Министерство науки и высшего образования
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**О.Л. КРИЦКИЙ**

# СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Издательство
Томского политехнического университета

2023

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73
В937

**Крицкий О.Л.**
Стохастические дифференциальные уравнения: монография /
К14 О.Л. Крицкий; Томский политехнический университет. – 1-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2023. – 133 с.

В монографии рассматриваются вопросы, связанные с развитием теории стохастических дифференциальных уравнений и с применением этой теории при построении моделей финансовой математики. Подробно обсуждаются вопросы связи таких дифференциальных уравнений с уравнениями в частных производных параболического типа, рассматриваются модели Блэка – Шоулса, стохастической волатильности, постоянной эластичности дисперсии, выводятся уравнения Фоккера – Планка и Беллмана. Подробно обсуждаются модели стохастической процентной ставки, модели цен облигаций кредитного риска и справедливой стоимости опционов.
Монография содержит теоретический материал в объёме, предусмотренном действующей программой направления подготовки «Прикладная математика и информатика» классических и технических университетов.
Монография может быть полезна студентам старших курсов бакалавриата, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области прикладной и финансовой математики, математической физики, а так же специалистам различного профиля (финансистам и экономистам, физикам, математикам и др.), сталкивающимся в своей деятельности с необходимостью поиска решения стохастических дифференциальных уравнений или с определением характера поведения математических моделей, их содержащих.

**УДК 51 (075.8)**
**ББК 22.1я73**

*Рецензент*
Доктор технических наук, профессор ТУСУР
*Мицель А.А.*

## СОДЕРЖАНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

Статистические задачи занимают значительно место в матеметике, физике, экономике, особенно в случае необходимости учета флуктуационные эффекты. Наибольшую популярность и простоту имеют стохастические процессы, построенные на основе теории марковских случайных процессов диффузионного типа, а так же процессы, флуктуирующие параметры которых являются гауссовыми случайными величинами.

Цель данного курса – показать взаимосвязь финансовой математики и теории стохастических процессов – как различные задачи, описываемые стохастическими уравнениями, могут быть решены при помощи общего подхода, известного в уравнениях математической физики.

*Определение*: пусть $G$ – некоторое множество, содержащее все подмножества множества $\Omega$, т.е. $G=2^{\Omega}$. Если

1. $\forall k \in G, \forall A_k \in G$ следует, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in G$,
2. $\forall k \in G, \forall A_k \in G$ следует, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in G$,
3. $\Omega \in G$,
4. Если $A \in G$, то и $\bar{A} \in G$.

При выполнении свойств 1) – 4) $G$ называют $\sigma$ – алгеброй пространства событий $\Omega$.

*Определение*: вероятностью $P$ называют отображение $P : G \to [0,1]$, что

1. $\forall A \in G \;\; P(A) \geq 0$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$, причем $A_k \in G$ попарно не пересекаются друг с другом.

При выполнении свойства 3) говорят о $\sigma$–аддитивности вероятности. Если справедливо равенство $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$, то принято говорить только об аддитивности вероятности.

*Определение*: тройка $(\Omega, G, P)$ называется вероятностным пространством.

*Определение*: случайной величиной называется функция $\xi : \Omega \to \Re^n$, отображающая вероятностное пространство в одномерное евклидово пространство.

*Определение*: случайным процессом называется отображение $\xi : T \times \Omega \to \Re$, если для каждого момента времени $t$ она представляет собой случайную величину.

*Определение*: пусть $\Omega$ – вероятностное пространство, $\omega_0 \in \Omega$ – фиксированное элементарное событие. Пусть $\xi(t,\omega)$ – случайный процесс. Детерминированная функция $\xi(t,\omega_0) \equiv \xi(t)$ называется реализацией (выборочной функцией), соответствующей элементарному событию $\omega_0 \in \Omega$.

В соответствии с данным определением случайный процесс можно трактовать как совокупность сечений или пучок траекторий.

*Определение*: пусть $\xi(t,\omega), \eta(t,\omega)$ – два случайных процесса. Они называются стохастически эквивалентными на *T*, если вероятность их отклонений в любой момент времени $t \in T$ равна нулю:

$$P(\omega \in \Omega,\ \xi(t,\omega) \neq \eta(t,\omega)) = 0 .$$

## СХОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОМ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ.

*Определение*: пусть $\xi_n, \xi : T \times \Omega \to R$ случайные процессы. Говорят, что $\xi_n$ сходится по вероятности к $\xi$ на интервале *T*, если $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$ в каждый фиксированный момент времени *t*.

*Определение*: пусть $\xi_n, \xi : T \times \Omega \to R$ случайные процессы. Говорят, что $\xi_n$ сходится к $\xi$ почти наверное (п.н.), если $P(\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi) = 1$ в каждый фиксированный момент времени *t*.

*Определение*: пусть $X_n, X : T \times \Omega \to R$ – случайные процессы. Говорят, что $X_n$ сходится к *X* в среднем порядка *p*>0, если $\lim\limits_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0$.

*Определение*: пусть $\xi_n, \xi : T \times \Omega \to R$ случайные процессы. Говорят, что $\xi_n$ сходится к $\xi$ в среднеквадратичном, если $\lim\limits_{n\to\infty} E((\xi_n - \xi)^2) = 0$ при условии $E[\xi_n^2] < \infty$.

*Определение* (см., например, [6,13,15]): пусть $X_n, X : T \times \Omega \to R$ случайные процессы. Говорят, что $X_n$ сходится к *X* по распределению, если $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, где $F_n(x), F(x)$ – соответствующие функции распределения для $X_n$ и *X*.

Можно показать (см. [19]), что выполнены следующие соотношения между данными определениями:

1) сходимость п.н. $\Rightarrow$ сходимость по вероятности. Обратное неверно.
2) сходимость п.н. т.и.т.т, когда $\forall \varepsilon > 0 \ \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\sup\limits_{m\geq n} |X_m - X_n| \geq \varepsilon\right) = 0$.
3) сходимость в среднем порядка p $\Rightarrow$ сходимость по вероятности. Обратное неверно.
4) если есть сходимость в среднем порядка p, то справедлива сходимость порядка (*p*-1), (*p*-2),…,1.

В теории курса наиболее важным является сходимость в среднеквадратичном, поэтому остановимся на ней более подробно. Докажем справедливость утверждения следующей леммы.

***Лемма*:** пусть $X_n \to X$ в среднеквадратичном. Тогда $X_n \to X$ по вероятности.

*Доказательство*: Так как последовательность $X_n \to X$ в среднеквадратичном, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N(\varepsilon)\ E\left((X_n - X)^2\right) < \varepsilon$, или, что т.ж. самое, $\frac{1}{\varepsilon^2}\ E\left[(X_n - X)^2\right] < \frac{1}{\varepsilon}$. Пользуясь неравенством Чебышева $\frac{1}{\varepsilon^2}\ E\left[x^2\right] > P\{|x| > \varepsilon\}$, при $x = X_n - X$ получаем:

$$\frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon^2}\ E\left[(X_n - X)^2\right] > P\{|X_n - X| > \varepsilon\},$$

причем оно справедливо для любого $\varepsilon$>0. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon^{-1}$. Тогда $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N(\varepsilon_1)$ (тот же номер, что и выше), что $\forall n \geq N(\varepsilon)\ P\{|X_n - X| > \varepsilon\} < \varepsilon_1$. Последнее означает, что $X_n \to X$ по вероятности в т. $t$=$t_0$, ч.т.д.

### *Свойства сходимости в среднеквадратичном*

**Теорема А.** пусть $X_n$ – последовательность СП.

$E|X_n - X_m|^2 \to 0 \Leftrightarrow$ когда существует процесс $X = X(t)$, что $E|X_n - X|^2 \to 0$ при $n \to \infty$.

**Теорема В.** пусть $X_n$ – последовательность СП. Если $E|X_n - X|^2 \to 0$ при $n \to \infty$, то $E|X_n|^2 \to E|X|^2$, $E|X_n| \to E|X|$.

**Теорема С.** пусть $X_n, Y_n$ – две последовательности СП. Тогда $E|X_n Y_n| \to E|XY|$ при $n \to \infty$.

**Теорема D.** пусть $X_n$ – последовательность СП. $X_n \to X$ при $n \to \infty$ в среднеквадратичном $\Leftrightarrow$ когда $E|X_n X_m| \to a \in R$, $a$=const, при $n, m \to \infty$.

Доказательство:

**Достаточность**: рассмотрим $E|X_n - X_m|^2 =$(раскрываем скобки)$= E|X_n|^2 - 2E|X_n X_m| + E|X_m|^2$. Так как $E|X_n X_m| \to a$ для любых $n$, $m$, то при $n$=$m$ $E|X_n|^2 \to a$, $E|X_m|^2 \to a$. Следовательно, $E|X_n - X_m|^2 = a^2 - 2a^2 + a^2 = 0$. Тогда по теореме 1.2.1 следует, что $E|X_n - X|^2 \to 0$ при $n \to \infty$.

**Необходимость**: пусть имеет место сходимость в среднеквадратичном: $E|X_n - X|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим $\lim\limits_{m,n\to\infty} E(X_n X_m) =$(так как $m$=$n$) $= \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n\, X_n) = \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)^2$ (так как из сходимости в с.к. ($p$=2) следует сходимость в среднем ($p$=1))$= E(X)^2 = E(X \cdot X)$=const (эту константу обозначим через $a$), ч.т.д.

### *Ковариационная функция*

Ковариационная функция играет важную роль при выявлении характера поведения случайного процесса.

*Определение*: ковариационной функцией случайного процесса $X: T \times \Omega \to R$ называется функция $A_X(s,t) = E(X_s X_t)$.

*Определение*: пусть $X_t, Y_t: T \times \Omega \to R$ – два случайных процесса, причем $E(X_t^2) = E(Y_t^2) = 0$. Взаимной ковариационной функцией называется функция вида

$$A_{XY}(s,t) = \operatorname{cov}(X_s Y_t) = E(X_s Y_t).$$

### *Свойства ковариационных функций*

1. $A_X(s,t) = A_X(t,s)$

Доказательство очевидно.

2. $A_{XY}(s,t)=A_{YX}(t,s)$

Доказательство очевидно.

3. $A_{X+Y}(s,t)=A_X(s,t)+A_{XY}(s,t)+A_{YX}(s,t)+A_Y(s,t)$

Доказательство: по определению, $A_{X+Y}(s,t)=E(X_s+Y_s)(X_t+Y_t)=$ (раскрываем скобки)= $=E(X_sX_t+Y_sY_t+X_sY_t+X_tY_s)$ = (по введенным ранее обозначениям)= $A_X(s,t)+A_Y(s,t)+A_{XY}(s,t)+A_{YX}(s,t)$, ч.т.д.

4. Функция $A_X(s,t)$ является положительно определенной, т.е. для любого $n\geq 1$ для точек времени $t_1,t_2,...,t_n$ и для действительных чисел $a_1,a_2,...,a_n$ выполнено неравенство
$$\sum_{i,j=1}^{n} A_X(t_i,t_j)a_ia_j \geq 0$$

Доказательство: рассмотрим искусственное неравенство $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i a_i\right)^2 \geq 0$, которое справедливо, так как математическое ожидание неотрицательной СВ есть неотрицательное число. Тогда, раскрывая в нем скобки, получаем:
$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i a_i\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 a_i^2\right)+2E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j a_i a_j\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 E(X_i^2)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E(X_i X_j)=$ (так как по определению все вторые начальные моменты равны нулю, все первое слагаемое равно нулю)= $2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E(X_i X_j)=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j A_X(t_i,t_j)\geq 0$. Значит, $\sum_{i,j=1}^{n} A_X(t_i,t_j)a_ia_j \geq 0$, ч.т.д.

### *Непрерывность в среднеквадратичном*

*Определение*: пусть $X_t: T\times\Omega\to R$ случайный процесс. Говорят, что $X_t$ непрерывен в точке $t=t_0$ в среднеквадратичном (пишут: $\lim_{t\to t_0} E(X_t-X_{t_0})^2=0$), если $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall t\in T,\ |t-t_0|<\delta$ следует, что $E[X_t-X_{t_0}]^2<\varepsilon$, или, если $f(x)$ – функция плотности случайного процесса $X_t=X(t,\omega)$, $\left|\int_R (X(t,s)-X(t_0,s))^2 f(s)ds\right|<\varepsilon$.

Приведем примеры непрерывных в среднеквадратичном процессов.

**Примеры**:

1) пусть $X_t=\xi t$, где $\xi\sim N(0,1)$ – стандартная нормально распределенная СВ. Покажем, что $X_t=\xi t$ непрерывна в с.к.

Действительно, найдем значение $\lim_{t\to t_0} E(X_t-X_{t_0})^2=\lim_{t\to t_0} E(\xi t-\xi t_0)^2=\lim_{t\to t_0}(t-t_0)^2 E(\xi)^2=$ $=\lim_{t\to t_0}(t-t_0)^2=0$, т.е. $X_t=\xi t$ действительно непрерывна в с.к.

2) пусть теперь $X_t=\sin(\xi t)$, где $\xi\sim N(0,1)$. В этом случае
$$\lim_{t\to t_0} E(X_t-X_{t_0})^2=\lim_{t\to t_0} E(\sin\xi t-\sin\xi t_0)^2=\lim_{t\to t_0}\left[\int_R(\sin\xi t-\sin\xi t_0)^2\frac{\exp(-s^2/2)}{\sqrt{2\pi}}ds\right].$$
Воспользуется тем, что наибольшее значение функции $\exp(-s^2/2)$ на рассматриваемом промежутке равно единице. Тогда по теореме о среднем и по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$\lim\limits_{t\to t_0} E\left(X_t - X_{t_0}\right)^2 \le \lim\limits_{t\to t_0}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \left(\sin\xi t - \sin\xi t_0\right)^2 ds\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \lim\limits_{t\to t_0}\left(\sin\xi t - \sin\xi t_0\right)^2 ds =$ (в силу непрерывности функции синус)=0.

3) заметим, что $X_t = \dfrac{\xi}{t}$, очевидно, не является непрерывной в с.к. при $t \to 0$.

Действительно, $\lim\limits_{t\to t_0} E\left(X_t - X_{t_0}\right)^2 = \lim\limits_{t\to t_0}\left[\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t_0}\right]^2 E(\xi)^2 = \infty \ne 0$

Выявление непрерывности в с.к. случайного процесса $X_t$ тесно связано с непрерывностью его ковариационной функции. Докажем следующую теорему.

***Теорема E***: Случайный процесс $X_t$ непрерывен в с.к. в т. $t$=τ ⇔ когда ковариационная функция $A_X(s,t)$ непрерывна в обычном смысле в точках $s$=$t$=τ как функция двух переменных.

**Доказательство**: докажем сначала **достаточность.** Рассмотрим $\lim\limits_{h\to 0} E\left|X_{\tau+h} - X_\tau\right|^2 = \lim\limits_{h\to 0}\left[A_X(\tau+h,\tau+h) - A_X(\tau+h,\tau) - A_X(\tau,\tau+h) + A_X(\tau,\tau)\right] =$ (так как $A_X(s,t)$ непрерывна как функция двух переменных)= $A_X(\tau,\tau) - A_X(\tau,\tau) - A_X(\tau,\tau) + A_X(\tau,\tau)$=0. Последнее означает, что для моментов времени $t$=τ+$h$ и $t_0$=τ мы можем записать $\lim\limits_{t\to t_0} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 = 0$, что означает непрерывность в с.к. в точке τ по определению**.**

**Необходимость**: для доказательства необходимости воспользуемся неравенством Коши – Буняковского: $E(XY) \le \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$. Тогда

$\left|A_x(\tau+h,\tau+k) - A_x(\tau,\tau)\right| \le E\left(\left|X(\tau+h) - X(\tau)\right|\left|X(\tau+k) - X(\tau)\right|\right) +$

$+ E\left(\left|X(\tau+h) - X(\tau)\right|\left|X(\tau)\right|\right) + E\left(\left|X(\tau+k) - X(\tau)\right|\left|X(\tau)\right|\right) \le$(теперь применяем неравенство Коши-Буняковского) $\le \sqrt{E\left(\left|X(\tau+h) - X(\tau)\right|^2\right)E\left(\left|X(\tau+k) - X(\tau)\right|^2\right)} + \sqrt{E\left(\left|X(\tau+h) - X(\tau)\right|^2\right)E\left(\left|X(\tau)\right|^2\right)} +$

$+ \sqrt{E\left(\left|X(\tau+k) - X(\tau)\right|^2\right)E\left(\left|X(\tau)\right|^2\right)}$. При $h,k \to 0$ видим, что в каждом слагаемом есть сомножитель, который стремится к нулю в среднеквадратичном по условию теоремы: $\lim\limits_{h\to 0} E\left(X(\tau+h) - X(\tau)\right)^2 = \lim\limits_{k\to 0} E\left(X(\tau+k) - X(\tau)\right)^2 = 0$. Поэтому $\left|A_x(\tau+h,\tau+k) - A_x(\tau,\tau)\right| \to 0$ при $h,k \to 0$, что и означает непрерывность функции двух переменных $A_X(s,t)$ в точках $s$=$t$=τ.

**Замечание**: нетрудно проверить, что ковариационная функция $A_{XY}(s,t)$ задает скалярное произведение в пространстве случайных процессов $(X_s, Y_t) \equiv A_{XY}(s,t)$ и норму $\|X_s\| \equiv A_X(s,s) = E(X_s)^2$.

### *Дифференцирование в среднеквадратичном*

*Определение*: пусть $X: T\times\Omega \to R$ случайный процесс. Говорят, что $X_t$ дифференцируем в среднеквадратичном в точке $t$, если существует случайный процесс $X'_t$, что $\lim\limits_{h\to 0} E\left[\dfrac{\left(X(t+h) - X(t)\right)}{h}\right]^2 = E\left(X'_t\right)^2$.

***Теорема F***: процесс $X_t$ дифференцируем в т. $t$ в среднеквадратичном $\Leftrightarrow$ когда в т. $t$ существует смешанная производная $\frac{\partial^2 A_X(t,s)}{\partial t \partial s}(t,t)$, где $A_X(t,s)$ – ковариационная функция процесса $X_t$.

**Доказательство**: начнем с доказательства **достаточности**. Пусть существует $\frac{\partial^2 A_X(t,s)}{\partial t \partial s}(t,t)$. Это означает, что существует и конечен предел $\lim\limits_{h,k\to 0} \frac{1}{hk}\left[A_X(t+h,t+k) - A_X(t+h,t) - A_X(t,t+k) + A_X(t,t)\right]$. Так как $A_X(t+h,t+k) = E(X_{t+h}X_{t+k}); A_X(t+h,t) = E(X_{t+h}X_t); A_X(t,t+k) = E(X_t X_{t+k})$, то $E(X_{t+h} - X_t)(X_{t+k} - X_t) = E\left[X_{t+h}X_{t+k} - X_{t+h}X_t - X_{t+k}X_t + X_t X_t\right]$=(в силу приведенных выше равенств) $= A_X(t+h,t+k) - A_X(t+h,t) - A_X(t,t+k) + A_X(t,t)$. Поэтому

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{1}{hk}\left[A_X(t+h,t+k) - A_X(t+h,t) - A_X(t,t+k) + A_X(t,t)\right] = \lim_{h,k\to 0} \frac{1}{hk} E(X_{t+h} - X_t)(X_{t+k} - X_t) =$$

$= \lim\limits_{h,k\to 0} E\frac{(X_{t+h} - X_t)}{h}\frac{(X_{t+k} - X_t)}{k}$, причем последний предел существует по условию теоремы. Так как в этом пределе *h, k* равноправны, положим их равными друг другу.

Итак, существует предел

$\frac{\partial^2 A_X(t,s)}{\partial t \partial s}(t,t) = \lim\limits_{h\to 0} E\left[\frac{(X_{t+h} - X_t)}{h}\right]^2$, что гарантирует существование производной, для которой $E(X_t')^2 = \lim\limits_{h\to 0} E\left[\frac{(X(t+h) - X(t))}{h}\right]^2$.

**Необходимость**: пусть СП $X_t$ дифференцируем в с.к. в точке *t*, т.е. существует предел $\lim\limits_{h\to 0} E\left[\frac{(X(t+h) - X(t))}{h}\right]^2 = E(X_t')^2$. Воспользуемся идеей доказательства достаточности т. 1.2.5:

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h^2} E\left|X_{\tau+h} - X_\tau\right|^2 = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left[A_X(t+h,t+h) - A_X(t+h,t) - A_X(t,t+h) + A_X(t,t)\right]$=(заменяем одно *h* на *k*, так как они равноправны)= $\lim\limits_{h,k\to 0} \frac{1}{hk}\left[A_X(t+h,t+k) - A_X(t+h,t) - A_X(t,t+k) + A_X(t,t)\right]$ =(по определению смешанной производной)= $\frac{\partial^2 A_X(t,s)}{\partial t \partial s}(t,t)$, ч.т.д.

***Теорема H***: пусть в каждый момент времени *t* существует производная $\frac{\partial^2 A(t,s)}{\partial t \partial s}$. Тогда справедливы следующие равенства:

1) $\frac{\partial A_X(t,s)}{\partial t} = E(X_t' X_s)$, 2) $\frac{\partial^2 A_X(t,s)}{\partial t \partial s} = E(X_t' X_s') = A_{X'}(t,s)$ (последнее равенство следует по определению ковариационной функции).

*Доказательство*: действительно,

$$\frac{\partial A_X}{\partial t}=\lim_{h\to 0}\frac{A_X(t+h,s)-A_X(t,s)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E\left(X_{t+h}X_s-X_tX_s\right)=\text{(выносим } X_s\text{)}=$$

$$\lim_{h\to 0}E\left(X_s\,\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\right)=E\left[X_s\lim_{h\to 0}\left(\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\right)\right]=E\left(X_sX_t'\right).$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 A_X(t,s)}{\partial t\,\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_X(t,s)}{\partial s}\right)=\text{(по доказанному)}=$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(E\left(X_tX_s'\right)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{E\left(X_{t+h}X_s'\right)-E\left(X_tX_s'\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{E\left(X_{t+h}X_s'-X_tX_s'\right)}{h}=\lim_{h\to 0}E\left[X_s'\,\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\right]=$$

$$=E\left[X_s'\lim_{h\to 0}\left(\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\right)\right]=E\left(X_s'X_t'\right)=A_{X'}(t,s),\ \text{ч.т.д.}$$

## ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Винеровский процесс является наиболее простым и изученным среди случайных процессов. Его широкие применения в экономической теории, в теории фракталов, в финансовой математике обусловливают повышенный теоретический интерес к его свойствам. В основе винеровского процесса лежат так называемые марковские процессы, когда вероятность занять системой определенное местоположение в заданном диапазоне в будущий момент времени однозначно определяется только текущими ее координатами и не зависит от прошлых состояний. В соответствии с этим допущением можно получить следующее определение:

*Определение*: винеровским процессом $W_t=W(t,\omega)$ называют случайный процесс, для которого выполнены следующие аксиомы:

1) для любого разбиения временного интервала $[0,T]$ точками $0=t_0<t_1<t_2\ldots<t_{n-1}<t_n=T$ приращения $W(t_1)-W(t_0)$, $W(t_2)-W(t_1)$, $W(t_3)-W(t_2)$, ..., $W(t_n)-W(t_{n-1})$ независимы;
2) пусть $t,\ s\in T$, $t>s$. Тогда случайная величина $W(t)-W(s)$ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией $t-s$;
3) реализации $W(t,\omega_0)$ непрерывны по $t$ на $T$.

Вероятное поведение винеровского процесса приведено на рис. 1.

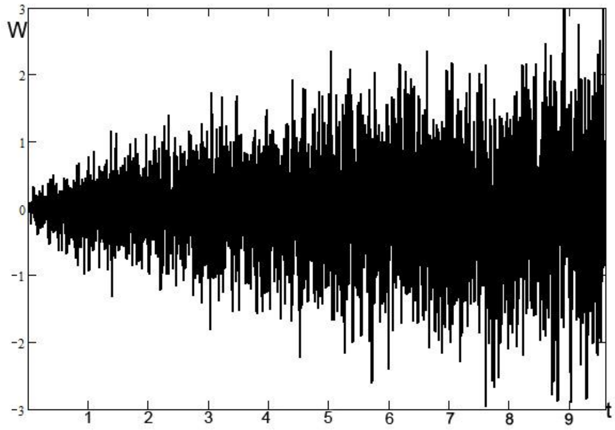


Рис.1. Одна из возможных реализаций винеровского процесса $W_t$.

Для того чтобы работать с винеровским процессом, требуется знание начальных и центральных моментов нормальных случайных величин.

Пусть имеется случайная величина $\xi \sim N\left(a, \sigma^2\right)$. Найдем для нее начальные моменты $\nu_k = E(x)^k$ и центральные моменты $\mu_k = E(x-a)^k$. Имеем:

$$\mu_1 = E(x-a) = Ex - Ea = a - a = 0.$$

Далее проинтегрируем по частям выражение для $\mu_k = E(x-a)^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left( -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right) \right) dx$:

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{(x-a)^k}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left( -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right) \right) dx = \left| \begin{array}{l} u = \exp\left( -\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right) \\ dv = (x-a)^k \, dx \end{array} \right| = \mu_{k+2} \frac{1}{\sigma^2 (k+1)}.$$

Выражая $\mu_{k+2}$ и сдвигая индекс, окончательно имеем:

$$\mu_k = (k-1)\mu_2 \, \mu_{k-2},$$

где $\mu_2 = \sigma^2$ – дисперсия, $k > 2$, $\mu_1 = 0$.

По аналогии выводится формула для начальных моментов:

$$\nu_k = (k-1)\mu_2 \, \nu_{k-2}, \tag{1}$$

где $\mu_2 = \sigma^2$ – дисперсия, $k > 2$, $\nu_1$ – некоторое число.

***Теорема* 1**: пусть $[0,T]$ – некоторый временной интервал, пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ – его разбиение, $\lambda = \max\limits_{i=0,n-1} \left(t_{i+1} - t_i\right)$ - величина разбиения. Тогда

$$\lim_{\lambda \to 0} E\left[ \sum_{i=0}^{n-1} \left(W_{i+1} - W_i\right)^2 - T \right]^2 = 0,$$

где $W_i = W(t_i)$– винеровский процесс в точках разбиения интервала.

*Доказательство*: найдем математическое ожидание выражения $\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1} - W_i)^2$ :

$E\left[\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1} - W_i)^2\right] = \left[\sum_{i=0}^{n-1}E(W_{i+1} - W_i)^2\right] =$(так как мат. ожидание винеровского процесса равно нулю)= $\left[\sum_{i=0}^{n-1}D(W_{i+1} - W_i)\right] =$ (по аксиоме 2) винеровского процесса) $= \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = t_n - t_0 = T$ .

Теперь найдем дисперсию сумм квадратов $D\left(\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1} - W_i)^2\right)$:

$D\left(\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1} - W_i)^2\right) =$(по аксиоме 1) винеровского процесса) = $\sum_{i=0}^{n-1}D(W_{i+1} - W_i)^2 =$ (для каждого приращения используем свойство дисперсии $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$ )

$= \sum_{i=0}^{n-1}E(W_{i+1} - W_i)^4 - \sum_{i=0}^{n-1}\left[E(W_{i+1} - W_i)^2\right]^2.$

Так как в выражении для дисперсии записаны четвертый и второй начальные моменты нормальной случайной величины (ибо приращения винеровского процесса нормальны), то для продолжения доказательства воспользуемся рекуррентной формулой (1) для начальных моментов:

$$E(W_{i+1} - W_i)^4 = \nu_4 = 3(t_{i+1} - t_i)\nu_2 = 3(t_{i+1} - t_i)E(W_{i+1} - W_i)^2 = 3(t_{i+1} - t_i)D(W_{i+1} - W_i) = 3(t_{i+1} - t_i)^2.$$

$$E(W_{i+1} - W_i)^2 = \nu_2 = E(W_{i+1} - W_i)^2 = D(W_{i+1} - W_i) = (t_{i+1} - t_i).$$

Поэтому окончательно

$$D\left(\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1} - W_i)^2\right) = \sum_{i=0}^{n-1}E(W_{i+1} - W_i)^4 - \sum_{i=0}^{n-1}\left[E(W_{i+1} - W_i)^2\right]^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\left[3(t_{i+1} - t_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1}2(t_{i+1} - t_i)^2 \le$$

$$\le 2\lambda\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = 2\lambda T \to 0 \text{ при } \lambda \to 0.$$

Так как по доказанному выше математическое ожидание $E\left(\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1} - W_i)^2\right)$ равно *T*, то по определению дисперсии имеем:

$$E\left[\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1} - W_i)^2 - T\right]^2 = D\left[\sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1} - W_i)^2\right] \le 2\lambda T \to 0 \text{ в при } \lambda \to 0\text{, ч.т.д.}$$

*Замечание*: определение винеровского процесса справедливо с точностью до произвольной случайной величины φ, которая играет роль константы. Для доказательства рассмотрим процесс $\widetilde{W}(t,\omega)=W(t,\omega)+\varphi$ и докажем, что он винеровский, если $W(t,\omega)$ – винеровский процесс.

1) приращения $\widetilde{W}(t_1)-\widetilde{W}(t_0), \widetilde{W}(t_2)-\widetilde{W}(t_1), \widetilde{W}(t_3)-\widetilde{W}(t_2), \ldots, \widetilde{W}(t_n)-\widetilde{W}(t_{n-1})$ независимы, так они равны приращениям $W(t_1)-W(t_0), W(t_2)-W(t_1), W(t_3)-W(t_2), \ldots, W(t_n)-W(t_{n-1})$;
2) случайная величина $\widetilde{W}(t_2)-\widetilde{W}(t_1)$ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией $t_2-t_1$, так как $\widetilde{W}(t_2)-\widetilde{W}(t_1)=W(t_2)-W(t_1)$;
3) реализации $\widetilde{W}(t,\omega_0)$ непрерывны по *t* на *T* в силу непрерывности $W(t,\omega)$.

В дальнейшем, чтобы зафиксировать конкретный винеровский процесс, будем фиксировать начало этого процесса – точку $W_0=W(t_0,\omega)=0$.

***Теорема* 2**: винеровский процесс не дифференцируем в среднеквадратичном в любой момент времени интервала *T*.

*Доказательство*: рассмотрим левую и правую производные в точке $(t,\omega)$. Имеем: $\lim\limits_{h\to+0} E\left[\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right]^2$ = (так как $h^2$ – число) = $\lim\limits_{h\to+0}\frac{1}{h^2}E[W(t+h)-W(t)]^2$ = (так как приращения винеровского процесса распределены нормально) = $\lim\limits_{h\to+0}\frac{1}{h^2}(t+h-t)=+\infty$. По аналогии, предел слева равен $\lim\limits_{h\to-0} E\left[\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right]^2=-\infty$. Значит, производной в т. *t* не существует, ч.т.д.

Заметим, что если в аксиоме 2) винеровского процесса положить $t_1=0, t_2=t$, то $W(t)-W(0)\sim N(0,t)$. Если условиться, что $W(0)\equiv W_0=0$ почти наверное, то $W(t)\sim N(0,t)$.

Вычислим ковариационную функцию $A_W(t_1,t_2)$.

***Теорема* 3 *(о ковариационной функции винеровского процесса)***: пусть начальная точка винеровского процесса $W_0=0$. Тогда $\forall\, t_1,t_2>0$ ковариационная функция винеровского процесса равна $A(t_1,t_2)=\min\{t_1,t_2\}$.

*Доказательство*:

1) Пусть $t_1>t_2$. Тогда

$$A_W(t_1,t_2)\overset{def}{=}E(W_1W_2)=E(W_1W_2-W_2^2+W_2^2)=E(W_1W_2-W_2^2)+E(W_2^2)=E(W_2(W_1-W_2))+E(W_2-0)^2=$$
$$=E((W_2-W_0)(W_1-W_2))+E(W_2-W_0)^2=$$

(так как приращения винеровского процесса независимы) $=E(W_2-W_0)E(W_1-W_2)+D(W_2-W_0)=0\cdot 0+t_2$.

2) Пусть $t_1<t_2$. Тогда

$A(t_1,t_2)\overset{def}{=}E(W_1W_2)=E(W_1W_2-W_1^2+W_1^2)=E(W_1W_2-W_1^2)+E(W_1^2)=E(W_1(W_2-W_1))+E(W_1-0)^2=$ $=E((W_1-W_0)(W_2-W_1))+E(W_1-W_0)^2=$(так как приращения винеровского процесса независимы) $=E(W_1-W_0)E(W_2-W_1)+D(W_1-W_0)=0\cdot 0+t_1$.

Объединяя вместе два этих случая, получаем, что $A_W(t_1,t_2)=\min\{t_1,t_2\}$, ч.т.д.

*Определение*: пусть $F\equiv F_t=\sigma(W_s, s\le t)$, $t\in[0,T]$, - некоторая (естественная) фильтрация. Говорят, что адаптированный к фильтрации $F$ случайный процесс $X_t$ является мартингалом относительно этой фильтрации, если выполнено равенство

$$E(X_t|F_s)=X_s,\ t\ge s.$$

*Определение*: пусть $F_t$ – некоторая фильтрация, $t\ge 0$. Говорят, что процесс $X_t$ адаптирован к фильтрации $F_t$, если сигма-алгебра $\sigma(X_t)\subset F_t$ для любого $t$.

Случайный процесс $X_t$ всегда адаптирован к своей собственной естественной фильтрации $F_t=\sigma(X_s, s\le t)$.

*Определение*: пусть $F_t$ – некоторая фильтрация, $t\ge 0$. Пусть процесс $X_t$ адаптирован к фильтрации $F_t$. Если $X_t$ измерим на подалгебре $F_{t^-}=\sigma\left(\bigcup_{0\le s<t}F_s\right)$ при любом $t$, то говорят, что процесс $X_t$ является предсказуемым.

***Теорема* Гирсанова** (об эквивалентности винеровских процессов): стохастический процесс

$$M_t=\exp\left(-bW_t-\frac{1}{2}b^2t\right), t\in[0,T],$$

является мартингалом относительно фильтрации $F\equiv F_t=\sigma(W_s, s\le t)$, $t\in[0,T]$ на вероятностной мере $P$. Соотношение

$$Q(A)=\int_A M_T(\omega)dP(\omega),\ A\in F,$$

или в дифференциальном виде

$$dQ=M_T(\omega)dP$$

определяет эквивалентную вероятностную меру (мартингальную меру) $Q$ на σ-алгебре $F$, для которой преобразование $d\widetilde{W}_t=dW_t+bdt$ задает новый винеровский процесс $\widetilde{W}_t$, адаптированный относительно той же фильтрации $F_t=\sigma(W_s, s\le t)$.

