Optimalno, nelinearno i napredno upravljanje - Domaći 1

Željana Bilbija, Predrag Nuždić, Aleksa Rančić

February 7, 2026

1 Sistem

Funkcija prenosa sistema je data izrazom

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}. \tag{1}$$

Sistem (1) se u prostoru stanja može predstaviti kao

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -3x_3 - 3x_2 - x_1 + u, \end{aligned} \tag{2}$$

odnosno u matričnom obliku

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3}$$

gde su matrice A i B definisane sa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} i$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2 Regulator po stanjima

Zadatak je projektovati kontinualni i diskretni regulator po stanjima za sistem (1) odnosno (3) koji je u stanju da kompenzuje konstantan poremećaj d upravljačkog signala .

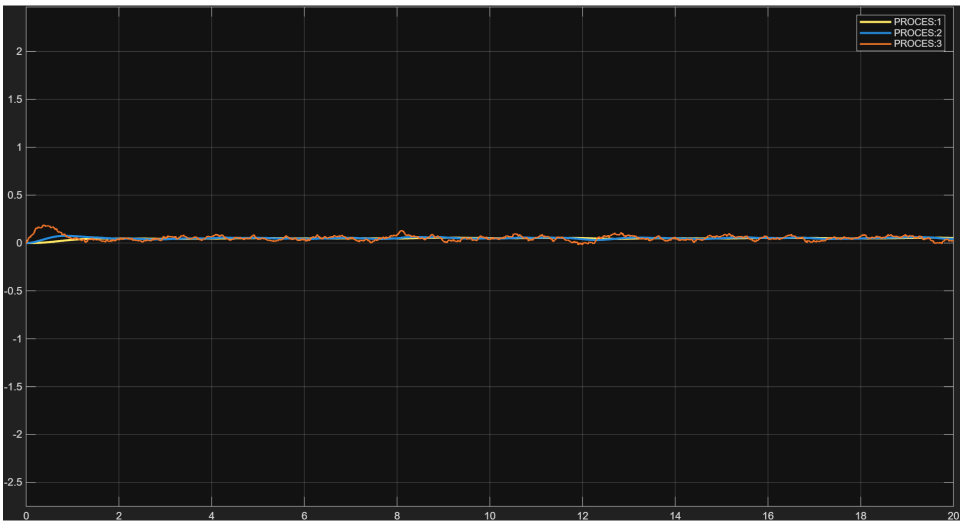
2.1 Uticaj položaja polova na pojačanje regulatora

Povećanjem brzine odziva (izborom negativnijih polova) možemo primetiti da dobijamo veća pojačnja u matrici pojačanja **K**, kao što je prikazano u tabeli 1. Pojačanja **K** su dobijena Akerman metodom.

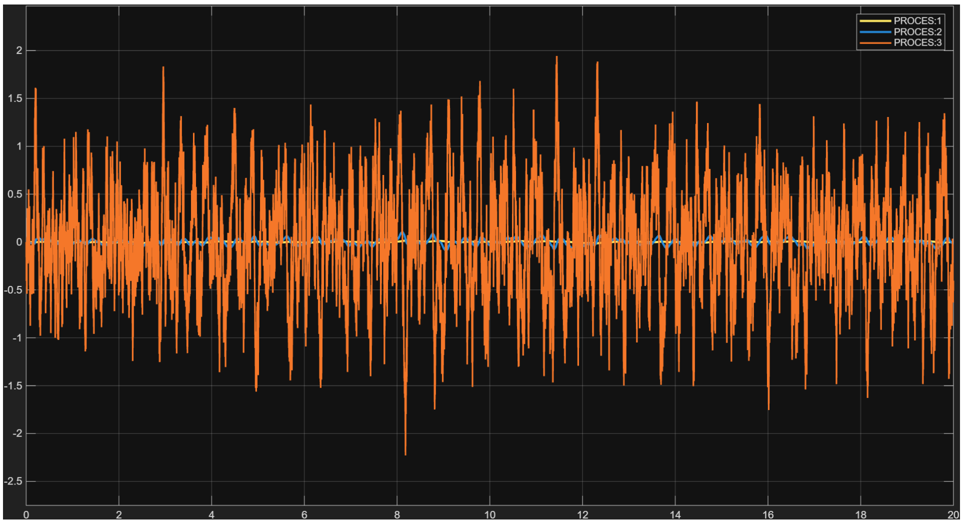
p	**K**
-10	[999 297 27]
-5	[124 72 12]
-1	[0 0 0]
-0.1	[-0.999 -2.97 -2.7]

Table 1: Pojčanja regulatora u zavisnosti od položaja trostrukog pola u zatvorenoj povratnoj sprezi.

