

Optimalno, nelinearno i napredno upravljanje - Domaći 3

Željana Bilbija, Predrag Nuždić, Aleksa Rančić

February 4, 2026

1 Sistem

Funkcija prenosa sistema je data izrazom

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}. \quad (1)$$

Sistem (1) se u prostoru stanja može predstaviti kao

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -3x_3 - 3x_2 - x_1 + u, \end{aligned} \quad (2)$$

odnosno u matričnom obliku

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3)$$

gde su matrice A i B definisane sa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2 Estimator stanja

Estimator stanja je implementiran pomoću sistema diferencijalnih jednačina definisanih sa

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \quad (4)$$

gde su \hat{x} , \hat{y} i matrica L estimirane vrednosti stanja, estimirane vrednosti izlaza i matrica pojačanja, respektivno. Sređivanjem (4) dobijamo konačni matrični oblik sistema kao

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + \begin{bmatrix} B & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Na osnovu (5) možemo videti da izborom matrice L podešavamo svojstvene vrednosti matrice dinamike sistema, samim tim i polove sistema. Podešavanje polova možemo izvršiti upotrebom Akerman metode (ukoliko stavimo da su ulazne matrice A^T i C^T).

p	L
-20	[57, 1026, 4750]
-10	[27, 216, 270]
-2	[3, 0 -2]

Table 1: Vrednosti matrice L za različite vrednosti trostrukog pola p .

Možemo primetiti da izborom negativnijh polova povećavamo pojačanje matrice L . Kao posledica ovoga, šum merenja se pojačava više. Takođe, uticaj velikog pojačanja možemo videti kroz veliku grešku u estimaciji ukoliko se početni uslovi (estimirani početni uslovi i stvarni početni uslovi sistema) dovoljno razlikuju. Uticaj šuma, kao i greška estimacije zbog početnih uslova su prikazani na slikama 1, 2 i 3.

Na slikama 2 i 3 se posebno može primetiti uticaj velikog pojačanja na inicijalnu grešku estimacije.

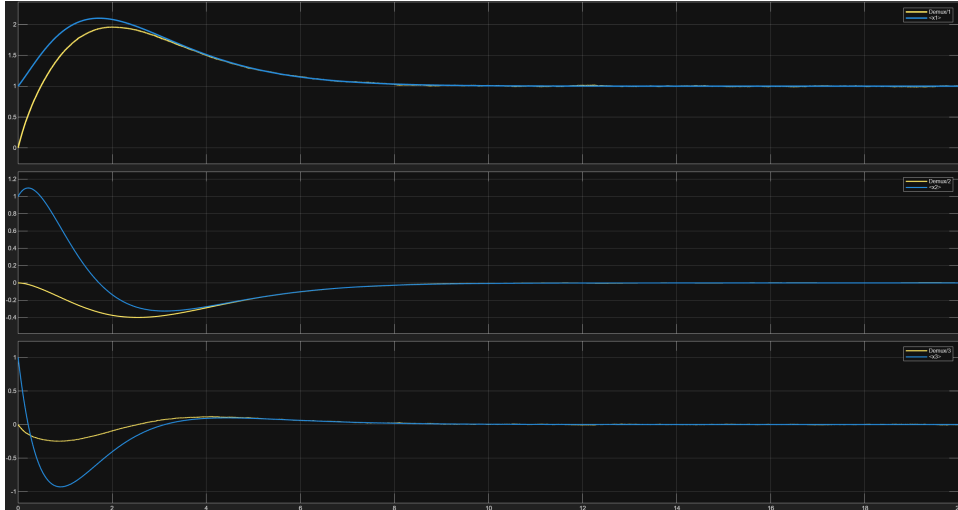


Figure 1: Estimira stanja (žuto) i stvarna stanja (plavo) za $p = -2$.