**Свойство**: $W_t$ является предсказуемым процессом.

**Свойство (автомодельности)**: винеровский процесс автомоделен, т.е. для любого действительного числа $C>0$ процесс $V_t=\dfrac{W_{Ct}}{\sqrt{C}}$ является винеровским процессом.

Доказательство следует из определения винеровского процесса и представления $W_{Ct} = \sqrt{Ct}\xi$ через стандартную нормальную случайную величину.

**Свойство (закон повторного логарифма)**: $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$ почти наверное.

Доказательство приведено в [35, с. 385].

***О максимуме винеровского процесса***

Пусть $W_t$ – некоторый винеровский процесс, пусть $T$ – момент остановки, т.е. случайная величина, что

$$\{\omega \in \Omega, T(\omega) \le t\} \in F_t,$$

где $F_t$ – заданная фильтрация на вероятностном пространстве Ω.

Пусть $M_T = \max\limits_{t\in[0,T]} |W_t|$, $S_1 = \inf\left(t \ge 0, |W_t| = 1\right)$. Известно, что справедливы следующие неравенства [36, с. 302]:

*неравенство Колмогорова – Дуба*: $P\left(M_T \ge \lambda\right) \ge \dfrac{E\left(W_T^2\right)}{\lambda^2} = \dfrac{T}{\lambda^2}$;

*неравенство Дуба*: $P\left(\max\limits_{t\in[0,T]} W_t^2\right) \le 4E\left(W_T^2\right) = 4T$.

Докажем, что $E\left(M_1\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, где $M_1 = \max\limits_{t\in[0,1]} |W_t|$. По свойству автомодельности имеем:

$$\left\{\sup_{t\in[0,1]} |W_t| \le x\right\} = \left\{\sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{x}\left(|W_t| \le 1\right)\right\} = \left\{\sup_{t\in[0,1]} |W_{t/x^2}| \le 1\right\} = \left\{\sup_{t\in[0,1/x^2]} |W_t| \le 1\right\} =$$

$$= \left\{S_1 \ge \frac{1}{x^2}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{S_1}} \le x\right\}.$$

При этом вероятностные распределения совпадают:

$$P\left\{\sup_{t\in[0,1]} |W_t| \le x\right\} = P\left(\frac{1}{\sqrt{S_1}}\right).$$

Из условия нормировки для одного из вариантов интеграла Эйлера – Пуассона при любом положительном числе σ следует равенство:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt.$$

Подставляя в равенство $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{S_1}}$ и используя преобразование Лапласа [37] для $E\left(\exp(-\lambda S_1)\right)$:

$$E\big(\exp(-\lambda S_1)\big) = \frac{1}{ch(\sqrt{2\lambda})},$$

где λ – параметр этого преобразования, имеем:

$$E(M_1) = E\left(\frac{1}{\sqrt{S_1}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty E\left(\exp\left(-\frac{x^2 S_1}{2}\right)\right)dx =$$

=(подставляем преобразование Лапласа при $\lambda = x^2/2$) =

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{ch\,x}dx = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^\infty \frac{dy}{1+y^2} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}arctg\,(y)\Big|_1^\infty = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Оценки значений максимума модуля винеровского процесса широко используются при ценообразовании экзотических опционов [22, 34], например, барьерных опционов или опционов «с оглядкой» (lookback).

## УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. УСЛОВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

*Определение*: пусть $A \in \Omega$ – некоторое событие вероятностного пространства. Пусть $F(x) = P(X \le x)$ – функция распределения СВ *X*, пусть *P*(*A*) > 0. Условной функцией распределения *X* при заданном *A* назовем соотношение

$$F(x \mid A) = \frac{P(X \le x, A)}{P(A)}.$$

Условным математическим ожиданием СВ *X* при заданном *A* назовем выражение

$$E(X \mid A) = \frac{E(XI_A)}{P(A)},$$

где $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases}$ – индексная функция множества.

Если *f*(*x*) – функция плотности для СВ *X*, то

$$E(X \mid A) = \frac{1}{P(A)}\int_A xf(x)\,dx.$$

**Замечание**: Если *X* – дискретная случайная величина со значениями $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, то

$$E(X \mid A) = \sum_{k=1}^\infty \frac{P\big((X(\omega) = x_k) \cap A\big)}{P(A)} = \sum_{k=1}^\infty x_k P(X = x_k \mid A).$$

*Определение*: пусть *X* – случайная величина, *E*(*X*) < ∞. Пусть *Y* – произвольная дискретная случайная величина со значениями $\{y_i\}_{i=1}^\infty$, пусть $A_i = \{\omega, Y(\omega) = y_i\}$ –

непересекающиеся подмножества пространства Ω, причем $\coprod_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$. Пусть $P(A_i) > 0$. Тогда определена дискретная случайная величина $E(X \mid Y)$ со значениями вида:

$$E(X \mid Y = y_i)(\omega) = E(X \mid A_i) = \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} x f(x)\, dx, \ \omega \in A_i, \ I \geq 1.$$

***Свойства условного математического ожидания для дискретной СВ***

1. Линейность: для любых действительных чисел α, β, для любых случайных величин *X*, *Y* выполнено равенство

$$E((\alpha X + \beta Y) \mid Z) = \alpha E(X \mid Z) + \beta E(Y \mid Z).$$

Доказательство очевидно.

2. Пусть *Y* – дискретная случайная величина. Тогда справедливо равенство

$$E(X) = E\big(E(X \mid Y)\big).$$

**Доказательство**: по определению имеем:

$$E\big(E(X \mid Y)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Y = y_i) E(X \mid Y = y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E(X \mid A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} x f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} E\left(X I_{A_i}\right) =$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{\infty} X I_{A_i}\right) = E\left(X \sum_{i=1}^{\infty} I_{A_i}\right) = E(X I_{\Omega}) = E(X), \text{ ч.т.д.}$$

3. Пусть *X*, *Y* – независимые случайные величины. Пусть *Y* – дискретная случайная величина. Тогда

$$E(X \mid Y) = E(X).$$

**Доказательство**: $P(X \in A; Y = y_i) = P(X \in A) P(Y = y_i) = P(X \in A) P(A_i)$. В то же время,

$$A_i = \{\omega, I_{A_i}(\omega) = 1\} = \{\omega, Y(\omega) = y_i\}.$$

Поэтому $P(X \in A; Y = y_i) = P(X \in A) P\{\omega, I_{A_i}(\omega) = 1\}$.

В силу независимости *X*, *Y* имеем:

$$E(X \mid Y)(\omega) = E(X \mid A_i) = \frac{E\left(X I_{A_i}\right)}{P(A_i)} = \frac{E\left(X I_{A_i}\right) E\left(I_{A_i}\right)}{P(A_i)} = \frac{E(X) P(A_i)}{P(A_i)} = E(X).$$

При этом мы использовали определение индексного множества от события $A_i$ как случайной величины и вычислили математическое ожидание: $E\left(I_{A_i}\right) = 1 \cdot P(A_i) + 0 \cdot P(\overline{A_i})$, ч.т.д.

4. Если *Y* = *const*, то для любой случайной величины *X*

$$E(X \mid Y) = E(X).$$

Доказательство следует из свойства 3).

5. Условное математическое ожидание $E(X\,|\,Y) = E(X\,|\,Y)(\omega)$ – функция от *Y*. Случайная величина *X* только задает характер этой зависимости:
   если $g(Y) = E(X\,|\,Y)$, то

$$g(y) = \sum_{j=1}^{\infty} E(X\,|\,Y = y_j)\, I_{\{y_j\}}(y).$$

*Определение*: случайная величина $Z = E(X\,|\,F)$ называется условным математическим ожиданием относительно σ–алгебры *F*, если $\sigma(Z) \subset F$ и для каждого события $A \in F$ справедливо равенство:

$$E(XI_A) = E(ZI_A).$$

*Определение*: пусть *Y* – случайная величина с σ–алгеброй *F* = σ(*Y*). Тогда

$$E(X\,|\,Y) = E(X\,|\,\sigma(Y)).$$

*Определение*: говорят, что случайная величина *X* и σ–алгебра *F* независимы, если *X* и $I_A$ независимы для любого $A \in F$.

Пусть далее *Y* – непрерывная случайная величина или случайный процесс, если не оговорено иное. Тогда имеют место следующие свойства.

***Свойства условного математического ожидания для непрерывной СВ***

1. Если для случайной величины $E\,|\,X\,| < \infty$, то условное математическое ожидание $E(X\,|\,F)$ существует и единственно с точностью до множеств нулевой вероятности из *F*.
2. Линейность: для любых действительных чисел α, β, для любых случайных величин *X*, *Y* выполнено равенство

$$E((\alpha X + \beta Y)\,|\,F) = \alpha E(X\,|\,F) + \beta E(Y\,|\,F).$$

Доказательство очевидно.

3. Для любой СВ *X* справедливо: $E(X) = E\big(E(X\,|\,F)\big)$.

Ход доказательства такой же, как и в свойстве 2) условного математического ожидания с дискретной случайной величиной *Y*.

4. Пусть СВ *X* и σ–алгебра *F* независимы. Тогда

$$E(X\,|\,F) = E(X).$$

Ход доказательства такой же, как и в свойстве 3) условного математического ожидания с дискретной случайной величиной *Y*.

5. Пусть задана некоторая σ–алгебра *F*, что $\sigma(X) \subset F$, где *X* – случайная величина. Тогда

$$E(X \mid F) = X .$$

Как следствие, если $X = f(Y)$ и $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$, то

$$E(X \mid Y) = X$$

для каждой функции *f*.

**Доказательство**: $\sigma(X) \subset F$ означает, что мы знаем все о структуре *X*, поэтому можем рассматривать *X* как «неслучайную» величину:

$$E(X \mid F)(\omega) = E(X(\omega) \mid F) = X(\omega) E(1 \mid F) = X(\omega) .$$

6. Пусть задана некоторая σ–алгебра $F$ и $\sigma(X) \subset F$ для некоторой СВ *X*. Тогда для каждой *Y* справедливо равенство

$$E(XY \mid F) = XE(Y \mid F) .$$

В частности, если $F = \sigma(Z)$ для некоторой СВ *Z* и $\sigma(X) \subset F$, то

$$E(XY \mid Z) = XE(Y \mid Z) .$$

При доказательстве свойства можно рассматривать СВ *X* как «константу». Тогда ее можно выносить за знак математического ожидания и доказываемое справедливо.

7. Пусть заданы две σ–алгебры *F* и *G*. Пусть $F \subset G$. Тогда

$$E(X \mid F) = E(E(X \mid G) \mid F) = E(E(X \mid F) \mid G) .$$

Действительно, если $F \subset G$, то $E(X \mid F)$ не содержит больше информации, чем *G*. Поэтому при заданном *G* мы оперируем с СВ $E(X \mid F)$ как с «константой». Следовательно, $E(E(X \mid F) \mid G) = E(X \mid F) E(1 \mid G) = E(X \mid F)$. Второе равенство доказано.

Докажем первое равенство в утверждении свойства 7). По определению условного математического ожидания имеем: пусть $Z = E(X \mid F)$ и для каждого события $A \in F$ $E(XI_A) = E(ZI_A)$. Так как $A \in F \subset F$, то по свойству 6) для случайной величины $I_A$ имеем:

$$I_A E(E(X \mid G) \mid F) = E(E(X \mid G) I_A \mid F) = E(E(XI_A \mid G) \mid F) .$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей и применим к правой части получившегося равенства свойство 3):

$$E\big(I_A E(E(X \mid G) \mid F)\big) = E\big(E(E(XI_A \mid G) \mid F)\big) = E\big(XI_A\big).$$

Получили, что случайная величина $\tilde{Z} = E(E(X \mid G) \mid F)$ так же удовлетворяет определению условного математического ожидания для *X*:

$$E(XI_A) = E(\tilde{Z} I_A) .$$

Но по свойству 1) представление $E(XI_A) = E(ZI_A)$ единственно и возможно только для $Z = E(X \mid F)$. Поэтому $Z = \widetilde{Z}$, то есть $E(E(X \mid G) \mid F) = E(X \mid F)$. Свойство доказано полностью.

8. Пусть случайная величина $X$ и σ–алгебра $F$ независимы. Пусть $\sigma(G) \subset F$, где $G$ – случайная величина. Тогда для любой функции двух переменных $h(x,y)$ выполнено равенство:

$$E(h(X,G) \mid F) = E\big(E_X(h(X,G) \mid F)\big),$$

где $E_X$ вычисляется по значениям $X$.

9. Неравенство Йенсена: пусть $f$ – выпуклая функция действительного аргумента, пусть $F$ – некоторая σ–алгебра на Ω. Тогда выполнено неравенство

$$f\big(E(X \mid F)\big) \le E\big(f(X) \mid F\big).$$

10. (Ширяев) пусть $X$ – СВ, $F = \sigma(X)$. Пусть Q, P – некоторые вероятностные меры. Тогда справедлива теорема Радона – Никодима:

$$E(X \mid F) = \frac{dQ}{dP},$$

или в интегральном виде

$$Q(A) = \int_A E(X \mid F) dP.$$

**Замечание**: сравните формулировку свойства 10) с формулировкой теоремы Гирсанова.

**Пример** 1 (применения свойств условного математического ожидания): пусть $X$ и $Y$ – независимые случайные величины. Тогда по свойству 8)

$$E(XY \mid Y) = E(E_X(XY \mid Y)).$$

Применяя свойство 6), получаем:

$$E(E_X(XY \mid Y)) = E\big(YE_X(X) \mid Y\big) = E(X)E\big(Y \mid Y\big) = E(X)Y.$$

Кроме того, по свойству 2)

$$E\big((X+Y) \mid Y\big) = E(X \mid Y) + E(Y \mid Y) = \text{(по свойству 4))} = E(X) + Y.$$

**Пример** 2 (применения свойств условного математического ожидания):

*Винеровский процесс* $W_t$.

Пусть $F_s = \sigma\big(W_p, p \le s\big)$. Вычислим $E\big(W_t \mid F_s\big) = E\big(W_t \mid W_p, p \le s\big)$, $s \ge 0$.

Если $s \ge t$, то по свойству 5) вся информация про $W_t$ известна и $W_t$ не случайна:

$$E\big(W_t \mid F_s\big) = W_t.$$

Если $s < t$, то

$$E\big((W_t - W_s + W_s) \mid F_s\big) = E\big((W_t - W_s) \mid F_s\big) + E\big(W_s \mid F_s\big).$$

По свойству 4), так как приращение $W_t - W_s$ не зависит от $F_s$, то по аксиоме винеровского процесса

$$E((W_t - W_s) \mid F_s) = E(W_t - W_s) = 0 .$$

Так как $\sigma(W_s) \subset \sigma(W_p, p \le s) = F_s$, то $E(W_s \mid F_s) = W_s$.

Окончательно,

$$E(W_t \mid F_s) = W_p \text{, где } p = \min(t,s).$$

**Пример** 3 (применения свойств условного математического ожидания):

*Квадрат винеровского процесса* $X_t = W_t^2 - t$.

Вычислим $E(W_t \mid F_s) = E(W_t \mid W_p, p \le s)$, $s \ge 0$.

При $s \ge t$ по свойству 5) имеем:

$$E((W_t^2 - t) \mid F_s) = E(W_t^2 \mid F_s) - E(t \mid F_s) = W_t^2 - t = X_t .$$

При $s < t$ $X_t = W_t^2 - t = (W_t - W_s + W_s)^2 - t = (W_t - W_s)^2 + W_s^2 + 2W_s(W_t - W_s) - t$.

Вычисляем условное математическое ожидание:

$$E(X_t \mid F_s) = E((W_t - W_s)^2 \mid F_s) + E(W_s^2 \mid F_s) + 2E[W_s(W_t - W_s) \mid F_s] - t .$$

Так как $(W_t - W_s), (W_t - W_s)^2$ не зависимы от $F_s$, а $\sigma(W_s^2) \subset \sigma(W_s) \subset F$, то по свойствам 4) – 6) получаем:

$$E(X_t \mid F_s) = E(W_t - W_s)^2 + W_s^2 + 2W_s E(W_t - W_s) - t = (t - s) + W_s^2 - t = W_s^2 - s = X_s .$$

Окончательно,

$$E(W_t \mid F_s) = X_p \text{, где } p = \min(t,s).$$

*Определение*: пусть $F \equiv F_t = \sigma(W_s, s \le t)$, $t \in [0,T]$, – некоторая (естественная) фильтрация. Говорят, что адаптированный к фильтрации $F$ случайный процесс $X_t$ является мартингалом относительно этой фильтрации, если выполнено равенство

$$E(X_t | F_s) = X_s,\ t \ge s.$$

Предполагая, что читатель уже знаком с теорией мартингалов, опускаем все основные свойства мартингалов.

*Определение*: пусть $F$ – некоторая σ-алгебра. Пространство $L^2(F)$ – это множество таких случайных величин (процессов) $X$ на Ω, что 1) $E(X)^2 < \infty$, 2) $\sigma(X) \subset F$.

Если $F = \sigma(Y)$, то выполнено равенство $X = f(Y)$, где $f$ – некоторая функция.

***Проекционное свойство условного математического ожидания***

**Теорема** (о проекции): Пусть $E(X)^2 < \infty$ для некоторой СВ $X$, $F$ – известная σ-алгебра. Тогда $Y = E(X \mid F)$ – случайная величина, лежащая в пространстве $L^2(F)$, причем это ближайший элемент к $X$ в среднеквадратичном:

$$E(X - Y)^2 = \min_{z \in L^2(F)} E(X - Z)^2 .$$

В пространстве $L^2(F)$ можно задать скалярное произведение $(X, Y) = E(XY)$ и норму $\|X\| = \sqrt{(X, X)}$. Тогда для каждого $Z \in L^2(F)$ выполнено равенство:

$$(X - Y, Z) = 0 ,$$

то есть $Y$ – это проекция $X$ на пространство $L^2(F)$.

**Следствие**: если для некоторой СВ $Y$ ее сигма-алгебра $F = \sigma(Y)$, то $E(X \mid Y)$ – ближайший к $X$ элемент из $L^2(F)$.

**Замечание**: проекционное свойство утверждает, что $E(X \mid F)$ – лучшее предсказание поведения $X$ в $L^2(F)$ при заданном $F$. В двух примерах выше при $F_s = \sigma(W_p, p \le s)$ мы получили, что $E(W_t \mid F_s) = W_s$ и $E(W_t^2 - t \mid F_s) = W_s^2 - s$, если $t > s$. Это означает, что лучшее предсказание поведения для этих процессов при заданном $F_s$ – их текущее значение в момент времени $s$. Таким образом, мы подошли к концепции «мартингальности». Тогда из проекционного свойства вытекает, что требование мартингальности некоторого процесса $X_t$ – это гарантия выбора лучшего предсказания для $X_t$ при заданном $F_s$, $t > s$.

**Доказательство теоремы о проекции**: обозначим через $Z' = E(X \mid F)$. Легко видеть, что $Z' \in L^2(F)$: второй момент конечен, случайная величина несет с собой информацию только об алгебре $F$.

Применим к $Z'$ неравенство Йенсена (свойство 9)):

$$E\left[(E(X \mid F))^2\right] \le E\left(E(X^2 \mid F)\right).$$

Используем свойство 3): $E\left(E(X^2 \mid F)\right) = E\left(X^2\right)$. Поэтому

$$E\left[(E(X \mid F))^2\right] \le E\left(X^2\right).$$

Пусть $Z \in L^2(F)$ – произвольная случайная величина. Рассмотрим

$$E(X - Z)^2 = E\left((X - Z') + (Z' - Z)\right)^2 = E(X - Z')^2 + E(Z' - Z)^2 + 2E\left[(X - Z')(Z' - Z)\right].$$

Вычислим $E\left((X - Z')(Z' - Z)\right)$. Так как $Z', Z \in L^2(F)$, то и их разность $(Z' - Z) \in L^2(F)$. По свойству 6)

$$E\left[\left((X - Z')(Z' - Z)\right) \mid F\right] = (Z' - Z)E\left((X - Z') \mid F\right).$$

По свойствам 2) и 5) имеем:

$$E\left((X - Z') \mid F\right) = E(X \mid F) - E(Z' \mid F) = Z' - Z' = 0.$$

Поэтому

$$E(X - Z)^2 = E(X - Z')^2 + E(Z' - Z)^2,$$

или, при произвольном $Z \in L^2(F)$,

$$E(X - Z)^2 \geq E(X - Z')^2.$$

Равенство достигается при $Z = Z'$. Поэтому $Z' = E(X \mid F)$ – тот самый элемент из $L^2(F)$, на котором достигается минимум выражения $E(X - Z)^2$, ч.т.д.

## ПРИНЦИП ОТРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

*Определение*: пусть $M$ – известное действительное число. Временем достижения назовем число $\tau = \inf\{t \geq 0, W_t = M\}$.

Пусть $T$ – граница интервала наблюдения. Пусть $\tau$ – время достижения для $W_t$. Вычислим вероятность $P(W_T < M \mid \tau < T)$.

По определению винеровского процесса он симметричен относительно уровня $W_t = M$. Поэтому вероятности совместных событий равны между собой:

$$P(W_T < M, \tau < T) = P(W_T > M, \tau < T).$$

Значит,

$$P(\tau < T) = P(W_T < M, \tau < T) + P(W_T > M, \tau < T) = 2P(W_T > M, \tau < T).$$

Заметим, что если выполняется условие $W_t > M$, то сразу верно неравенство $\tau < T$, так как пробитие уровня $W_t = M$ вверх происходит до момента $T$, например, в момент $t = \tau$. Поэтому $P(W_T > M, \tau < T) = P(W_T > M)$, то есть по предудыщему

$$P(\tau < T) = 2P(W_T > M).$$

Пользуясь этим равенством вычислим по определению условную вероятность:

$$P(W_T < M \mid \tau < T) = \frac{P(W_T > M, \tau < T)}{P(\tau < T)} = \frac{P(W_T > M)}{P(\tau < T)} = \frac{1}{2}\frac{P(\tau < T)}{P(\tau < T)} = \frac{1}{2}.$$

Значит, если в момент времени $\tau < T$ процесс $W_t = M$, то с одинаковой вероятностью он будет или больше $M$, или меньше $M$. Это и есть формулировка принципа отражения.

Справедлива следующая лемма:

***Лемма*** (о времени первого достижения для винеровского процесса): вероятность первого достижения в момент времени $\tau$ для процесса $W_t$ выражается формулой:

$$P(\tau < T) = 2\Phi\left(-\frac{M}{\sqrt{T}}\right).$$

**Доказательство**: по доказанному выше $P(\tau < T) = 2P(W_T > M)$. Пользуясь представлением для винеровского процесса $W_T = \sqrt{T}\xi$, где $\xi$ – стандартная нормальная случайная величина, имеем:

$$P(\tau < T) = 2(1 - P(W_T < M)) = 2(1 - P(\sqrt{T}\xi < M)) = 2\left(1 - P\left(\xi < \frac{M}{\sqrt{T}}\right)\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{M}{\sqrt{T}}\right)\right) = 2\Phi\left(-\frac{M}{\sqrt{T}}\right).$$

Это и требовалось доказать.

### *О винеровском процессе в момент достижения*

*Определение*: моментом достижения $\tau$ уровня $m \in R$ для винеровского процесса $W_t$ называется случайная величина, которая является точной нижней гранью моментов времени, для которых $W_t = m$:

$$\tau = \inf\left(t \geq 0, W_t = m\right).$$

Пусть $\tau < T$ – момент достижения, пусть $M_T = \max\left(W_t, t \leq T\right)$. Вычислим вероятность достижения максимума для винеровского процесса

$$P(M_T < m, W_T < w),$$

где $w \in R$ – заданное число, причем $w < m$.

Заметим, что расстояние между уровнями $w$ и $m$ равно $(m - w) > 0$. В силу симметрии $W_t$ вероятность, что винеровский процесс опустится с уровня $m$ до уровня $w$ в момент времени $T$, совпадает с вероятностью, когда $W_t$ вырастет с уровня $m$ до уровня $m + (m - w) = 2m - w$ в момент времени $T$.

Далее, выполнение неравенства $\tau < T$ эквивалентно выполнению условия $m < M_T$ по определению момента достижения. В силу симметрии винеровского процесса

$$P(M_T > m, W_T < w) = P(M_T > m, W_T > 2m - w). \qquad (2)$$

Полная вероятность при этом равна

$$P(W_T < w) = P(M_T > m, W_T < w) + P(M_T < m, W_T < w). \qquad (3)$$

Подставляя в выражение (3) равенство (2), получаем:

$$P(W_T < w) = P(M_T > m, W_T > 2m - w) + P(M_T < m, W_T < w),$$

или

$$P(M_T < m, W_T < w) = P(W_T < w) - P(M_T > m, W_T > 2m - w). \qquad (4)$$

Так как $w < m$, то при $d = (m - w) > 0$ имеем:

$$W_T > (2m-w) \leftrightarrow W_T > m+d > m.$$

Известно, что для любой случайной величины $\xi$ выполнено неравенство:

$$\max(\xi) > \xi,$$

поэтому

$$M_T = \max\left(W_t, t \le T\right) > W_T > m.$$

Значит, условие $W_T > (2m-w)$ эквивалентно выполнению неравенства $M_T > m$. Следовательно,

$$P\left(M_T > m,\, W_T > 2m-w\right) = P\left(W_T > 2m-w\right).$$

Тогда, используя доказанное ранее равенство (4), получаем:

$$P\left(M_T < m,\, W_T < w\right) = P\left(W_T < w\right) - P\left(M_T > m,\, W_T > 2m-w\right) = P\left(W_T < w\right) - P\left(W_T > 2m-w\right).$$

Пользуясь представлением функции распределения для винеровского процесса, например, $P\left(W_T < w\right) = P\left(\sqrt{T}\xi < w\right) = P\left(\xi < \frac{w}{\sqrt{T}}\right)$, где $\xi$ – стандартная нормальная случайная величина, убеждаемся в справедливости следующей теоремы:

***Теорема*** (о вероятности достижения максимума для винеровского процесса): пусть $\tau$ – момент достижения для винеровского процесса. Пусть заданы числа $m, w \in R$ – некоторые числовые уровни, причем $w < m$. Тогда

$$P\left(M_T < m, W_T < w\right) = \Phi\left(\frac{w}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(-\frac{2m-w}{\sqrt{T}}\right).$$

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ИТО

При решении стохастических дифференциальных уравнений и систем необходимо проводить их интегрирование. Для формального задания определенного интеграла по стохастическим переменным используем теорию, развитую для винеровского процесса $W(t)$. Для этого рассмотрим некоторую случайную функцию $X_t : T \times \Omega \to \Re_+$. Фиксируя временной интервал $[0, T]$, разобьем его точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_{n-1} < t_n = T$ на непересекающиеся интервалы, $t_i = i \cdot h$, $i = \overline{0, n}$, $h = T n^{-1}$. На каждом интервале $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$, выберем промежуточную точку $\tau_i$ и зададим последовательность частичных сумм

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X\left(\tau_i\right) \Delta W_i, \tag{5}$$

где $\Delta W_i = W_i - W_{i-1}$ – приращение винеровского процесса.

В качестве $\tau_i$ выберем точку $t_i$, т.е. левую границу интервала $[t_i, t_{i+1}]$. Определим интеграл Ито как предел:

$$\int_0^T X_s\, dW_s = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)\, \Delta W_{i+1}\right),$$

где $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}}(t_i - t_{i-1})$ .

*Определение* (неформальное): пусть $X_t$ – СП, $E|X_t| < \infty$. Интегралом Ито назовем стохастический процесс $I(t,\omega) = \int_0^T X_s\, dW_s = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)\, \Delta W_{i+1}\right)$.

Определение интеграла существенным образом зависит от выбора промежуточных точек $\tau_i$. Так, если выбрать в качестве $\tau_i$ правый конец интервала $[t_i, t_{i+1}]$, т.е. $\tau_i = t_{i+1}$, то получается определение интеграла Климонтовича. Если положим $\tau_i = \left(\dfrac{t_{i-1}+t_i}{2}\right)$, то выражение (5) определяет интеграл Стратоновича. Стоит отметить, что свойства этих интегралов отличаются кардинальным образом.

Тем не менее, данное ранее неформальное определение интеграла не совсем корректно, так как не учитывает возможного расхождения предела частичных сумм. Поэтому дадим другое, более точное определение.

*Определение* (интеграла Ито): пусть имеется случайная функция $X_t : T \times \Omega \to \Re_+$. Зададим временной интервал $[0, T]$, который разобьем точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_{n-1} < t_n = T$ на непересекающиеся интервалы, $t_i = i \cdot h$, $i = \overline{0, n}$, $h = T n^{-1}$. Пусть во всех точках разбиения $t_i$ приращения $\Delta W_{i+1} \sim N(0, \Delta t_{i+1})$ не зависят от $X_i = X(t_i, \omega)$, а $E(X_i^2) < \infty$. Тогда интегралом Ито называется стохастический процесс

$$I(t,\omega) = \int_0^T X(t,\omega)dW(t) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} X(t_i,\omega)\, \Delta W_{i+1}\right).$$

Заметим, что накладываемые в процессе определения дополнительные требования на $X_t$ очень существенны. Действительно, т.к. $\Delta W_{i+1} \sim N(0, \Delta t_{i+1})$, то второй момент $E(X_i \Delta W_{i+1})$ в силу независимости $X_i = X(t_i, \omega)$ от $\Delta W_{i+1}$ вычисляется как

$$E(X_i \Delta W_{i+1})^2 = E(X_i^2)E(\Delta W_{i+1}^2) = E(X_i^2)\Delta t_{i+1}.$$

Значит, $E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1}\right)^2 = E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i^2 \Delta W_{i+1}^2\right) + 2E\left(\sum_{i\neq j}\sum X_i X_j \Delta W_{i+1}\Delta W_{j+1}\right) =$ (так как $E(\Delta W_{i+1}) = 0$ )$= E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i^2 \Delta W_{i+1}^2\right) + 2\cdot 0 = \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i^2) E(\Delta W_{i+1}^2)$ (последнее – в силу того, что дисперсия произведения независимых есть произведение дисперсий) = (так как $E(\Delta W_{i+1}^2) = D(\Delta W_{i+1}^2) = \Delta t_{i+1}$) = $\sum_{i=0}^{n-1} E(X_i^2)\Delta t_{i+1}$. Если теперь воспользоваться определением обычного интеграла Лебега, то

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} E(X_i^2)\Delta t_{i+1} = \int_0^T E(X_s^2)ds\,.$$

Опять же в силу независимости

$E(I(t,\omega)) = \lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} E(X_i \Delta W_{i+1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} EX_i E\Delta W_{i+1} = 0$, т.е. математическое ожидание от интеграла Ито равно нулю:

$$E(I(t,\omega)) = 0\,.$$

Именно поэтому $\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} D\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1}\right) = D(I(t,\omega)) = \int_0^T E(X_s^2)ds$.

Окончательно,

$$D(I(t,\omega)) = \int_0^T E(X_s^2)ds$$ **(изометрия Ито)**,

т.е. дисперсия интеграла Ито будет конечной, если $E(X_s^2) < \infty$ на промежутке интегрирования. Это же условие гарантирует существование предела $\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\ \Delta W_{i+1}\right)^2$, а значит, и самого интеграла Ито, стоящего под знаком математического ожидания.

Приведем примеры вычисления интеграла Ито по определению.

***Примеры***:

1) $\int_0^T dW = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta W_{i+1} = \lim_{n\to\infty}(\Delta W_1 + \ldots + \Delta W_n) = \lim_{n\to\infty}(W_1 - W_0 + \ldots + W_n - W_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}(W_n - W_0) = T$

2) $\int_0^t W\,dW = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$.

Действительно, сделаем обозначение: $\Delta(W_{i+1}^2) = W_{i+1}^2 - W_i^2$. Преобразуем $\Delta(W_{i+1}^2)$, выделив полный квадрат:

$$\Delta\left(W_{i+1}^2\right)=\left(W_{i+1}-W_i\right)^2+2W_i\left(W_{i+1}-W_i\right)=\left(\Delta W_{i+1}\right)^2+2W_i\Delta W_{i+1}.$$

Так как $\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\left(W_{i+1}^2\right)=\Delta\left(W_1^2\right)+\Delta\left(W_2^2\right)+...+\Delta\left(W_n^2\right)=W_1^2-W_0^2+W_2^2-W_1^2+...+W_n^2-W_{n-1}^2=W_n^2$, то

Просуммируем $\Delta\left(W_{i+1}^2\right)=\left(\Delta W_{i+1}\right)^2+2W_i\Delta W_{i+1}$ по индексу *i* от нуля до *n*-1:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\left(W_{i+1}^2\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{i+1}\right)^2+2\sum_{i=0}^{n-1}W_i\Delta W_{i+1},$$

откуда $\sum_{i=0}^{n-1}W_i\Delta W_{i+1}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\left(W_{i+1}^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{i+1}\right)^2=$ (значение последней суммы нам известно)=

$=\frac{1}{2}W_n^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{i+1}\right)^2$.

По определению, $\int_0^t W\,dW=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}W_i\,\Delta W_{i+1}$. Поэтому, в силу того, что $\sum_{i=0}^{n-1}W_i\Delta W_{i+1}=\frac{1}{2}W_n^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{i+1}\right)^2$, имеем:

$$\int_0^t W\,dW=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}W_i\,\Delta W_{i+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}W_n^2-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{i+1}\right)^2\right).$$

По теореме 1 $\lim_{n\to\infty}E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\Delta W_{i+1}{}^2-t\right]^2=0$, т.е. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta W_{i+1}\right)^2=t$ в с.к. Кроме того, $\lim_{n\to\infty}W_n^2=W_t^2$. Поэтому $\int_0^t W\,dW=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}W_i\,\Delta W_{i+1}=\frac{1}{2}W_t^2-\frac{1}{2}t$.

*Замечание*: добавок $-\frac{1}{2}t$ в интеграле Ито возникает из-за стохастичности подынтегральной функции. Если функция детерминирована, то этот добавок отсутствует.

### ***Свойства интеграла Ито***

Пусть всюду далее выполнено условие существования интеграла Ито: пусть процесс $X_t$ не зависит от $\Delta W_t$, а $E\left(X_t^2\right)<\infty$. Справедливы следующие свойства.

1. Для любой точки $c\in[0,t]$ справедливо равенство $\int_0^t X(t,\omega)dW(t)=\int_0^c X(t,\omega)dW(t)+\int_c^t X(t,\omega)dW(t)$.

Доказательство очевидно, если подобрать разбиение так, чтобы одна из его точек совпала с точкой *c*.