Možemo primetiti da ukoliko su željeni polovi isti kao i u sistemu (1) pojačanje će biti jednako nuli, odnosno nema potrebe za regulacijom sistema. Kako se šum merenja pojavljuje u izrazima koje matrica pojačanja **K** množi, postavljanje negativnijh polova uticaj mernog šuma raste (pojačavamo šum). Uticaj šuma je prikazan na slikama 1 i 2
Ukoliko su polovi po apsolutnoj vrednosti manji od inicjalnih polova sistema, pojačanje će biti negativno.



Slika 1: Sopstveni odziv sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi za $p = -2$



Slika 2: Sopstveni odziv sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi za $p = -10$

2.2 Postavljanje polova na osnovu željenih performansi sistema

Željene performanse sistema su izražene kroz vreme smirenja T_s i oscilatornost ξ.
Željeni dominatni polovi u zatvorenoj povratnoj sprezi p_1 i p_2 su dati izrazima

$$p_1 = -\omega_0\xi + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \; i$$
$$p_2 = -\omega_0\xi - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2},$$

gde je ω_0 neprigušena kružna učestanost sistema. Na osnovu vremenske konstane sistema $\tau = \frac{1}{\xi\omega_0}$ odnosno datog vremena smirenja možemo izračunati neophodnu neprigušenu kružnu učestanost za date uslove uz pomoć izraza

$$\omega_0 = 5\frac{1}{\xi T_s}. \tag{4}$$

U izrazu (4) korišćena je veza $T_s = [3-5]\tau$. Dakle, izraz za polove sistema postaje

$$p_1 = -\frac{5}{T_s} + j5\frac{1}{\xi T_s}\sqrt{1-\xi^2} \; i$$
$$p_2 = -\frac{5}{T_s} - j5\frac{1}{\xi T_s}\sqrt{1-\xi^2}.$$

Sada realni deo polova zavisi isključivo od zadatog vremena smirenja, što omogućava proizvoljno podešavanje brzine odziva. Veća vrednost T_s približava sistem granici stabilnosti, dok za manje vrednosti vremena smirenja sistem

je dalji od granice stabilnosti. Kao što ćemo videti i u slučaju izbora pojačanja, pojavljuju se suprostavljajući zahtevi brzine odziva i propusnog opsega sistema.
Ukoliko na ovaj način podešavamo polove sistema treba obratiti pažnju da se polovi višeg reda (treći pol u ovom slučaju) postavljaju dovoljno daleko od konjugovanog para. Naime, koliko je dobra aproksimacija zavisi isključivo od frekvencije ulaznog signala, zbog toga što se sistemi ponašaju slično do određene frekvencije u zavisnosti od položaja polova višeg reda. U našem slučaju $p_3 = -15$.

Pre analize greške u ustaljenom stanju u zavisnosti od vrednosti referentnog signala i signala poremećaja upravljanja, neophodno je da vidimo šta se dešava sa izlaznom veličinom $x_1 = y$ u ustaljenom stanju. Ukoliko je upravljanje oblika

$$u = -\mathbf{K}x + NR_0 r,$$

tada izraz za izlaz sistema (2) se može zapisati kao

$$Y(s) = C(sI - A + BK)^{-1}(NR(s) + D(s)) \tag{5}$$

gde je $D(s)$ poremećaj upravljačkog signala. Daljim sređivanjem dobijamo

$$Y(s) = \frac{1}{s^3 + (1+k_3)s^2 + (1+k_2)s + (1+k_1)}(NR_0R(s) + D(s)). \tag{6}$$

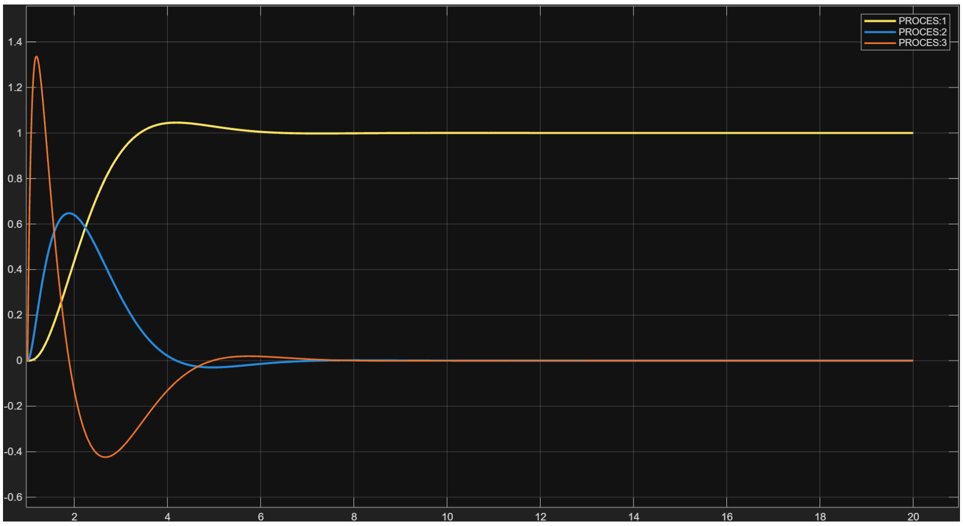
Upotrebom druge granične teoreme možemo dobiti izraz za izlaz sistema u ustaljenom stanju

$$Yss = \lim_{s \longrightarrow 0} sY(s) = R_0\frac{N}{1+k_1} + \frac{D_0}{1+k_1}. \tag{7}$$