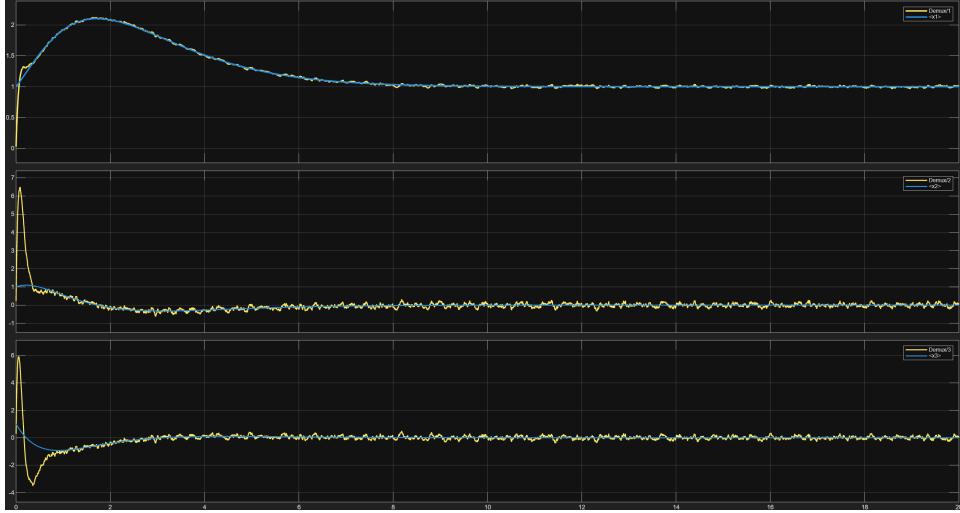


Figure 2: Estimira stanja (žuto) i stvarna stanja (plavo) za $p = -10$.

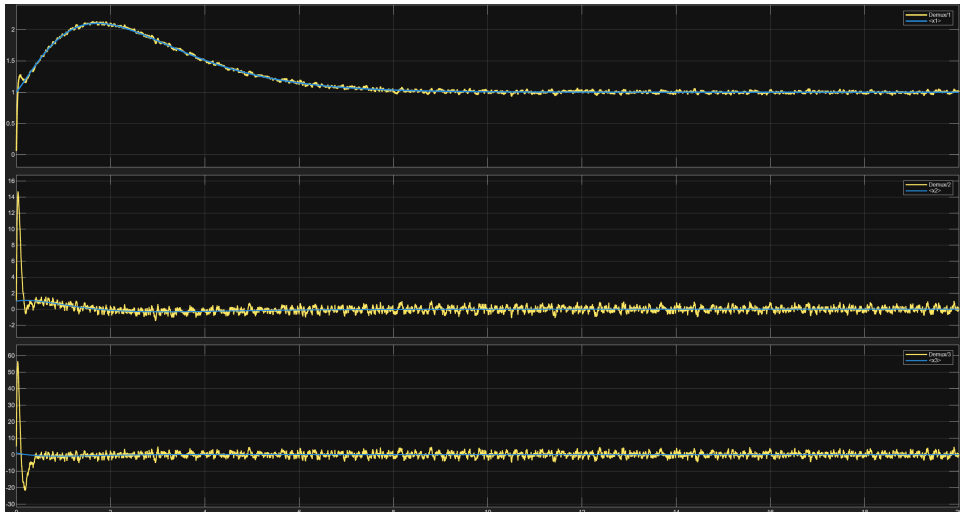


Figure 3: Estimira stanja (žuto) i stvarna stanja (plavo) za $p = -20$.

Naravno, izborom negativnijih polova odnosno većim pojačanjem matrice L dobijamo i brži odziv estimatora, ali to dolazi sa cenom povećanja propusnog opsega. Kako je estimator napravljen da prati model, dodavanjem poremećaja upravljačkog signala koji nije modelovan, dobijamo grešku u estimaciji.

3 Estimator poremećaja

Dodavanjem virtuelnog modela poremećaja možemo estimirati poremećaj, ukoliko pretpostavimo njegovo ponašanje.