2. Интеграл Ито линеен: для любых ненулевых чисел α, β, для любых интегрируемых по Ито процессов $X_t, Y_t$ справедливо равенство

$$\int_0^t (\alpha X_t + \beta Y_t)dW_t = \alpha\int_0^t X_t dW_t + \beta\int_0^t Y_t dW_t .$$

Доказательство следует из определения интеграла Ито.

3. Пусть $X_t$ – непрерывный случайный процесс. Тогда функционал $\int_0^t X_t\, dW_t$ непрерывен в среднеквадратичном как функция переменного верхнего предела.

*Доказательство*: по определению непрерывности необходимо доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall t_1 \in [0,t],\ |t_1 - t_2| < \delta$ следует, что $E\left[\int_0^{t_1} X_t\, dW - \int_0^{t_2} X_t\, dW\right]^2 < \varepsilon$. Предположим для определенности, что $t_1 < t_2$. По теореме Кантора на компакте непрерывный процесс достигает своего максимума $C = \max_{t\in T} X(t)$. Тогда

$E\left[\int_0^{t_1} X_t\, dW_t - \int_0^{t_2} X_t\, dW_t\right]^2 =$ (по свойству 1) для интеграла Ито) =

$= E\left[-\int_{t_1}^{t_2} X_t\, dW_t\right]^2 = E\left[\int_{t_1}^{t_2} X_t\, dW_t\right]^2 \le E\left(\max_{t\in T} X(t)\int_{t_1}^{t_2} dW\right)^2 =$ (по обозначениям через $C$)=

$= E\big(C(W_2 - W_1)\big)^2 =$ (по определению винеровского процесса)$= C^2(t_2 - t_1) < C^2\,\delta < \varepsilon/2 < \varepsilon$, где $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2C^2}$.

Аналогично доказывается случай $t_2 < t_1$, ч.т.д.

4. О математическом ожидании интеграла Ито: математическое ожидание интеграла Ито равно нулю: $E\big(I(t,\omega)\big) = 0$.

**Доказательство**: по определению,

$E\big(I(t,\omega)\big) = \lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\, \Delta W_{i+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} E\left(X_i \Delta W_{i+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} EX_i E\Delta W_{i+1} = 0$, ч.т.д.

5. О дисперсии интеграла Ито: $D\big(I(t,\omega)\big) = \int_0^T E\left(X_t^2\right)dt$.

**Доказательство**: т.к. $\Delta W_{i+1} \sim N(0, \Delta t_{i+1})$, то второй момент $E(X_i \Delta W_{i+1})$ в силу независимости $X_i = X(t_i, \omega)$ от $\Delta W_{i+1}$ вычисляется как

$$E\left(X_i \Delta W_{i+1}\right)^2 = E\left(X_i^2\right)E\left(\Delta W_{i+1}^2\right) = E\left(X_i^2\right)\Delta t_{i+1}.$$

Значит, $E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \ \Delta W_{i+1}\right)^2 = E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i^2 \Delta W_{i+1}^2\right) + 2E\left(\sum_{i \neq j}\sum X_i X_j \Delta W_{i+1} \Delta W_{j+1}\right) =$ (так как $E\left(\Delta W_{i+1}\right) = 0$ )$= E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i^2 \Delta W_{i+1}^2\right) + 2 \cdot 0 = \sum_{i=0}^{n-1} E\left(X_i^2\right)E\left(\Delta W_{i+1}^2\right)$ (последнее – в силу того, что дисперсия произведения независимых есть произведение дисперсий) = (так как $E\left(\Delta W_{i+1}^2\right) = D\left(\Delta W_{i+1}^2\right) = \Delta t_{i+1}$) = $\sum_{i=0}^{n-1} E\left(X_i^2\right)\Delta t_{i+1}$. Если теперь воспользоваться определением обычного интеграла Лебега, то

$$\lim_{n \to \infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \ \Delta W_{i+1}\right)^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} E\left(X_i^2\right)\Delta t_{i+1} = \int_0^T E\left(X_t^2\right)dt.$$

По свойству 4) интеграла Ито $E\left(I(t, \omega)\right) = 0$. Поэтому $\lim_{n \to \infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \ \Delta W_{i+1}\right)^2 = \lim_{n \to \infty} D\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \ \Delta W_{i+1}\right) = D\left(I(t, \omega)\right) = \int_0^T E\left(X_t^2\right)dt$, ч.т.д.

6. Интеграл Ито является мартингалом относительно фильтрации $F_t$, т.е. для моментов времени $s<t$ $E\left(\int_0^t X_t \, dW_t \Big|_{F_s}\right) = \int_0^s X_t \, dW_t$.

**Доказательство**: докажем сначала, что винеровский процесс является мартингалом, т.е. $E\left(W_t\big|_{F_s}\right) = W_s$, если $s<t$.

Действительно, $E\left(W_t\big|_{F_s}\right) = E\left(W_t - W_s + W_s\big|_{F_s}\right) = E\left(W_t - W_s\big|_{F_s}\right) + E\left(W_s\big|_{F_s}\right) =$ (так как вне зависимости от условий приращение винеровского процесса имеет нулевое математическое ожидание)= $= 0 + E\left(W_s\big|_{F_s}\right) =$ (так как на момент $s$ вся информация о поведении процесса $W_s$ уже заложена в $F_s$ и $W_s\big|_{F_s}$ - просто число $W_s$ ) = $W_s$, т.е. винеровский процесс действительно является мартингалом.

Далее, обозначим через $I_t = \int\limits_0^t X_p \, dW_p$. Тогда

$$E\left(I_t\big|_{F_s}\right) = E\left(\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} X_i \ \Delta W_{i+1}\Big|_{F_s}\right) = E\left(\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} X_i \left(W_{i+1} - W_i\right)\Big|_{F_s}\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} X_i \left(E\left(W_{i+1}\big|_{F_s}\right) - E\left(W_i\big|_{F_s}\right)\right).$$

По доказанному ранее, винеровский процесс является мартингалом относительно фильтрации. Поэтому для моментов времени $t_{i+1} \geq s$ $E\left(W_{i+1}\big|_{F_s}\right) = W_s$, для моментов $t_i \geq s$

$E\left(W_i\big|_{F_s}\right)=W_s$. В случае $t_{i+1}<s$, $t_i<s$, когда для траектория винеровского процесса известна, $E\left(W_{i+1}\big|_{F_s}\right)=W_{i+1}$, $E\left(W_i\big|_{F_s}\right)=W_i$ . Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}X_i\left(E\left(W_{i+1}\big|_{F_s}\right)-E\left(W_i\big|_{F_s}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{s-2}X_iW_{i+1}+\sum_{i=s-1}^{n-1}X_iW_s-\sum_{i=0}^{s-1}X_iW_i-\sum_{i=s}^{n-1}X_iW_s\right).$$

Соберем слагаемые по-другому: объединим первое и третье, выделяя приращение винеровского процесса, и второе и четвертое слагаемые.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{s-2}X_iW_{i+1}+\sum_{i=s-1}^{n-1}X_iW_s-\sum_{i=0}^{s-1}X_iW_i-\sum_{i=s}^{n-1}X_iW_s\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{s-2}X_i\Delta W_{i+1}+\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{i=s-1}^{n-1}X_i-\sum_{i=s}^{n-1}X_i\right)W_s\right]-X_{s-1}W_{s-1}.$$

Заметим, что

$\left(\sum_{i=s-1}^{n-1}X_i-\sum_{i=s}^{n-1}X_i\right)=X_{s-1}+X_s+\ldots+X_{n-1}-X_s-X_{s+1}-\ldots-X_{n-1}=X_{s-1}$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}X_i\left(E\left(W_{i+1}\big|_{F_s}\right)-E\left(W_i\big|_{F_s}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{s-2}X_i\Delta W_{i+1}+X_{s-1}W_s-X_{s-1}W_{s-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{s-2}X_i\Delta W_{i+1}+X_{s-1}\Delta W_s=$$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{s-1}X_i\Delta W_{i+1}$=(по определению интеграла Ито)= $\int_0^s X_t dW_t$ , ч.т.д.

7. пусть $X_t:T\times\Omega\to\Re$ – СП. Тогда

$$\int_0^p X_t\,dW_t^2=\int_0^p X_t dt,$$

или в более короткой эквивалентной форме

$$dW^2=dt$$

*Доказательство*: по условию теоремы, докажем, $\lim_{n\to\infty}E\left(\sum_{i=0}^{n-1}X_i\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)\right)=0$, или в с.к. $\lim_{n\to\infty}E\left(\sum_{i=0}^{n-1}X_i\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)\right)^2=0$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\sum_{i=0}^{n-1}X_i\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)\right)^2=\lim_{n\to\infty}E\left(\sum_{i=0}^{n-1}X_i^2\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)^2+2\sum_{i>j}X_iX_j\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)\left(\Delta W_{j+1}^2-\Delta t_{j+1}\right)\right).$$

По определению интеграла Ито процесс $X_t$ не зависит от $\Delta W_t$. Поэтому математическое ожидание произведения есть произведение математических ожиданий и тогда

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\sum_{i=0}^{n-1}X_i\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)\right)^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}E\left(X_i^2\right)E\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)^2+2\lim_{n\to\infty}\sum_{i>j}EX_iEX_jE\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)E\left(\Delta W_{j+1}^2-\Delta t_{j+1}\right).$$

Вспомним, что $E\left(\Delta W_{i+1}\right)^2=\Delta t_{i+1}$. Поэтому двойная сумма $\sum_{i>j}EX_iEX_jE\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)E\left(\Delta W_{j+1}^2-\Delta t_{j+1}\right)=0$. Окончательно,

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\,\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)\right)^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}E\left(X_i^2\right)E\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)^2. \tag{6}$$

Так как $E\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)^2=E\left(\Delta W_{i+1}^4-2\Delta W_{i+1}^2\Delta t_{i+1}+\Delta t_{i+1}^2\right)=$ {по рекуррентной формуле (1) для моментов $E\left(\Delta W_{i+1}^4\right)=3\nu_2^2=3\Delta t_{i+1}^2$, а $E\left(\Delta W_{i+1}^2\right)=\Delta t_{i+1}$} $=3\Delta t_{i+1}^2-2\Delta t_{i+1}^2+\Delta t_{i+1}^2=2\Delta t_{i+1}^2$. Поэтому в (10) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}E\left(X_i^2\right)E\left(\Delta W_{i+1}^2-\Delta t_{i+1}\right)^2=2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}E\left(X_i^2\right)\Delta t_{i+1}^2\le\lim_{n\to\infty}\lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1}E\left(X_i^2\right)\Delta t_{i+1}\right)=\lim_{\lambda\to 0}\lambda\int_0^t E\left(X_t^2\right)dt=0,$$

так как последний интеграл существует и конечен, а длина разбиения стремится к нулю.

Доказали сходимость в с.к., что эквивалентно доказательству исходного утверждения теоремы, ч.т.д.

*Замечание*: для сокращения записи пишут, что $dW^2=dt$. Однако эту запись нужно понимать только как равенство нулю интеграла $\int_a^b X_t\left[dW^2-dt\right]$.

8. $dW^{2+N}=0,\ dWdt=0,\ (dt)^{N+1}=0,\ N>0$ в смысле последнего замечания.
9. Свойство и**нтегрирования многочленов**: Докажем, что

$$\int_0^t W^n\,dW=\frac{1}{n+1}\left(W^{n+1}(t)-W^{n+1}(0)\right)-\frac{n}{2}\int_0^t W^{n-1}\,dt. \tag{7}$$

*Доказательство*: рассмотрим производную по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(W^n\right)\overset{def}{=}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(W+\Delta W\right)^n-W^n}{\Delta t}. \tag{8}$$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\left(W+\Delta W\right)^n=W^n+C_n^1W^{n-1}\Delta W+C_n^2W^{n-2}\Delta W^2+\ldots+C_n^n\Delta W^n.$$

Следовательно, (8) преобразуется к виду:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(W+\Delta W\right)^n-W^n}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{C_n^1W^{n-1}\Delta W+C_n^2W^{n-2}\Delta W^2+\ldots+C_n^n\Delta W^n}{\Delta t}.$$

Применим свойства 7), 8). Тогда $\frac{\Delta W^{2+N}}{\Delta t}=0$, $\frac{\Delta W^2}{\Delta t}=1$ при $\Delta t\to 0$ и поэтому

$$d\left(W^n\right)=C_n^1W^{n-1}dW+C_n^2W^{n-2}\,dt.$$

Интегрируя это выражение на промежутке $[0,t]$, имеем:

$$\int_0^t d\left(W^n\right)=\int_0^t n\,W^{n-1}dW+\frac{n(n-1)}{2}\int_0^t W^{n-2}\,dt,$$

или

$$W^n\Big|_0^t = \int_0^t n\,W^{n-1}dW + \frac{n(n-1)}{2}\int_0^t W^{n-2}\,dt\,.$$

Выразим $\int_0^t W^{n-1}dW$ : $\int_0^t W^{n-1}dW = \frac{1}{n}W^n\Big|_0^t - \frac{(n-1)}{2}\int_0^t W^{n-2}\,dt$ . Сдвигая индекс на единицу в этом выражении, окончательно получаем:

$$\int_0^t W^n\,dW = \frac{1}{n+1}\left(W^{n+1}(t) - W^{n+1}(0)\right) - \frac{n}{2}\int_0^t W^{n-1}\,dt\,,$$

что и требовалось доказать.

*Замечание*: формула интегрирования многочленов является аналогом формулы интегрирования по частям. Кроме того, нетрудно заметить, что в (7) имеется добавок $-\frac{n}{2}\int_a^b W^{n-1}\,dt$ , возникающий только из–за стохастичности подынтегральной функции $W^n$ .

10. Пусть $f(t)$ – детерминированная функция, интегрируемая с квадратом на интервале $[0,t]$. Тогда интеграл Ито для нее имеет нормальное распределение

$$I(t) = \int_0^t f(p)dW_p \sim N\left(0, \int_0^t |f(p)|^2\,dp\right).$$

***Доказательство*** следует по свойствам 4 и 5 для интеграла Ито, а так же из определения интеграла Ито, так как приращения винеровских процессов независимы и нормально распределены, а конечная сумма нормально распределенных случайных величин нормально распределена. Кроме того, известно свойство нормально распределенных случайных величин: среднеквадратичный предел последовательности таких случайных величин не меняет своего распределения.

### *Формула Ито*

Формула Ито является основной при интегрировании случайных процессов. Ее замечательные свойства позволяют получить основные уравнения и краевые задачи, являющие следствием соответствующих математических моделей. Рассматривая свойства интеграла, мы вплотную подошли к ее формулировке.

***Теорема 4 (одномерная формула Ито)***: пусть $f(t,W)$ – некоторый случайный процесс. Тогда

$$df(t,W) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial W}dW\,, \qquad (9)$$

или в интегральной форме

$$f\Big|_0^t = \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2} \right) dt + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial W} dW . \qquad (10)$$

Если имеется случайный процесс $X(t,S)$, где $S$=$S$($t$,$W$), то формула Ито будет иметь вид:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial t} dt + \frac{\partial X}{\partial W} dW + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial W^2} dX^2 .$$

*Доказательство*: докажем только формулу (9), для чего рассмотрим функцию $f(t,W)$ как функцию двух переменных. Применим к ней разложение в ряд Тейлора в окрестности точек разбиения $0 = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_{n-1} < t_n = t$ :

$$\Delta f_i = \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t_i + \frac{\partial f}{\partial W} \Delta W_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2} \Delta W_i^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial W} \Delta W_i \Delta t_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t_i^2 + o\left(\Delta t_i^2, \Delta W_i^2\right),\ i = \overline{1, n-1}.$$

Суммируя по $i = \overline{1, n-1}$ и устремляя $\lambda = \max\limits_{i=0,n-1} \left(t_{i+1} - t_i\right)$ к нулю, имеем:

$$f_n - f_0 = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}\, dt + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial W}\, dW + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} dt . \qquad (11)$$

Заметим, что при этом мы воспользовались свойствами 7) и 8) интеграла Ито: $dW^2 = d\,t,\ dW^{2+N} = 0,\ dW\,dt = 0,\ (dt)^{N+1} = 0,\ N > 0$ .

Таким образом, выражение (11) совпадает с (10). Вспоминая о принятых обозначениях, получаем (9), ч.т.д.

По аналогии с теоремой 4 можно доказать, что справедлива двумерная формула Ито:

***Теорема 5 (двумерная формула Ито)***: пусть $f(t, W_1, W_2)$ – некоторый двумерный случайный процесс. Тогда

$$df(t,W) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial W_1} dW_1 + \frac{\partial f}{\partial W_2} dW_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W_1^2} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W_2^2} dt + \frac{\partial^2 f}{\partial W_1 \partial W_2} \rho\, dt ,$$

где $\rho = corr(dW_1, dW_2)$ – взаимная корреляция между двумя различными винеровскими процессами.

## РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Решение линейных неоднородных уравнений

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение вида:

$$dX_t = \left(c_1(t) X_t + c_2(t)\right) dt + \left(\sigma_1(t) X_t + \sigma_2(t)\right) dW_t , \qquad (12)$$

с некоторыми функциями $c_1(t), c_2(t), \sigma_1(t), \sigma_2(t)$ .

*Определение* [22]: процессы, являющиеся решением уравнения вида (12), называются диффузионными процессами.

*Определение*: говорят, что дифференциальное уравнение $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$ имеет **сильное** решение $X = X_t$, если оно удовлетворяет условиям: а) $X_t$ адаптирован к броуновскому решению, т.е. в фиксированный момент времени $t$ процесс $X_t$ является функцией от $W_s$ для любого $s \le t$; б) интегралы $\int_0^t a(p, X_p)dp$ и $\int_0^t b(p, X_p)dW_p$ определены; в) имеет место функциональная зависимость $X = X(a(t),b(t),W)$. При этом процесс $X = X_t$ при подстановке в исходное дифференциальное уравнение обращает его в верное тождество.

: говорят, что дифференциальное уравнение $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$ имеет **слабое** решение $(X_t,W_t)$, если нет дополнительных условий на функции $a(t, X_t), b(t, X_t)$, а требуется найти процессы $X_t$, $W_t$, при подстановке которых в исходное дифференциальное уравнение оно обращается в верное тождество на некотором вероятностном пространстве.

***Теорема*** (существования и единственности): пусть начальное условие $X_0$ для решения дифференциального уравнения $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$ не зависит от $W_t$ и $E(X_0^2) < \infty$. Пусть для каждого момента времени $t$, для каждых двух действительных чисел $x$, $y$ коэффициенты $a(t, x), b(t, y)$ удовлетворяют условиям: а) они непрерывны как функции двух переменных; b) они удовлетворяют условию Липшица по случайной переменной с некоторой действительной постоянной $K$, не зависимой от $X_t$, $Y_t$:

$$| a(t, X_t) - a(t, Y_t) | + | b(t, X_t) - b(t, Y_t) | \le K | X_t - Y_t | .$$

Тогда дифференциальное уравнение $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$ имеет единственное сильное решение $X_t$, на интервале изменения $t$.

Согласно приведенной теореме уравнение (12) имеет единственное сильное решение (условие Липшица выполнено для любых $X_t$, $Y_t$, если $| c_1 | + | \sigma_1 | \le K$ при фиксированном значении $t$). Значит, все уравнения, полученные из (12) как частные случаи, так же будут иметь единственное сильное решение.

Рассмотрим частный случай. Пусть $c_2(t) = \sigma_2(t) = 0$. Пусть уравнение (12) имеет вид:

$$dS = c_1(t)Sdt + \sigma_1(t)SdW, \; S_0 = 1,$$

Такое уравнение принято называть линейным **однородным** уравнением. Оно допускает решение с помощью разделения переменных.

Для его решения введем новую переменную $F = \ln S$. Тогда по формуле Ито

$$dF = \frac{dF}{dS}dS + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dS^2}dS^2 = \frac{1}{S}dS - \frac{1}{2S^2}dS^2 .$$

Очевидно, что $dS^2 = (c_1 S\,dt + \sigma_1 S dW)^2 = c_1^2 S^2 dt^2 + \sigma_1^2 S^2 dW^2 + 2c_1\sigma_1 S^2\,dt\,dW =$ (по свойствам 7), 8) интеграла Ито) $= \sigma_1^2 S^2\,dt$. Окончательно,

$$dF = \frac{1}{S}(c_1 S\,dt + \sigma_1 S\,dW) - \frac{1}{2S^2}\sigma_1^2 S^2\,dt = \left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)dt + \sigma_1\,dW\,.$$

Заметим, что такая замена переменного помогает в нахождении решения уравнения $dS = c_1(t)Sdt + \sigma_1(t)SdW$. Действительно, имеем:

$$\int_0^t \frac{dS}{S} = \int_0^t c_1 dp + \int_0^t \sigma_1 dW_p\,.$$

Вся сложность нахождения решения сведена к вычислению стохастического интеграла $\int_0^t \frac{dS}{S}$, так как остальные интегралы вычисляются по известным алгоритмам курса математического анализа. Например, $\int_0^t c_1\,dp$ является обычным римановым интегралом.

Вычислим $\int_0^t \frac{dS}{S}$ по формуле Ито:

$$d(\ln S) = \frac{dS}{S} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 dt\,,$$

откуда

$$\frac{dS}{S} = d(\ln S) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 dt\,.$$

Поэтому $\int_0^t \frac{dS}{S} = \int_0^t d(\ln S) + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_1^2 dp$. Подставляя, окончательно получим:

$$\ln S\Big|_0^t = \int_0^t \left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)dp + \int_0^t \sigma_1\,dW_p\,. \tag{13}$$

Полагая, что в начальный момент времени случайная величина $S(t,\omega)$ имела распределение $S(0,\omega) = S_0 = 1$, находим решение $S(t,\omega)$ дифференциального уравнения:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t + \sigma_1 W\right), \tag{14}$$

если $\sigma_1, c_1 = const$.

Используем решение уравнения (14) для формирования решения уравнения (12). Пусть $S_0 = 1$. Рассмотрим вспомогательное отношение $\frac{X_t}{S_t}$, где $X_t$ удовлетворяет (12), а $S_t$ является решением линейного однородного уравнения и вычисляется согласно (13). Вычислим дифференциал $d\left(\frac{X_t}{S_t}\right)$, используя формулу дифференцирования по частям. Имеем:

$$d\left(\frac{X_t}{S_t}\right)=d(X_t)\frac{1}{S_t}+X_t d\left(\frac{1}{S_t}\right)+d(X_t)d\left(\frac{1}{S_t}\right). \tag{15}$$

Известно, что $dS_t=c_1(t)S_t dt+\sigma_1(t)S_t dW$, $dX_t=(c_1(t)X_t+c_2(t))dt+(\sigma_1(t)X_t+\sigma_2(t))dW_t$ по условию исходной задачи. В то же время по формуле Ито

$$d\left(\frac{1}{S_t}\right)=-\frac{dS_t}{S_t^2}+\frac{(dS_t)^2}{S_t^3},$$

где $(dS_t)^2=\sigma_1^2 S^2 dt$ .Поэтому

$$d\left(\frac{1}{S_t}\right)=-\frac{c_1(t)dt+\sigma_1(t)dW}{S_t}+\frac{\sigma_1^2}{S_t}dt .$$

Наконец, $d(X_t)d\left(\frac{1}{S_t}\right)=\frac{-\sigma_1^2 X_t}{S_t}dt-\frac{\sigma_1\sigma_2}{S_t}dt$. Собирая все слагаемые в выражении (15) и упрощая, получаем:

$$d\left(\frac{X_t}{S_t}\right)=\frac{(c_2-\sigma_1\sigma_2)}{S_t}dt+\frac{\sigma_2 dW}{S_t}.$$

Так как $S_t$ уже известно, то каждое слагаемое в выражении выше может быть проинтегрировано непосредственно. Этого достаточно, чтобы найти требуемую функцию $X_t$:

$$\left.\frac{X_t}{S_t}\right|_0^t=\int_0^t\frac{(c_2-\sigma_1\sigma_2)}{S_p}dp+\int_0^t\frac{\sigma_2 dW_p}{S_p},$$

откуда

$$X_t=S_t\left(X_0+\int_0^t\frac{(c_2-\sigma_1\sigma_2)}{S_p}dp+\int_0^t\frac{\sigma_2 dW_p}{S_p}\right), t\ge 0, \tag{16}$$

где $S_t=S_0\exp\left(\int_0^t\left(c_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)dp+\int_0^t\sigma_1\,dW_p\right)$.

**Пример**: решить уравнение $dX_t=(tX_t-t^2)dt+(X_t+t)dW_t$, $X_0 = 0$.

Решение основано на применении формулы (16), в которой $c_1(t)=t$, $c_2(t)=-t^2, \sigma_1(t)=1, \sigma_2(t)=t$. Поэтому

$$S_t=S_0\exp\left(\int_0^t\left(c_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)dp+\int_0^t\sigma_1\,dW_p\right)=\exp\left(\int_0^t\left(p-\frac{1}{2}\right)dp+\int_0^t dW_p\right)=\exp\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+W_t\right),$$

$$X_t = S_t\left(-\int_0^t \frac{p^2+p}{S_p}dp + \int_0^t \frac{pdW_p}{S_p}\right), t \geq 0.$$

2) Решение уравнения Орнштейна – Уленбека.

Пусть $S(t,\omega)$ – скорость частицы массой $m$, находящейся в подвижной среде и движущейся под воздействием множественных случайных взаимодействий частиц друг с другом. Пусть при этом имеется трение вида $\beta S(t,\omega)$. Тогда $S(t,\omega)$ удовлетворяет уравнению Ланжевена:

$$dS = m\beta S\,dt + \sigma dW = \mu S\,dt + \sigma dW, \tag{17}$$

где $\mu = m\beta$.

Уравнению (17) можно дать и экономическую формулировку: пусть $S(t,\omega)$ – скорость продажи или покупки некоторого актива стоимостью $m$, причем плата за ведение торговых операций равна $\beta S(t,\omega)$. Тогда $S(t,\omega)$ удовлетворяет (17).

Стохастическое уравнение (17) принято называть уравнением Орнштейна – Уленбека. Оно существенно нелинейно и разделить переменные, как это было проделано для уравнения (12), не удается.

Для нахождения решения умножим (17) на интегрирующий множитель. В самом общем случае вид множителя будет зависеть от типа решаемого уравнения. К сожалению, общего алгоритма для определения этого множителя не существует.

Умножим (17) на функцию $\exp(-\mu t)$:

$$e^{-\mu t}dS = e^{-\mu t}\mu S\,dt + e^{-\mu t}\sigma dW. \tag{18}$$

Пользуясь формулой Ито, сделаем замену переменного $F = e^{-\mu t}S$ в (18):

$$d\left(e^{-\mu t}S\right) = -\mu e^{-\mu t}S\,dt + e^{-\mu t}dS + \frac{1}{2}\cdot 0 \cdot dS^2. \tag{19}$$

Заметим, что в (18) $e^{-\mu t}dS - e^{-\mu t}\mu S\,dt = e^{-\mu t}\sigma dW$. В соответствии с (19) имеем:

$$d\left(e^{-\mu t}S\right) = e^{-\mu t}dS - \mu e^{-\mu t}S\,dt = e^{-\mu t}\sigma dW,$$

или, отбрасывая промежуточное соотношение,

$$d\left(e^{-\mu t}S\right) = e^{-\mu t}\sigma dW.$$

Данная форма записи является более удобной. Она позволяет проинтегрировать (18) и найти его решение напрямую. После интегрирования по промежутку $[0,t]$, имеем:

$$\int_0^t d\left(e^{-\mu t}S\right) = \int_0^t e^{-\mu t}\sigma dW.$$

Вследствие неизвестной функциональной природе параметров μ, σ (они могут быть произвольными функциями) вычислить $\int_0^t e^{-\mu t}\sigma\, dW$ в общем случае не представляется возможным. Тем не менее, $\int_0^t d\left(e^{-\mu t}S\right)$ легко вычисляется:

$$\int_0^t d\left(e^{-\mu t}S\right) = e^{-\mu t}S\Big|_0^t = e^{-\mu t}\left(S - S_0\right),$$

где $S_0$ – некоторое начальное распределение случайного процесса $S(t,\omega)$. Предположим, что это распределение нормально. Тогда

$$S = S_0 + \int_0^t \sigma e^{\mu\,(t-s)} dW(s) \tag{20}$$

так же будет нормальным с некоторыми параметрами.

Данная формула определяет вид решения уравнения (17). Остается найти параметры нормального распределения. Предположим, что $S(t,\omega)$ является процессом, независимым от приращений винеровского процесса. Тогда согласно (20) имеем:

a) $E(S) = E(S_0) + E\left(\int_0^t \sigma e^{\mu\,(t-s)} dW(s)\right) =$ (по свойству 4 интеграла Ито) $= E(S_0)$.

b) $D(S) = E(S - E(S))^2 =$ (по свойству 4 интеграла Ито, пользуясь тем, что $S_0$ не зависит от $dW$):

$$E\left(S_0 \int_0^t \sigma e^{\mu\,(t-s)} dW(s)\right) = 0 =$$

$$= E\left(S_0 + \int_0^t \sigma e^{\mu\,(t-s)} dW(s) - E(S_0)\right)^2 = E(S_0 - E(S_0))^2 + E\left(\int_0^t \sigma e^{\mu\,(t-s)} dW(s)\right)^2 = D(S_0) +$$

$$+ D\left(\int_0^t \sigma e^{\mu\,(t-s)} dW(s)\right) = D(S_0) + \int_0^t \sigma^2 e^{2\mu\,(t-s)} ds \text{ (по свойству изометрии Ито).}$$

3) Решение обобщенного уравнения Орнштейна – Уленбека.

Рассмотрим обобщенное уравнение Орнштейна-Уленбека

$$dS = f(t,S)\,dt + c(t)\,S\,dW,\; S\big|_{t=0} = S_0,$$

где $f(t,S)$, $c(t)$ – некоторые непрерывные функции, вид которых известен. В этом случае имеет место следующий алгоритм:

a) Вводим интегрирующий **множитель Гирсанова** $F = \exp\left(-\int_0^t c\,dW + \frac{1}{2}\int_0^t c^2 dt\right)$. Умножая на него исходное уравнение, получаем:

$$F\,dS = F\;f\;d\,t + FcS\,dW\,. \tag{21}$$

b) Найдем $d(FS)$ по формуле Ито и **формуле интегрирования по частям**

$$d(FS) = F\,dS + S\,dF + dF\,dS\,.$$

По формуле Ито имеем:

$$dF = \left[\exp\left(-\int_0^t c\,dW + \frac{1}{2}\int_0^t c^2 dt\right)\right]' = -cFdW + \frac{c^2}{2}Fdt + \frac{c^2}{2}Fdt\,,$$

где $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{c^2}{2}F$, $\dfrac{\partial F}{\partial W} = -cF$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial W^2} = c^2 F$. Поэтому, собирая,

$$dF = F\left(c^2\,dt - c\,dW\right).$$

Поэтому $d(FS) = F\,dS - cSF\,dW$. Сравнивая это выражение с (21), получаем, что исходное дифференциальное уравнение перепишется в виде

$$d(FS) = Ffd\,t\,. \tag{22}$$

c) Введем новую переменную $Z(t,\omega) = F(t,\omega)S(t,\omega)$. Тогда уравнение (22) запишется в виде

$$d\,Z = Ff\left(t, \frac{Z}{F}\right)d\,t\,, \tag{23}$$

с начальным условием $Z(0,\omega) = F(0,\omega)S(0,\omega) =$ (так как $S\big|_{t=0} = S_0$) $= 1\cdot S_0 = S_0$.

d) Полагая элементарные события фиксированными параметрами, решаем (23) как обычное дифференциальное уравнение первого порядка. Найдя $Z(t,\omega) = F(t,\omega)S(t,\omega)$, делаем обратную замену и переходим к искомому решению $S(t,\omega) = \dfrac{Z(t,\omega)}{F(t,\omega)}$.

***Замечание***: этот подход применяется при решении класса дифференциальных уравнений

$$dS = S^\gamma dt + \alpha S\,dW,\ S\big|_{t=0} = S_0\,,$$

где $\alpha$, $\gamma$ – некоторые известные константы. Не стоит путать такое уравнение с CEV-моделью (уравнением Кокса):

$$dS = \mu S dt + \sigma S^\gamma dW,\ S\big|_{t=0} = S_0\,,$$

где $\mu$ – дрифт, $\gamma \ge 0, \gamma \ne 1, \gamma$ – параметр, определяющий соотношение между волатильностью и ценой актива.

4) Преобразование Ламперти

Некоторое заданное уравнение вида

$$dX = b(t, X)dt + \sigma(X)\,dW,\ X\big|_{t=0} = X_0$$

всегда можно преобразовать к более простому виду

$$dY = \tilde{b}(t, Y)dt + dW,\ Y\big|_{t=0} = 0$$

с помощью интегрального преобразования Ламперти

$$Y_t = \int_{X_0}^{X_t} \frac{du}{\sigma(u)}.$$

Действительно, по формуле Ито

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial X}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}(dX)^2 = \frac{dX}{\sigma(X)} - \frac{1}{2}\frac{\sigma'_X(X)}{\sigma^2}\sigma^2 dt = \frac{dX}{\sigma(X)} - \frac{1}{2}\sigma'_X(X)dt.$$

Подставляя выражение для дифференциала $dX$, получаем:

$$dY = \frac{b(t, X)dt + \sigma(X)\,dW}{\sigma(X)} - \frac{1}{2}\sigma'_X(X)dt = \left(\frac{b}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma'_X\right)dt + dW = \tilde{b}(t, Y)dt + dW,$$

где $\tilde{b}(t, Y) = \left(\dfrac{b(t, F^{-1}(Y))}{\sigma(F^{-1}(Y))} - \dfrac{1}{2}\sigma'_X\left(F^{-1}(Y)\right)\right)$, $F(X_t) = \displaystyle\int_{X_0}^{X_t}\frac{du}{\sigma(u)}$, $F^{-1}(\cdot)$ – обратная к $F$ функция.

Таким образом, преобразование Ламперти в некоторых случаях позволяет свести исходное уравнение к уравнению Орнштейна – Уленбека, алгоритм решения которого приведен ранее.

**Пример 1**:

Рассмотрим уравнение

$$dX = tX\,dt + X^2 dW,\ X\big|_{t=0} = X_0,$$

то есть $b(t, X) = tX, \sigma(X) = X^2$. Тогда $\sigma'_X(X) = 2X$ и $Y_t = \displaystyle\int_{X_0}^{X_t}\frac{du}{u^2}$, откуда $X_t = \dfrac{X_0}{1 - X_0 Y_t}$.

Поэтому преобразованное уравнение принимает окончательный вид:

$$dY = \left(\frac{t}{X} - X\right)dt + dW = \left(\frac{t(1 - X_0 Y)}{X_0} - \frac{X_0}{1 - X_0 Y}\right)dt + dW.$$

Это уравнение сложнее для решения, чем исходное.

