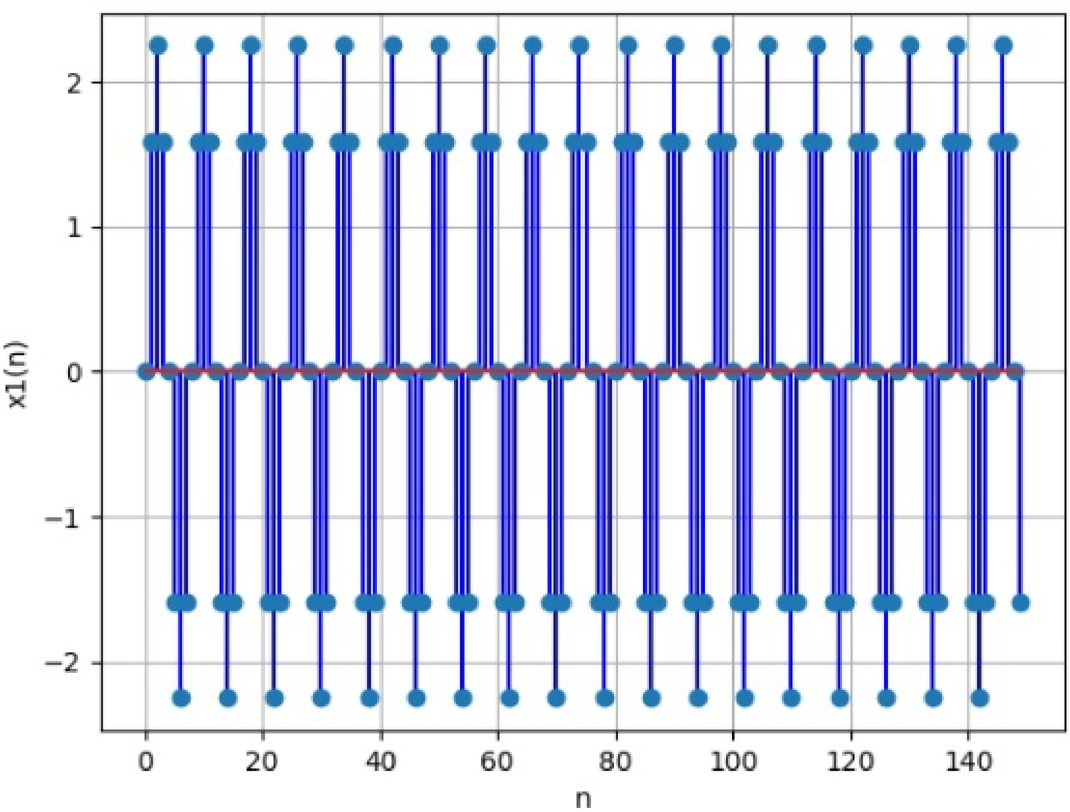

Рисунок 13 – Первый дискретный гармонический сигнал

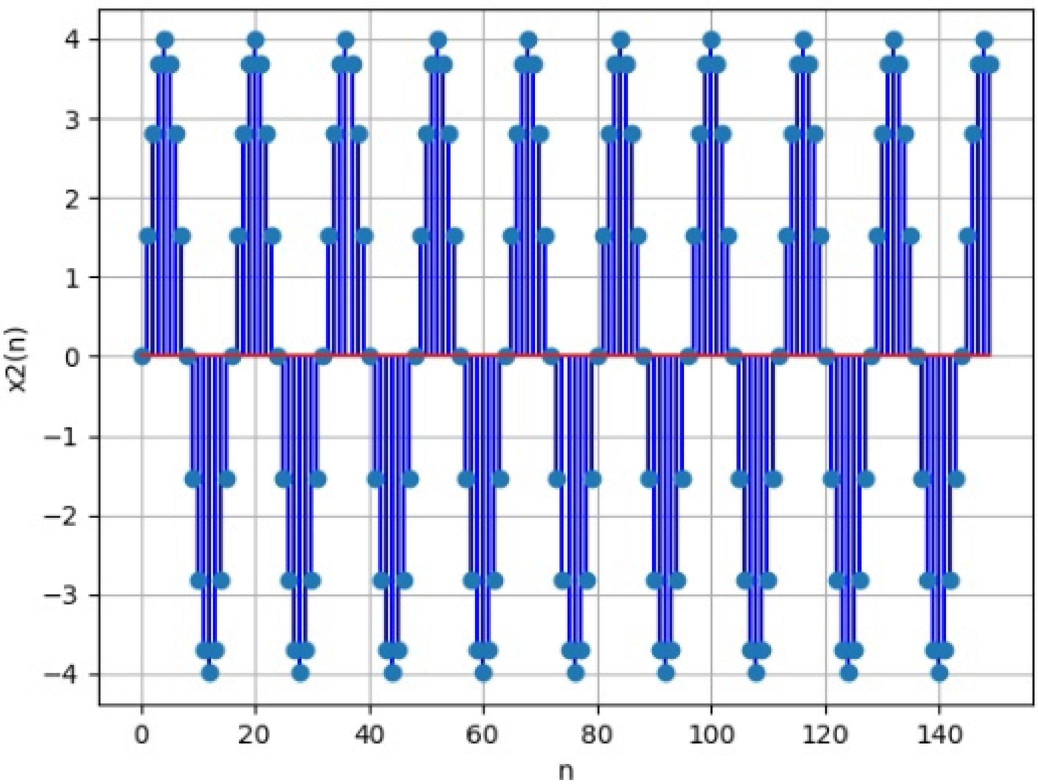

Рисунок 14 – Второй дискретный гармонический сигнал

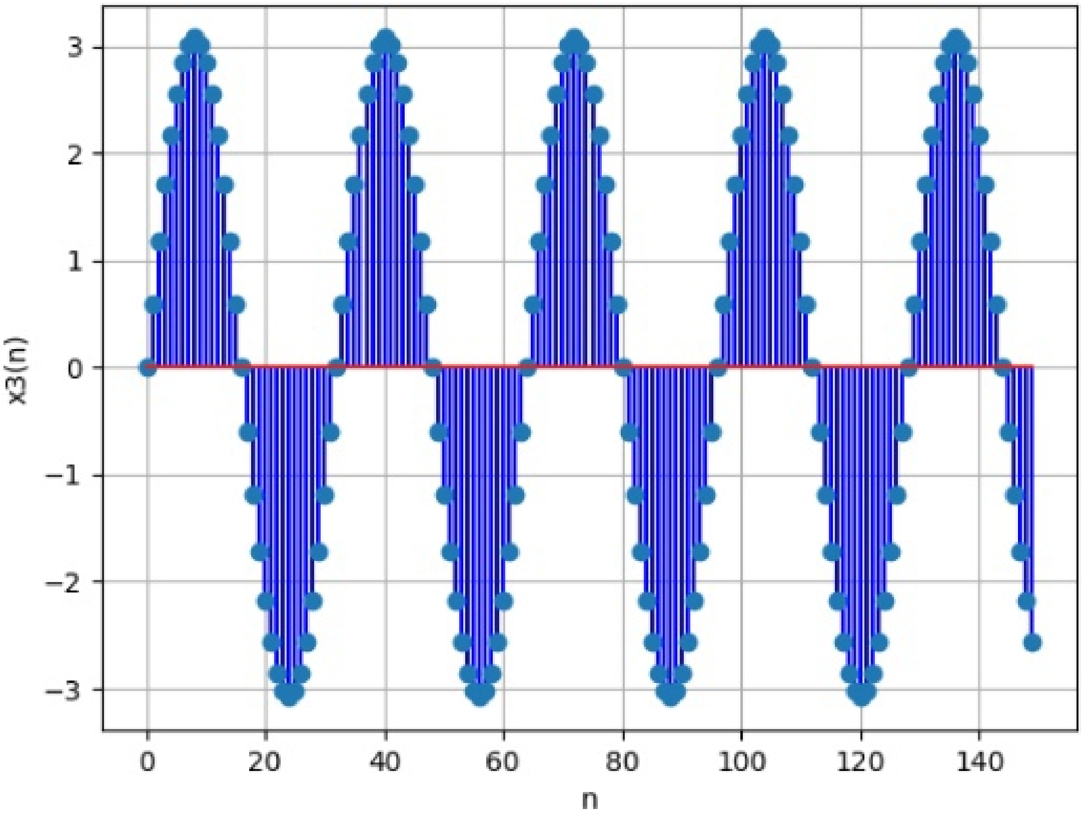

Рисунок 15 – Третий дискретный гармонический сигнал

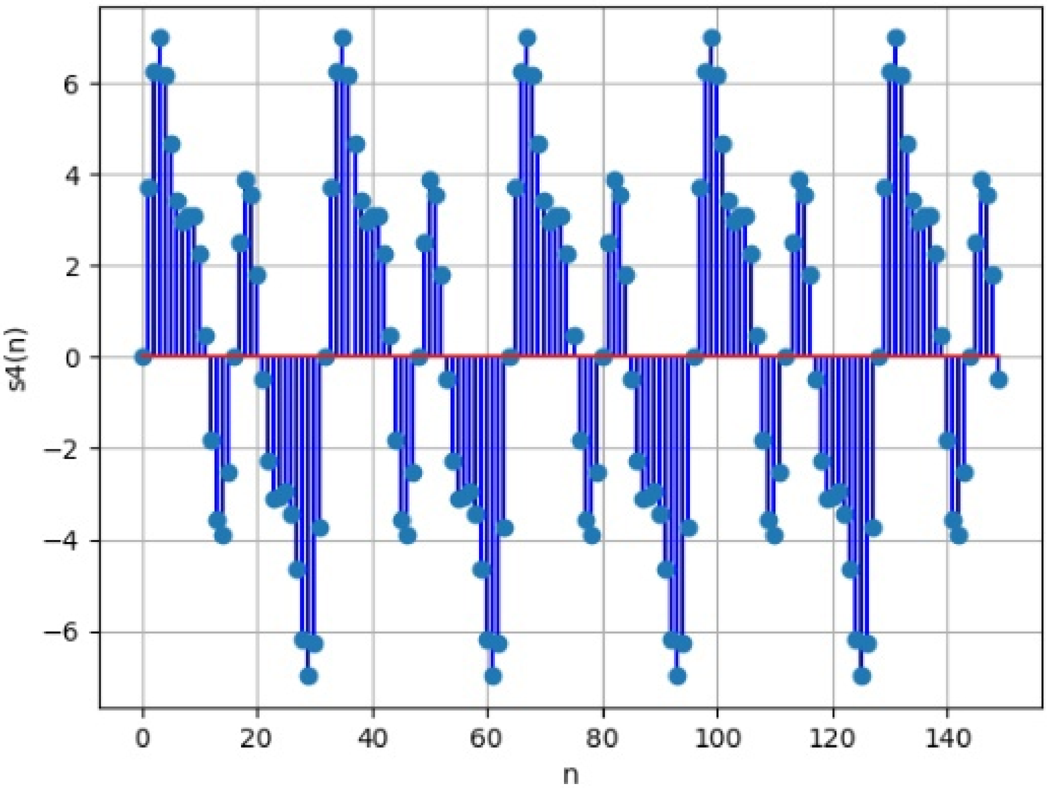

Рисунок 16 – Линейная комбинация дискретных гармонических сигналов

Вычислим среднее значение, энергию и среднюю мощность полученного сигнала.

$$\mu_{s_4(k)} = 0.28396$$

$$E_{s_4(k)} = 2231.47416$$

$$P_{s_4(k)} = 14.87649$$

В силу линейности математического ожидания, мат. ожидание линейной комбинации есть линейная комбинация мат. ожиданий $x_i(k)$. Энергия и средняя мощность тоже линейны, поэтому данные характеристики определяются соответствующими характеристиками входящих в линейную комбинацию последовательностей.

8. Дискретная затухающая синусоида $s_5(k)$ имеет вид

$$s_5(k) = |a|^k cos(\hat{\omega}_0 k) = 0.85^k cos(\frac{\pi k}{6})$$

График $s_5(k)$ приведен на рисунке 17.

