

# Optimalno, nelinearno i napredno upravljanje - Domaći 3

Željana Bilbija, Predrag Nuždić, Aleksa Rančić

February 4, 2026

## 1 Sistem

Funkcija prenosa sistema je data izrazom

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}. \quad (1)$$

Sistem (1) se u prostoru stanja može predstaviti kao

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -3x_3 - 3x_2 - x_1 + u, \end{aligned} \quad (2)$$

odnosno u matričnom obliku

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3)$$

gde su matrice  $A$  i  $B$  definisane sa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} i$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

## 2 Estimator stanja

Estimator stanja je implementiran pomoću sistema diferencijalnih jednačina definisanih sa

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \quad (4)$$

gde su  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  i matrica  $L$  estimirane vrednosti stanja, estimirane vrednosti izlaza i matrica pojačanja, respektivno. Sređivanjem (4) dobijamo konačni matrični oblik sistema kao

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + [B \quad L] \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Na osnovu (5) možemo videti da izborom matrice  $L$  podešavamo svojstvene vrednosti matrice dinamike sistema, samim tim i polove sistema. Podešavanje polova možemo izvršiti upotrebom Akerman metode (ukoliko stavimo da su ulazne matrice  $A^T$  i  $C^T$ ).

p	L
-20	[57, 1026, 4750]
-10	[27, 216, 270]
-2	[3, 0 -2]

Table 1: Vrednosti matrice  $L$  za različite vrednosti trostrukog pola  $p$ .

Možemo primetiti da izborom negativnijih polova povećavamo pojačanje matrice  $L$ . Kao posledica ovoga, šum merenja se pojačava više. Takođe, uticaj velikog pojačanja možemo videti kroz veliku grešku u estimaciji ukoliko se početni uslovi (estimirani početni uslovi i stvarni početni uslovi sistema) dovoljno razlikuju. Uticaj šuma, kao i greska estimacije zbog početnih uslova su prikazani na slikama 1, 2 i 3.

Na slikama 2 i 3 se posebno može primetiti uticaj velikog pojačanja na inicijalnu grešku estimacije.

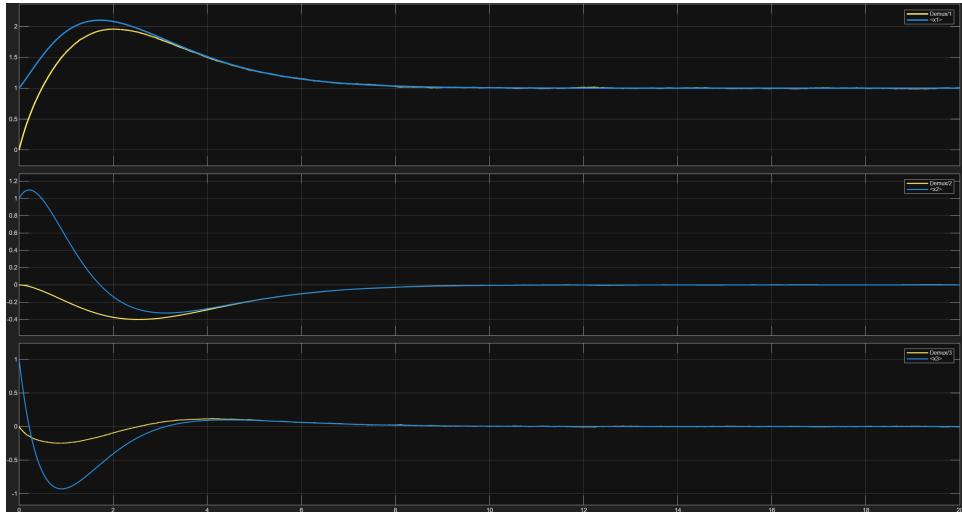


Figure 1: Estimira stanja (žuto) i stvarna stanja (plavo) za  $p = -2$ .