**Пример 2**:

Рассмотрим уравнение

$$dX = tX\,dt + XdW,\ X\big|_{t=0} = X_0,$$

для решения которого можно разделить переменные, но мы применим преобразование Ламперти. В этом случае $b(t, X) = tX$, $\sigma(X) = X$, $\sigma'_X(X) = 1$ и $Y_t = \int\limits_{X_0}^{X_t} \frac{du}{u}$, т.е. $X_t = X_0 \exp(Y_t)$.

Поэтому преобразованное уравнение принимает вид:

$$dY = \left(t - \frac{1}{2}\right)dt + dW ,$$

а решение находится непосредственным интегрированием обеих частей, причем обратное преобразование $Y_t = \ln X_t - \ln X_0$ позволит найти решение уравнения $dX = tX\, dt + XdW$ .

Преобразованное по Ламперти уравнение оказалось легче для решения, чем исходное.

5) Решение стохастического дифференциального уравнения с помощью замены переменного.

   В этом случае решение ДУ происходит за счет выделения полного дифференциала по формуле Ито. Например, для решения уравнения

$$dS = \frac{1}{3}\sqrt[3]{S}dt + \sqrt[3]{S^2}\, dW$$

подойдет замена переменного $Z = 3S^{1/3}$.

6) Решение стохастического дифференциального уравнения с помощью подбора новой переменной $F$=$F$($t$,$S$). Подбор происходит по формуле Ито сравнением $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(dS)^2$ и детерминированной части исходного стохастического уравнения. Например, для уравнения

$$dS = \frac{1}{S^{1/2}}dt + \alpha\sqrt{S}\, dW$$

   нужно сначала разделить обе его части на $\sqrt{S}$ , а затем найти новую переменную $F$ из равенства $\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = \frac{2}{\alpha^2 S^2}$ .

7) Решение стохастического дифференциального уравнения с использованием теоремы Гирсанова. Например, для уравнения $dS = (S + t)dt + dW$ лучше всего ввести новый винеровский процесс $\overline{W} = W + \frac{t^2}{2}$ и перейти к уравнению $dS = Sdt + d\overline{W}$ .

   В целом, теорема Гирсанова позволяет иногда «обнулить» стоящее в правой части дифференциального уравнения слагаемое при $dt$. Например, для линейного однородного уравнения

$$dS = c_1(t)Sdt + \sigma_1(t)SdW,$$

рассмотренного выше, переход к эквивалентной вероятностной мере с введением нового винеровского процесса $\overline{W} = W + \frac{c_1}{\sigma_1}t$ позволяет упростить уравнение:

$$dS = c_1Sdt + \sigma_1SdW = c_1Sdt + \sigma_1S\left(d\overline{W} - \frac{c_1}{\sigma_1}dt\right) = c_1Sdt + \sigma_1Sd\overline{W} - c_1Sdt = \sigma_1Sd\overline{W},$$

или

$$dS = \sigma_1Sd\overline{W},$$

т.е. выражение при $dt$ «исчезло». Однако после нахождения решения дифференциального уравнения требуется вернуться к первоначальному винеровскому процессу *W*, иначе свойство мартингальности, присущее линейным однородным уравнениям, пропадет.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

## УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА-КОЛМОГОРОВА

Первое уравнение, которое будет рассмотрено ниже, называется уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова. Оно является одним из основных в теории случайных процессов. Оно будет получено из так называемого диффузионного приближения (броуновского движения), что является частным случаем общей теории марковских процессов.

*Определение*: броуновским движением называется движение частиц, причем движение каждой частицы в отдельности не зависит от движения других частиц. Кроме того, движения этой частицы в разные временные интервалы считаются независимыми до тех пор, пока временные интервалы движения не слишком малы (т.е. бесконечно малые интервалы по времени отбрасываются).

Эйнштейн показал, что движение броуновской частицы вызывается частыми соударениями с окружающими ее частицами. Полагая нерегулярность таких взаимодействий, а так же допуская статистически независимые удары, приходим к выводу, что поведение частицы может быть описано только вероятностным законом. Найдем этот закон распределения вероятности. Для этого обозначим через $P(t, x_1, t_1, x)$ вероятность перехода частицы с координатами $x_1$в момент времени $t$ в точку с координатами *x* в момент времени $t_1, t_1 > t$. Допустим, что переходы частицы совершаются в моменты времени $t_0 = t_{s_0} < t_{s_2} ... < t_{s_k} < t < t_1 < t_{s_{k+1}} < ... t_{s_n}$. Пусть вероятность перехода из состояния $x_1$ в состояние *x* не зависит от $t_{s_0}, t_{s_1}, ..., t_{s_n}$, а зависит только от $t_1, t$. Так как движения в разные временные интервалы независимы, то суммируя по ним, получаем, что вероятность перехода частицы из точки $x_0$ в момент времени $t_0$ в область состояний от точки $x$ до точки $x+\Delta x$ к моменту времени $t_1$ есть

$$P(t_0, x_0, t_1, x)\,\Delta x, \tag{24}$$

потому что вероятность перейти в каждую точку интервала постоянна и равна $P(t_0, x_0, t_1, x)$.

Покажем, что справедливо равенство вида:

$$P(t_0, x_0, t_1, x) = \int P(t_0, x_0, t, z) P(t, z, t_1, x) dz\,. \tag{25}$$

Действительно, по (25) вероятность перехода из точки $x_0$ в промежуток $[z, z+\Delta z]$ к моменту $t$ равна $P(t, z, t_1, x)\,\Delta x$. Учитывая, что $\Delta x$ имеет один порядок малости с $\Delta z$, получаем, что переход из $z$ в $x$ ко времени $t_1$ будет осуществлен с вероятностью $P(t, z, t_1, x)\,\Delta z$. В силу взаимной независимости переходов из $x_0$ в $z$ и из $z$ в $x$ получаем, что вероятность перехода из $x_0$ в $x$ равна произведению вероятностей перехода:

$$P(t_0, x_0, t_1, x) = P(t_0, x_0, t, z) P(t, z, t_1, x) \Delta z\,. \tag{26}$$

Пусть $z_0 < z_1 ... < z_n$ – некоторые промежуточные состояния между $z$ и $z+\Delta z$. Так как (26) выполнено для всех $z_i$, $i=\overline{0,n}$, то

$$P(t_0, x_0, t_1, x) = \sum_{i=1}^{n} P(t_0, x_0, t_1, z_i) P(t_1, z_i, t, x) \Delta z_i\,.$$

Переходя к пределу при $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} (z_i - z_{i-1})$ стремящемся к нулю, получаем, что

$$P(t_0, x_0, t_1, x) = \int P(t_0, x_0, t, z) P(t, z, t_1, x) dz\,,$$

что и требовалось доказать.

Уравнение (25) называют уравнением Чепмена – Колмогорова. Это нелинейное функциональное уравнение связывает все вероятности перехода друг с другом. Вследствие своей сложности и нелинейности оно редко решается в чистом виде, но часто применяется при выводе других уравнений, описывающих ту или иную систему частиц.

Используем (25) при выводе уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (УФПК). Умножим обе его части на трижды непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условию $\varphi|_{x=a} = \varphi'|_{x=b} = \varphi|_{x=b} = \varphi'|_{x=a} = 0$. Затем интегрируем обе части полученного равенства по $x$ на $[a, b]$:

$$\int_a^b \varphi(x) P(t_0, x_0, t_1, x) dx = \int_a^b \varphi(x) \left\{ \int P(t_0, x_0, t, z) P(t, z, t_1, x) dz \right\} dx\,.$$

Пусть интервал изменения переменной $z$ есть интервал $[a, b]$. По теореме Фубини,

$$\int_a^b \varphi(x)P(t_0,x_0,t_1,x)dx = \int_a^b P(t_0,x_0,t,z)\left\{\int_a^b \varphi(x)P(t,z,t_1,x)dx\right\}dz\,. \tag{27}$$

Разложим $\varphi(x)$ в ряд Тейлора до второго члена включительно в окрестности точки $Z$:

$$\varphi(x)=\varphi(z)+\varphi'(z)(x-z)+\frac{1}{2}\varphi''(z)(x-z)^2+\frac{1}{6}\varphi'''(\theta)(x-z)^3,\ \theta\in[x,z]\,.$$

Заметим, что последнее слагаемое является остаточным членом в форме Лагранжа. Обозначим его через $r_2(x)=\frac{1}{6}\varphi'''(\theta)(x-z)^3$. Тогда, подставляя выражение для $\varphi(x)$ в правую часть (27), имеем:

$$\int_a^b \varphi(x)P(t_0,x_0,t_1,x)dx = \int_a^b P(t_0,x_0,t,z)\left(\varphi(z)\int_a^b P(t,z,t_1,x)dx + \int_a^b \varphi'(z)(x-z)P(t,z,t_1,x)dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_a^b \varphi''(z)(x-z)^2 P(t,z,t_1,x)dx + \int_a^b r_2(x)P(t,z,t_1,x)dx\right)dz\,.$$

Так как $P(t,z,t_1,x)$ – плотность распределения вероятности, то $\int_a^b P(t,z,t_1,x)dx = 1$.

Поэтому

$$\int_a^b \varphi(x)P(t_0,x_0,t_1,x)dx - \int_a^b P(t_0,x_0,t,z)\varphi(z)dz = \int_a^b P(t_0,x_0,t,z)\left(\int_a^b \varphi'(z)(x-z)P(t,z,t_1,x)dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_a^b \varphi''(z)(x-z)^2 P(t,z,t_1,x)dx + \int_a^b r_2(x)P(t,z,t_1,x)dx\right)dz\,. \tag{28}$$

Обозначим $\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{E_z[(x-z)]}{\tau} = A(x,t)$, $\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{E_z[(x-z)^2]}{\tau} = 2k_{11}(x,t)$, если они существуют.

Предположим, что вероятность больших отклонений за малое время стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{E(r_2(x))}{\tau} = 0$.

Деля (28) на $\tau$, интегрируя полученное выражение по частям, учитывая, что $\int_a^b P(t,z,t_1,x)dx = 1$, перейдем к пределу при $\tau\to 0$. Тогда в силу условий на $\varphi(x,y)$ и в силу сделанных обозначений получим:

$$\int_a^b \varphi(x)\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial(AP)}{\partial x} - \frac{\partial^2(k_{11}P)}{\partial x^2}\right]dx = 0\,,$$

Так как $\varphi(x, y)$ – произвольная функция, то последнее равенство справедливо $\Leftrightarrow$ когда выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. Следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 (k_{11} P)}{\partial x^2} - \frac{\partial (AP)}{\partial x}. \tag{29}$$

Уравнение вида (29) называют УФПК или уравнением Колмогорова вперед, т.к. его решение определяется через начальную вероятность $P(t_0, x_0) = p_0$ и вычисляется в будущие моменты времени. Движение происходит вперед по времени. Наряду с (29) можно рассмотреть уравнение Колмогорова назад:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 (k_{11} P)}{\partial x^2} + \frac{\partial (AP)}{\partial x}.$$

*Замечание* (о применимости УФПК): при построении урававнения (29) был осуществлен предельный переход в (28) при $\tau \to 0$. Если границы временного промежутка есть $[0, T]$, то условие малости параметра $\frac{\tau}{T}$ является необходимым (но недостаточным) для возможности описывать броуновское движение с помощью (29). Выполнение этого условия означает, что время между случайными взаимодействиями между частицами пренебрежимо мало по сравнению с общим временем $T$ жизни системы. Это так называемое диффузионное приближение.

Интересный случай возникает при вероятности перехода $P(t, x, t_1, y) = \delta(y - x)$. Очевидно, что это случай винеровского процесса. Тогда (29) не будет зависеть от координаты *x*:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = Z(t),\ P(0) = 0,$$

где $Z(t)$ – случайный процесс с математическим ожиданием нуль и ковариационной функцией $A(t_1, t_2) = 2(t_2 - t_1)$.

### *Граничные уловия УФПК*

Перепишем (29) через поток вероятности, для чего выделим производную по *x*:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial (k_{11} P)}{\partial x} - AP\right).$$

Вводя обозначение $I = \frac{\partial (k_{11} P)}{\partial x} - AP$, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial I}{\partial x} = 0. \tag{30}$$

Уравнение (30) имеет вид уравнения сохранения или уравнения неразрывности (см. подробнее [19]). В данном случае имеет место сохранение вероятности.

Справедлива следующая теорема:

***Теорема 6* (о полном потоке вероятности):** $\int\limits_{S=\partial G} (\mathrm{I}, \bar{\mathrm{n}})ds$ задает полный поток вероятности через поверхность $S$, являющуюся границей исходной области.

Граничные условия задаются обычно через вектор потока $\bar{I}$. Существует три основных вида граничных условий:

1) граничные условия первого рода: $P\big|_{\partial G} = \alpha(x,t),\ \alpha(x,t)$ – некоторая функция.
2) граничные условия второго рода: $\left.\frac{\partial P}{\partial \mathrm{n}}\right|_{\partial G} = (\nabla P, \mathrm{n})\big|_{\partial G} = \mathrm{I}\big|_{\partial G} = \beta(x,t),\ \beta(x,t)$ – некоторая функция.

   Граничные условия второго рода часто называют мягкими граничными условиями.
3) граничные условия третьего рода (условия непротекания, жесткие граничные условия): $\varphi(x)P\big|_{\partial G} + \psi(x)\left.\frac{\partial P}{\partial \mathrm{n}}\right|_{\partial G} = \alpha(x,t),\quad \alpha(x,t)$ – некоторая функция, $\varphi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0$. При $\alpha(x,t) = 0$ говорят об исчезающем потоке на границе.

Заметим, что граничные условия третьего рода обобщают и понятие граничных условий первого, и граничных условий второго рода. Они получаются, если положить $\psi(x) = 0,\ \varphi(x) = 0$ соответственно.

Запишем граничные условия исходя из физических условий, накладываемых на частицы, совершающих броуновское движение.

a) Отражающая граница – пусть частица не может покинуть границы заданной области *G*, т.е. поток вероятности на границе равен нулю. Согласно теореме 1, $(\mathrm{I}, \bar{\mathrm{n}}) = 0$. В одномерном случае, который нами рассматривается, это означает, что $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=b} = 0,\ G = [a,b]$, т.к. направление вектора нормали совпадает с направлением оси *OX*. Очевидно, что отражающая граница соответствует граничным условиям второго рода.
b) Поглощающая граница – пусть при попадании частицы на границу $\partial G$ она удаляется из системы частиц. В частности, если говорить о пакете акций как о такой системе, то

случай поглощающей границы соответствует условию покупки или продажи при достижении правой или левой границ интервала $G=[a,b]$.

По условию, частица не должна находиться на границе, т.е. вероятность находиться на $\partial G$ равна нулю: $P\big|_{\partial G}=0$.

c) Разрывные граничные условия – пусть в (29) коэффициенты $k_{11}(x,t)$, $A(x,t)$ разрывны, но через $\partial G$ происходит свободное движение частиц. Тогда $[P]\big|_{\partial G}=0, [\mathrm{I}]\big|_{\partial G}=0$, где $[\cdot]$ – скачок функции.

d) Выходная граница (например, для определенности, $x = a$).

Пусть $G=[a,b]$ и $k_{11}(a,t)=\left.\dfrac{\partial k_{11}}{\partial x}\right|_{x=a}=0$. Пусть $A(a,t)<0$. Тогда частица, достигающая границу $x = a$, уходит в область $x < a$. Можно показать, что среднее время достижения такой границы конечно, а решение $P(x,t)$ зависит от времени.

e) Входная граница (например, для определенности, $x = a$).

Пусть $G=[a,b]$ и $k_{11}(a,t)=\left.\dfrac{\partial k_{11}}{\partial x}\right|_{x=a}=0$. Пусть $A(a,t)>0$. В этом случае частица, достигающая границы $x = a$, возвращается в область $G$, т.е. частица никогда не покидает $G$ через $x = a$. Можно показать, что в этом случае существует стационарное решение $P(x)$, но среднее время достижения границы бесконечно велико.

f) Хотя бы одно достижение границы за время $t$.

Пусть $P(x,t)$ – вероятность того, что частица, находящаяся в момент времени $t = 0$ в точке $x\in[a,b]$, за время $t$ хотя бы раз достигнет точки $x = a$ или $x = b$. Пусть $B(x,t,\xi)\Delta\xi$ – вероятность перехода частицы за время $t$ из т. $x$ в интервал $(\xi,\xi+\Delta\xi)$. Предположим при этом, что частица не будет находиться на границе $x = a$ или $x = b$ ни разу.

В соответствии со сделанными обозначениями вероятность того, что частица, находящаяся в т. $x$ в момент $t = 0$, будет лежать внутри $(a,b)$, ни разу не коснувшись границ, равна

$$\int_a^b B(x,t,\xi)d\xi .$$

В то же время, вероятность коснуться границ равна $P(x,t)$. Суммируя вероятности $\int_a^b B(x,t,\xi)d\xi$ и $P(x,t)$, получаем единицу как при сложении вероятностей противоположных событий:

$$\int_a^b B(x,t,\xi)d\xi + P(x,t) = 1 .$$

Покажем, что для $P(x,t)$ справедлив аналог теоремы Чепмена – Колмогорова:

$$P(x,t+\Delta t) = P(x,\Delta t) + \int_a^b B(x,\Delta t,\xi)P(\xi,t)d\xi . \qquad (31)$$

Действительно, вероятность $P(x,t+\Delta t)$ того, что за время $(t+\Delta t)$ произойдет хотя бы одно достижение границы, равно сумме вероятности $P(x,\Delta t)$ хотя бы одного достижения границы за время $\Delta t$ и вероятности того, что за время $\Delta t$ этого не произойдет (а произойдет за оставшееся время $t$). Вероятность того, что граница будет достигнута за время $t$ вычисляется по формуле $\int_a^b B(x,\Delta t,\xi)P(\xi,t)d\xi$. Складывая вероятности, получаем, что (31) справедлива.

Пользуясь (31), вычислим вероятность нахождения в точке границы $x = a$:

$$P(a,t) = P(a,0) + \int_a^b B(a,0,\xi)P(\xi,t)d\xi .$$

Заметим, что $P(a,0) = 1$, так как частица уже находится на границе, т.е. достигла ее в момент времени $t = 0$. Кроме того, $\int_a^b B(a,0,\xi)P(\xi,t)d\xi = 0$, т.к. частица не движется и $B(a,0,\xi) = 0$. Следовательно,

$$P(a,t) = 1 .$$

По аналогии,

$$P(b,t) = P(b,0) + \int_a^b B(b,0,\xi)P(\xi,t)d\xi = 1 .$$

Определим начальное условие. Заметим, что если $x \neq a$ или $x \neq b$, то $P(x,0) = 0$, т.к. частица не движется и лежит вне границы. Если же $x = a$ или $x = b$, то $P(x,0) = 1$.

Таким образом, решение задачи хотя бы одного достижения границы удовлетворяет уравнению (31) с граничными условиями $P(a,t) = 1,\ P(b,t) = 1$ и начальному условию $P(x,0) = \begin{cases} 0,\ x \in (a,b) \\ 1,\ x = a,\ x = b \end{cases}$.

### *Формулы Фейнмана – Каца*

Диффузионные процессы, описываемые уравнениями типа (12), появляются в физических и математических моделях движения молекул, подвергающихся случайным столкновениям с другими молекулами в газе или в жидкости. Связь между уравнениями диффузии и теплопереноса, записанными в частных производных, и винеровским процессом была обнаружена много позднее при анализе решения, например, уравнения теплопроводности с охлаждением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - K(x)u \text{ , } u(0,x) = f(x), \tag{32}$$

где $K(x)$ – функция, описывающая внешнее охлаждение в точке с координатой $x$. Для решения этого уравнения справедлива следующая теорема:

**Теорема** (Фейнмана - Каца): пусть $u(t,x)$, являющаяся решением уравнения (32) с начальным условием $u(0,x) = f(x)$, – ограниченная функция. Пусть $K(x)$ неотрицательна и непрерывна, $f(x)$ – ограничена и непрерывна. Тогда решение записывается в виде:

$$u(t,x) = E_x\left( \exp\left( -\int_0^t K(W_p)dp \right) f(W_t) \right),$$

где математическое ожидание вычисляется по значениям винеровского процесса $W_t$ при условии, что $W_0 = x$.

*Доказательство*: зафиксируем $t > 0$ и рассмотрим вспомогательный процесс

$$Y_p = \exp(-R(p))u(t-p,W_p),$$

$$R(p) = \exp\left( -\int_0^p K(W_s)ds \right),$$

$p$ – некоторый параметр.

Так как $u(t,x)$ удовлетворяет задаче Коши (32), то эта функция нужное количество раз непрерывно дифференцируем по обеим переменным. По условию теоремы она ограничена. Значит, процесс $Y_p$ так же ограничен и нужное нам количество раз непрерывно дифференцируем. Поэтому к нему можно применить формулу Ито. Имеем:

$$dY_p = -K(W_p)\exp(-R(p))u(t-p,W_p)dp - \frac{\partial u}{\partial t}(t-p,W_p)\exp(-R(p))dp +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}(t-p,W_p)\exp(-R(p))dW_p + \frac{1^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t-p,W_p)\exp(-R(p))dp \,.$$

Вспоминая, что $u(t,x)$ удовлетворяет задаче Коши (32), видим, что все коэффициенты, стоящие при дифференциале $dp$, обнуляют друг друга, т.е.

$$dY_p = \frac{\partial u}{\partial x}(t-p,W_p)\exp(-R(p))dW_p \,.$$

Завершить доказательство помогает интегрирование обеих частей этого уравнения на интервале $[0,p]$ и вычисление условного математического ожидания от обеих частей получающегося равенства (см. доказательство общего случая). Так как математическое ожидание (условное и безусловное) от интеграла Ито равно нулю, получаем доказываемое.

Продемонстрируем еще один способ завершения доказательства. Из мартингальности винеровского процесса в равенстве дифференциалов следует, что процесс $Y_p$ так же является мартингалом (проверьте самостоятельно). По свойству мартингальности («сохранение мартингальности при сдвиге времени») имеем:

$$Y_0 = u(t,x) = E_x(Y_t) = E_x(\exp(-R(t))u(0,W_t)) = E_x(\exp(-R(t))f(W_t)),$$

что и требовалось доказать.

**Замечание**: теорема Фейнмана – Каца обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши (32).

**Теорема** (Фейнмана – Каца, общий случай): пусть ограниченная функция $u(t,x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2(t,x)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{33}$$

с конечным (терминальным) условием $u(T,x) = f(x)$, $f(x)$ – ограничена и непрерывна. Пусть пространственная переменная $x$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx = \mu(t,x)dt + \sigma(t,x)dW\,.$$

Тогда решение уравнения (33) записывается в виде:

$$u(t,x) = E(f(x_T)|x_t = x),$$

где математическое ожидание вычисляется по значениям $x_T$ при условии, что $x_t = x$.

*Доказательство*: пусть $u(t,x)$ – функция, удовлетворяющая (33). В случае, когда переменная $x$ является случайным процессом, по формуле Ито получаем:

$$du(p,x) = \frac{\partial u}{\partial p}dp + \frac{\partial u}{\partial x}dx_p + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx_p)^2,$$

или, расписывая $dx_p$ , имеем:

$$du(p,x) = \frac{\partial u}{\partial p}dp + \frac{\partial u}{\partial x}\mu(p,x_p)dp + \frac{\sigma^2(p,x_p)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dp + \frac{\partial u}{\partial x}\sigma(p,x_p)dW_p\,.$$

Сравнивая последнее выражение с (33) видим, что первые три слагаемые правой части равны нулю. Поэтому

$$du(p,x) = \frac{\partial u}{\partial x}\sigma(p,x_p)dW_p\,.$$

Интегрируя его на промежутке $[t,T]$, имеем:

$$\int_t^T du(p,x)dp = u(T,x_T) - u(t,x_t) = \int_t^T \frac{\partial u}{\partial x}\sigma(p,x_p)dW_p \ .$$

Берем условное математическое ожидание от обеих частей последнего равенства по фильтрации $F_t$, где $t < T$:

$$E\left[u(T,x_T) \mid F_t\right] - u(t,x_t) = E\left[\left(\int_t^T \frac{\partial u}{\partial x}\sigma(p,x_p)dW_p\right)\middle| F_t\right],$$

причем интеграл в правой части равенства равен нулю, так как безусловное, а значит, и условное мат ожидание от интеграла Ито равно нулю.

Окончательно,

$$E\left[u(T,x_T) \mid F_t\right] = u(t,x_t)\,,$$

или с учетом терминального условия

$$u(t,x_t) = E\left[f(x_T) \mid x_t = x\right] = E_x\left[f(x_T)\right], \text{ ч.т.д.}$$

**Пример** применения: пусть задано уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,,$$

если $u(T,x) = x$.

Тогда по формуле Фейнмана – Каца этому уравнению соответствует СДУ вида:

$$dx = xdt + \sigma dW\,.$$

Это известный нам процесс Орнштейна – Уленбека, решение которого мы уже находили. Пусть оно равно $X(t,W)$. Тогда по формуле Фейнмана – Каца решение имеет следующее выражение:

$$u(t,x_t) = E\left[x_T \mid x_t = x\right] = E_x\left[x_T\right].$$

Более сложные примеры использования формулы Фейнмана – Каца приведены в следующем параграфе.

### *Уравнение Колмогорова назад*

*Определение*: инфинитезимальным генератором для стохастического ДУ

$$dx = \mu(t,x)dt + \sigma(t,x)dW$$

называется дифференциальный оператор

$$A(u) = \mu(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2(t,x)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ .$$

**Теорема**: пусть $dX = \mu(t, X)dt + \sigma(t, X)dW$. Тогда для любого борелевского множества на числовой оси переходная вероятность $P(s, x; t, B) \equiv \mathrm{P}(X_t \in B | X_s = x)$ удовлетворяет уравнению Колмогорова назад с инфинитезимальным генератором *A*:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) P(s, x; t, B) = 0 \text{ , } s < t, \tag{34}$$

с конечным условием

$$P(t, x; t, B) \equiv I_B(x) = \begin{cases} 0, x \notin B \\ 1, x \in B \end{cases}.$$

Его решение в операторном виде записывается как

$$P(s, x; t, B) = P(0, x; t, B)\exp(-tA).$$

**Доказательство** следует из примененной «наоборот» формулы Фейнмана – Каца, так как для переходной вероятности выполнено равенство:

$$\mathrm{P}(X_t \in B | X_s = x) = E(I_B(X_t) | X_s = x).$$

**Следствие**: если зафиксировать множество $B = [y, y + dy]$ в условиях доказанной выше теоремы Фейнмана – Каца, то переходная плотность вероятности $p(s, x; t, y)dy = P(s, x; t, B)$ удовлетворяет уравнению (34). Кроме того, $p(s, x; t, y)$стремится к функции Дирака $\delta(x - y)$ при *s* стремящемся к *t*.

Заметим, что уравнения Колмогорова (32) и (34) очень удобны для нахождения характеристик решения стохастических дифференциальных уравнений диффузионного типа $dx = \mu(t, x)dt + \sigma(t, x)dW$. Действительно, рассмотрим, например, уравнение Орнштейна – Уленбека:

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW, \alpha, \sigma = const.$$

Пусть множество $B = (-\infty, y]$. Тогда переходная вероятность $P(s, x; t, B)$ удовлетворяет уравнению (34), переписанному в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial s} - \alpha x \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \text{, } s < t,$$

с конечным условием

$$P(t, x; t, y) \equiv I_{(-\infty, y]}(x) = \begin{cases} 0, x \notin (-\infty, y] \\ 1, x \in (-\infty, y] \end{cases}.$$

Зададим функцию плотности переходной вероятности

$$p(s, x; t, y) = \frac{\partial}{\partial y} P(s, x; t, y).$$

Продифференцируем выражение $\frac{\partial P(s,x;t,y)}{\partial s}-\alpha x\frac{\partial P(s,x;t,y)}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P(s,x;t,y)}{\partial x^2}=0$ по переменной $y$, которая не зависит от переменной $x$.Тогда

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)-\alpha x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0,\ s<t,$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial s}-\alpha x\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0,\ s<t,$$

причем граничное условие $p(t,x;t,y)=\frac{\partial}{\partial y}P(t,x;t,y)=\delta(x-y)$.

Решение этого уравнения диффузии хорошо известно:

$$p(s,x;t,y)=\frac{1}{\sqrt{\pi K}}\exp\left(-\frac{(y-x\exp(-\alpha\tau))^2}{K}\right),$$

где $K=(1-\exp(-2\alpha\tau))\frac{\sigma^2}{\alpha}$, $\tau=(t-s)$.

При $\tau\to\infty$ получаем предельную (стационарную) плотность переходной вероятности для процесса Орнштейна – Уленбека:

$$f(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{\alpha x^2}{\sigma^2}\right).$$

Можно показать (см. [26]), что коэффициенты стохастического уравнения $\mu(X),\sigma(X)$ и предельная плотность $f(X)$ в этом асимптотическом случае связаны следующим соотношением:

$$\sigma^2(x)=\frac{2}{f(x)}\int_0^x\mu(p)f(p)dp.$$

**Замечание**: последний результат можно получить другим способом, если вычислить математическое ожидание и дисперсию решения $X_t$ исходного дифференциального уравнения Орнштейна – Уленбека и записать его плотность распределения. Тогда решение будет $X_t$ будет подчиняться гауссовому закону распределения:

$$X_t=\exp(-\alpha\tau X_s)+\sigma\exp(-\alpha t)\int_s^t e^{\alpha p}dW_p.$$

## ЕВРОПЕЙСКИЕ ОПЦИОНЫ. УРАВНЕНИЕ БЛЭКА – ШОУЛСА

Уравнение Блэка – Шоулса является основным при моделировании покупки и продажи так называемых опционов или производных ценных бумаг.

*Определение*: опционом покупателя (продавца) называется ценная бумага (контракт), дающая держателю опциона **право** купить (продать) определенный актив (пакет акций, облигаций, фьючерсов и т.п.) в установленный период или момент времени на заранее известных условиях. Контрагент **обязан** исполнить обязательства, связанные с правами держателя дериватива, за что он получает плату, называемую ценой контракта. В случае опциона покупателя ее принято обозначать через $C$, в случае опциона продавца – $P$.

Уравнение Блэка – Шоулса возникло из задачи определения справедливой (или равновесной) цены опциона, которая устраивает и покупателя, и продавца. Эта задача была решена Фишером Блэком и Майроном Шоулсом в 1973 году, за что Майрон Шоулс и Роберт Мертон получили Нобелевскую премию в области экономики в 1997 г.

Различают опционы покупателя (call options) и опционы продавца (put options). Если опцион предъявляется к исполнению в определенный момент времени $N$, то говорят об опционе европейского типа. Если же опцион может быть предъявлен к исполнению в любой случайный момент $t \leq N$, то говорят об опционе американского типа.

Рассмотрим подробнее оперирование с опционами европейского типа.

1) Опцион покупателя

Пусть цена опциона равна $C$. Пусть опцион дает право приобрести в момент времени $N$ акции ценой $K$ (цена фиксирована). Пусть в момент времени $N$ фактическая (реальная) стоимость акций равна $S$. Она может быть как больше, так и меньше $K$.

Найдем прибыль покупателя:

a) $S < K$.

В этом случае покупателю выгоднее приобрести акции на рынке, чем предъявить опцион к исполнению. Поэтому прибыль покупателя составит $(-C)$.

b) $S > K$.

В этом случае прибыль покупателя составит $(S–K–C)$.

По аналогии, прибыль продавца составит величину $C$ и $(K + C – S)$ соответственно.

В соответствии с рассуждениями, сделанными выше, следует, что покупка опциона покупателя связана с надеждой на повышение цены актива.

2) Опцион продавца.

Пусть цена опциона равна $P$. Пусть опцион дает право продать в момент времени $N$ акции ценой $K$ (цена фиксирована). Пусть в момент времени $N$ фактическая (реальная) стоимость акций равна $S$. Она может быть как больше, так и меньше $K$. Прибыль продавца в момент времени $N$ составит $(K – S–P)$ в случае $S < K$ и $(–P)$, если $S > K$. Таким образом, покупка опциона продавца связана с надеждой на понижение цены актива.

Для определенности, в дальнейшем будем рассматривать опцион покупателя (случай опциона продавца рассматривается аналогично, см. соотношение call-put). Пусть $V(S,t,\sigma,\mu,E,T,r)$ – равновесная (справедливая) цена опциона покупателя, устраивающая и продавца опциона, и его контрагента (держателя опциона), $E$ – цена исполнения (страйк-прайс), по которой покупатель имеет право приобрести актив в момент времени $T$ (экспирэйшн дэйт, момент окончания действия опциона), $t$ – текущее время, $S$ – фактическая цена актива в момент $t$, $\mu$ – средняя (ожидаемая) доходность базового актива, $\sigma$ – величина риска (волатильность, риск больших отклонений случайного процесса $V$), $r$ – безрисковая процентная ставка.

Заметим, что для классической модели Блэка-Шоулса в функции $V(S,t,\sigma,\mu,E,T,r)$ переменными считаются только $S$, $t$, остальные же играют роль параметров. Поэтому будем обозначать справедливую цену через $V(S,t)$.

Пусть $S$ – текущая стоимость одной акции, пусть $\Delta$ – их количество. Тогда справедливая цена портфеля акций, состоящего из проданного опциона покупателя на $\Delta$ акций, предназначенных для их покупки в момент экспирации $T$ (первоначально в наличии акций нет), равна

$$\Pi = V(S,t) - \Delta \cdot S\,. \tag{35}$$

Предположим, что $S$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Ито

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW\,,$$

рассмотренному нами ранее.

Дифференцируя (35), имеем:

$$d\Pi = dV(S,t) - \Delta \cdot dS\,, \tag{36}$$

По формуле Ито, примененной для стохастического процесса $V(S,t)$ имеем:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 + \frac{\partial V}{\partial S}dS\,.$$

Так как $dS^2 = \mu^2 S^2\,dt^2 + \sigma^2 S^2\,dW^2 + 2\mu\sigma S^2\,dW dt = \sigma^2 S^2\,dt$, то

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS\,.$$

Таким образом, изменение цены портфеля равно

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS - \Delta \cdot dS\,. \tag{37}$$

В равенстве (37) есть два вида слагаемых – детерминированные, стоящие при $dt$, и стохастические (при $dS$). Траектории движения последних заранее неизвестны и их можно считать риском оперирования с нашим активом, так как они мешают точной оценке текущей стоимости активов:

$$Risk = \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS \ .$$

Если предположить, что $\frac{\partial V}{\partial S} = \Delta$, то систематический риск будет равен нулю. В этом случае говорят о безрисковом активе, цена которого может быть вычислена в произвольный момент времени. В этом случае изменение цены портфеля будет удовлетворять уравнению

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} d\,t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \ . \tag{38}$$

Операцию уменьшения риска называют хеджированием (страхованием). Для случая, рассмотренного выше, применяют специальное название: Δ – хеджирование. Более того, (38) является примером так называемой динамической стратегии страхования, так как производная $\frac{\partial V}{\partial S}$ является некоторой функцией времени и с ее изменением число акций пакета должно так же меняться.