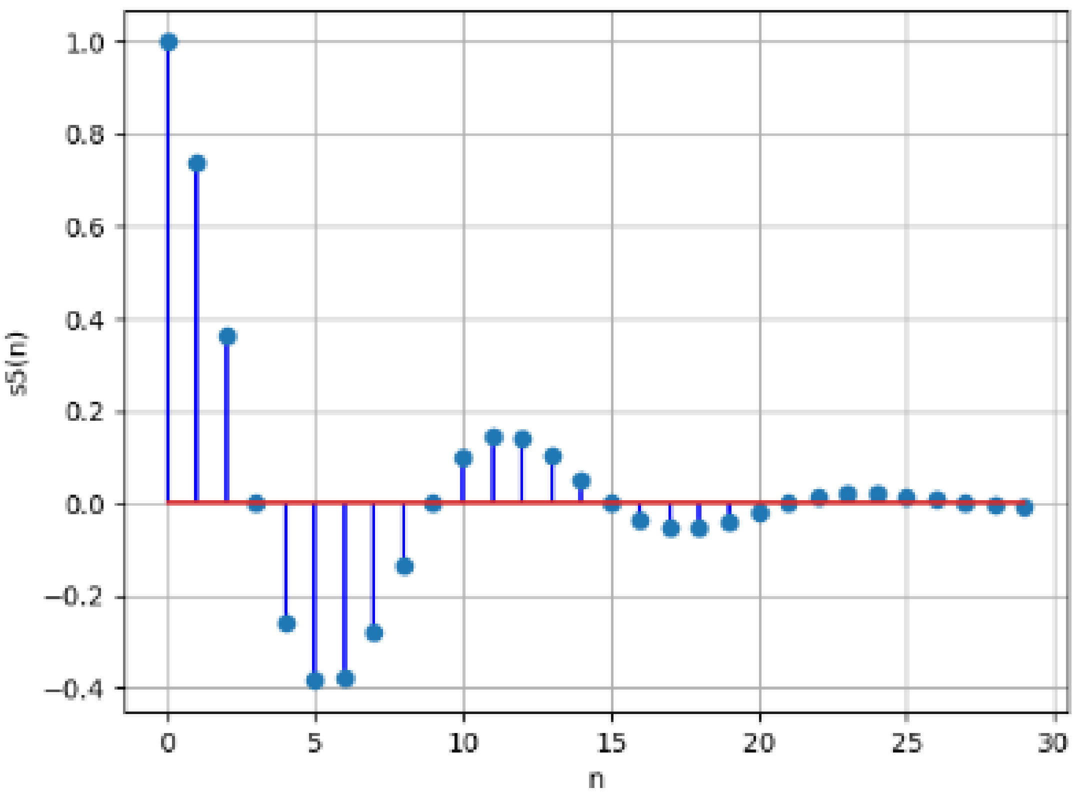

Рисунок 17 – Дискретная затухающая синусоида $s_5(k)$

Последовательность $s_5(k)$ есть произведение значений сигналов затухающей экспоненты на синусоиду.

9. Периодическая последовательность дискретных прямоугольных импульсов приведена на рисунке 18.

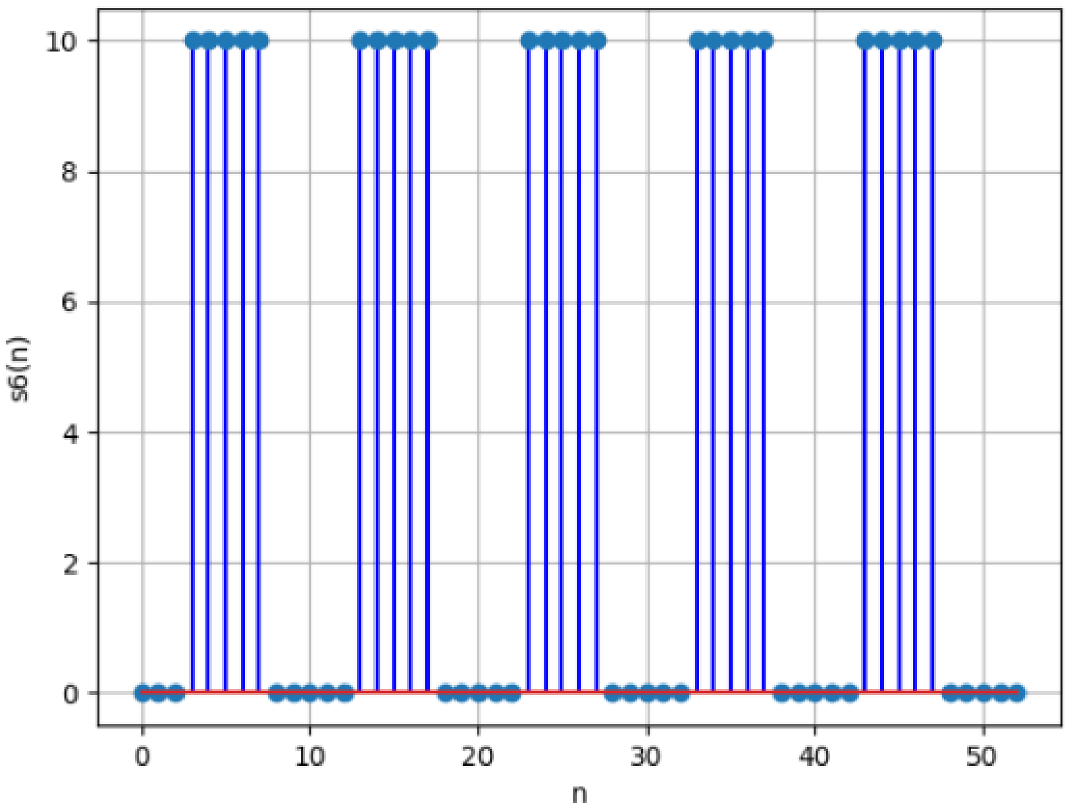

Рисунок 18 – Периодическая последовательность дискретных прямоугольных импульсов

Данная последовательность может быть представлена в виде

$$s_6(k) = U \cdot \sum_{t=0}^{\text{count}-1} \sum_{i=n_0}^{n_0+n_{imp}-1} \delta_d(k-(2n_{imp}t+i))$$

Выводы.