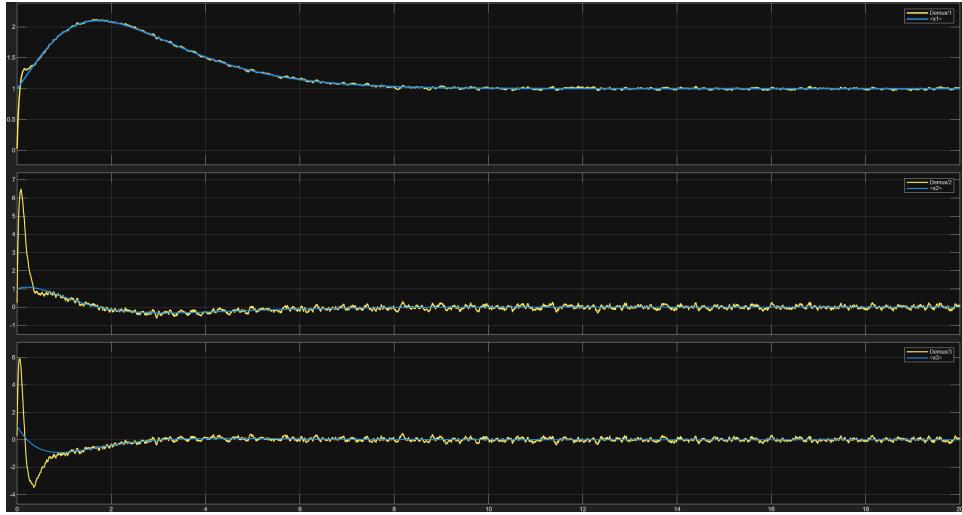


Figure 2: Estimira stanja (žuto) i stvarna stanja (plavo) za  $p = -10$ .

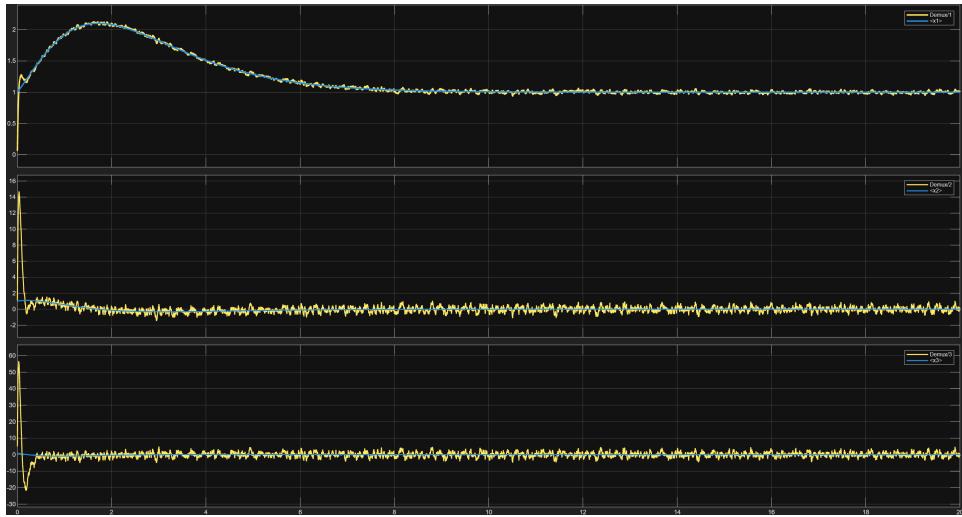


Figure 3: Estimira stanja (žuto) i stvarna stanja (plavo) za  $p = -20$ .

Naravno, izborom negativnijih polova odnosno većim pojačanjem matrice  $L$  dobijamo i brži odziv estimatora, ali to dolazi sa cenom povećanja propusnog opsega. Kako je estimator napravljen da prati model, dodavanjem poremećaja upravljačkog signala koji nije modelovan, dobijamo grešku u estimaciji.

### 3 Estimator poremećaja

Dodavanjem virutelnog modela poremećaja možemo estimirati poremećaj, ukoliko prepostavimo njegovo ponašanje.