3.1 Konstantan poremećaj

Model konstatnog poremećaja možemo zapisati u obliku diferencijalne jednačine kao

$$\dot{d} = 0,$$

gde je $d(t)$ poremećaj koji se superponira sa upravljačkim signalom u . Zamenom, $w(t) = d(t)$ i pridruživanje modelu (3) dobijamo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(u(t) + C_w w(t)), \\ \dot{w} &= A_w w(t),\end{aligned}\tag{6}$$

gde su A_w i C_w matrica dinamike i matrica izlaza poremećaja. Ukoliko primenimo sličan postupak kao pri projektovanju estimatora stanja dobijamo sledeći estimator

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B(u + C_w \hat{w}) + L_1(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{w}} &= A_w \hat{w} + L_2(y - \hat{y}).\end{aligned}\tag{7}$$

Kako nam je model poremećaja dat sa $\dot{d} = 0$ matrice A_w i C_w imaju vrednosti

$$\begin{aligned}A_w &= 0, \\ C_w &= 1,\end{aligned}$$

odnosno celokupni model postaje

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B(u + \hat{w}) + L_1(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{w}} &= L_2(y - \hat{y}).\end{aligned}\tag{8}$$

Na slici 4 je prikazana estimirana i stvarana vrednost poremećaja. Možemo primetiti da pretpostavka da je poremećaj konstantan uticala na kvalitet estimaciju u prelaznom režimu.

3.2 Linearno rasući poremećaj

Kako bismo mogli da estimiramo i poremećaje drugih oblika (rampa ili step), moramo pretpostaviti da je model poremećaja opisan diferencijalnom jednačinom

$$\ddot{d} = 0.\tag{9}$$

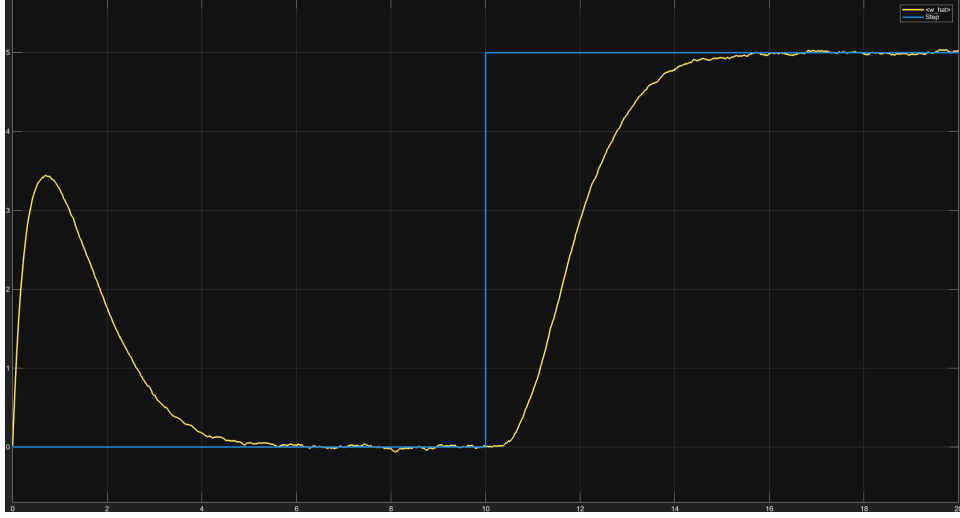


Figure 4: Estimacija poremećaja (žuto) i stvarna vrednost poremećaja (plavo) uz pretpostavku da je poremećaj konstantan.

Uvođenjem dodatnih promenljivih w_1 i w_2 i primenom sličnog postupka kao i za slučaj konstatnog poremećaja dobijamo da su vrednosti matrica A_w i C_w

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uz pretpostavku (9) zapravo možemo estimirati bilo koji poremećaj oblika $d = at + b$, što uključuje i konstantan poremećaj ($a = 0$). Na slikama 5 i 6 su prikazane estimacije linearno rastućeg i sinusoidnog poremećaja. Možemo primetiti da esimaticija sinusoidnog poremećaja nije dobra, odnosno da uvek postoji određena greška estimacije. Povećanjem frekvencije sinusoidnog poremećaja, dinamika estimatora nije u mogućnost da isprati promene velike frekvencije što dalje pogoršava grešku estimacije.