Продолжим исследование (35). Так как портфель безрисковый, то за момент $dt$ портфель стоимостью $\Pi$ принесет альтернативный доход (если, например, положить деньги в банк) в сумме

$$d\Pi = r\Pi\, dt \ ,$$

где $r$ – безрисковая процентная ставка.

Учитывая (35), имеем:

$$d\Pi = r(V - \Delta \cdot S) dt \ .$$

Пользуясь тем, что $\frac{\partial V}{\partial S} = \Delta$, и учитывая (38), последовательно получаем

$$d\Pi = r\left( V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt \ ,$$

$$r\left( V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt = \frac{\partial V}{\partial t} d\,t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \ ,$$

или

$$\frac{\partial V}{\partial t} d\,t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - r\left( V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt = 0 \ ,$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-r\left(V-\frac{\partial V}{\partial S}S\right)\right]dt=0\,.$$

Интегрируя последнее соотношение по промежутку [0, $t$], получаем, что

$$\int_0^t\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-r\left(V-\frac{\partial V}{\partial S}S\right)\right]dt=0\,.$$

Интеграл по множеству ненулевой меры равен нулю $\Leftrightarrow$ когда подынтегральная функция равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0\,. \qquad (39)$$

Уравнение (39) называется уравнением Блэка – Шоулса (Black – Scholes).

Несмотря на сделанные ранее предположения о функциональной зависимости $V(S,t,\sigma,E,T,r)$, решение уравнения не зависит от величины дрейфа $\mu$. Это связано с тем, что величина риска в модели равна нулю и нет необходимости перерестраховываться и учитывать излишние риски, которые возникли бы в результате проведения операции хеджирования.

Заметим также, что при выводе уравнения (39) мы не учитывали выплату дивидендов по базовому активу. За время $dt$ капитал $S\Delta$ можно потерять в цене ($-D\Delta Sdt$), так как в настоящее время у инвестора акций нет, их нужно будет предъявить в будущий момент времени и при этом заплатить дивиденды. Поэтому выражение (38) примет вид

$$d\Pi=\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt-D\Delta Sdt.$$

Все остальные выражения остаются в силе. Значит,

$$\frac{\partial V}{\partial t}d\,t+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt-D\Delta Sdt=r\Pi dt,$$

или, учитывая проведенное хеджирование, окончательно получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-D)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0.$$

Найдем этот же результат, применив к функции выплаты $C(S_T)=\max(S_T-E;0)$ европейского опциона формулу Фейнмана – Каца в обратном порядке, т.е. по готовому решению уравнения, записанному в виде условного математического ожидания, выведем первоначальное дифференциальное уравнение.

Пусть $V(t,S)$ – цена опциона покупателя европейского типа. Известно, что

$$V(t,S)=E_x\left(\left.\frac{C(S_T)}{e^{r\tau}}\right|S_t=x\right), \tag{40}$$

где $\tau = (T - t)$ – оставшееся до исполнения контракта время.

Рассмотрим функцию

$$G(t,S)=e^{r\tau}V(t,S)=E_x\big(C(S_T)\big|S_t=x\big)$$

как решение уравнения (33) с условием $G(T,S) = C(S_T)$:

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\mu(t,S)\frac{\partial G}{\partial S}+\frac{\sigma^2(t,S)}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}=0,$$

где $\mu(t,S)=rS, \sigma(t,S)=\sigma S$, так как с учетом риск-нейтральности математического ожидания в равенстве (40) справедливо дифференциальное уравнение на цену базового актива

$$dS=rSdt+\sigma SdW.$$

Поэтому

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial t}\big(e^{r\tau}V(t,x)\big)+rx\frac{\partial}{\partial x}\big(e^{r\tau}V(t,x)\big)+\frac{\sigma^2x^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(e^{r\tau}V(t,x)\big)\right)\right|_{x=S_t}=0.$$

Вычисляя производные и учитывая, что $S_t$ может принимать произвольные неотрицательные значения, а значит, может быть опущена, окончательно получаем:

$$\left.\left(e^{r\tau}\frac{\partial}{\partial t}\big(V(t,x)\big)-re^{r\tau}V(t,x)+rx\frac{\partial}{\partial x}\big(e^{r\tau}V(t,x)\big)+\frac{\sigma^2x^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(e^{r\tau}V(t,x)\big)\right)\right|_{x=S_t}=0,$$

или

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}-rV+rx\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\sigma^2x^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)=0,$$

что с точностью до обозначений совпадает с уравнением (39).

### *Допущения модели Блэка – Шоулса*

Уравнение (39) записано при следующих важных предположениях, ограничивающих его применение на практике:

1) Модель Блэка – Шоулса построена в предположении о нормальном законе распределения прибыли от торговли. Это означает, что предполагается выполнение логнормального распределения для решения дифференциального уравнения $S$:

$$dS=\mu S\,dt+\sigma S\,dW.$$

2) Волатильность $\sigma$ в (39) есть некоторая постоянная, хотя на практике она является некоторой неизвестной функцией времени $\sigma(t)$. Иногда при проведении реальных

расчетов полагают известной зависимость $\sigma(t, S)$, но в этом случае решение (39) будет иметь бесконечную дисперсию.

3) Согласно модели фактическая цена актива $S(t, \omega)$ лежит в полуинтервале $[0, \infty)$.

4) Безрисковая процентная ставка $r(t)$ – известная функция времени. Это ограничение позволяет найти решение уравнения (39) явно. На практике такая зависимость не известна и является случайной. Зачастую действительная ставка $r = r(t, W, S)$ определяется по эмпирическим данным (например, по результатам торгов) или с помощью асимптотического подхода, например, пользуясь ядерными функциями для фьючерсов и опционов на один базовый актив или по соотношениям неприятия риска для деривативов различного порядка на один актив).

5) По акциям пакета не производится дивидендных выплат

Если по акциям пакета производятся дивидендные выплаты с дивидендной ставкой по акциям $D$, то (39) преобразуется к виду (подробнее см. [22]):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

6) $\Delta$ – хеджирование осуществляется непрерывно.

Это самое существенное и самое жесткое ограничение модели, так как на практике хеджирование производится в дискретные моменты времени в период функционирования биржи. Зачастую время для переоценки риска и вычисления $\Delta$ зависит от стоимости ведения торговых операций с ценными бумагами, входящими в пакет. Однако если за ведение торговых операций плата не берется, то ограничение модели будет напрямую связано с минимальным количеством времени, необходимым для обработки брокером заказа на покупку или продажу акций пакета (чтобы довести размер пакета до оптимального, равного $\Delta$).

7) В соответствии с п. 6) модель не учитывает плату за ведение торговых операций с ценными бумагами.

8) Модель не учитывает возможность одновременной покупки или продажи ценных бумаг, а также коротких продаж и покупок бумаг за счет брокера (сделки РЕПО и т.п.).

***Приведение уравнения Блэка – Шоулса к каноническому виду. Формулы Блэка – Шоулса***

Приведем (39) к каноническому виду, удобному для нахождения решения стандартными методами.

а) Введем новую переменную $U(S, t)$ по правилу $V = e^{-r(T-t)}U$ и подставим ее в (39):

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}+rS\frac{\partial U}{\partial S}=0. \qquad (41)$$

b) Изменим знак производной по времени, для чего введем новую временную переменную

$$\tau=(T-t),$$

где $T$ – время окончания контракта, $t$ – текущее время.

Имеем следующие равенства:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(\tau)=-\frac{\partial U}{\partial t}(t),\ \frac{\partial U}{\partial S}(\tau)=\frac{\partial U}{\partial S}(t),\ \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}(\tau)=\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}(t).$$

Поэтому преобразуется в равенство вида:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}+rS\frac{\partial U}{\partial S}. \qquad (42)$$

c) В (42) введем новую переменную $\xi$: $\xi=\ln S$, или $S=\exp(\xi)$. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial S}=\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dS}=\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{1}{S}=e^{-\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi};$$

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial S^2}=\dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{\partial U}{\partial S}\right)=$ (по равенству выше) $=\dfrac{\partial}{\partial S}\left(e^{-\xi}\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right)=$ (по правилу дифференцирования произведения) $=-e^{-\xi}\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\dfrac{d\xi}{dS}+e^{-\xi}\dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right)$.

Для того чтобы найти $\dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right)$, необходимо посмотреть по какому правилу находится производная по $S$. Рассмотрим выражение $\dfrac{\partial U}{\partial S}=e^{-\xi}\dfrac{\partial U}{\partial \xi}$. Из него следует, что при взятии производной по $S$ функция $U$ дифференцируется по переменной $\xi$, а результат умножается на $e^{-\xi}$. Поэтому $\dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right)=e^{-\xi}\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right)=e^{-\xi}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$.

Окончательно имеем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}=-e^{-2\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}+e^{-2\xi}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

Используя соотношения для производных, запишем (42) в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial U}{\partial \xi}. \qquad (43)$$

Заметим, что коэффициенты при производных уравнения стали постоянными.

d) Введем переменную $x$ по правилу: $x = \xi + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot \tau$ и вместо $U(\xi, \tau)$ будем рассматривать новую функцию $W(x, \tau) = U(\xi, \tau)$. Тогда

$U(\xi, \tau) = W(x, \tau) = W\left( \xi + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot \tau, \tau \right)$ и

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial W}{\partial \tau}\frac{d\tau}{d\tau} = \frac{\partial W}{\partial x}\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{\partial W}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \tau}\frac{d\tau}{d\xi} = \frac{\partial W}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)\frac{d\tau}{d\xi} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

Подставляя найденные выражения в (43), имеем

$$\frac{\partial W}{\partial x}\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)\frac{\partial W}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{44}$$

Уравнение (44) является канонической формой записи уравнения диффузии или уравнения параболического типа. Его фундаментальным решением является функция

$$W_\Phi(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\,\sigma}\exp\left( -\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2\tau} \right),$$

где $x_0$ – начальное условие.

При подстановке $W_\Phi(x, \tau)$ в (44) получаем дельта–функцию:

$$\frac{\partial W_\Phi}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W_\Phi}{\partial x^2} = \delta(x - x_0).$$

Общее решение уравнения (44) получается с помощью фундаментального решения посредством формулы

$$W(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\Phi\, W(x, 0)\, dx,$$

где $W(x, 0)$ – начальное условие.

Вспоминая о сделанных обозначениях $x = \ln S + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t)$, получаем, что общее решение уравнения (39) выражается по формуле

$$V(S,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \int_0^{\infty} \exp\left( -\frac{\left(\ln S - \ln S_0 + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2 (T-t)} \right) \frac{V(S_0, T)}{S_0} dS_0, \qquad (45)$$

где $V(S_0, T)$ – функция вознаграждения во время окончания контракта.

Рассмотрим два частных случая применения этой формулы.

a) Опцион покупателя

Так как функция вознаграждения равна $V(S_0, T) = \max\{S_0 - E, 0\}$, то (45) приобретает следующий вид:

$$V(S,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \int_{-\infty}^{E} \exp\left( -\frac{\left(\ln S - \ln x + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2 (T-t)} \right) \frac{(x - E)}{x} dx .$$

Делая замену $x = \exp(p)$, получаем:

$$V(S,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \int_{-\infty}^{\ln E} \exp\left( -\frac{\left(-p + \ln S + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2 (T-t)} \right) \exp(p) dp -$$

$$- E \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \int_{-\infty}^{\ln E} \exp\left( -\frac{\left(-p + \ln S + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2 (T-t)} \right) dp .$$

Делая соответствующие замены переменного под знаками обоих интегралов, окончательно получим:

$$V(S,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S \int_{-\infty}^{d_1} \exp\left( -\frac{t^2}{2} \right) dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{d_2} \exp\left( -\frac{t^2}{2} \right) dt ,$$

где

$$d_1 = \frac{\ln S - \ln E + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sqrt{(T-t)}\sigma}, \ d_2 = \frac{\ln S - \ln E + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sqrt{(T-t)}\sigma} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} . \qquad (46)$$

Таким образом, для опциона покупателя справедливая цена равна

$$V(S,t) = S\,\Phi(d_1) - E\,e^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \qquad (47)$$

где $\Phi(d_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_i} \exp\left( -\frac{t^2}{2} \right) dt$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины, $i = 1, 2$.

b) Опцион продавца

Так как функция вознаграждения равна $V(S_0, T) = \max\{E - S_0,\ 0\}$, то (45) будет иметь вид:

$$V(S,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}\int_{-\infty}^{E}\exp\left(-\frac{\left(\ln S-\ln x+\left(r-0.5\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)\frac{(E-x)}{x}dx.$$

По аналогии можно получить, что для опциона продавца справедливая цена равна

$$V(S,t)=-S\,\Phi(-d_1)+E\,e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2), \tag{48}$$

где $\Phi(d_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_i}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины, $i=1,2$.

Вычислим вероятность того, что опцион покупателя будет исполнен «в деньгах», если реализация будущей цены базового актива подчиняется геометрическому броуновскому движению $S_T=S_0\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma W_T\right)$. Имеем:

$$P(S_T\geq K)=1-P(S_T<K)=1-P\left(S_0\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma W_T\right)<K\right).$$

Вспомним, что $W_T\sim N(0,T)$, т.е. $W_T=\sqrt{T}\xi$, где $\xi$ – стандартная нормальная случайная величина. Выразим $\xi$ в левой части неравенства в формуле для вероятности:

$$P(S_T\geq K)=1-P\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\sqrt{T}\xi<\ln\frac{K}{S_0}\right)=1-P\left(\xi<-\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)\right).$$

Функция распределения $\Phi(x)$ для СВ $\xi$ нам известна. Так как $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$, окончательно имеем:

$$P(S_T\geq K)=1-\Phi\left(-\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)\right)=\Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)\right)=\Phi(d_2),$$

где $d_2=\dfrac{\ln\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

В момент исполнения опциона время до истечения контракта $\tau=0$, т.е. $d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau}=d_1$. Поэтому окончательно имеем:

$$P(S_T\geq K)=\Phi(d_1).$$

По аналогии, вероятность того, что опцион продавца будет исполнен «в деньгах», если реализация будущей цены базового актива подчиняется геометрическому броуновскому движению, равна

$$P(S_T<K)=\Phi(-d_1).$$

Таким образом, сомножитель, стоящий при цене базового актива $S$ в правой части формул (47), (48), определяет вероятность исполнения опциона покупателя или продавца «в деньгах». Мы будем использовать этот факт в дальнейшем, когда будем проводить хеджирование опционов.

***Замечание***: если $S = E$ и $r = 0$, т.е. в случае когда будущая ожидаемая цена акции по опциону совпадает с фактической ценой на рынке, когда безрисковая процентная ставка равна нулю, то (47) и (48) приобретают вид:

для опциона покупателя:

$$V(S,t) = S\left(\Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - \Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right)\right).$$

для опциона продавца:

$$V(S,t) = -S\left(1 + \Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - \Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right)\right).$$

При тех же условиях для опциона покупателя справедливо асимптотическое приближение:

$$V(S,t) = S\sigma\sqrt{\frac{T-t}{2\pi}} \text{ при } t \to T .$$

Отметим, что (47) и (48) называются формулами Блэка – Шоулса для нахождения равновесной (справедливой) цены опциона покупателя и продавца соответственно.

## ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ОПЦИОНОВ АМЕРИКАНСКОГО ТИПА

Напомним, что опционы американского типа отличаются от европейских опционов возможностью раннего исполнения, не дожидаясь момента окончания действия $T$ контракта. Пусть справедливая цена американского опциона равна $V(S,t)$, $S$ – цена базового актива. По формуле Ито справедливо равенство

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} d\,t + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS .$$

Составим портфель вида:

$$\Pi = -V + D + \Delta \cdot S ,$$

где $\Delta$ – число единиц базового актива, $D$ – депозит в банке (или ЦБ).

За время $\delta t$ число единиц базового актива не меняется, поэтому изменение стоимости портфеля есть

$$\delta\Pi = -\delta V + \delta D + \Delta\delta S ,$$

причем $\delta D = rD\delta t$, $r$ – банковская (или ключевая) ставка.

Подставляя выражение для $\delta V$ в $\delta\Pi$ и приводя подобные, получаем:

$$\delta\Pi = \left( -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rD \right)\delta t + \left( \Delta - \frac{\partial V}{\partial S} \right)\delta S .$$

Как и в случае с европейским опционом, для обнуления стохастической части равенства выберем $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$. Тогда финансовый риск будет захеджирован, а изменение стоимости портфеля П будет детерминированным:

$$\delta\Pi = \left( -\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rD \right)\delta t .$$

Заметим, что проведенное хеджирование не избавляет нас от риска раннего исполнения американского опциона, что может привести к финансовым потерям продавца такого опциона. Поэтому $\delta\Pi$ за время $\delta t$ должен приносить доход больше, чем классическое безрисковое инвестирование под ставку $r$:

$$\delta\Pi > r\Pi\delta t,$$

или

$$\left( -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rD \right) > r\left( -V + D + S\frac{\partial V}{\partial S} \right),$$

откуда окончательно имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} < rV .$$

Для функции выплаты $V(T,S) = (K - S)^+$, соответствующей опциону продавца, производная по $S$ равна

$$\frac{\partial V}{\partial S}(T,S) = -1 .$$

В момент $t$ раннего исполнения по достижению цены $S^*$ это равенство должно так же выполняться:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(t,S^*) = -1 ,$$

что гарантирует выгодное исполнение американского опциона продавца. Если же цена базового актива $S_t > S_t^*$, то опцион продавца лучше придержать.

Пусть $\tau$ – момент раннего исполнения опциона продавца американского типа при цене базового актива $S^* = S_\tau$. Тогда цена опциона подчиняется равенству

$$P(t,x) = \sup_{\tau\in[t,T]} E_x\left( \frac{(K - S_\tau)^+}{\exp(r(\tau - t))} \middle| S_t = x \right),$$

но замкнутой (конечной и явной) аналитической формулы для такого равенства не существует.

Пусть $C(S,T)$ – цена американского опциона покупателя, пусть $c(S,T)$ – цена европейского опциона покупателя, выпущенного с теми же параметрами (безрисковой процентной ставкой, ценой исполнения и т.п.). Тогда цена опциона покупателя американского типа может быть вычислена приближенно по следующей формуле [30]:

$$C(S)=\begin{cases} c(S)+A\left(\dfrac{S}{S^*}\right)^q, & S<S^*, \\ S-K & ,S^*\le S, \end{cases}$$

где $K$ – цена исполнения опциона, $S^*$ – цена раннего исполнения, $\tau$ – момент раннего исполнения опциона,

$$d_1=d_1(S^*)=\frac{\ln S^*-\ln K+(r+\sigma^2/2)(\tau-t)}{\sigma\sqrt{(\tau-t)}},\ A=\frac{S^*}{q}\big(1-\Phi(d_1)\big),\ M=\frac{2r}{\sigma^2},$$

$$q=\frac{1}{2}\left(1-M+\sqrt{(M-1)^2+\frac{4M}{1-\exp(-r(\tau-t))}}\right).$$

При этом цена раннего исполнения $S^*$ вычисляется как решение уравнения

$$S^*-K=c(S^*)+A.$$

Пусть $P(S,T)$ – цена американского опциона продавца, пусть $p(S,T)$ – цена европейского опциона продавца, выпущенного с теми же параметрами (ценой исполнения и т.п.). Тогда цена опциона продавца американского типа может быть вычислена приближенно по следующей формуле [30]:

$$P(S)=\begin{cases} p(S)+B\left(\dfrac{S}{S^*}\right)^{q_1}, & S>S^*, \\ K-S & ,S^*\ge S, \end{cases}$$

где $K$ – цена исполнения опциона, $S^*$ – цена раннего исполнения, $\tau$ – момент раннего исполнения опциона,

$$d_1=d_1(S^*)=\frac{\ln S^*-\ln K+(r+\sigma^2/2)(\tau-t)}{\sigma\sqrt{(\tau-t)}},\ B=-\frac{S^*}{q_1}\big(1-\Phi(-d_1)\big),\ M=\frac{2r}{\sigma^2},$$

$$q_1=\frac{1}{2}\left(1-M-\sqrt{(M-1)^2+\frac{4M}{1-\exp(-r(\tau-t))}}\right).$$

При этом цена раннего исполнения $S^*$ вычисляется как решение уравнения

$$K-S^*=p(S^*)-B.$$

### *«Вечный» опцион продавца американского типа*

Рассмотрим случай, когда время исполнения $T$ бесконечно возрастает, или, что эквивалентно, отсутствует. Такие опционы принято называть «вечными» [22, с. 615]. В этом случае его цена $V(t,S)$ не зависит от текущего времени, т.е. $V(t,S) = V(S)$. Справедлива следующая теорема:

**Теорема** (о цене «вечного» американского опциона продавца): пусть $L < K$ – уровень цены базового актива, при достижении которого происходит выплата по опциону (раннее исполнение). Тогда

$$V(S) = \begin{cases} (K-L)\left(\dfrac{L}{S}\right)^{2r/\sigma^2} & , L < S < \infty, \\ (K-S) & , 0 \le S \le L, \end{cases}$$

где $L = \dfrac{2rK}{2r+\sigma^2}$, σ – волатильность.

**Доказательство**: приведем основную идею доказательства, не вдаваясь в подробности, так как оно громоздко.

Для цены $V(t,S) = V(S)$ выполнено уравнение Блэка – Шоулса (41) вида

$$\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{d^2V}{dS^2} + rS\frac{dV}{dS} = rV.$$

Имеют место дополнительные условия:

$$V(L) = (K-L), \lim_{S\to L}\frac{dV}{dS} = -1, \lim_{S\to\infty} V(S) = 0.$$

Общее решение уравнения ищем в виде $V(S) = c_1 S^p + c_2 S^q$ с некоторыми неизвестными параметрами $c_1, c_2, p, q$. Воспользуемся, например, соотношениями $V(L) = (K-L)$ и $\lim_{S\to L}\frac{dV}{dS} = -1$. Так как производная $V'(S) = c_1 p S^{p-1} + c_2 q S^{q-1}$, то последовательно имеем:

$$V(L) = c_1 L^p + c_2 L^q = (K-L),$$

$$V'(L) = c_1 p L^{p-1} + c_2 L S^{q-1} = -1.$$

Умножаем первое равенство на $L^{-q}$ и выражаем из него $c_2$:

$$c_2 = -c_1 p L^{p-q} + K L^{-q} - L^{1-q}.$$

Найденное значение $c_2$ подставляем во второе равенство, умноженное на $L$. Находим $c_1$:

$$c_1 = \frac{(L-K)q - L}{p-q} L^{-p}.$$

Для нахождения $c_2$ по аналогии умножаем равенство $c_1L^p + c_2L^q = (K - L)$ на $L^{-p}$ и выражаем $c_1$ из него:

$$c_1 = -c_2L^{q-p} + KL^{-p} - L^{1-p}.$$

Найденное значение $c_1$ подставляем в соотношение $c_1pL^p + c_2LS^q = -L$. Тогда

$$c_2 = -\frac{(K-L)p + L}{p-q}L^{-q}.$$

Формульные соотношения для коэффициентов $p$, $q$ получаются из оставшегося дополнительного условия и переписанного для цены $V(S)$ уравнения Блэка – Шоулса, что завершает доказательство.

## БАРЬЕРНЫЕ ОПЦИОНЫ

Барьерные опционы представляют собой обобщение американского опциона в смысле моделирования реализованной цены базового актива.

*Определение*: опционом knock-out называется дериватив, для которого цена базового актива $S_t$ может быть больше заданного барьера $U$ или меньше выбранного барьера $L$. В случае достижения этого барьера опцион перестает существовать, а его цена обнуляется.

*Определение*: опционом knock-in называется дериватив, который выпускается, если цена базового актива $S_t$ достигает верхнего заданного барьера $U$ или нижнего выбранного барьера $L$. До момента достижения барьера опцион не существует.

*Определение*: барьерным опционом покупателя down-and-out называют опцион knock-out, который прекращает свое действие, если цена базового актива $S_t$ падает до нижнего выбранного барьера $L < S_t$. При достижении барьера $L$ автоматически выпускается противоположный опцион down-and-in по цене обычного европейского опциона покупателя.

*Определение*: барьерным опционом up-and-out называют опцион knock-out, который прекращает свое действие, если цена базового актива растет и в момент времени $t$ достигает заданного барьера $U$, причем $U > S_t$. При достижении барьера $U$ автоматически выпускается противоположный опцион up-and-in по цене обычного европейского опциона покупателя.

Создано большое количество барьерных опционов [22]: up-and-out, down-and-out, up-and-in, down-and-in и т.д. (не менее 16 различных видов, возможны случаи, когда $K \le U$, $K \le L$, $K > U$, $K > L$). Для удобства использования применяют обозначения цен опционов покупателя $c$ и продавца $p$, включающие в себя краткие названия по первым буквам слов. Например, $c_{\text{uo}}$ – цена опциона покупателя up-and-out, $c_{\text{di}}$ – цена опциона покупателя down-and-in, $p_{\text{do}}$ – цена опциона продавца down-and-out.

Обозначим через $H_T = \max\limits_{t\in[0,T]} S_t, h_T = \min\limits_{t\in[0,T]} S_t$. Тогда функции выплаты $f_T$ по основным барьерным опционам имеют следующее математическое представление (в левой части равенства в скобках указано обозначение опциона):

$$f_T(c_{\text{ui}}) = (S_T - K)^+ I_{\{H_T \ge U\}},\ f_T(c_{\text{uo}}) = (S_T - K)^+ I_{\{H_T < U\}},$$

$$f_T(p_{\text{ui}}) = (K - S_T)^+ I_{\{H_T \ge U\}},\ f_T(p_{\text{uo}}) = (K - S_T)^+ I_{\{H_T < U\}},$$

$$f_T(c_{\text{di}}) = (S_T - K)^+ I_{\{h_T \le L\}},\ f_T(c_{\text{do}}) = (S_T - K)^+ I_{\{h_T > L\}},$$

$$f_T(p_{\text{di}}) = (K - S_T)^+ I_{\{h_T \le L\}},\ f_T(p_{\text{do}}) = (K - S_T)^+ I_{\{h_T > L\}}.$$

Например,

$$f_T(c_{\text{uo}}) = \begin{cases} (S_T - K), H_T < U, \\ 0, \qquad\quad H_T \ge U. \end{cases}$$

В соответствии с данными определениями выполнены следующие соотношения между ценами барьерных опционов:

$$c_{\text{uo}} + c_{\text{ui}} = c,$$

$$c_{\text{do}} + c_{\text{di}} = c,$$

$$p_{\text{uo}} + p_{\text{ui}} = p,$$

$$p_{\text{do}} + p_{\text{di}} = p.$$

*Определение*: моментом остановки τ называется случайная величина, $\tau: \Omega \to R_+$, что

$$\{\omega \in \Omega, \tau(\omega) \le t\} \in F_t,\ 0 \le t \le T,$$

где $F_t$ – заданная фильтрация на вероятностном пространстве Ω.

*Определение*: пусть $X_t$ – некоторый случайный процесс. Процессом с остановкой в момент τ называется случайный процесс

$$X_{t\wedge\tau} = \begin{cases} X_t, t < \tau, \\ X_\tau, t \ge \tau. \end{cases}$$

Заметим, что если $X_t$ адаптирован к заданной фильтрации $F_t$, то $X_{t\wedge\tau}$ так же адаптирован к фильтрации $F_t$, потому что для любого борелевского множества $A \subset R$

$$\{X_{t\wedge\tau} \in A\} = \{X_t \in A, \tau > t\} \cup \left\{ \bigcup_{k=1}^{t} \{X_k \in A, \tau = k\} \right\}.$$

Можно показать (см. [31, п. 10.9]), что для любого мартингала $X_t$ относительно фильтрации $F_t$ процесс с остановкой $X_{t\wedge\tau}$ так же будет мартингалом.

**Теорема** (о мартингальном представлении): пусть $W_t$ – винеровский процесс относительно вероятности $P$. Пусть $F_t$ – фильтрация, сгенерированная по $W_t$. Если квадратично –

интегрируемый процесс $M_t$ адаптирован относительно $F_t$ и является мартингалом относительно вероятности $P$, то существует предсказуемый относительно $F_t$ процесс $\alpha_t$, что почти наверное выполнено равенство:

$$M_t = M_0 + \int_0^t \alpha_s dW_s \,,$$

или в дифференциальном виде

$$dM_t = \alpha_t dW_t \,.$$

**Замечание**: теорема о мартингальном представлении гарантирует, что у мартингала $M_t$ нет детерминированной части, то есть части, стоящей при $dt$ в его дифференциальной записи.

Пусть $W_t$ – винеровский процесс относительно вероятности $P$. Введем новый процесс

$$\overline{W_t} = W_t + \theta t \,,$$

где $\theta = \dfrac{r - \sigma^2 / 2}{\sigma}$.

По теореме Гирсанова $\overline{W_t}$ будет винеровским для некоторой вероятности, эквивалентной $P$. Используем процесс $\overline{W_t}$ при моделировании геометрического броуновского движения, подчиняющегося задаче Коши

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \,,\ S|_{t=0} = S_0,$$

с уже известной нам функцией решения

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right). \tag{49}$$

Произведем замену $W_t = \overline{W_t} - \theta t$. Тогда

$$\sigma\left(\overline{W} - \theta t\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t = \sigma\overline{W} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t = \sigma\overline{W} \,.$$

Значит, равенство (49) может быть записано более компактно:

$$S_t = S_0 \exp(\sigma \overline{W_t}) \,. \tag{50}$$

Вычислим цену опциона покупателя up-and-out $c_{uo}$ с барьером $U > S_0$.

Обозначим через $\overline{M_T} = \max\limits_{t \in [0,T]} \overline{W_t}$ . Вычисляя максимумы в обеих частях равенства (50), имеем:

$$\max_{t \in [0,T]} S_t = S_0 \exp\left(\sigma \max_{t \in [0,T]} \overline{W_t}\right),$$

или

$$\max_{t \in [0,T]} S_t = S_0 \exp\left(\sigma \overline{M_T}\right). \tag{51}$$

По определению опцион up-and-out прекращает свое существование тогда и только тогда, когда $\max\limits_{t\in[0,T]} S_t > U$. В противном случае по опциону выплачивается сумма, равная функции выплаты $V_T = (S_T - K)^+$ соответствующего европейского опциона в момент $t$ = $T$. Используя формулу (50), имеем:

$$V_T = (S_T - K)^+ = \left(S_0 \exp(\sigma \overline{W}_T) - K\right)^+.$$

В момент исполнения выплата $V_T$ по опциону вычисляется как

$$V_T = \left(S_0 \exp(\sigma \overline{W}_T) - K\right) I_A,$$

где индексная функция строится по множеству $A$ следующей структуры:

$$A = \left\{\omega, \max_{t\in[0,T]} S_t \le U\right\} = \left\{S_T \ge K, \max_{t\in[0,T]} S_t \le U\right\} = \left\{\overline{W}_T \ge k, \overline{M}_T \le u\right\},$$

где $k = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{K}{S_0}, u = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{U}{S_0}$, причем эти константы определяются из соотношений (50), (51) при $t$ = $T$.

Окончательно,

$$V_T = \left(S_0 \exp(\sigma \overline{W}_T) - K\right) I_{\{\overline{W}_T \ge k, \overline{M}_T \le u\}}.$$

В произвольный момент времени $t < T$ цена опциона есть мартингал относительно фильтрации $F_t$ :

$$c_{\text{uo},t} = E_P\left(\frac{V_T}{\exp(rT - rt)}\middle| F_t\right),$$

значит, и преобразованный процесс

$$e^{-rt} c_{\text{uo},t} = E_P\left(\frac{V_T}{\exp(rT)}\middle| F_t\right)$$

будет мартингалом.

Пусть всюду далее момент остановки $\pi = \inf\,(t \ge 0, S_t = U)$, то есть если $\exists t < \infty$, что $S_t = U$ и $\pi = \infty$ в противном случае.

Определим процесс с остановкой

$$X_t = \exp(-r(t \wedge \pi)) V_{t\wedge\pi} = \begin{cases} e^{-rt} V_t, t \le \pi, \\ e^{-r\pi} V_\pi, t > \pi. \end{cases}$$

Процесс $e^{-rt} V_t$ является мартингалом. Можно показать [31, п. 10.9], что для любого мартингала относительно фильтрации $F_t$ процесс с остановкой $X_t$ так же будет мартингалом относительно вероятности $P$. Справедлива следующая теорема о справедливой цене опциона покупателя $c_{\text{uo}}$.

**Теорема** (о справедливой цене опциона покупателя $c_{uo}$): пусть цена опциона покупателя $c_{uo}$ в момент времени $t$ равна $V = V(t,x)$, $x = S_t$. Тогда для любой точки $x \in [0,U)$, $U \geq K$, выполнено классическое уравнение Блэка – Шоулса:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rx\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - rV = 0,$$

с начальным и граничными условиями

$$V|_{x=0} = 0, V|_{x=U} = 0, V(T,x) = (x-K)^+,$$

где $U \geq S_t$ – заданный верхний барьер изменения цены базового актива, $K$ – цена исполнения.

Решение этого уравнения при $\tau = (T - t)$ определяется соотношением вида:

$$V(t,x) = x\Phi\left(d_1\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - x\Phi\left(d_1\left(\tau, \frac{x}{U}\right)\right) - Ke^{-r\tau}\Phi\left(d_2\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) + Ke^{-r\tau}\Phi\left(d_2\left(\tau, \frac{x}{U}\right)\right) -$$

$$-U\left(\frac{x}{U}\right)^{-2r/\sigma^2}\left\{\Phi\left(d_1\left(\tau, \frac{U^2}{xK}\right)\right) - \Phi\left(d_1\left(\tau, \frac{U}{x}\right)\right)\right\} + Ke^{-r\tau}\left(\frac{x}{U}\right)^{-2r/\sigma^2+1}\left\{\Phi\left(d_2\left(\tau, \frac{U^2}{xK}\right)\right) - \Phi\left(d_2\left(\tau, \frac{U}{x}\right)\right)\right\},$$

где $d_{1,2}(\tau,u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln u + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)$.