#### 3.1 Konstantan poremećaj

Model konstatnog poremećaja možemo zapisati u obliku diferencijalne jednačine kao

$$\dot{d} = 0,$$

gde je  $d(t)$  poremećaj koji se superponira sa upravljačkim signalom  $u$ . Zamenom,  $w(t) = d(t)$  i pridruživanje modelu (3) dobijamo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(u(t) + C_w w(t)), \\ \dot{w} &= A_w w(t),\end{aligned}\tag{6}$$

gde su  $A_w$  i  $C_w$  matrica dinamike i matrica izlaza poremećaja. Ukoliko primenimo sličan postupak kao pri projektovanju estimatora stanja dobijamo sledeći estimator

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B(u + C_w \hat{w}) + L_1(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{w}} &= A_w \hat{w} + L_2(y - \hat{y}).\end{aligned}\tag{7}$$

Kako nam je model poremećaja dat sa  $\dot{d} = 0$  matrice  $A_w$  i  $C_w$  imaju vrednosti

$$\begin{aligned}A_w &= 0, \\ C_w &= 1,\end{aligned}$$

odnosno celokupni model postaje

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B(u + \hat{w}) + L_1(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{w}} &= L_2(y - \hat{y}).\end{aligned}\tag{8}$$

Na slici 4 je prikazana estimirana i stvarana vrednost poremećaja. Možemo primetiti da prepostavka da je poremećaj konstantan uticala na kvalitet estimaciju u prelaznom režimu.

#### 3.2 Linearno rasući poremećaj

Kako bismo mogli da estimiramo i poremećaje drugih oblika (rampa ili step), moramo prepostaviti da je model poremećaja opisan diferencijalnom jednačinom

$$\ddot{d} = 0.\tag{9}$$

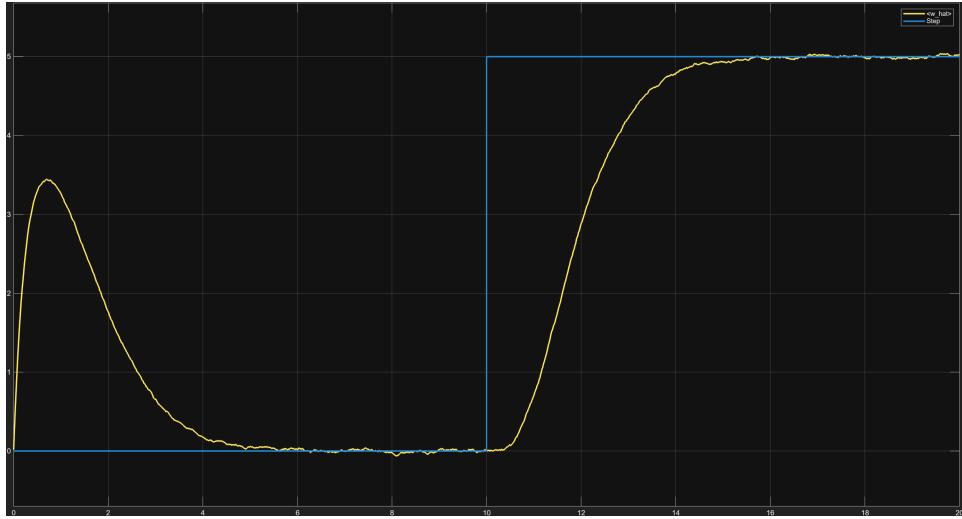


Figure 4: Estimacija poremećaja (žuto) i stvarna vrednost poremećaja (plavo) uz prepostavku da je poremećaj konstantan.

Uvođenjem dodatnih promenljivih  $w_1$  i  $w_2$  i primenom sličnog postupka kao i za slučaj konstatnog poremećaja dobijamo da su vrednosti matrica  $A_w$  i  $C_w$

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_w = [1 \ 0].$$

Uz prepostavku (9) zapravo možemo estimirati bilo koji poremećaj oblika  $d = at + b$ , što uključuje i konstantan poremećaj ( $a = 0$ ). Na slikama 5 i 6 su prikazane estimacije linearno rastućeg i sinusoidnog poremećaja. Možemo primetiti da esimacija sinusoidnog poremećaja nije dobra, odnosno da uvek postoji određena greška estimacije. Povećanjem frekvencije sinusoidnog poremećaja, dinamika estimatora nije u mogućnost da isprati promene velike frekvencije što dalje pogoršava grešku estimacije.

