Chapitre 2 : Généralités sur les fonctions

1) Notion de fonction

Définitions et notations :

On appelle fonction numérique *f*, **une relation qui, à un réel *x* d'une partie D_f de ℝ, appelée variable, associe un et un seul réel *y*.**

- **y est appelé image de x** par la fonction *f* et se note $y = f(x)$
- *f* est la fonction et se note $f: D_f \to \mathbb{R}$

$$x \to y = f(x)$$

Remarque : attention à ne pas confondre *f* qui est une relation et $f(x)$ qui est un nombre.

Exemple :

Soit *f* la fonction affine définie par $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to 4x + 5$$

On énoncera plus simplement : soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 4x + 5$

Domaine de définition d'une fonction :

L'ensemble des éléments *x* de ℝ qui possèdent une image par *f* s'appelle l'ensemble de définition de *f* et se note D_f. On dit également que f est définie sur D_f

Exemples :

Déterminons les domaines de définition des fonctions suivantes :

1) g définie par $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$: $\Delta f = R \setminus \{1\}$

2) A définie par $A(x) = x^2$ qui donne l'aire d'un carré en fonction de la mesure de son côté *x* en cm : $\Delta f =]0, +\infty[$ ou $\Delta f = R^+$

2) Image et antécédent(s)

Méthode de calcul de l'image d'un nombre réel par une fonction *f*

- On remplace *x* par ce nombre dans l'expression de $f(x)$.

Exemple :

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calculons l'image de 4.

$g(4) = \frac{4+3}{4-1} = \frac{7}{3}$

Antécédent : définition

Soit y un nombre réel. Un réel x est un antécédent de y si x appartient à D_f et $f(x) = y$.
Un nombre peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédent(s).

Méthode de calcul des éventuels antécédents d'un nombre réel par une fonction *f*

- On résout l'équation $f(x) = y$ en remplaçant y par le nombre,

Exemple :

Soit A définie par $A(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Calculons les antécédents de -3 et 7.

-3 n'a pas d'antécédent

x = $-\sqrt{7}$ x = $\sqrt{7}$ donc 7 a pour antécedent $\sqrt{7}$

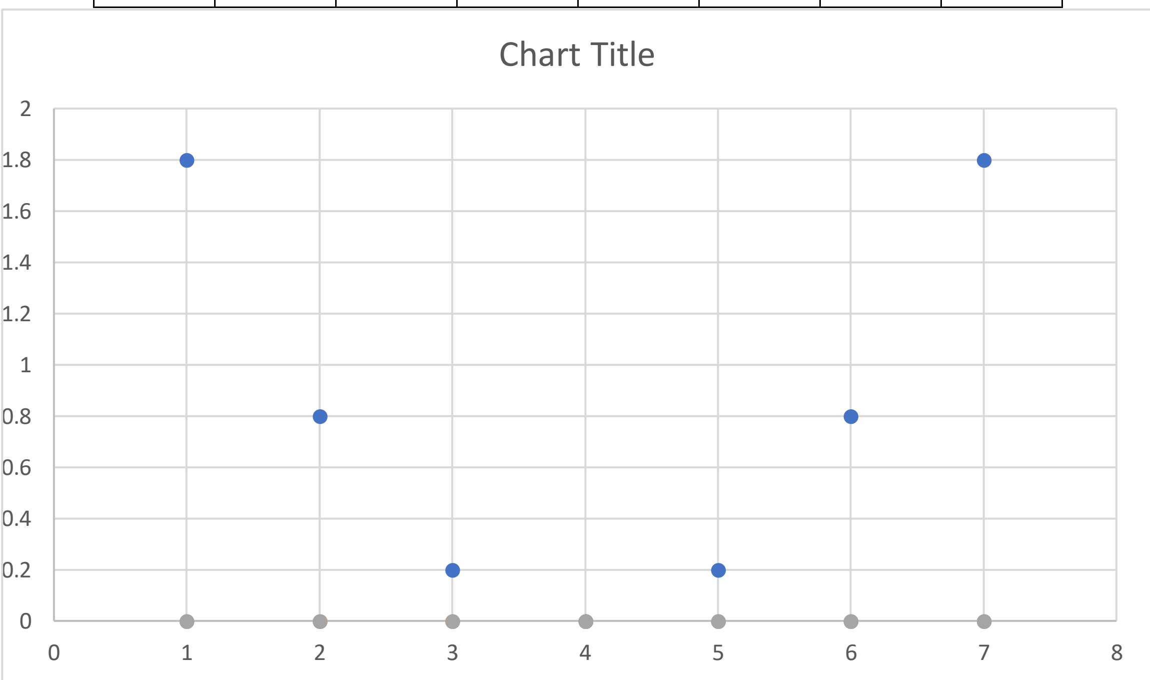
3) Représentation graphique

Définition

La représentation graphique d'une fonction est **l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$** lorsque x varie sur D_f.
Cette représentation s'appelle la courbe représentative de la fonction f notée C_f

Exemple 1 : courbe représentative de la fonction k définie par $k(x) = 0{,}2x^2$ sur $[-3;+3]$ tracée à la main.
On calcule au préalable des images en nombre suffisant, à l'aide de la calculatrice et on présente les résultats dans un tableau de valeurs. On peut aussi directement éditer un tableau de valeur à partir de la calculatrice graphique.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$k(x)$							



Exemple de lectures graphiques d'images et d'antécédents

Une fonction f définie sur $[-3; 4]$ est représentée ci-dessous. Déterminons graphiquement l'image de 2 et les antécédents de 1 par la fonction f en faisant apparaître les traits de lecture.