В результате выполнения лабораторной работы были изучены следующие виды дискретных сигналов: единичный цифровой импульс, дискретный единичный скачок, дискретная экспонента, а также несколько комплексных гармонических сигналов.

Были даны математические описания перечисленных сигналов. Средствами языка Python были смоделированы данные сигналы, а также получены их графики.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

Nb = 10

N = (30 + Nb % 5)
T = 0.0005 * (1 + Nb % 3)
a = (-1 if Nb % 2 == 1 else 1) * (0.8 + 0.005 * Nb)
C = 1 + Nb % 5
w0 = np.pi / (6 + Nb % 5)
m_l = 5 + Nb % 5
U = Nb
n0 = 3 + Nb % 5
n_imp = 5 + Nb % 5
B1, B2, B3 = 1.5 + Nb % 5, 5.7 - Nb % 5, 2.2 + Nb % 5
w1, w2, w3 = np.pi / (4 + Nb % 5), np.pi / (8 + Nb % 5), np.pi /
   (16 + Nb % 5)
a1, a2, a3 = 1.5 - Nb % 5, 0.7 + Nb % 5, 1.4 + Nb % 5


def main():
    step1()
    step2()
    step3()
    step4()
    step5(m_l)
    step6()
    step7()
    step8()
    step9()
```

```
def plot(x, y, xlabel, ylabel, title=''):
    plt.grid(True)
    plt.stem(x, y, 'bo-')
    plt.xlabel(xlabel)
    plt.ylabel(ylabel)
    plt.title(title)
    plt.show()


def step1(m=0):
    y = np.zeros((N,))
    y[m] = 1
    x = [i for i in range(0, N)]
    x_t = np.multiply(range(0, N), T)
    plot(x, y, 'n', δ'(n)')
    plot(x_t, y, 'nT', δ'(nT)')


def step2(m=0):
    x = [i for i in range(0, N)]
    y = [0 for _ in range(m)] + [1 for _ in range(N - m)]
    plot(x, y, 'n', σ'(n)')

    x_t = [T * i for i in range(0, N)]
    plot(x_t, y, 'nT', σ'(nT)')


def step3(m=0):
    x = [i for i in range(0, N)]
    y = [pow(a, i) if i >= 0 and i >= m else 0 for i in range(0,
       N)]
```

```
    plot(x, y, 'n', 's1(n)')

    x_t = [T * i for i in range(0, N)]
    plot(x_t, y, 'nT', 's1(nT)')


def step4():
    x = [i for i in range(0, N)]
    y = [C * (np.cos(w0 * i) + 1j * np.sin(w0 * i)) for i in
       range(0, N)]
    plot(x, np.real(y), 'n', 's2(n)', 'Real part')
    plot(x, np.imag(y), 'n', 's2(n)', 'Imaginary part')


def step5(m):
    step1(m)
    step2(m)
    step3(m)


def step6():
    x = [i for i in range(0, N)]
    y = [0 for _ in range(0, n0)] + [U for _ in range(n0, n0 +
       n_imp)] + [0 for _ in range(n0 + n_imp, N)]
    plot(x, y, 'n', 's3(n)')


def step7():
    x = [i for i in range(0, 5 * N)]
    y1 = [a1 * B1 * np.sin(w1 * i) for i in x]
    y2 = [a2 * B2 * np.sin(w2 * i) for i in x]
    y3 = [a3 * B3 * np.sin(w3 * i) for i in x]
```

```
    y = [sum(i) for i in zip(y1, y2, y3)]

    plot(x, y1, 'n', 'x1(n)')
    plot(x, y2, 'n', 'x2(n)')
    plot(x, y3, 'n', 'x3(n)')
    plot(x, y, 'n', 's4(n)')

    s4_mean = np.mean(y)

    e = np.sum([i * i for i in y])
    p = e / len(y)
    print(f"{s4_mean:.5f}, {e:.5f}, {p:.5f}")


def step8():
    x = [i for i in range(0, N)]
    y = [np.power(np.abs(a), i) * np.cos(w0 * i) for i in x]
    plot(x, y, 'n', 's5(n)')


def step9():
    p = 5 * 2
    nn = n0 + n_imp * p
    x = [i for i in range(0, nn)]
    y = np.zeros(nn)
    for i in range(5):
        y[n0 + p * i: n0 + n_imp + p * i] = U
    plot(x, y, 'n', 's6(n)')


if __name__ == '__main__':
```

```
main()
```