**Доказательство**: по формуле Ито имеем:

$$d\left(e^{-rt}V(t,S_t)\right) = e^{-rt}\left(-rVdt + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2\right) =$$

$$= e^{-rt}\left(-rVdt + \frac{\partial V}{\partial t}dt + rS\frac{\partial V}{\partial x}dt + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dt\right)\Bigg|_{S=x} + e^{-rt}\sigma x\frac{\partial V}{\partial x}d\overline{W}.$$

По доказанному ранее $e^{-rt}V_t$ является мартингалом. Поэтому процесс $X_t = \exp(-r(t \wedge \pi))V_{t\wedge\pi}$ при $t \leq \pi$ так же будет мартингалом. Тогда по теореме о мартингальном представлении $X_t$ детерминированная часть выражения, записанного выше, должна быть равна нулю при $t \leq \pi$. Это доказывает, что $V = V(t,x)$ удовлетворяет уравнению Блэка – Шоулса с записанными в условии теоремы начальным и граничными условиями.

Решение уравнения Блэка – Шоулса в прямоугольнике проводится стандартным методом и может быть найдено в [34, стр. 404 – 409]. Теорема доказана.

**Замечание**: в случае $U < K$ цена $c_{uo}$ равна нулю.

Пользуясь доказанной теоремой о справедливой цене опциона покупателя $c_{uo}$, можно легко получить справедливую цену опциона $c_{ui} = c - c_{uo}$. При условии $U \geq K$ после приведения подобных имеем:

$$c_{ui}(\tau,S_t) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi\left(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}\right) - S_t\left(\frac{U}{S_t}\right)^{2\lambda}\left(\Phi(-y) - \Phi(-d_2)\right) +$$

$$+Ke^{-r\tau}\left(\frac{U}{S_t}\right)^{2\lambda-2}\left(\Phi\left(-y+\sigma\sqrt{\tau}\right)-\Phi\left(-d_2+\sigma\sqrt{\tau}\right)\right),$$

где $d_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{S_t}{U}+\lambda\sigma^2\tau\right)$, $d_2=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{U}{S_t}+\lambda\sigma^2\tau\right)$, $y=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{U^2}{S_tK}+\lambda\sigma^2\tau\right)$, $\lambda=\frac{r+\sigma^2/2}{\sigma^2}$.

**Теорема** (о справедливой цене опциона продавца $p_{\text{do}}$): пусть $L < K < S_t$, где $L$ – заданный нижний барьер изменения цены базового актива, $K$ – цена исполнения. Тогда справедливая цена опциона подчиняется равенству:

$$p_{\text{do}}(\tau,S_t)=Ke^{-r\tau}\Phi\left(-d_2(K)\right)-S_t\Phi\left(-d_1(K)\right)-Ke^{-r\tau}\Phi\left(-d_2(L)\right)+S_t\Phi\left(-d_1(L)\right)-$$

$$-Ke^{-r\tau}\left(\frac{L}{S_t}\right)^{2\lambda-2}\left(\Phi(d_4)-\Phi(d_6)\right)+S_t\left(\frac{L}{S_t}\right)^{2\lambda}\left(\Phi(d_3)-\Phi(d_5)\right),$$

где $\lambda=\frac{r+\sigma^2/2}{\sigma^2}$, $d_{1,2}(u)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{S_t}{u}+\left(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)$, $d_{3,4}=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{L}{S_t}+\left(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)$,

$d_{5,6}=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln\frac{L^2}{KS_t}+\left(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)$.

**Доказательство**: см. [34, стр. 414].

## ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ЦЕН ОПЦИОНОВ

Будем проводить численные расчеты цен опционов биномиальными деревьями. Биномиальные деревья являются удобным инструментом для организации вычисления справедливой стоимости деривативов. Для опционов европейского типа адекватность их использования подтверждается формулой Кокса-Росса-Рубинштейна, а обоснование применения расчетов в случае других производных инструментов приведено в [22].

Вычислим справедливую цену $f$ опциона европейского типа. Пусть начальная цена базового актива равна $S_0$, время жизни опциона есть $T$. Пусть $n$ – число периодов, на которые мы разбиваем время действия опциона, т.е. одному периоду изменения цены будет соответствовать время $T/n$. За один период времени цена базового актива может повыситься с долей $u$>1 до $S_0u$ с некоторой вероятностью $p$. С вероятностью (1-$p$) она может упасть до $S_0d$, $d$<1, причем $d$=1/$u$. Пусть для цены $S_0u$ функция выплаты по опциону составит $f_u$, а для цены $S_0d$ она будет равна $f_d$.

Схематичное поведение однопериодного биномиального дерева приведено на рис. 2.

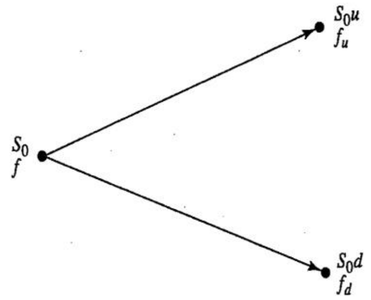


Рис. 2. Цена базового актива и значение функции выплаты для однопериодного биномиального дерева

Вычислим безрисковую $\Delta = \dfrac{\partial f}{\partial S}$, чтобы портфель П = $S\Delta - f$ из Δ имеющихся акций ценой $S$ (их «поставляем» контрагенту в будущем) и исполняемого в будущем опциона ценой $f$ был безрисковым со ставкой $r$. Денежный поток $f_u$ и $f_d$ отрицателен, так как мы должны удовлетворить требование контрагента при исполнении опциона.

Если к концу первого периода цена акции выросла, то стоимость портфеля составит

$$S_0u\Delta - f_u.$$

Если к концу первого периода цена акции понизилась, то стоимость портфеля составит

$$S_0d\Delta - f_d.$$

Если портфель безрисковый, эти количества должны совпасть:

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d.$$

Находим Δ:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}.$$

Так как портфель безрисковый, к концу первого периода получаемые денежные средства должны быть приведены к текущей стоимости со ставкой $r$, т.е. ее нужно дисконтировать на $e^{rT/n}$. Будущий доход в текущих ценах составит $(S_0u\Delta - f_u)e^{-rT/n}$. Аналогично, для второго случая – $(S_0d\Delta - f_d)e^{-rT/n}$ (но в дальнейшем он нам не понадобится). Стоимость формирования портфеля из Δ акций и одного проданного опциона есть $(S_0\Delta - f)$. Эти стоимости должны совпадать:

$$(S_0u\Delta - f_u)e^{-rT/n} = (S_0\Delta - f),$$

откуда

$$f = S_0\Delta - (S_0u\Delta - f_u)e^{-rT/n} = S_0\Delta\left(1 - ue^{-rT/n}\right) + f_u e^{-rT/n}.$$

Подставляя в найденное выражение $\Delta = \dfrac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}$ и упрощая, окончательно имеем:

$$f = e^{-rT/n}\left(pf_u + (1-p)f_d\right),$$

где $p = \dfrac{e^{rT/n} - d}{u - d}$.

**Пример**: зачастую параметр $p$ задается самостоятельно как вероятность успеха в биномиальном распределении. Однако если все остальные характеристики известны, $p$ можно и оценить. Например, если $u$=1,1, $d$=0,9, $r$=0,12, $T$=0,25, $f_u$ =1, $f_d$ =0. Тогда $p$ = 0,6523.

Найденное значение вероятности $p = \dfrac{e^{rT/n} - d}{u - d}$ можно использовать, чтобы найти цену базового актива в конце первого периода биномиального дерева. Действительно, пользуясь биномиальным распределением, имеем:

$$E(S_1) = pS_0u + (1-p)S_0d = pS_0(u-d) + S_0d = S_0e^{rT/n}.$$

По аналогии получаем:

$$E(S_2) = pS_1u + (1-p)S_1d = S_0e^{2rT/n},$$

$$\dots$$

$$E(S_n) = S_0e^{rT},$$

т.е. цена базового актива растет в среднем на величину безрисковой процентной ставки.

Использование будущей цены $S_n$ позволяет найти цену любого опциона по формуле

$$C_n(fv) = E^*\left(\frac{fv_n}{e^{rT}}\right),$$

где $fv_n$ – функция выплаты соответствующего опциона на $n$-ом периоде биномиального дерева. Для опциона покупателя европейского типа она совпадает с формулой (40) с $p^*=p$.

**Замечание**: чтобы связать параметры $u$ и $d$ с волатильностью σ цен базового актива, вычисленной в течение одного периода $T/n$ биномиального дерева, используют следующие соотношения [22]:

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}},\ d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}}.$$

Можно показать, что с ростом $n$ решение, полученное с помощью биномиального дерева, сходится к точному. При практических вычислениях $n$ выбирают большим 30, потому что этого достаточно, чтобы смоделировать $2^{30}$ комбинаций цен базового актива или около 1 млрд шт.

## «ГРЕЧЕСКИЕ» ДЛЯ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА

*Определение*: греческими для опциона со справедливой ценой $V$ называются следующие соотношения:

1) $\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$ - коэффициент Δ-хеджирования;

2) $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ - коэффициент чувствительности портфеля ценных бумаг к хеджированию, показывающий как часто нужно проводить процедуру хеджирования, чтобы добиться риск-нейтральности портфеля. Определяет скорость изменения $\Delta$ в зависимости от изменения базового актива;

3) $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$ - коэффициент чувствительности цены опциона к изменению безрисковой процентной ставки;

4) $Vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$ - определяет скорость изменения стоимости портфеля по отношению к изменению волатильности базового актива. Если Vega>>0, то стоимость портфеля очень чувствительна к изменениям волатильности;

5) $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$ - коэффициент, отвечающий за минимальную доходность риск-нейтрального портфеля, равную безрисковой процентной ставке.

**Замечание**: все греческие используются в риск-менеджменте. Например, для формирования риск-нейтрального портфеля акций стоимостью $S_t$ и облигаций стоимостью $B_t$ с помощью опциона покупателя, необходимо продать долю $\Phi(d_1)$ первоначального количества акций и долю $\frac{C - S\,\Phi(d_1)}{e^{rT}}$ первоначального количества облигаций.

Аналитические выражения греческих для опциона покупателя приведены в утверждении теоремы 7.

**Теорема** 7 (о «греческих» для опциона покупателя):

Пусть $C = S\,\Phi(d_1) - E\,e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$ - справедливая цена опциона покупателя. Тогда

1) $\Delta = \Phi(d_1)$ 2) $\Gamma = \Delta'_S = \frac{\Phi'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$ 3) $\rho = E(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$

4) $Vega = \frac{S\sqrt{(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right)$ 5) $\Theta = -\frac{\sigma S}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}\exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) - E\,re^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$.

**Доказательство**: проведем доказательство только для $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$. Остальные формулы получаются по аналогии прямым дифференцированием формулы Блэка – Шоулса.

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) + S\,\varphi(d_1)(d_1)_s' - Ee^{-r(T-t)}\varphi(d_2)(d_2)_s',$$

где $\varphi(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$.

Так как $(d_1)_s' = \dfrac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}, (d_2)_s' = (d_1)_s'$ , то

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) + \varphi(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} - Ee^{-r(T-t)}\varphi(d_2)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Преобразуем $\varphi(d_2)$:

$\varphi(d_2) = \dfrac{\exp\left(-d_2^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{\exp\left(-\left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(d_1)\exp\left(d_1\sigma\sqrt{T-t} - \sigma^2(T-t)/2\right)$. Поэтому

$$\Delta = \Phi(d_1) + \varphi(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} - E\varphi(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}\exp\left(-r(T-t) - \sigma^2(T-t)/2 + d_1\sigma\sqrt{T-t}\right).$$

Заметим, что $d_1\sigma\sqrt{T-t} = \ln S - \ln E + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$. Значит,

$\Delta = \Phi(d_1) + \varphi(d_1)\dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} - E\varphi(d_1)\dfrac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}\exp\left(\ln S - \ln E\right)$, или

$$\Delta = \Phi(d_1) + \varphi(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} - \varphi(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} = \Phi(d_1),$$

ч.т.д.

**Теорема** 8 (**соотношение call-put**): справедливая цена на опцион покупателя $C$ имеет связь со справедливой ценой на опцион продавца $P$ вида:

$$P = C - S_0 + Ee^{-rT},$$

где $C = S\,\Phi(d_1) - E\,e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$.

**Доказательство**: известно соотношение между максимумами:

$$(S_T - E)^+ - (E - S_T)^+ = S_T - E.$$

Разделим его на $e^{rT}$ и возьмем от обеих частей получившегося равенства риск-нейтральное математическое ожидание:

$$e^{-rT}\left[E^*(S_T - E)^+ - E^*(E - S_T)^+\right] = e^{-rT}E^*(S_T - E).$$

Так как $e^{-rT}E^*(S_T - E)^+ = C$, а $e^{-rT}E^*(E - S_T)^+ = P$, то последнее выражение преобразуется к виду

$C - P = E^*\left(\dfrac{S_T}{e^{rT}} - \dfrac{E}{e^{rT}}\right) = E^*\left(\dfrac{S_T}{e^{rT}}\right) - \dfrac{E}{e^{rT}} =$ (так как $E^*\left(\dfrac{S_T}{e^{rT}}\right) = S_0$ по свойству мартингальности дисконтированной цены) $= S_0 - \dfrac{E}{e^{rT}}$. Собирая, окончательно имеем $P = C - S_0 + Ee^{-rT}$, ч.т.д.

**Замечание**: 1. теорема 8 говорит о дуальности цен опционов покупателя и продавца: зная лишь одну из них, можно вычислить и другую. Это связано с тем, что все цены равновесны и справедливы для обоих контрагентов сделки; 2. пользуясь соотношением call-put нетрудно убедиться в том, что некоторые «греческие», записанные для опциона покупателя, изменятся. Например, величина ρ. Но параметр Vega будет одинаковым для опционов и покупателя, и продавца. Справедлива следующая теорема 9.

**Теорема** 9 (о «греческих» для опциона продавца):

Пусть $P = Ee^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\,\Phi(-d_1)$ - справедливая цена опциона продавца. Тогда

2) $\Delta = \Phi(d_1) - 1$ 2) $\Gamma = \Delta'_S = \dfrac{\Phi'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$ 3) $\rho = -E(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)$

4) $Vega = \dfrac{S\sqrt{(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{d_1^2}{2}\right)$ 5) $\Theta = -\dfrac{\sigma S}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}\exp\left(-\dfrac{d_1^2}{2}\right) + E\,re^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)$.

**Замечание**: уравнение Блэка-Шоулса (39) может быть записано с помощью греческих букв. Например, для цены *V* произвольного европейского опциона имеем:

$$\Theta + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\Gamma + r \cdot S\Delta = rV .$$

В то же время, если портфель (35) ***риск-нейтральный***, то $\Theta + \dfrac{\sigma^2 S^2}{2}\Gamma = rV$, т.е. в случае больших отрицательных значений Θ параметр Γ должен быть большим и положительным.

Некоторые графические представления поведения греческих коэффициентов приведены на следующих рисунках.

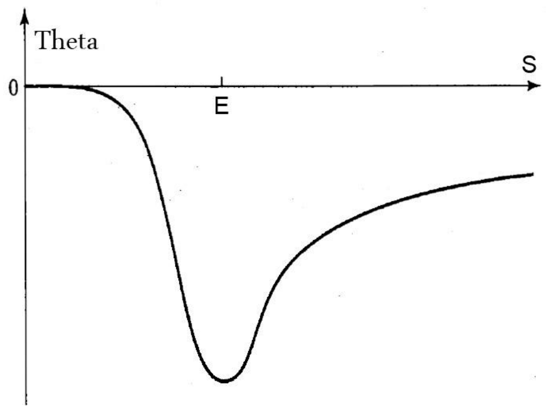


Рис. 3. Поведение коэффициента Θ для опциона call
в зависимости от цены базового актива *S* (по данным [22])

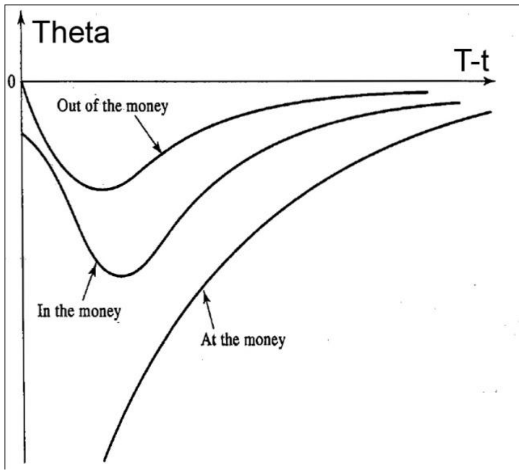


Рис. 4. Поведение коэффициента Θ для опциона call
в зависимости от срока до исполнения (по данным [22])

## ОПЦИОНЫ НА ФЬЮЧЕРС, ФОРМУЛА БЛЭКА–ШОУЛСА

**Теорема** 10 (о формуле Блэка-Шоулса для опциона покупателя на фьючерс): пусть цена фьючерса в момент времени $t$ со сроком до исполнения $\tau=(T\text{-}t)$ и ценой $S_t$ базового актива есть $F_{t,\tau}=S_t e^{r(T-t)}$, где $r$ –безрисковая процентная ставка. Тогда формула Блэка–Шоулса для справедливой цены опциона покупателя на фьючерс с ценой исполнения $E$ имеет вид

$$c = F_t e^{-r(T-t)}\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \ ,$$

где $d_1 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln F_{t,\tau} - \ln X + \sigma^2 (T-t)/2\right), d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, X = F_T$ .

***Доказательство:***

Продадим опцион покупателя на Δ фьючерсов со временем до исполнения τ за цену $C(F_{t,\tau},\tau)$. Пусть эволюция цены рискового актива $S_t$, являющегося базовым для фьючерса с ценой $F_{t,\tau}$, задаётся стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$d\,S_t = \mu S_t\, d\,t + \sigma S_t\, dW \ .$$

К справедливой цене фьючерса со стохастической процентной ставкой $F_{t,\tau} = S_t e^{r_{t,\tau}\tau}$ применим формулу Ито:

$$dF_{t,\tau} = \frac{\partial F_{t,\tau}}{\partial t}dt + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 F_{t,\tau}}{\partial S^2}dt + \frac{\partial F_{t,\tau}}{\partial S}dS$$

Так как $\dfrac{\partial F_{t,\tau}}{\partial t} = -rF_{t,\tau}$, а $\dfrac{\partial^2 F_{t,\tau}}{\partial S^2} = 0$, то

$$dF_{t,\tau} = (-rSdt + dS)e^{r\tau} \ .$$

Далее, $\left(dF_{t,\tau}\right)^2 = e^{2r\tau}\left(dS\right)^2$, $\left(dS\right)^2 = \sigma^2 S^2 dt$. Окончательно,

$$\left(dF_{t,\tau}\right)^2 = \sigma^2 F_{t,\tau} dt .$$

Применим к $C\left(F_{t,\tau},\tau\right)$ формулу Ито:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\sigma^2 F_{t,\tau}{}^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial F_{t,\tau}^2}dt + \frac{\partial C}{\partial F_{t,\tau}}dF_{t,\tau} .$$

Рассмотрим портфель из опциона покупателя на фьючерс и $\Delta$ фьючерсов:

$$\Pi = C - F_{t,\tau}\Delta ,$$

$$d\Pi = dC - \Delta dF_{t,\tau} .$$

Поэтому

$$d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\sigma^2 F_{t,\tau}{}^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial F_{t,\tau}^2}dt + \frac{\partial C}{\partial F_{t,\tau}}dF_{t,\tau} - \Delta dF_{t,\tau} .$$

Члены, содержащие $dF_{t,\tau}$ в последнем равенстве, отвечают за стохастическую часть, которую необходимо обнулить для получения безрискового портфеля П. Потребуем, чтобы $\Delta = \dfrac{\partial C}{\partial F_{t,\tau}}$. Следовательно, после хеджирования имеем:

$$d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\sigma^2 F_{t,\tau}{}^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial F_{t,\tau}^2}dt .$$

Таким образом, задача сведена к определению цены опциона европейского типа, решением которой является известная формула Блэка–Шоулса с базовым активом $S_t$. Для нахождения окончательной цены используем формулу (47), положив в ней $S_t = F_{t,\tau}e^{-r\tau}$. После несложных преобразований получим утверждение теоремы, причем

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln F_{t,\tau} - \ln X + \sigma^2\tau/2\right), d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}, X = F_T ,$$

что и требовалось доказать.

**Замечание**: по аналогии, можно доказать, что цена опциона продавца на фьючерс есть:

$$p = Ee^{-r(T-t)}\Phi\left(-d_2\right) - F_t e^{-r(T-t)}\Phi\left(-d_1\right).$$

Можно показать, что для опциона на фьючерс в начальный момент времени справедливо соотношение call – put вида

$$p = c - S_0 + Ee^{-rT} ,$$

аналогичное соотношению call – put для опционов европейского типа. Оно может быть обобщено и на случай произвольного времени $t$:

$$p_t = c_t - S_0 + Ee^{-r(T-t)}.$$

В обеих формулах через *p* обозначена справедливая цена на опцион продавца на фьючерс, через *c* обозначена справедливая цена на опцион покупателя на фьючерс.

Выведем аналог уравнения Блэка-Шоулса для опциона на фьючерс. Пусть $F_t$ – текущая стоимость фьючерса, Δ – их количество. Пусть $c$ – справедливая цена опциона покупателя на фьючерс. Купим один опцион покупателя на фьючерс с поставкой в будущий момент *T* фьючерсов в количестве Δ. Так как сам фьючерс в начальный момент не стоит ничего, то стоимость портфеля будет равна

$$\Pi = -c + \Delta \cdot F_0 = -c .$$

Предположим, что $F_t$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dF = \mu F\, dt + \sigma F\, dW ,$$

рассмотренному ранее.

По формуле Ито, примененной для стохастического процесса *c*, имеем:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} d\,t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2} dF^2 + \frac{\partial c}{\partial F} dF .$$

Так как $dF^2 = \mu^2 F^2\, d\,t^2 + \sigma^2 F^2\, dW^2 + 2\mu\sigma F^2\, dWd\,t = \sigma^2 F^2\, d\,t$, то

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} d\,t + \frac{\sigma^2 F^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2} dt + \frac{\partial c}{\partial F} dF .$$

Таким образом, изменение цены портфеля равно

$$d\Pi = \Delta \cdot dF - dc = \Delta \cdot dF - \frac{\partial c}{\partial t} d\,t - \frac{\sigma^2 F^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2} dt - \frac{\partial c}{\partial F} dF .$$

Хеджируем риск: пусть

$$\frac{\partial c}{\partial F} = \Delta ,$$

тогда сомножитель, стоящий при *dF*, обнулится, и

$$d\Pi = -\frac{\partial c}{\partial t} d\,t - \frac{\sigma^2 F^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2} dt .$$

Так как портфель безрисковый, то за момент *dt* портфель стоимостью Π принесет альтернативный доход в сумме

$$d\Pi = r\Pi\, dt ,$$

где $r$ – безрисковая процентная ставка.

Учитывая это, имеем (т.к. $\Pi = -c$):

$$d\Pi = -rc\, dt .$$

Значит,

$$-r\,c\,dt = -\frac{\partial c}{\partial t}\,d\,t - \frac{\sigma^2 F^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2}\,dt\,.$$

Интегрируя последнее соотношение по промежутку [0, $t$], получаем, что

$$\int_0^t \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2 F^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2} - rc\right] dt = 0\,.$$

Интеграл по множеству ненулевой меры равен нулю $\Leftrightarrow$ когда подынтегральная функция равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2 F^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2} = rc\,.$$

Уравнение почти полностью совпадает с уравнением Блэка – Шоулса для опциона покупателя (отсутствует слагаемое $rF\,\frac{\partial c}{\partial F}$, отвечающее за «конвективный перенос» акций от одних владельцев другим).

Зная формулы «греческих» для опциона покупателя нетрудно вычислить их и для фьючерса, и для опциона на фьючерс. Справедлива следующая теорема.

**Теорема** 11 (о значении дельта для опциона покупателя на фьючерс):

Пусть $c = F_t\, e^{-r(T-t)}\Phi(d_1) - E\, e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$ - справедливая цена опциона покупателя на фьючерс, где $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln F_t - \ln E + \sigma^2\tau/2\right)$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. Тогда $\Delta = e^{-r(T-t)}\Phi(d_1)$.

**Доказательство**:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial F} = e^{-r(T-t)}\Phi(d_1) + F_t\, e^{-r(T-t)}\varphi(d_1)(d_1)_s' - Ee^{-r(T-t)}\varphi(d_2)(d_2)_F',$$

где $\varphi(x) = \frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}}$.

Так как $(d_1)_F' = \frac{1}{F_t\sigma\sqrt{T-t}}$, $(d_2)_s' = (d_1)_s'$, то

$$\frac{\partial c}{\partial F} = e^{-r(T-t)}\Phi(d_1) + \varphi(d_1)\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}} - Ee^{-r(T-t)}\varphi(d_2)\frac{1}{F_t\sigma\sqrt{T-t}}\,.$$

Преобразуем $\varphi(d_2)$:

$\varphi(d_2) = \frac{\exp\left(-d_2^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\exp\left(-\left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(d_1)\exp\left(d_1\sigma\sqrt{T-t} - \sigma^2(T-t)/2\right)$. Поэтому

$$\Delta = e^{-r(T-t)}\Phi(d_1) + \varphi(d_1)\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}} - Ee^{-r(T-t)}\varphi(d_1)\frac{1}{F_t\sigma\sqrt{T-t}}\exp\left(-\sigma^2(T-t)/2 + d_1\sigma\sqrt{T-t}\right).$$

Заметим, что $d_1\sigma\sqrt{T-t}=\ln F_t-\ln E+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)$. Значит,

$$\Delta=e^{-r(T-t)}\Phi(d_1)+\varphi(d_1)\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}}-\varphi(d_1)\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}}=e^{-r(T-t)}\Phi(d_1),\text{ ч.т.д.}$$

**Теорема** 12 (о цене фьючерса):

Справедливая цена на фьючерс есть $F_0=E^*(S_T)$, или, в произвольный момент времени

$$F_t=S_T\,e^{-r(T-t)}.$$

**Теорема** 13 (о «греческих» для фьючерса):

Пусть $F_t=S_t\,e^{r(T-t)}$ - справедливая цена фьючерса. Тогда

1) $\Delta=e^{r(T-t)}$ 2) $\Gamma=\Delta'_S=0$ 3) $\rho=(T-t)F_t$ 4) $Vega=0$ 5) $\Theta=-rF_t$.

Доказательство очевидно.

## МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Основным недостатком модели Блэка – Шоулса, рассмотренной ранее, является предположение о постоянном уровне волатильности $\sigma = const$. Оно наиболее существенно ограничивает анализ реальных рисковых активов, торгуемых на фондовых рынках, так как зачастую эти финансовые инструменты обладают переменной волатильностью с функциональной зависимостью вида $\sigma = \sigma(t,S)$ или более сложной, когда $\sigma$ является стохастическим процессом. Поэтому в данном параграфе будет рассмотрена модель стохастической волатильности, обобщающая теорию Блэка – Шоулса.

Пусть $S$ – текущая стоимость актива, удовлетворяющего уравнению

$$dS=\mu S\,dt+\sigma S\,dW_1,$$

$W_1$ – винеровский процесс.

Пусть $\sigma$ – некоторый стохастический процесс, причем

$$d\sigma=p(s,\sigma,t)dt+q(s,\sigma,t)dW_2,$$

где $p(s,\sigma,t)$, $q(s,\sigma,t)$ – некоторые непрерывные функции, $W_2$ – винеровский процесс, отличный от $W_1$.

Пусть $W_1, W_2$ коррелированны между собой с корреляцией

$$\rho=corr(dW_1,dW_2).$$

Пусть, как и прежде, $V(S,\sigma,t)$ – справедливая цена опциона покупателя. Вследствие того, что модель описывается двумя стохастическими уравнениями, то требуется проводить уже два вида страхования активов. Первым из них будет уже рассмотренное $\Delta-$ хеджирование, вторым – страхование так называемого рыночного риска. Образуем портфель, продав опцион покупателя по справедливой цене $V(S,\sigma,t)$ и взяв на себя обязательства купить в будущем $\Delta$ акций стоимостью $S$ и $\Delta_1$ опционов страхования с ценой $V_1(S,\sigma,t)$.

Суммарная стоимость портфеля составит

$$\Pi = V(S,t) - \Delta \cdot S - \Delta_1 \cdot V_1 .$$

Изменение стоимости за время $dt$ будет

$$d\Pi = dV(S,t) - \Delta \cdot dS - \Delta_1 \cdot dV_1 .$$

По формуле Ито, примененной для стохастического процесса $V(S,\sigma,t)$, имеем:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{1}{2}\left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} d\sigma^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial S} d\sigma dS \right).$$

По аналогии, применим формулу Ито для функции $V_1(S,\sigma,t)$:

$$dV_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} dt + \frac{\partial V_1}{\partial S} dS + \frac{\partial V_1}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{1}{2}\left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial \sigma^2} d\sigma^2 + 2\frac{\partial^2 V_1}{\partial \sigma \partial S} d\sigma dS \right).$$

Подставляя $dV$, $dV_1$ в выражение для $d\Pi$, и учитывая $\rho = corr(dW_1, dW_2)$, получаем:

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{1}{2}\left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} d\sigma^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial S} d\sigma dS \right) - \Delta \cdot dS - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} dt -$$

$$- \Delta_1 \cdot \left( \frac{\partial V_1}{\partial S} dS + \frac{\partial V_1}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{1}{2}\left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial \sigma^2} d\sigma^2 + 2\frac{\partial^2 V_1}{\partial \sigma \partial S} d\sigma dS \right)\right),$$

или, преобразуя $d\sigma^2$, $dS^2$:

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} \right) + \rho\sigma q S\left( \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial S} - \Delta_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial \sigma} \right) + \frac{q^2}{2}\left( \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} - \Delta_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial \sigma^2} \right)\right) dt +$$

$$+ \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta \right) dS + \left( \frac{\partial V}{\partial \sigma} - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial \sigma} \right) d\sigma .$$

Чтобы избавиться от стохастичности, в последнем выражении приравняем нулю коэффициенты, стоящие при $d\sigma$, $dS$. Получим так называемые хеджирующие соотношения:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta \right) = 0, \ \left( \frac{\partial V}{\partial \sigma} - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial \sigma} \right) = 0 .$$

Они позволяют обнулить риск, связанный с покупкой опционов страхования и опциона покупателя.

Окончательно,

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} \right) + \rho\sigma q S\left( \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial S} - \Delta_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial \sigma} \right) + \frac{q^2}{2}\left( \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} - \Delta_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial \sigma^2} \right)\right) dt .$$

После применения хеджирующих соотношений портфель активов становится безрисковым. Поэтому за момент $dt$ портфель стоимостью $\Pi$ принесет доход в сумме

$$d\Pi = r\Pi\, dt\,,$$

где $r$ – безрисковая процентная ставка.

Учитывая что $\Pi = V(S,t) - \Delta \cdot S - \Delta_1 \cdot V_1$, имеем:

$$d\Pi = r\left(V(S,t) - \Delta \cdot S - \Delta_1 \cdot V_1\right)dt\,.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}\right) + \rho\sigma q S\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S\,\partial\sigma}\right) + \frac{q^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2} - \Delta_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial\sigma^2}\right)\right)dt =$$
$$= r\left(V(S,t) - \Delta \cdot S - \Delta_1 \cdot V_1\right)dt\,.$$

Соберем слева все, что связано с $V$, а справа – все, что связано с $V_1$:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\sigma}\right)^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma q S\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S} + \frac{q^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial V_1}{\partial\sigma}\right)^{-1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\sigma q S\frac{\partial^2 V_1}{\partial\sigma\partial S} + \frac{q^2}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial\sigma^2} + rS\frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1\right).$$

Так как опционы со справедливыми ценами $V, V_1$ имеют разные параметры (сроки исполнения, функции вознаграждения и т.п.), то обе части равенства должны быть независимы от типа контракта – т.е. они должны зависеть только от $S$, $t$, $\sigma$. Определим эту функцию как

$$-p + \lambda q\,, \tag{52}$$

где $\lambda$ – пока неизвестная функция, называемая рыночной ценой риска, $p$, $q$ – фиксированные функции из уравнения $d\sigma = p(s,\sigma,t)dt + q(s,\sigma,t)dW_2$. Тогда

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\sigma}\right)^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma q S\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S} + \frac{q^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV\right) = -p + \lambda q\,, \tag{53}$$

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial\sigma}\right)^{-1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\sigma q S\frac{\partial^2 V_1}{\partial\sigma\partial S} + \frac{q^2}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial\sigma^2} + rS\frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1\right) = 0\,.$$

Рассмотрим случай, когда не производится страхование риска покупки опционов. Таким образом, решим вопрос – выгодно ли проводить процедуру страхования, не является ли она излишней? Пусть портфель состоит из проданного опциона покупателя и обязательств на покупку $\Delta$ акций стоимостью $S$. Следовательно, стоимость портфеля составит

$$\Pi = V(S,\sigma,t) - \Delta \cdot S\,,$$

причем волатильность удовлетворяет уравнению

$$d\sigma = p(s,\sigma,t)d\,t + q(s,\sigma,t)dW_2\,.$$

По формуле Ито, примененной к $V(S,\sigma,t)$, получаем:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}d\,t + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial \sigma}d\sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}d\sigma^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S}d\,\sigma\,dS\right) = \frac{\partial V}{\partial t}d\,t + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial \sigma}d\sigma +$$

$$+\frac{q^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}dt + \rho\sigma Sq\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S}dt + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt\,.$$

Так как $d\Pi = dV(S,\sigma,t) - \Delta\cdot dS$, то

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma Sq\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S} + \frac{q^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}\right)dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)dS + \frac{\partial V}{\partial\sigma}d\sigma\,.$$

Как обычно, проведем $\Delta$ – хеджирование (не учитывая страхование волатильного риска). Тогда $\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) = 0$. Так как портфель становится «безрисковым», то $d\Pi = r\Pi\,dt$ или $d\Pi - r\Pi\,dt = 0$. Тогда

$$d\Pi - r(V - \Delta\cdot S)dt = 0\,.$$

Подставим в него найденное значение $d\Pi$ и учтем, что $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma Sq\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S} + \frac{q^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}\right)dt - rVdt + rS\frac{\partial V}{\partial S}dt + \frac{\partial V}{\partial\sigma}d\sigma = 0\,.$$

Воспользуемся тем, что $d\sigma = p(s,\sigma,t)d\,t + q(s,\sigma,t)dW_2$. Заметим так же, что в соответствии с (52) выражение при *dt* равно $(\lambda q - p)\frac{\partial V}{\partial\sigma}$. Тогда

$$d\Pi - r\Pi dt = q\frac{\partial V}{\partial\sigma}(\lambda dt + dW_2).$$

Это равенство означает, что на единицу изменения риска волатильности $\frac{\partial V}{\partial\sigma}dW_2$ должно приходиться $\lambda$ единиц дополнительных страховых средств. Если же не проводить страхования, то $\lambda = 0$ и в этой формуле $d\Pi - r\Pi dt = q\frac{\partial V}{\partial\sigma}dW_2 \neq 0$, т.е. портфель будет содержать ненулевой незастрахованный риск.