### 3.3 Prostoperiodičan poremećaj

Uz prepostavku da je model poremećaja dat u vidu prostoperiodičnog signala kao

$$\ddot{d} + \omega d(t) = 0, \quad (10)$$

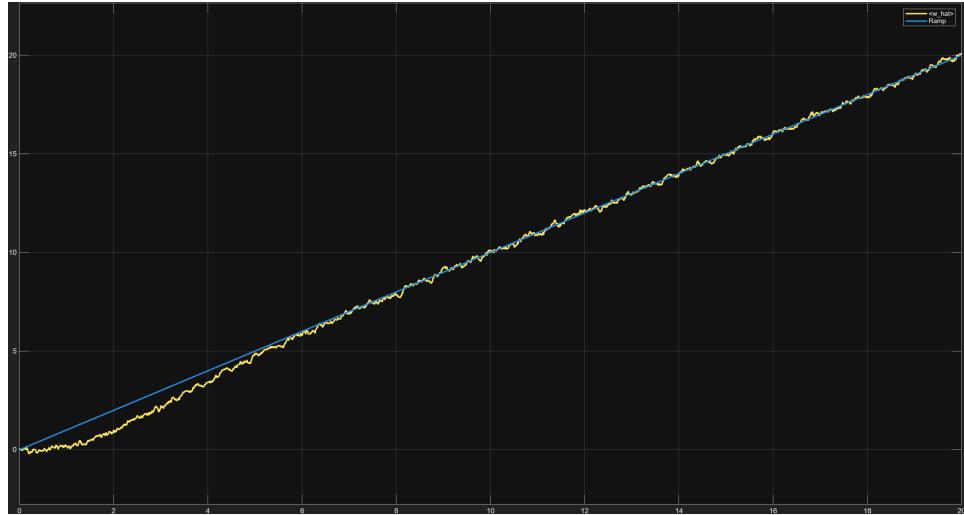


Figure 5: Estimacija linearnog poremećaja (žuto) i stvarna vrednost poremećaja (plavo) uz prepostavku da je poremećaj linearan.

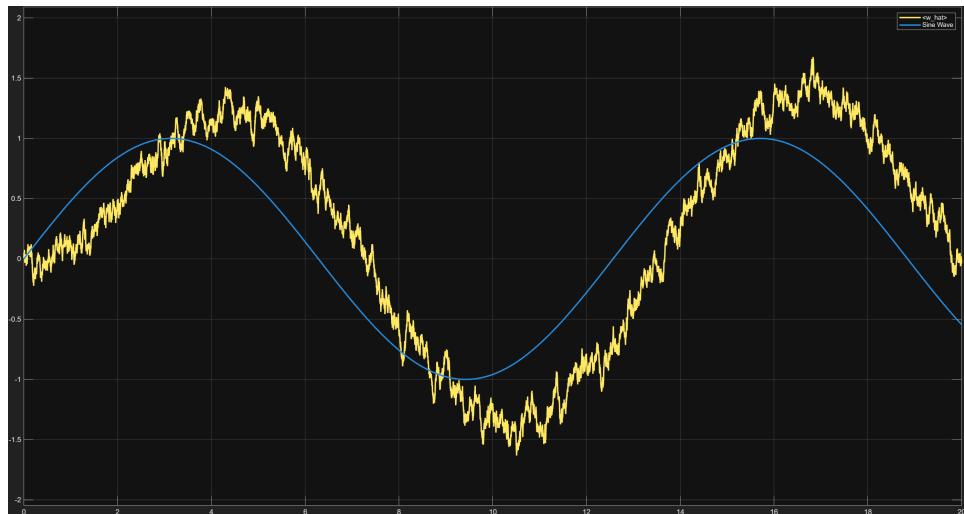


Figure 6: Estimacija sinusoidnog poremećaja (žuto) i stvarna vrednost poremećaja (plavo) uz prepostavku da je poremećaj linearan.

tada se, sменом променљивих, модел може записати као

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= w_2, \\ \dot{w}_2(t) &= -\omega^2 w_1 \\ d(t) &= w_1. \end{aligned} \tag{11}$$

U matričnom obliku možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\dot{w} &= A_w w, \\ d &= C_w w,\end{aligned}$$

gde su vrednosti matrice  $A_w$  i  $C_w$  date sa

$$\begin{aligned}A_w &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} i \\ C_w &= [1 \quad 0]\end{aligned}$$

U zavisnosti od položaja polova estimator može biti u sposobnosti da prati prostoperiodični poremećaj. Poremećaji viših frekvencija zahtevaju negativnije polove kako bi dinamika estimatorsa mogla da ih isprati. S tim da se nameće ograničenje u vidu propusnog opsega, ukoliko je šum merene veličine prisutan.