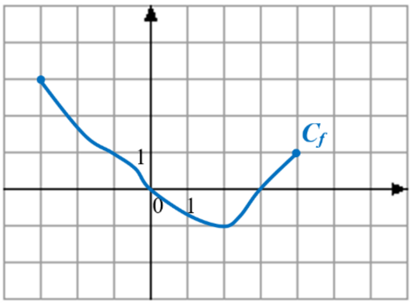


Image de 2 par f : -1

Antécédents de 1 par f :

-1 et 5

4) Appartenance d'un point à la courbe représentative d'une fonction

Approche :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x$
Les points $A(2; 10)$ et $B(-1; 1)$ appartiennent-ils à la courbe représentative de f ?

f(2) = 3x2² -2 x 2 = 8 donc a (2 ; 10) n'appartient pas a Cf

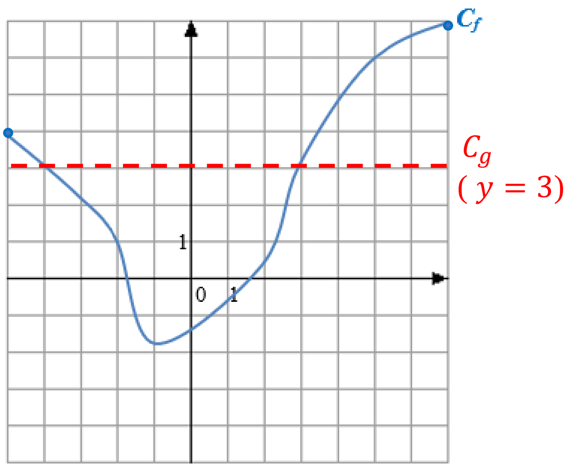
Propriété :

Un point $M(x_M; y_M)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f si et seulement si $y_M = f(x_M)$

5) Résolutions graphiques d'équations du type $f(x) = k$ et d'une inéquation du type $f(x) \leq k$

Approche :

Soit f une fonction définie sur $[-5; 7]$ dont la courbe représentative est tracée dans le repère ci-contre.



Résolvons graphiquement l'équation $f(x) = 3$
et l'inéquation $f(x) \geq 3$.

$\Rightarrow$ On trace la fonction constante g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3$ (- -)
(c'est-à-dire la droite d'équation $y = 3$)

$\Rightarrow$ On résout par lecture graphique :

$f(x) = 3$ a pour ensemble solution : …………………

$f(x) \leq 3$ a pour ensemble solution : ……………………..

Résolution graphique d'une équation ou d'une inéquation

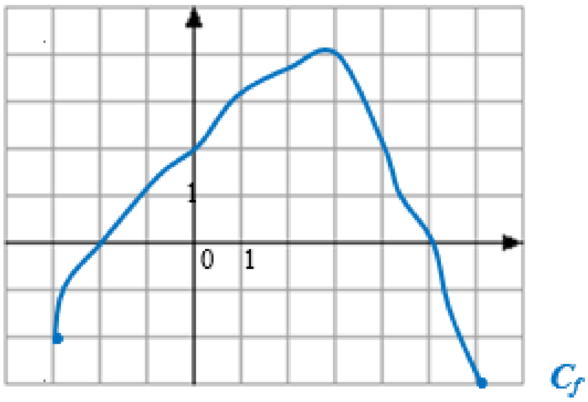
Les solutions d'une équation de la forme $f(x) = k$ sont **les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = k$.**

La **résolution graphique** permet le plus souvent de déterminer des **valeurs approchées** des solutions.

6) Signe d'une fonction

Approche graphique

Soit f une fonction définie par sa représentation graphique ci-dessous.



Déterminons sur quels intervalles f est positive, négative, en regroupant ces informations dans le tableau de signe ci-dessous :

x	...		...		...		...
Signe de $f(x)$			0		0		

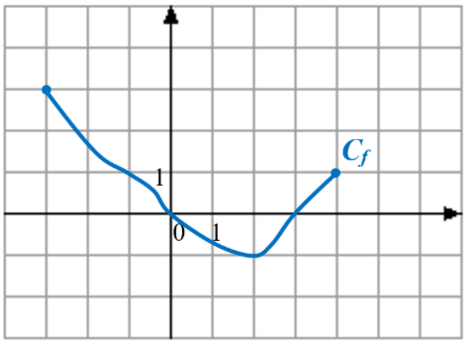
Définition :

On dit d'une fonction f qu'elle est respectivement positive ou négative sur un intervalle de son domaine de définition si, pour tout x dans cet intervalle, on a $f(x) \geq 0$ ou $f(x) \leq 0$ La courbe représentative de la fonction est alors située au-dessus ou en-dessous de l'axe des abscisses

Le signe d'une fonction est généralement présenté dans un tableau de signes.

7) Variation(s) d'une fonction

Exemple :



Etablissons le tableau de variation de la fonction *f* tracée ci-dessus :

x	… … …
Variation de f	

La fonction *f* est :

- décroissante sur l'intervalle ………………….
- croissante sur l'intervalle …………………….

<u>Définitions :</u>

La fonction *f* est **croissante** sur un intervalle *I* si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à *I* tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.

La fonction *f* est **décroissante** sur un intervalle *I* si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à *I* tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.