Пусть в исходном портфеле

$$\Pi = V(S,t) - \Delta\cdot S - \Delta_1\cdot V_1$$

опцион не исполняется в деньгах (out-of-money), т.е. $\Delta = 0$ (вероятность исполнения опциона). Тогда $\Pi = V - \Delta_1 \cdot V_1$. Повторяя обычные выкладки, получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (\mu - \lambda\sigma) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 .$$

Добьемся того, чтобы $V = S$ была частным решением этого уравнения (это означает, что мы добиваемся достижения опционом максимальной цены, равной цене БА. Это происходит в случае максимальной неопределенности относительного будущего поведения БА). Для этого подберем соответствующую функцию $\lambda$. Подставляя $V = S$ в него, имеем:

$$(\mu - \lambda\sigma) S - rS = 0 ,$$

откуда $\lambda = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$ – коэффициент Шарпа или мера рыночного риска.

Определив рыночную стоимость риска торговли активом, подставим его в исходное уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 ,$$

т.е. учитывая риск $\lambda$, получаем обычное уравнение Блэка – Шоулса, рассмотренное ранее.

Подводя итог, можно сказать, что волатильность является важнейшим параметром при торговле опционами. Ее трудно оценить, наблюдать или предугадать, т.к. зачастую она является стохастической функцией. Использование постоянной волатильности приводит к неверным результатам. Предполагая ее стохастичный характер, получаем систему уравнений (53). Для уменьшения рисков должны быть проведены мероприятия по выполнению хеджирующих соотношений $\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta\right) = 0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} - \Delta_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial \sigma}\right) = 0$. При отсутствии дополнительного страхования появляется систематический риск $q \frac{\partial V}{\partial \sigma} dW_2 \neq 0$, который не позволяет рассматривать портфель как безрисковый. Цена риска равна $\lambda = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$, где $\mu$ – ожидаемый возврат средств (дрейф), $r$ – безрисковая процентная ставка, $\sigma$ – волатильность актива.

## МОДЕЛЬ ПОСТОЯННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТИ ДИСПЕРСИИ (CEV)

Рассмотрим модель постоянной эластичности дисперсии (CEV – модель), являющуюся частным случаем модели стохастической волатильности и учитывающую эффект «левереджинга», когда росту цен акций соответствует падение уровня волатильности. В отличие от классической модели Блэка-Шоулса, использующей в качестве генератора цен геометрическое броуновское движение и строящейся в предположении о постоянстве ожидаемой доходности акций $\mu$ и волатильности цен $\sigma$, CEV – модель позволяет лучше учесть случайность и изменчивость функции $\sigma = \sigma(S,t)$, наблюдаемую при торгах.

Модель CEV была предложена Коксом в 1975 г. Пусть $S$ – цена базового актива в момент времени $t$, $\mu$ – его ожидаемая доходность, $\delta$ – волатильность, $0 < \beta < 2$ – некоторый коэффициент. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$dS = \mu S\, dt + \delta S^{\beta/2}\, dW\text{ , } S_0 \text{ известно,}$$

которое при $\beta = 0$ превращается в уравнение Орнштейна-Уленбека (процесс абсолютной диффузии), при $\beta = 2$ – в геометрическое броуновское движение (процесс Ито), при $\beta = 1$ – в модель Кокса-Росса (1976).

В общем случае CEV – модель не имеет явного аналитического решения и может быть разрешена относительно $S$ только численно, например, с помощью формул Рунге-Кутты.

Пусть всюду далее $\nu = (2-\beta)^{-1}, \tau = T - t$ и $m = \exp\left(r(2-\beta)\tau\right)$.

Рассмотрим некоторые свойства модели. Пусть $\sigma = \delta S^{\beta/2-1}$ – локальная волатильность. Тогда по формуле обычного дифференцирования $d\sigma = \delta\left(\frac{\beta}{2} - 1\right)S^{\frac{\beta}{2}-2} dS$ и

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{\delta(\beta/2-1)S^{\beta/2-2}dS}{\delta S^{\beta/2-1}} = (\beta/2-1)\frac{dS}{S},$$

т.е. $\frac{d\sigma}{\sigma}\Big/\frac{dS}{S} = (\beta/2-1) = const$. Поэтому $\beta$ можно назвать коэффициентом эластичности дисперсии.

Далее, к CEV-модели можно применить так называемое $F$ –преобразование по формуле

$$F = \frac{S^{1-\beta/2}}{\delta(1-\beta/2)}.$$

По формуле Ито

$$dF = \frac{S^{-\beta/2}}{\delta}dS + \frac{1}{2\delta}\left(-\frac{\beta}{2}\right)S^{-1-\beta/2}(dS)^2,$$

где $(dS)^2 = \delta^2 S^\beta dt$.

Поэтому $dF = \frac{S^{-\beta/2}}{\delta}dS - \frac{\delta\beta}{4}S^{\beta/2-1}dt$ .

Разделим исходное уравнение модели $dS = \mu S\, dt + \delta S^{\beta/2}\, dW$ на выражение, стоящее при дифференциале винеровского процесса, и заменим левую часть полученного уравнения на дифференциал от $F$:

$$\frac{dS}{\delta S^{\beta/2}} = \frac{\mu}{\delta} S^{1-\beta/2}\, dt + dW ,$$

$$dF + \frac{\delta\beta}{4} S^{\beta/2-1} dt = \frac{\mu}{\delta} S^{1-\beta/2}\, dt + dW ,$$

$$dF = \left( \frac{\mu S}{\delta S^{\beta/2}} - \frac{\delta\beta}{4S} S^{\beta/2} \right) dt + dW .$$

Вспоминая, что $S^{1-\beta/2} = F\delta(1-\beta/2)$ из замены переменного, получаем:

$$dF = \left( \mu F\left(1 - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\beta}{4F(1-\beta/2)} \right) dt + dW ,$$

или

$$dF = \left( \mu\alpha F - \frac{\beta}{4\alpha F} \right) dt + dW ,$$

где $\alpha = (1-\beta/2)$. Так как $\beta = 2 - 2\alpha$, то

$$dF = \left( \mu\alpha F + \frac{\alpha - 1}{2\alpha F} \right) dt + dW ,$$

которое удобно для численного решения, например, с помощью биномиальных деревьев, так как локальная волатильность постоянна и равна единице. На практике часто нужно знать не цену базового актива *S*, а только цену деривата на него, например, цену европейского опциона покупателя *C*. Известно [24], что она имеет вид:

$$C = S\,Q\left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x\right) - Ee^{-r(T-t)} Q\left(2y; 2 - \frac{2}{2-\beta}, 2x\right) =$$

$$= S\,Q\left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x\right) - Ee^{-r(T-t)} \left(1 - Q\left(2x; \frac{2}{2-\beta}, 2y\right)\right),$$

где $x = kS^{2-\beta} \exp\left(r(2-\beta)(T-t)\right)$, $y = kE^{2-\beta}$, $k = \dfrac{2r}{\delta^2 (2-\beta)[m-1]}$, $m = \exp\left(r(2-\beta)\tau\right)$,

$Q(2y; 2\nu, 2x) -$ хвостовое нецентрированное $\chi^2$-распределение с числом степеней свободы $2\nu$ и параметром сдвига $2x$. Оно определяется следующей формулой:

$$Q(2y; \nu, 2x) = \int_{2y}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2x+u}{2}}}{2} \left(\frac{u}{2x}\right)^{\frac{\nu-2}{4}} I_{\frac{\nu-2}{2}}\left(\sqrt{2xu}\right) du = \sum_{n=1}^{\infty} g(n, x) G(n + \nu - 1, y),$$

где $g(n, x)$ – плотность хвостового (дополнительного) Гамма – распределения, $g(n, x) = \dfrac{e^{-x} x^{n-1}}{\Gamma(n)}$, $\Gamma(n)$ – гамма – функция, $G(n + \nu - 1, y)$ – хвостовое (дополнительное)

Гамма – распределение, $G(n+\nu-1,y)=\int_y^{\infty} g(n+\nu-1,t)dt$, $I_q(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^q \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^j}{j!\Gamma(q+j+1)}$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка $q$.

При больших значениях параметров $x$, $y$ функция $Q(2y;2\nu;2x)$, выраженная через $G(n+\nu-1,y)$ и $g(n,x)$, достаточно медленно сходится. Поэтому для вычисления $Q(2y;2\nu,2x)$ можно использовать аппроксимацию вида:

$$Q(2y;2\nu,2x)=\Phi(R),$$

где $R=\dfrac{1-hp\left(1-h+\left(1-\frac{h}{2}\right)mp\right)-\left(\frac{y}{\nu+x}\right)^h}{h\sqrt{2p(1+mp)}}$, $h=1-\dfrac{2}{3}\dfrac{(\nu+x)(\nu+3x)}{(\nu+2x)^2}$, $p=\dfrac{(\nu+2x)}{2(\nu+x)^2}$, $m=(h-1)(1-3h)$.

Цену опциона продавца легко найти из соотношения «call – put»:

$$P=S_0Q\left(2y;2+\frac{2}{2-\beta},2x\right)-Ee^{-r(T-t)}Q\left(2y;2-\frac{2}{2-\beta},2x\right)-S_0+Ee^{-rT}=$$

$$=-S_0\left(1-Q\left(2y;2+\frac{2}{2-\beta},2x\right)\right)+Ee^{-r(T-t)}\left(1-Q\left(2y;2-\frac{2}{2-\beta},2x\right)\right).$$

Известно свойство хвостового нецентрированного $\chi^2$-распределения [24]:

$$Q(2y;2\nu,2x)=1-Q(2y;2\nu-2,2x).$$

Поэтому окончательно формула приобретает вид:

$$P=-S_0Q\left(2y;\frac{2}{2-\beta},2x\right)+Ee^{-r(T-t)}Q\left(2y;-\frac{2}{2-\beta},2x\right).$$

Или, наконец,

$$P=-S_0Q\left(2y;\frac{2}{2-\beta},2x\right)+Ee^{-r(T-t)}Q\left(2x;\frac{2}{2-\beta},2y\right).$$

Приведем пример предельного поведения справедливой цены опциона покупателя, вычисленного в соответствии с CEV – моделью, при $\tau=(T-t)\to 0$:

$$\lim_{\tau\to 0} C=S\lim_{\tau\to 0} Q(2y;2+2\nu,2x)-E\lim_{\tau\to 0} e^{-r\tau}(1-Q(2x;2\nu,2y)).$$

Очевидно, что $\lim\limits_{\tau\to 0} k=\lim\limits_{\tau\to 0} x=\lim\limits_{\tau\to 0} y=\infty$, где $x=kS^{2-\beta}\exp(r(2-\beta)\tau)$, $y=kE^{2-\beta}$, $k=\dfrac{2r}{\delta^2(2-\beta)[\exp(r(2-\beta)\tau)-1]}$. Вычислим предел каждого слагаемого выражения выше.

Покажем, что

$$\lim_{\tau\to 0} Q(2y;2+2\nu,2x).$$

Действительно, для нахождения предела найдем асимптотику функции $Q(2y;2+2\nu,2x)$ при $\tau\to 0$ и сведем получаемый таким образом интеграл к функции стандартного нормального распределения.

$Q(2y;2+2\nu,2x)=\int_{2y}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2x+u}{2}}}{2}\left(\frac{u}{2x}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(\sqrt{2xu}\right)du=$ (замена $u = 2xt$, $du = 2xdt$, новый нижний предел

есть $y/x$, верхний равен $\infty$) $=\frac{1}{2}\int_{y/x}^{\infty} e^{-\frac{2x(1+t)}{2}}\left(\frac{2xt}{2x}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(2x\sqrt{t}\right)2xdt=\int_{y/x}^{\infty} e^{-x(1+t)}t^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(2x\sqrt{t}\right)xdt=$

(замена $z=\sqrt{t}, t=z^2, dt=2zdz$, новый нижний предел $\sqrt{y/x}$, верхний равен $\infty$) $=$

$\int_{y/x}^{\infty} e^{-x(1+t)}t^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(2x\sqrt{t}\right)xdt=x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)}z^{\nu} I_\nu(2xz)2zdz=2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)}z^{\nu+1} I_\nu(2xz)dz$.

Воспользуемся известной асимптотикой для бесселевой функции при $z\to\infty$:

$$I_\nu(z)\sim\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}.$$

Тогда $I\sim 2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x\left(1+z^2\right)}z^{\nu+1}\frac{e^{2xz}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2xz}}dz=\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x-xz^2+2xz}z^{\nu+1/2}dz=$(сворачиваем полный квадрат в показателе экспоненты)$=\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x(z-1)^2}z^{\nu+1/2}dz=$(замена $z=1+t, dz=dt$, новый нижний предел $\sqrt{y/x}-1$, верхний - бесконечность)$=\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{y/x}-1}^{\infty} e^{-xt^2}(1+t)^{\nu+1/2}dt=$(замена $t=\frac{p}{\sqrt{2x}}, dp=\sqrt{2x}dt$, новый верхний предел равен $\infty$, нижний $\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)$) $=$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}\left(1+\frac{p}{\sqrt{2x}}\right)^{\nu+1/2}dp=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}dp+O\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right).$$

Переходим к пределу в последнем выражении:

$$\lim_{\tau\to 0} Q(2y;2+2\nu,2x)=\lim_{\tau\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}dp\right)=\begin{cases}0, \sqrt{y/x}-1>0\\ 1, \sqrt{y/x}-1<0\\ 1/2, \sqrt{y/x}-1=0\end{cases}.$$

Нулевое значение предела получается потому, что $\sqrt{2x}\to\infty$ при $\tau\to 0$ и нижний предел интегрирования стремится к верхнему. Равенство предела единице следует из того, что $\sqrt{2x}\to\infty$ при $\tau\to 0$ и нижний предел интегрирования $\to-\infty$ (получается полный интеграл, равный единице). Наконец, $\lim\limits_{\tau\to 0} Q(2y;2+2\nu,2x)=\lim\limits_{\tau\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-p^2/2}dp\right)=\frac{1}{2}$, если $y=x$ до перехода к пределу $\tau\to 0$, что возможно только в момент исполнения τ=0, когда по условиям контракта *S*=*E*. Это невозможно, так как опцион в момент τ=0 не торгуется. Поэтому в дальнейшем случай *S*=*E* при $\tau\to 0$ нами будет опускаться.

Вычислим предел второго слагаемого.

$$\lim_{\tau\to 0} Ee^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)=\lim_{\tau\to 0} Ee^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right).$$

Так как $Q(2x;2\nu,2y)=\int_{2x}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2y+u}{2}}}{2}\left(\frac{u}{2y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\sqrt{2yu}\right)du$ =(замена *u*=2*yt*, *du*=2*ydt*, новый нижний предел *x*/*y*, верхний – бесконечность)= $y\int\limits_{x/y}^{\infty}e^{-y(1+t)}t^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(2y\sqrt{t}\right)dt=$ (замена $z=\sqrt{t}, t=z^2, dt=2zdz$, новый нижний предел $\sqrt{x/y}$, верхний - бесконечность) = $=2y\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty}e^{-y(1+z^2)}z^{\nu}I_{\nu-1}(2yz)dz$, то используя асимптотическое поведение бесселевой функции на бесконечности $I_\nu(z)\sim\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}$, получаем:

$Q(2x;2\nu,2y)\sim 2y\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty}e^{-y(1+z^2)}z^{\nu}\frac{e^{2yz}}{\sqrt{4\pi yz}}dz$ =(сворачиваем полный квадрат в показателе экспоненты)= $\sqrt{\frac{y}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{x/y}}^{\infty}e^{-y(z-1)^2}z^{\nu-1/2}dz=$ (замена $z=1+t, dz=dt$, новый нижний предел $\sqrt{x/y}-1$, верхний – бесконечность) = $\sqrt{\frac{y}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{x/y}-1}^{\infty}e^{-yt^2}(1+t)^{\nu-1/2}dt=$ (замена $t=\frac{p}{\sqrt{2y}}, dp=\sqrt{2y}dt$, новый верхний предел – бесконечность, нижний $\sqrt{2y}\left(\sqrt{x/y}-1\right)$)=

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}\left(\sqrt{x/y}-1\right)}^{\infty}e^{-p^2/2}\left(1+\frac{p}{\sqrt{2y}}\right)^{\nu-1/2}dp=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2y}\left(\sqrt{x/y}-1\right)}^{\infty}e^{-p^2/2}dp+O\left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\right).$$

Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{\tau\to 0} Ee^{-r\tau}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)=E\lim_{\tau\to 0}\left(1-Q(2x;2\nu,2y)\right)=\begin{cases}0, \sqrt{x/y}-1<0\\ E, \sqrt{x/y}-1>0\end{cases}.$$

Собирая результаты, окончательно имеем:

$$\lim_{\tau\to 0} C = \begin{cases} 0, if\ x<y \\ S, if\ x>y \end{cases} - \begin{cases} 0, if\ x<y \\ E, if\ x>y \end{cases} = \begin{cases} 0, S<E \\ (S-E), S>E \end{cases}.$$

Значения пределов полностью соответствуют поведению цены опциона покупателя в рамках модели классической модели Блэка-Шоулса.

В дополнение к рассмотрению предельного поведения цены опциона в рамках CEV – модели приведем значение рисковой дельты (подробнее см. в [25]) для опциона покупателя. И исследуем его асимптотическое поведение.

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial Q(2y;2+2\nu,2x)}{\partial S} = \frac{\partial(2x)}{\partial S} p(2y;4+2\nu,2x) = \frac{2x(2-\beta)}{S} p(2y;4+2\nu,2x),$$

$$\frac{\partial Q(2x;2\nu,2y)}{\partial S} = -\frac{\partial(2x)}{\partial S} p(2x;2\nu,2y) = -\frac{2x(2-\beta)}{S} p(2x;2\nu,2y),$$

где $p(2y;2\nu+4,2x) = \frac{1}{2} e^{-x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} I_{\nu+1}\left(\sqrt{4xy}\right)$, $p(2x;2\nu;2y) = \frac{1}{2} e^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}\left(\sqrt{4xy}\right)$.

Окончательно,

$$\Delta_C = Q(2y;2+2\nu,2x) + 2x(2-\beta)p(2y;4+2\nu,2x) - \frac{2x(2-\beta)}{S} Ee^{-r(T-t)} p(2x;2\nu,2y).$$

Покажем, что $\lim_{\tau\to 0}\Delta_C = \begin{cases} 1, S>E \\ 0, S<E \end{cases}$. Действительно,

$$\lim_{\tau\to 0}\Delta_C = \lim_{\tau\to 0} Q(2y;2+2\nu,2x) + \lim_{\tau\to 0} 2x(2-\beta)p(2y;4+2\nu,2x) - \lim_{\tau\to 0}\frac{2x(2-\beta)}{S} Ee^{-r\tau} p(2x;2\nu,2y).$$

Очевидно, что $\lim_{\tau\to 0} k = \lim_{\tau\to 0} x = \lim_{\tau\to 0} y = \infty$. Вычислим предел каждого из трех слагаемых.

Найдем первый предел:

$$\lim_{\tau\to 0} Q(2y;2+2\nu,2x).$$

$$Q(2y;2+2\nu,2x) = \int_{2y}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2x+u}{2}}}{2}\left(\frac{u}{2x}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(\sqrt{2xu}\right)du =$$

(как и выше, делаем замены $u$=2$xt$, $du$=2$xdx$ и $z=\sqrt{t}, t=z^2, dt=2zdz$)=

$$= \int_{y/x}^{\infty} e^{-x(1+t)} t^{\frac{\nu}{2}} I_\nu\left(2x\sqrt{t}\right)xdt = x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x(1+z^2)} z^\nu I_\nu(2xz)2zdz = 2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x(1+z^2)} z^{\nu+1} I_\nu(2xz)dz.$$

Так как аргумент подынтегральной функции при $\tau\to 0$ стремится к бесконечности, используем асимптотику поведения модифицированной бесселевой функции на бесконечности:

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}.$$

Тогда $I \sim 2x\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x(1+z^2)} z^{\nu+1} \frac{e^{2xz}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2xz}}dz = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x-xz^2+2xz} z^{\nu+1/2}dz$ = (сворачиваем полный квадрат в показателе экспоненты)= $\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_{\sqrt{y/x}}^{\infty} e^{-x(z-1)^2} z^{\nu+1/2}dz =$ (замена $z = 1+t, dz = dt$, новый нижний предел $\sqrt{y/x}-1$, новый верхний - бесконечность)= $\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int\limits_{\sqrt{y/x}-1}^{\infty} e^{-xt^2}(1+t)^{\nu+1/2}dt =$ (замена $t = \frac{p}{\sqrt{2x}}, dp = \sqrt{2x}dt$, новый верхний предел – бесконечность, нижний $\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)$) =

$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}\left(1+\frac{p}{\sqrt{2x}}\right)^{\nu+1/2}dp = = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}dp + O\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)$. Переходим к пределу в последнем выражении:

$$\lim_{\tau\to 0} Q(2y;2+2\nu,2x) = \lim_{\tau\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{2x}\left(\sqrt{y/x}-1\right)}^{\infty} e^{-p^2/2}dp\right) = \begin{cases} 0, \sqrt{y/x}-1>0 \\ 1, \sqrt{y/x}-1<0 \end{cases}.$$

Равенство предела нулю следует из того, что $\sqrt{2x}\to\infty$ при $\tau\to 0$ и нижний предел интегрирования стремится к верхнему. Равенство предела единице следует из того, что $\sqrt{2x}\to\infty$ при $\tau\to 0$ и нижний предел интегрирования $\to -\infty$ (получается полный интеграл, равный единице).

Вычислим теперь предел $\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{-2x(2-\beta)}{S}Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)$ (третье слагаемое исходного выражения для рисковой дельты).

Асимптотически $p(2x;2\nu,2y) = \frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}\left(\sqrt{4xy}\right) \sim e^{-x}e^{-y}e^{2\sqrt{x}\sqrt{y}}C\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$, где $C$ – некоторая постоянная, не зависящая от τ. Выделяем полный квадрат:

$$p(2x;2\nu;2y) = \frac{1}{2}e^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}\left(\sqrt{4xy}\right) \sim e^{-x}e^{-y}e^{2\sqrt{x}\sqrt{y}}C\frac{1}{\sqrt[4]{xy}} \sim \frac{C}{\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2} \sim \frac{C}{e^{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\sqrt[4]{xy}} \sim$$

(расписываем *x, y* и выносим сомножитель *k* за скобки)

$$\sim \frac{C}{e^{k\left(\sqrt{mS^{2-\beta}}-\sqrt{E^{2-\beta}}\right)^2}\sqrt[4]{xy}},$$

где $m = \exp\left(r(2-\beta)(T-t)\right)$.

Следовательно, предел третьего слагаемого есть

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{2x(2-\beta)}{S}Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)=\frac{2E(2-\beta)}{S}\lim_{\tau\to 0}xp(2x;2\nu,2y)=\frac{2E(2-\beta)}{S}\lim_{\tau\to 0}\frac{Cx}{e^{k\left(\sqrt{mS^{2-\beta}}-\sqrt{E^{2-\beta}}\right)^2}\sqrt[4]{xy}}.$$

При $S\neq E$ экспонента знаменателя подавляет первую степень полинома по $k$ числителя и предел равен нулю:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{2x(2-\beta)}{S}Ee^{-r\tau}p(2x;2\nu,2y)=0\,.$$

Вычислим $\lim_{\tau\to 0}2x(2-\beta)p(2y;4+2\nu,2x)$, стоящий во втором слагаемом. Заметим, что

$$p(2y;4+2\nu,2x)\sim e^{-x}e^{-y}e^{2\sqrt{x}\sqrt{y}}C_1\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\sim\frac{C_1}{\sqrt[4]{xy}}e^{-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\sim\frac{C_1}{e^{k\left(\sqrt{mS^{2-\beta}}-\sqrt{E^{2-\beta}}\right)^2}\sqrt[4]{xy}},$$

где $C_1$ – константа, не зависящая от τ. Значит, при $S\neq E$

$$\lim_{\tau\to 0}2x(2-\beta)p(2y;4+2\nu,2x)=2(2-\beta)\lim_{\tau\to 0}\frac{C_1x}{e^{k\left(\sqrt{mS^{2-\beta}}-\sqrt{E^{2-\beta}}\right)^2}\sqrt[4]{xy}}=0\,.$$

Окончательно, $\lim_{\tau\to 0}\Delta_C=\begin{cases}1, S>E\\ 0, S<E\end{cases}.$

**Пример**: рассмотрим экзотический опцион – бинарный опцион покупателя и найдем его справедливую цену *BC* в рамках CEV модели. По определению бинарного опциона его держатель ничего не получает, если $S_T<E$, и получает сумму *E*, если $S_T\geq E$. Вероятность того, что в момент исполнения *T* цена базового актива $S_T\geq E$, в рамках подхода Блэка – Шоулса равна $\Phi(d_2)$. Значит, справедливая цена бинарного опциона покупателя есть:

$$BC=Ee^{-r\tau}\Phi(d_2),$$

где τ = $T-t$, $d_2=\dfrac{\ln S-\ln E+\left(r-0.5\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$.

Из построения бинарного опциона следует, что обычный опцион покупателя европейского типа эквивалентен короткой продаже (продаже взаймы) бинарного опциона по цене *BC*. Следовательно, для получения цены *BC* в рамках *CEV* модели достаточно взять второе слагаемое формулы цены опциона покупателя

$$BC=Ee^{-r\tau}Q(2y;2-2\nu,2x).$$

Сравнение цен *BC* (ось ординат), вычисленных в середине срока действия *T*/2 в рамках классической модели Блэка – Шоулса и CEV для бинарного опциона на индекс ММВБ в 2016 – 2017 гг., приведено на рис. 5, где учтены последние 50 торговых дней до исполнения опциона (ось абсцисс). В момент исполнения $S_T$ = 2048 руб.

***Плотность риск – нейтральной вероятности для CEV модели***

Плотность риск – нейтральной вероятности $\varphi(S_0, S_T, T)$ для будущей цены $S_T$ широко используется при ценообразовании опционов, особенно экзотических или зависящих от реализации цены базового актива [4, ф. (3)]. Известно, что она пропорциональна второй производной от справедливой цены опциона $C_t = C_t(S_0, K, T)$, например, опциона покупателя:

$$\varphi(S_0, S_T, T) = e^{rT} \left. \frac{\partial^2 C_t(S_0, K, T)}{\partial K^2} \right|_{K=S_T},$$

где $K$ – цена исполнения.

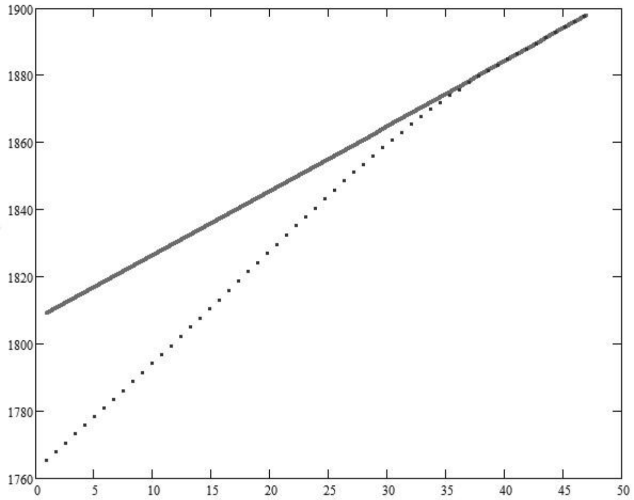


Рис. 5. Сравнение динамики цен, рассчитанных по модели Б.-Ш (пунктирная линия) и по CEV модели (сплошная линия) для бинарного опциона на индекс ММВБ. $E$=1900 руб, $T$=1 год, σ=15%, $r$=10%. $S_{T/2}$=2214 руб., $S_T$=2048 руб. Цены – ось ординат, время до исполнения – ось асбцисс.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема** (о риск-нейтральной плотности вероятности для CEV модели): для европейского опциона покупателя существует плотность $\varphi(S_t, K, T)$ с ценой базового актива $S_T$ = $K$ в момент исполнения. Тогда

$$\varphi(S_t, S_T, T) = e^{r\tau} \left. \frac{\partial^2 C_t(S_t, K, T)}{\partial K^2} \right|_{K=S_T}, \qquad (54)$$

где $\frac{\partial^2 C_t(S_t, K, T)}{\partial K^2} = \frac{yS(y - \nu + \beta\nu)}{\nu^2 K^2} p(2y; 2 + 2\nu, 2x) - \frac{y^2 S}{\nu^2 K^2} p(2y; 2\nu, 2x) +$

$$+ e^{-r\tau} \frac{y(\nu + 1 - y)}{\nu^2 K} p(2x; 2 + 2\nu, 2y) + e^{-r\tau} \frac{y^2}{\nu^2 K} p(2x; 4 + 2\nu, 2y).$$

**Доказательство**:

Для вывода $\varphi\left(S_t, S_T, T\right)$ используем вспомогательные соотношения (см. [14, ф. (A2a), (A2b), (A11a), (A11b)]:

$$\frac{\partial Q(\omega;\nu,\lambda)}{\partial\omega} = -p(\omega;\nu,\lambda),\ \frac{\partial Q(\omega;\nu,\lambda)}{\partial\lambda} = p(\omega;\nu+2,\lambda), \tag{55}$$

$$\frac{\partial p(\omega;\nu,\lambda)}{\partial\omega} = \frac{1}{2}\left(p(\omega;\nu-2,\lambda) - p(\omega;\nu,\lambda)\right),\ \frac{\partial p(\omega;\nu,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{1}{2}\left(p(\omega;\nu+2,\lambda) - p(\omega;\nu,\lambda)\right), \tag{56}$$

По формуле (55) вычисляем требуемые частные производные:

$$\frac{\partial Q(2y;2+2\nu,2x)}{\partial K} = \frac{\partial(2y)}{\partial K} p(2y;2+2\nu,2x) = -\frac{2y}{\nu K} p(2y;2+2\nu,2x),$$

$$\frac{\partial Q(2x;2\nu,2y)}{\partial K} = \frac{\partial(2y)}{\partial K} p(2x;2+2\nu,2y) = \frac{2y}{\nu K} p(2x;2+2\nu,2y),$$

так как $\frac{\partial(2x)}{\partial K} = 0$, $\frac{\partial(2y)}{\partial K} = \frac{2y(2-\beta)}{K}$.

Дифференцируя выражение для справедливой цены опциона

$$C = S\,Q\left(2y;2+\frac{2}{2-\beta},2x\right) - Ee^{-r(T-t)}Q\left(2y;2-\frac{2}{2-\beta},2x\right)$$

в рамках CEV модели, имеем:

$$\frac{\partial C_t}{\partial K} = -\frac{2yS}{\nu K} p(2y;2+2\nu,2x) - e^{-r\tau}\left(1 - Q(2x;2\nu,2y)\right) + \frac{2y}{\nu} e^{-r\tau} p(2x;2+2\nu,2y).$$

Так как $\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{y}{K}\right) = (1-\beta)\frac{y}{K^2}$, используем формулу (56) для дальнейших вычислений второй частной производной:

$$\frac{\partial^2 C_t}{\partial K^2} = \frac{yS(y-\nu+\beta\nu)}{\nu^2 K^2} p(2y;2+2\nu,2x) - \frac{y^2 S}{\nu^2 K^2} p(2y;2\nu,2x) +$$

$$+ e^{-r\tau}\frac{y(\nu+1-y)}{\nu^2 K} p(2x;2+2\nu,2y) + e^{-r\tau}\frac{y^2}{\nu^2 K} p(2x;4+2\nu,2y).$$

Выражение для производной завершает доказательство.

## УРАВНЕНИЕ БЕЛЛМАНА

Продемонстрируем полезность применения стохастических дифференциальных уравнений типа

$$dX = \mu(t,X)dt + \sigma(t,X)dW,$$

где $X_t$ – капитал в момент времени $t$, при нахождении оптимума некоторого функционала

$$\max_u E\left(\int_0^T f\left(X_t,t,u\right)dt + H\left(X_T,T\right)\right),$$

где $u = u_t$ – переменная для управления, $H\left(X_T,T\right)$ – полезность капитала $X_T$ в момент времени $T$, а $\int_0^T f\left(X_t,t,u\right)dt$ задает общую полезность капитала некоторой системы.

Выберем в качестве ограничения условие

$$dX = \mu(t,X,u)dt + \sigma(t,X,u)dW \tag{57}$$

с начальным капиталом $X_0 = x_0$. Пусть так же имеет место функциональная зависимость вида

$$u_t = g(X_t, t).$$

В общем случае мы предполагаем, что при выбранной $u_t$ всегда существует свой максимум. Далее, для каждого $0 \le t \le T$ определим функционал

$$J\left(X,t\right) = \max_u E\left(\int_t^T f\left(X_p,p,u\right)dp + H\left(X_T,T\right)\middle| X_t = X\right). \tag{58}$$

Очевидно, что $J\left(X,T\right) = H\left(X,T\right)$.