3.3 Prostoperiodičan poremećaj

Uz pretpostavku da je model poremećaja dat u vidu prostoperiodničnog signala kao

$$\ddot{d} + \omega d(t) = 0, \tag{10}$$

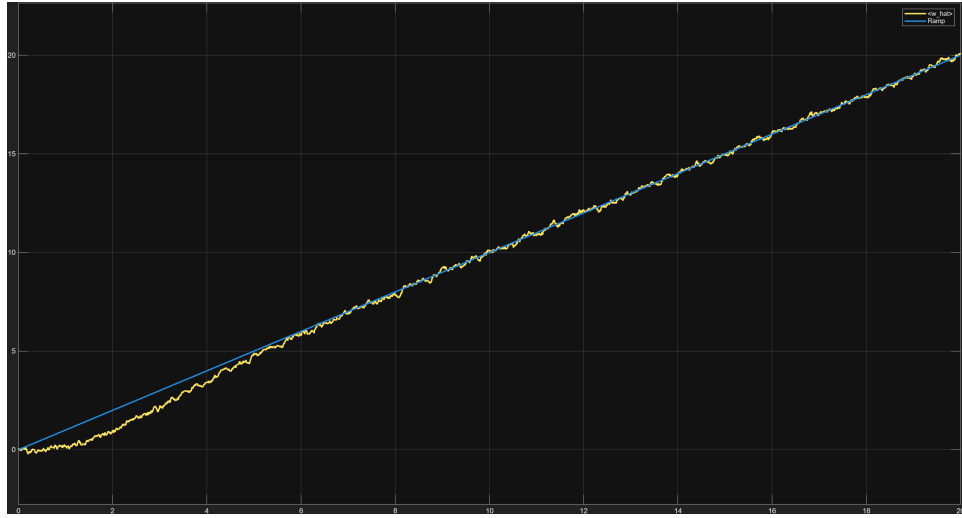


Figure 5: Estimacija linearnog poremećaja (žuto) i stvarna vrednost poremećaja (plavo) uz pretpostavku da je poremećaj linearan.

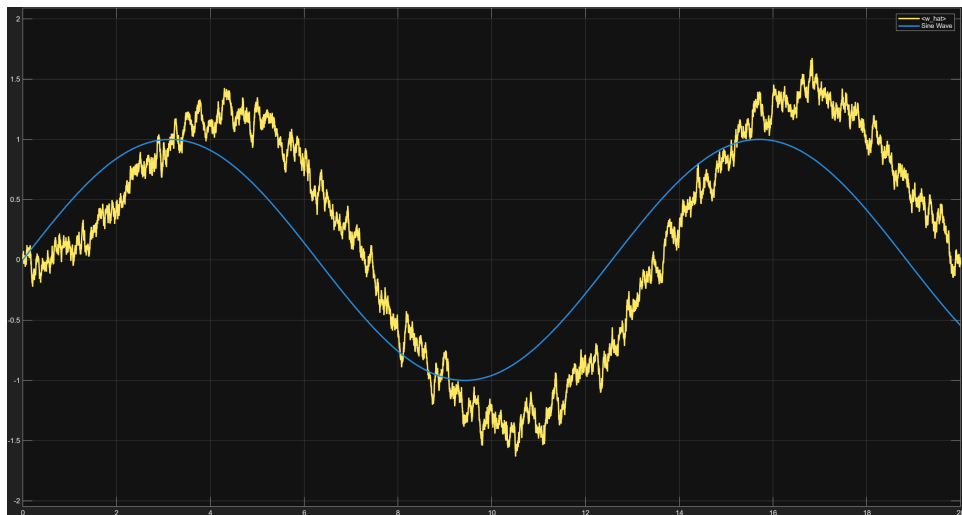


Figure 6: Estimacija sinusoidnog poremećaja (žuto) i stvarna vrednost poremećaja (plavo) uz pretpostavku da je poremećaj linearan.

tada se, smenom promenljivih, model može zapisati kao

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_1(t) &= w_2, \\
 \dot{w}_2(t) &= -\omega^2 w_1 \\
 d(t) &= w_1.
 \end{aligned} \tag{11}$$

U matričnom obliku možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\dot{w} &= A_w w, \\ d &= C_w w,\end{aligned}$$

gde su vrednosti matrice A_w i C_w date sa

$$\begin{aligned}A_w &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} i \\ C_w &= [1 \quad 0]\end{aligned}$$

U zavisnosti od položaja polova estimator može biti u sposobnosti da prati prostoperiodični poremećaj. Poremećaji viših frekvencija zahtevaju negativnije polove kako bi dinamika estimatora mogla da ih isprati. S tim da se nameće ograničenje u vidu propusnog opsega, ukoliko je šum merene veličine prisutan.