

$$0 + 2x_2 + x_3 = 9$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15$$

a)  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 9 \\ 3 & 1 & 1 & | & 12 \\ 1 & 4 & 2 & | & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 15 \\ 3 & 1 & 1 & | & 12 \\ 0 & 2 & 1 & | & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 15 \\ 3 & 1 & 1 & | & 12 \\ 1 & 2 & 1 & | & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 15 \\ 3 & 1 & 1 & | & 12 \\ 0 & -2 & -1 & | & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 3 & 1 & 1 & | & 12 \\ 0 & -2 & -1 & | & -8 \end{bmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_3$        $R_3 = R_1 - R_3$        $R_3 = -R_1 + R_3$        $R_1 = 2R_3 + R_1$        $R_2 = 3R_1 + R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 15 \\ 0 & -2 & -1 & | & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 15 \\ 0 & 2 & 1 & | & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -7 \\ 0 & 2 & 1 & | & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 22 \end{bmatrix}$$

$R_3 = -R_3$        $R_2 = R_3 - R_2$        $R_3 = -2R_2 + R_3$

d) Determinant  $|A|$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2[3(2) - 1(1)] + 1[3(4) - 1(1)]$$

$$= -2(5) + 11 = -10 + 11 = 1$$

e)  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_3$        $R_3 = R_1 - R_3$        $R_3 = -R_1 + R_3$        $R_1 = 2R_3 + R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -6 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 = -3R_1 + R_2$        $R_3 = -R_3$        $R_2 = R_3 - R_2$        $R_3 = -2R_2 + R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -11 & 2 & -6 \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ -11 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

f)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ -11 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 + 0 + 15 \\ -40 - 12 + 45 \\ 88 + 24 - 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 22 \end{bmatrix} \checkmark$