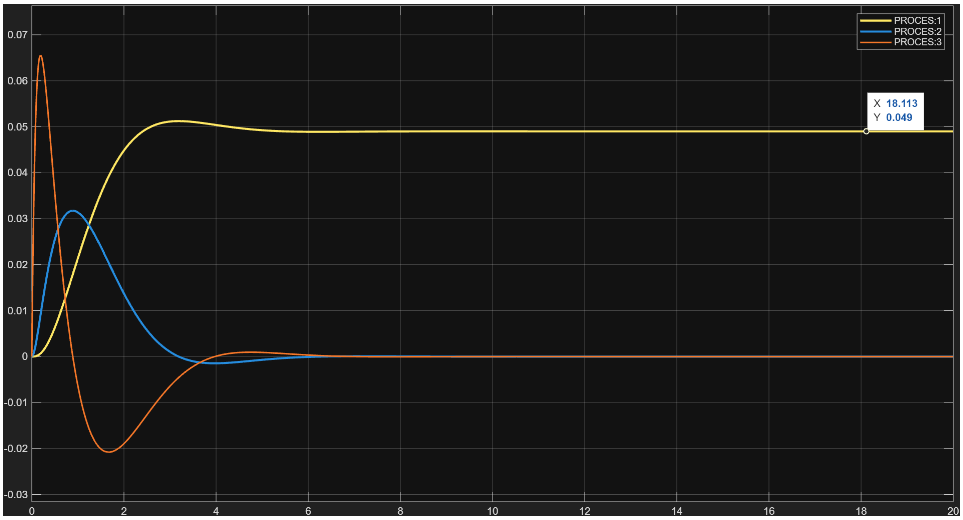
Postavljanjem $N = 1 + k_1$ dobijamo sledeći izraz za vrednost signala

$$Yss = R_0 + \frac{D_0}{1+k_1}. \tag{8}$$

Možemo primetiti da u zavisnosti od k_1 dobijamo različite vrednosti za izlazni signal. Naime, ukoliko je k_1 mnogo veće od 1 odnosno teži beskonačnosti, greška odnosno razlika $e = R_0 - y$ teži 0. Ukoliko je k_1 konačan broj, dobijamo grešku $e = \frac{D_0}{1+k_1}$.



Slika 3: Odziv sistema (1) sa ulaznim signalom $u = -Kx + NR_0r$ i poremećajem D. $r(t) = 1$ i $d(t) = 0$.



Slika 4: Odziv sistema (1) sa ulaznim signalom $u = -Kx + NR_0r$ i poremećajem D. $r(t) = 0$ i $d(t) = 1$. Možemo primetiti da se sistem ustali na vrednost $\frac{1}{1+k_1} = 0.049$

Dakle, povećanjem pojačanja k_1 (zahtevanjem negativnijih polova odnosno bržeg odziva) dobijamo manju grešku u ustaljenom stanju pri delovanju poremećaja, dok ukoliko on ne postoji, dobrim izborom N sistem je sposoban da prati referencu (step) bez greške. Nasuprot ovom zahtevu moramo paziti i na širinu propusnog opsega koji se širi postavljanjem negativnijih polova. *Implementiran je i kontinualni i diskrenti regulator, ali proces diskretizacije* *ne menja stvari puno. S obzirom na vreme odabiranja $T = 0.001s$ i vrednost vremenske konstante sistema $\tau = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{5}\xi T_s$, izbrom dovoljno velike vremenske konstante odnosno vremena smirenja kontinualni i diskretni regulator se ponašanju isto. Ukoliko uzmemo da $\xi = 0.7$ i $T_s = 10s$ dobijamo da je vremenska konstanta $\frac{\tau}{T} = 1400$ puta veća od vremena odabiranja. Sistem ovo "vidi" kao kontinualni regulator.*

2.3 Saturacija izvršnog organa

Ukoliko postoji saturacija izvršnog organa nije moguće pratiti reference veće vrednosti od maksimalne vrednosti upravljanja odnosno važi $|R_0|^3 < u_{max}$ uz $d(t) = 0$. Kako iz izraza (7) vidimo, u ustaljenom stanju, važi da $u = R_0$ ukoliko uzmemo da je $N = 1 + k_1$. Dakle, ubacivanjem u nejednakost $-u_{max} < u < u_{max}$ dobijamo izraz

$$-u_{max} \leq R_0^3 \leq u_{max}. \tag{9}$$

Ukoliko poremećaj postoji tada je izbor referentne vrednosti ograničen sa $-u_{max} + D_0 \leq R_0^3 \leq u_{max} + D_0$.