Предположим, что все заданные функции достаточно гладки и необходимое число раз непрерывно дифференцируемы. Допустим, что если решение оптимизационной задачи доставляет максимум на всем интервале $[0,T]$, то оно оптимально и на каждом подынтервале $[t, t+\delta t]$. Тогда исходная задача записывается в виде :

$$J\left(X,t\right) = \max_u E\left(\int_t^{t+\delta t} f(X_p,p,u)dp + J\left(X+\delta X, t+\delta t\right)\middle| X_t = X\right).$$

В (58) под выражением $X+\delta X$, если $X_t = X$, понимается значение $X_{t+\delta t}$. Оно может быть вычислено из уравнения (57). В то же время по теореме о среднем

$$\int_t^{t+\delta t} f(X_p,p,u)dp \sim f\left(X_t,t,u_t\right)\delta t\,. \tag{59}$$

Используя (57), применим формулу Ито к $J\left(X+\delta X,t+\delta t\right)$, игнорируя бесконечно малые второго порядка по $\delta t$:

$$J\left(X+\delta X,t+\delta t\right) = J\left(X,t\right) + \frac{\partial J}{\partial X}\delta X + \frac{\partial J}{\partial t}\delta t + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial X^2}\delta t + o(\delta t)\,.$$

$$J\left(X+\delta X,t+\delta t\right) = J\left(X,t\right) + \frac{\partial J}{\partial X}\mu\delta t + \frac{\partial J}{\partial X}\sigma\delta W + \frac{\partial J}{\partial t}\delta t + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial X^2}\delta t + o(\delta t)\,. \tag{60}$$

Условное математическое ожидание от слагаемого $\frac{\partial J}{\partial X}\sigma\delta W$ в (60) равно нулю как математическое ожидание от приращения винеровского процесса. Поэтому

$$E\left(\frac{\partial J}{\partial X}\sigma\delta W\,\middle|\,X_t\right)=E\left(\frac{\partial J}{\partial X}\sigma\,\middle|\,X_t\right)E\left(\delta W\,|\,X_t\right)=0.$$

Подставляя все вышенайденное в выражение (58), имеем:

$$J(X,t)=\max_u E\left(f(X_t,t,u_t)\delta t+J(X,t)+\frac{\partial J}{\partial X}\mu\delta t+\frac{\partial J}{\partial X}\sigma\delta W+\frac{\partial J}{\partial t}\delta t+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial X^2}\delta t+o(\delta t)\,\middle|\,X_t=X\right),$$

или

$$J(X,t)=\max_u\left(f(X_t,t,u_t)\delta t+J(X,t)+\frac{\partial J}{\partial X}\mu\delta t+\frac{\partial J}{\partial t}\delta t+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial X^2}\delta t+o(\delta t)\right).$$

Сократим в равенстве $J(X,t)$, разделим обе части выражения на $\delta t$ и отбросим бесконечно малые $\delta t$ первого и более высокого порядка. Окончательно имеем:

$$\frac{\partial J}{\partial t}=-\max_u\left(f(X_t,t,u_t)+\mu\frac{\partial J}{\partial X}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial X^2}\right).$$

Доказали следующую теорему.

***Теорема*** **(Беллмана)**: пусть случайный процесс $X_t$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (57). Для решения оптимизационной задачи

$$\max_u E\left(\int_0^T f(X_p,p,u_p)dp+H(X_T,T)\,\middle|\,X_t=x_0\right) \tag{61}$$

определим с помощью равенства (58) функцию $J(X,t)$ для произвольного $0\le t\le T$. Тогда

$$\frac{\partial J}{\partial t}=-\max_u\left(f(X_t,t,u_t)+\mu\frac{\partial J}{\partial X}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial X^2}\right)$$

с граничным условием $J(X_T,T)=H(X_T,T)$.

**Пример**: в теории опционов (см., например, [27]) для введения показателя неприятия риска инвестиций используется функция полезности в степенном виде:

$$U(c)=\begin{cases}\dfrac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \gamma\in[0,1),\\ \ln c,\ \gamma=1,\end{cases}$$

где $c$ – норма потребления капитала.

Пусть капитал $X_t\ \ge\ 0$ был разделен на рисковую и безрисковую часть, причем переменная управления $u_t$ – это доля капитала, инвестированного в рисковую часть. Предположим так же, что внесенный капитал реинвестируется в финансовую систему и не вносится дополнительно, не выводится за пределы этой системы.

Пусть цена единицы инвестиций $S_t$ в рисковую часть удовлетворяет геометрическому броуновскому движению

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dW$$

с некоторыми известными постоянными α и σ. Тогда ($u_t X_t / S_t$) – число рисковых объектов инвестирования, (1-$u_t$)$X_t$ – число безрисковых. Поэтому за время $dt$ приращение капитала $dX_t$ с учетом потребления вычисляется следующим образом:

$$dX = \frac{uX}{S} dS + r(1-u)Xdt - cdt ,$$

где $r$ – безрисковая процентная ставка или ставка банковского депозита.

Подставляя выражение для $dS$, получаем:

$$dX = [\alpha uX + r(1-u)X - c]dt + \sigma uXdW .$$

Найдем необходимые для достижения максимальной полезности функции $u_t$, $c_t$. Пусть ρ – некоторый коэффициент, позволяющий дисконтировать к начальному (нулевому) моменту времени будущее значение полезности $U(c_t)$. Определим

$$J(x,t) = \max_{u,c} E\left( \int_t^T e^{-\rho p} U(c_p) dp \middle| X_t = x \right),$$

причем для простоты получаемых выкладок выберем $f(t,c) = e^{-\rho t} \ln c, U(c_t) = c$ для подстановки их в уравнение Беллмана. Правая часть этого уравнения запишется в виде (с учетом выражения для $dX$, найденного выше):

$$\Gamma(t,c) = e^{-\rho t} \ln c + (ux(\alpha - r) + (rx - c)) \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} u^2 x^2 \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}.$$

Необходимое условие существование экстремума для этой функции – равенство нулю первых производных по неизвестным параметрам. Поэтому

$$0 = \frac{\partial \Gamma}{\partial c} = e^{-\rho t} c^{-1} - \frac{\partial J}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} = x(\alpha - r) \frac{\partial J}{\partial x} + \sigma^2 x^2 u \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} .$$

Выражаем необходимые функции $u = u_t$, $c = c_t$:

$$c_t = e^{-\rho t} \left( \frac{\partial J}{\partial x} \right)^{-1},$$

$$u_t = \frac{\alpha - r}{\sigma^2} \left( -\frac{\partial J}{\partial x} \right) \left( x \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \right)^{-1} .$$

По характеру функциональной зависимости функции полезности будем искать решение оптимизационной задачи в виде:

$$J(x,t) = e^{-\rho t} (A \ln x + B).$$

Записываем значения частных производных для $J(x,t)$:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -\rho e^{-\rho t}\left(A\ln x + B\right),$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = Ae^{-\rho t}x^{-1},$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = -Ae^{-\rho t}x^{-2}.$$

Тогда

$$u_t = \frac{\alpha - r}{\sigma^2}\left(-\frac{\partial J}{\partial x}\right)\left(x\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\right)^{-1} = \left(\frac{\alpha - r}{\sigma^2}\right).$$

С другой стороны, так как $c_t = e^{-\rho t}\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^{-1}$, то

$$c_t = \frac{x}{A}.$$

Для определения констант *A*, *B* подставим все найденные выше выражения в уравнение Беллмана:

$$0 = \frac{\partial J}{\partial t} + \Gamma(t,c) = -\rho e^{-\rho t}\left(A\ln x + B\right) + e^{-\rho t}\ln\frac{x}{A} + \frac{A}{x}e^{-\rho t}\left(\left(\frac{\alpha - r}{\sigma}\right)^2 x + x\left(r - \frac{1}{A}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\alpha - r}{\sigma^2}\right)^2 x^2 e^{-\rho t}\frac{A}{x^2}\right),$$

или

$$0 = -\rho e^{-\rho t}\left(A\ln x + B\right) + e^{-\rho t}\ln\frac{x}{A} + Ae^{-\rho t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha - r}{\sigma}\right)^2 + \left(r - \frac{1}{A}\right)\right].$$

Деля обе части равенства на $\exp(-\rho t)$ и сравнивая коэффициенты при $\ln(x)$, получаем, что

$$A = \frac{1}{\rho},$$

$$0 = -\rho B + \ln\rho + \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha - r}{\sigma}\right)^2 + \left(r - \rho\right)\right],$$

откуда легко находится параметр *B*.

Доказали следующую теорему:

***Теорема* (о логарифмической полезности)**: пусть определена задача нахождения максимальной полезности

$$\max_{u,c} E\left(\int_0^\infty e^{-\rho p}U(c_p)dp\right).$$

Если полезность $U(c)=\ln c$, то оптимальное потребление и управление выражаются равенствами

$$c_t = \rho X_t, \; u_t = \left(\frac{\alpha - r}{\sigma^2}\right),$$

где $X_t$ – капитал, ρ – коэффициент дисконтирования полезности в ростом времени.

Максимальная полезность на интервале $0 \le t < \infty$ задается выражением $A \ln X_0 + B$,

где $A = \frac{1}{\rho}$, $B = \frac{1}{\rho}\left[\ln\rho + \frac{r}{\rho} + \frac{1}{2\rho}\left(\frac{\alpha - r}{\sigma}\right)^2 - 1\right]$.

## МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

### *Цена бескупонной облигации $ZCB_t$*

*Определение:* Вероятности $P$ и $Q$ называются *эквивалентными*, если существует стохастический процесс $\gamma_t=\gamma(\omega, t)$, что для каждого $A$ из борелевского множества $G=2^{\Omega}$

$$P(A) = \int_A \gamma_T \, dQ.$$

**Замечание**: после дифференцирования $P(A) = \int_A \gamma_T \, dQ$ получаем, что

$$dP = \gamma_T dQ.$$

Можно показать, что $\gamma_t$ является мартингалом относительно $F_n$ и вероятности $P$, т.е.

$$\gamma_t = E_P\left(\gamma_T \middle| F_t\right), \; t < T.$$

**Лемма 1**: пусть $X_t$ – адаптивный процесс относительно фильтрации $F_n$, т.е. для любого $t<n$ процесс $X_t$ интегрируем в $L_1(0,T)$. Пусть $\gamma_t$ – процесс, для которого вероятности $P$ и $Q$ будут эквивалентными. Тогда выполнено равенство

$$E_P(X_t) = E_Q(X_t \gamma_T).$$

**Доказательство**: $E_P(X_t) =$ (по определению)$= \int_{\mathfrak{R}} X_t dP =$ (по определению эквивалентности вероятности $dP = \gamma_T dQ$) $= \int_{\mathfrak{R}} X_t \gamma_T dQ = E_Q(X_t \gamma_T)$, ч.т.д.

***Теорема 14 (Гирсанова):*** Вероятность $P^*$ является *риск-нейтральной*, если существует процесс $\gamma_t = M(\omega, t) = \exp\left(\int_0^t c_t dW - \frac{1}{2}\int_0^t c_t^2 dt\right)$, где $c_t$ – произвольный интегрируемый с квадратом стохастический процесс, что для каждого множества $A$, принадлежащего борелевскому множеству $G=2^{\Omega}$, выполнено равенство

$$P^*(A) = \int_A M(\omega, T)\,dP.$$

Кроме того, $\bar{W} = W - \gamma_t$ - новый винеровский процесс относительно вероятности $P^*$.

***Замечание:*** $M(\omega,t)$ называется *стохастическим дисконтирующим фактором*.

*Определение*: бескупонной облигацией $ZCB_T$ (или $T$–бондом) называется контракт, гарантирующий своему держателю выплату номинала (обычно 1000 у.е.) в момент исполнения $T$. При этом купонные выплаты не проводятся. Цену $ZCB_T$ в момент времени $t$ принято обозначать через $P(t,T)$.

В дальнейшем для математического моделирования цены $P(t,T)$ будем предполагать, что для любого момента исполнения $T$ существует своя $ZCB_T$, что $P(T,T) = 1$, то есть выплачивается единица капитала при погашении облигации, а так же пусть функция $P(t,T)$ дифференцируема по $T$.

*Определение*: простой форвардной процентной ставкой, сложившейся на момент времени $t$, для периода времени $[T,S]$ назовем функцию

$$F(t;T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right),\ S > T.$$

*Определение*: простой спотовой процентной ставкой для периода времени $[t,T]$ назовем функцию

$$F(t,T) = F(t;t,T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{P(t,T)} - 1\right).$$

*Определение*: непрерывно начисляемой сложной форвардной процентной ставкой, сложившейся на момент времени $t$, для периода времени $[T,S]$ назовем функцию

$$R(t;T,S) = -\frac{1}{S-T}\left(\ln P(t,S) - \ln P(t,T)\right),\ S > T.$$

*Определение*: непрерывно начисляемой сложной процентной ставкой для периода времени $[t,T]$ назовем функцию

$$R(t,T) = R(t;t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T).$$

*Определение*: Пусть $P(t,T)$ – цена бескупонной облигации в момент $t < T$, $T$ – некоторое время погашения. Мгновенной форвардной процентной ставкой, сложившейся на момент времени $t$, назовем функцию

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(t,T),$$

или, что-то же самое,

$$P(t,T)=P(T,T)\exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right)=\exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right).$$

***Замечание***: очевидно, что $f(t,T)$ – это значение предела для функции $R(t;T,S)$ при $S\to T$.

*Определение:* Мгновенной краткосрочной процентной ставкой или просто краткосрочной ставкой (безрисковой процентной ставкой) назовем функцию

$$r(t) = r_t = f(t,t).$$

***Лемма***: для безарбитражного рынка в любые моменты времени $t \le T \le S$ выполняется следующее равенство:

$$P(t,S)=P(t,T)P(T,S).$$

***Доказательство***: пусть для определенности $P(t,S)>P(t,T)P(T,S)$ для некоторых моментов времени $t \le T \le S$. Построим финансовую стратегию вида: в момент времени $t$ продаем $\frac{P(t,T)P(T,S)}{P(t,S)}$ облигаций $ZCB_S$ по цене $P(t,S)$ и покупаем $P(T,S)$ облигаций $ZCB_T$ по цене $P(t,T)$. Суммарная стоимость покупок по стратегии равна нулю. В момент времени $T$ исполняются облигации $ZCB_T$, выплачивается номинал, равный единице, на каждую такую облигацию. Вдобавок, мы покупаем одну $ZCB_S$. В момент времени $S$ исполняются облигации $ZCB_S$, на погашение которых мы выплачиваем $\frac{P(t,T)P(T,S)}{P(t,S)}$ у.е. Вдобавок при исполнении одной $ZCB_S$ получаем у.е. капитала. Таким образом, выручка от всех операций есть $\left(1-\frac{P(t,T)P(T,S)}{P(t,S)}\right)>0$, операции выполнены без финансового риска. Как следствие, возникла арбитражная возможность, что противоречит условию теоремы.

Случай $P(t,S)<P(t,T)P(T,S)$ рассматривается аналогично.

Значит, $P(t,S)=P(t,T)P(T,S)$, ч.т.д.

**Замечание**: прологарифмируем утверждение, полученное в лемме, с учетом равенства $P(t,T)=\exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right)$. Получаем:

$$\int_T^S f(t,p)dp=\int_T^S f(T,p)dp,\ t\le T\le S,$$

или

$$f(t,S)=f(T,S)=r(S).$$

Это означает, что с течением времени кривая форвардной процентной ставки возрастает, причем форвардная ставка, сложившаяся на момент времени $t$, с исполнением в момент $S$ в точности равна мгновенной будущей краткосрочной процентной ставке $r(S)$. Однако такое поведение процентных ставок наблюдается только в рамках построенной нами математической модели. В реальности ставка $f(t,T)$ вычисляется через условное математическое ожидание будущей краткосрочной ставки $r(T)$, а прогнозирование величины $r(T)$ по $f(t,T)$ бесполезно.

**Теорема 15** (о существовании риск-нейтральной вероятности процесса Ито):

Пусть задан процесс Ито

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dW .$$

Тогда существует риск-нейтральная вероятность $P^*$, относительно которой решение этого дифференциального уравнения есть

$$S(t) = S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \overline{W}\right],$$

где $\overline{W}$ - винеровский процесс относительно $P^*$.

**Доказательство**: воспользуемся теоремой Гирсанова и найдем процесс $c_t$, чтобы $P^*(A) = \int_A M(\omega,t)dP$ или $\frac{dP^*}{dP} = \exp\left(\int_0^T c_t dW - \frac{1}{2}\int_0^T c_t^2 dt\right)$. Тогда $W = \overline{W} + c_t$, где $\overline{W}$ - новый винеровский процесс относительно $P^*$, а $W$ – старый винеровский процесс относительно $P$.

Имеем:

$$dW = d\overline{W} + c_t dt$$

- получаем дифференцированием по Ито и учитываем, что в $c_t$ нет зависимости от $W$.

Исходное дифференциальное уравнение преобразуется к виду:

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dW = \alpha S dt + \sigma S(\overline{W} + c_t) = \alpha S dt + \sigma S(d\overline{W} + c_t dt)$$

Выбирая $c_t = \frac{r-\alpha}{\sigma}$ в качестве *цены риска* (известный показатель риска Шарпа, см. тему *стохастическая волатильность*), получаем:

$$dS = \alpha S dt + \sigma S(d\overline{W} + \frac{r-\alpha}{\sigma}dt) = \alpha S dt + \sigma S d\overline{W} + (r-\alpha)S dt = rS dt + \sigma S d\overline{W} .$$

Вывели новое дифференциальное уравнение относительно риск-нейтральной вероятности $P^*$. Действительно, в случае $\sigma = 0$ и $dS = rS_0 dt$ его решение определяет риск-нейтральную эволюцию капитала: $S = S_0 \exp\left(\int_0^t r_p \, dp\right)$ или капитал, получаемый инвестированием в безрисковый актив под безрисковую процентную ставку. Значит, выбрали верное значение $c_t = \frac{r-\alpha}{\sigma}$, которое определяет $P^*$.

Найдем решение преобразованного ДУ

$$dS = rSdt + \sigma SdW .$$

Оно нам хорошо известно: $S(t) = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W\right)$, теорема доказана.

**Замечание**: 1. в доказанной теореме процентная ставка является постоянной. Перейдем к рассмотрению процентной ставки как стохастического процесса. Пусть $r_t = r(t,W)$. 2. Если $B_t$ – стоимость банковского депозита в момент $t$, $B_0$ – начальная стоимость, то $dB_t = B_t r_t dt$, откуда $B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$. Если $r_s = r(s) = r$ – некоторая постоянная ставка, то вычисляя интеграл, получаем, что $B_t = B_0 e^{rt}$ - непрерывно начисляемый процент.

Пусть форвардная процентная ставка является процессом Ито, т.е представима в виде $df = \alpha dt + \sigma dW$. Непосредственно интегрируя его, имеем:

$$f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)dW_s .$$

Так как $r_t = f(t,t)$, то $r_t = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW_s$. Следовательно, раз $B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$, то подставляя выражение для $r_t$ под этот интеграл, получаем:

$$B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t f(0,p)dp + \int_0^t\int_0^p \alpha(s,p)dsdp + \int_0^t\int_0^p \sigma(s,p)dW_s dp\right).$$

Меняя пределы интегрирования по теореме Фубини, получим:

$$B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t f(0,p)dp + \int_0^t\int_S^t \alpha(s,p)dpds + \int_0^t\int_s^t \sigma(s,p)dpdW_s\right) . \qquad (62)$$

Кроме того, так как $P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right)$, подставляя выражение $f(t,T)$ и применяя теорему Фубини, аналогично получаем:

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(0,s)ds - \int_0^t\int_t^T \alpha(s,u)duds - \int_0^t\int_t^T \sigma(s,u)dudW_s\right) . \qquad (63)$$

Обозначим для простоты написания:

$$\alpha'(t,T)=\int_t^T \alpha(t,s)ds,$$

$$\sigma'(t,T)=\int_t^T \sigma(t,s)ds.$$

***Теорема 16***: Если уравнение

$$-\alpha'(t,T)+\frac{1}{2}[\sigma'(t,T)]^2=\sigma'(t,T)\gamma_t \tag{64}$$

имеет единственное решение $\gamma_t$, то существует риск – нейтральная вероятность $P^*$ для дисконтированной цены

$$\frac{P(t,T)}{B(t)}=\frac{\exp\left(-\int_t^T f(0,s)ds-\int_0^t\int_t^T \alpha(s,u)duds-\int_0^t\int_t^T \sigma(s,u)dudW_s\right)}{B_0\exp\left(\int_0^t f(0,p)dp+\int_0^t\int_S^t \alpha(s,p)dpds+\int_0^t\int_s^t \sigma(s,p)dpdW_s\right)}.$$

Кроме того, замена переменного вида

$$\alpha(t,T)=\sigma(t,T)\sigma'(t,T) \tag{65}$$

не меняет вероятность $P^*$.

Используем теорему 16. Пусть $\overline{W}$ - винеровский процесс относительно риск – нейтральной вероятности $P^*$. Тогда, так как

$$f(t,T)=f(0,T)+\int_0^t \alpha(s,T)ds+\int_0^t \sigma(s,T)d\overline{W_s},$$

подставляя (65), имеем:

$$f(t,T)=f(0,T)+\int_0^t \sigma(s,T)\sigma'(s,T)ds+\int_0^t \sigma(s,T)d\overline{W_s},$$

или дифференцируя по $t$, имеем:

$$df=\sigma(t,T)\sigma'(t,T)dt+\sigma(t,T)d\overline{W_t}$$

Определим цену $P(t,T)$ относительно риск – нейтральной вероятности $P^*$. Пользуясь соотношением (63) рассмотрим равенство

$$\ln P(t,T)=-\int_t^T f(0,s)ds-\int_0^t\int_s^T \alpha(s,u)duds-\int_0^t\int_s^T \sigma(s,u)dudW_s+\int_0^t f(0,p)dp+\int_0^t\int_s^t \alpha(s,u)duds+\int_0^t\int_s^t \sigma(s,u)dudW_s.$$

С учетом сделанных обозначений имеем:

$$\ln P(t,T)=-\int_t^T f(0,s)ds-\int_0^t \alpha'(s,T)ds-\int_0^t \sigma'(s,T)dW_s+\int_0^t f(0,u)du+\int_0^t \alpha'(s,t)ds+\int_0^t \sigma'(s,t)dW_s.$$

Полагая в (62) начальный капитал $B_0 = 1$, видим, что последние три слагаемые и есть ln $B_t$. Тогда

$$\ln P(t,T) = \ln B_t - \int_0^T f(0,u)du - \int_0^t \alpha'(s,T)ds - \int_0^t \sigma'(s,T)dW_s. \qquad (66)$$

В то же время, $B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$, то есть $\ln B_t = \int_0^t r_s ds$ при условии $B_0 \equiv 1$. Вдобавок, при $t$ = 0 мы получаем в (66) следующее выражение:

$$\ln P(0,T) = \ln B_0 - \int_0^T f(0,u)du = -\int_0^T f(0,u)du.$$

Допустим, что из уравнения (64) мы нашли $\gamma_t$. Перейдем от текущей вероятности $P$ к риск – нейтральной $P^*$:

$$dW_t = d\overline{W}_t + \gamma_t dt.$$

Тогда из (66) получаем:

$$\ln P(t,T) = \int_0^t r_s ds + \quad (\textbf{так как по найденному выше } -\int_0^T f\,du = \ln P(0,T)\textbf{)}$$

$$+\ln P(0,T) - \int_0^T \alpha'(s,T)ds - \int_0^t \sigma'(s,T)(d\overline{W}_t + \gamma_t dt) = \text{ (пользуясь равенством (64))=}$$

$$= \ln P(0,T) - \frac{1}{2}\int_0^t [\sigma'(s,T)]^2 ds - \int_0^t \sigma'(s,T)d\overline{W}_t + \int_0^t r_s ds. \qquad (67)$$

Ранее мы получили, что относительно риск – нейтральной вероятности $P^*$

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma(s,T)\sigma'(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)d\overline{W},$$

или, заменяя предел $T$ на $t$, имеем

$$f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \sigma(s,t)\sigma'(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)d\overline{W}_t.$$

Так как $r_t$=$f(t,t)$, то из последнего равенства выводим:

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \sigma(s,t)\sigma'(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)d\overline{W}_s. \qquad (68)$$

Интегрируя обе части уравнения (67) по промежутку [0,$t$], имеем:

$$\int_0^t r_S ds = \int_0^t f(0,u)du + \frac{1}{2}\int_0^t [\sigma'(s,t)]^2 ds + \int_0^t \sigma'(s,t)d\overline{W}_t.$$

Подставим последнее равенство в (67):

$$\ln P(t,T) = \ln P(0,T) - \frac{1}{2}\int_0^t [\sigma'(s,t)]^2 ds - \int_0^t \sigma'(s,t)d\overline{W} +$$

$$+\int_0^t f(0,u)du+\frac{1}{2}\int_0^t\left[\sigma'(s,t)\right]^2 ds+\int_0^t \sigma'(s,t)d\overline{W}$$

- искомая цена облигации $P(t,T)$ относительно риск – нейтральной вероятности.

Кроме того, из (67)

$$P(t,T)=P(0,T)\exp\left(\int_0^t r_s ds-\frac{1}{2}\int_0^t\left[\sigma'(s,T)\right]^2 ds-\int_0^t \sigma'(s,T)d\overline{W_s}\right).$$

Дифференцируя его по формуле Ито, получим:

$$dP(t,T)=P(t,T)\cdot r_t dt-P(t,T)\sigma'(t,T)d\overline{W_t}.$$

Это дифференциальное уравнение для цены бескупонной облигации в момент времени $t$.

***Ценообразование облигаций со стохастической ставкой***

При фиксированной ключевой (краткосрочной) процентной ставке $r$ бескупонная облигация $ZCB_t$ приносит при погашении своему держателю номинальную стоимость безрисково и поэтому может рассматриваться как безрисковый актив. Но если процентная ставка изменяется случайно, то текущая стоимость $ZCB_t$ как оценка справедливой стоимости выплачиваемого в будущем номинала будет изменяться, увеличиваясь в случае падения величины $r$ или уменьшаясь с ростом $r$. Это переводит инструмент $ZCB_t$ в разряд рисковых активов – активов с ненулевым рыночным риском.

Предположим стохастическую природу изменения краткосрочной процентной ставки. Пусть $r(t) = r_t$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dr=\mu(r,t)dt+\sigma(r,t)dW$$

с некоторыми известными функциями $\mu(r,t),\sigma(r,t)$.

В отличие от ценообразования опционов при нахождении цены облигации со случайной процентной ставкой нет базового актива и, как следствие, невозможно хеджировать рыночный риск. Поэтому обычно в портфеле облигаций одна облигация хеджируется некоторой другой с иным сроком исполнения. Справедлива следующая фундаментальная теорема, первоначально предложенная О. Васичеком.

***Теорема*** **(**фундаментальная теорема ценообразования облигации**)**: пусть $V(r,t)$ – цена облигации с выплатой единичного номинала в момент погашения $T$. Тогда справедливо ДУ вида:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+m(r,t)\frac{\partial V}{\partial r}=rV \quad (69)$$

с граничным условием $V(r,T) = 1$, $m(r,t)$ – некоторая функция.

***Замечание***: теорема справедлива и для процентных деривативов, выплачивающих некоторую сумму $g(r_T)$ в момент исполнения: $V(r_T,T) = g(r_T)$.

**Доказательство**: докажем теорему только для случая процентного дериватива, так как утверждение для цены облигации получается как частный случай с $g(r_T) = 1$.

Выберем два произвольных дериватива ценой $V_1$ и $V_2$ и сроками исполнения $T_1$ и $T_2$. Пусть $t \le \min(T_1,T_2)$. Захеджируем один дериватив с помощью другого, составив портфель:

$$\Pi = V_1 - \Delta V_2,$$

где $\Delta$ – число единиц второго дериватива для короткой продажи. Приращение цены портфеля вычисляем по формуле Ито, считая активы $V_1$ и $V_2$ независимыми друг от друга:

$$d\Pi = \frac{\partial V_1}{\partial t}dt + \frac{\partial V_1}{\partial r}dr + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}dt - \Delta\left(\frac{\partial V_2}{\partial t}dt + \frac{\partial V_2}{\partial r}dr + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}dt\right).$$

Выделяя стохастическую часть в равенстве выше, обнуляем ее, захеджировав:

$$\Delta = \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big/ \frac{\partial V_2}{\partial r}.$$

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V_1}{\partial t}dt + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}dt - \Delta\left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}\right)\right)dt.$$

Портфель $\Pi$ стал безрисковым, поэтому за момент $dt$ он принесет альтернативный доход (если, например, положить деньги в Центральный банк) в сумме

$$d\Pi = r\Pi\, dt,$$

где $r$ – безрисковая процентная ставка.

Как и в случае модели стохастической волатильности, приравняем эти дифференциалы друг другу, подставим в формулу выражения для $\Pi = V_1 - \Delta V_2$ и для $\Delta = \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big/ \frac{\partial V_2}{\partial r}$. Наконец, перенесем все слагаемые, содержащие $V_1$, в левую часть, а $V_2$ – в правую:

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1\right) = \left(\frac{\partial V_2}{\partial r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - rV_2\right).$$

Так как деривативы с ценами $V_1$ и $V_2$ имеют абсолютно разные параметры, то это равенство возможно лишь в случае, когда и левая, и правая часть функционально не зависят от $V_1$ и $V_2$, а зависят только от величины процентной ставки и времени. Поэтому для цены произвольного дериватива $V$ справедливо дифференциальное соотношение:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV\right) = -m(r,t),$$

причем знак минус выбран для удобства записи получающегося результата:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+m(r,t)\frac{\partial V}{\partial r}=rV \text{, ч.т.д.}$$

***Замечания***: 1. аналитическая форма зависимости $m(r,t)$ фундаментальной теоремой не устанавливается, выявляется только ее наличие; 2. при непрерывном начислении на облигацию купонных платежей $K(r,t)dt$ за период $dt$ уравнение (69) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+m(r,t)\frac{\partial V}{\partial r}=rV-K(r,t)\,.$$

3. Обозначим через $P_t$ цену облигации со стохастической процентной ставкой в момент $t$ и исполнением в момент $T$. Пусть выполнено равенство $dr=\mu(r,t)dt+\sigma(r,t)dW$, где винеровский процесс рассматривается относительно вероятности $P$. Положим

$$\theta(r,t)=\frac{\mu(r,t)-m(r,t)}{\sigma(r,t)}\,,$$

где $m(r,t)$ – функция из равенства (69).

Пусть выполнено неравенство Новикова: $E_P\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\theta_t^2dt\right)\right)<\infty$. Зададим новый винеровский процесс

$$\overline{W_t}=W_t+\int_0^t\theta_u du\,.$$

По теореме Гирсанова для $P$ существует эквивалентная вероятность $Q$, что

$$dQ=\exp\left(-\int_0^T\theta_t dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T\theta_t^2dt\right)dP$$

и $\overline{W_t}$ будет винеровским процессом относительно вероятности $Q$. Эту вероятность $Q$ называют риск – нейтральной. Для этой вероятности дифференциальное уравнение относительно процентной ставки $r$ перепишется в виде:

$$dr=\mu(r,t)dt+\sigma(r,t)\left(d\overline{W}-\theta(r,t)dt\right)=\left(\mu(r,t)-\sigma(r,t)\theta(r,t)\right)dt+\sigma(r,t)d\overline{W_t}=m(r,t)dt+\sigma(r,t)d\overline{W_t}\,.$$

Как следствие, если процесс $r(t)=r_t$ удовлетворяет уравнению относительно вероятности $Q$

$$dr=m(r,t)dt+\sigma(r,t)d\overline{W_t}\,,$$

он является риск – нейтральной процентной ставкой.

### *Модель Васичека*

*Определение*: Пусть $P(r,t,T)$ – цена облигации в момент $t<T$. Пусть номинал $P(r,T,T)=1$. Если цена облигации может быть выражена как

$$P(r,t,T)=\exp\left(A(t,T)-B(t,T)r\right), \tag{70}$$

где $A(t,T), B(t,T)$ - известные достаточно гладкие функции, причем $B(t,T)>0$, то модель изменения процентной ставки называют моделью аффинной процентной структуры.

***Замечание***: непосредственно из определения модели аффинной процентной структуры следует, что

$$\frac{\partial}{\partial r}P(r,t,T) = -B(t,T)P(r,t,T) < 0,$$

т. е. с ростом процентной ставки цена облигации падает.

***Теорема* 17**: пусть процентная ставка удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dr = m(r,t)dt + \sigma(r,t)d\overline{W},$$

где $\overline{W}$ – винеровский процесс относительно вероятности $Q$. Пусть имеет место модель аффинной процентной структуры с некоторыми зависящими от времени функциями $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$:

$$m(r,t) = a(t) + b(t)r,$$

$$\sigma^2(r,t) = c(t) + d(t)r.$$

Тогда функции $A(t,T), B(t,T)$ из равенства (70) удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}A(t,T) - a(t)B(t,T) + \frac{c(t)}{2}B^2(t,T) = 0,\ A(T,T) = 0,$$

(ур. Риккати) $$\frac{\partial}{\partial t}B(t,T) + b(t)B(t,T) - \frac{d(t)}{2}B^2(t,T) = -1,\ B(T,T) = 0. \tag{71}$$

**Доказательство**: для доказательства используем фундаментальную теорему. Как цена облигации $P(r,t,T) = \exp(A(t,T) - B(t,T)r)$ удовлетворяет уравнению (69) с производными вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(r,t,T) = P(r,t,T)\left(\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - r\frac{\partial B(t,T)}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}P(r,t,T) = -B(t,T)P(r,t,T),\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}P(r,t,T) = B^2(t,T)P(r,t,T).$$

Заменяя $dr = (a(t) + b(t)r)dt + \sqrt{c(t) + d(t)r}\,d\overline{W}_t$, получаем доказываемое.

Наконец, $P(r,T,T) = 1 = \exp(A(T,T) - B(T,T)r)$, то есть $A(T,T) = 0$, $B(T,T) = 0$, что и требовалось доказать.

Перейдем к рассмотрению модели Васичека для процентной ставки $r$:

$$dr = \alpha(\overline{r} - r)dt + \sigma d\overline{W}, \tag{72}$$

где α и σ – положительные константы, $r$ – средний наблюдаемый уровень процентной ставки на заданном интервале времени или долгосрочная процентная ставка, $\overline{W}$ – винеровский процесс относительно вероятности $Q$.

Отметим, что модель (72) подразумевает средне-возвратное поведение процентной ставки: если $r - r > 0$, то слагаемое $\alpha(r - r)$ будет отрицательным и решение уравнения (72) со временем уменьшается. Если, наоборот, $r - r < 0$, т.е. процентная ставка $r$ ниже долгосрочной, то $\alpha(r - r)$ будет положительным и решение уравнения (72) со временем увеличивается. Коэффициент α поэтому принято называть скоростью возврата к среднему.

***Замечание***: в модели Васичека уровень процентной ставки $r$ может быть отрицательным. При $r = 0$ в (72) получается рассмотренный выше процесс Орнштейна – Уленбека.

***Теорема* 18**: пусть случайный процесс $r_t$ удовлетворяет уравнению Васичека (72). Тогда оно подчиняется нормальному распределению и для $0 \le s \le t$, для $\tau = (t - s)$ выполнено равенство

$$r_t = r + (r_s - r)\exp(-\alpha\tau) + \sigma\int_s^t \exp\left(-\alpha(t-u)\right)d\overline{W}_u, \tag{73}$$

причем условное математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам

$$E_Q\left(r_t \middle| F_s\right) = r + (r_s - r)\exp(-\alpha\tau),$$

$$D_Q\left(r_t \middle| F_s\right) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - \exp(-2\alpha\tau)\right). \tag{74}$$

Кроме того, предельное распределение вероятности для процентной ставки $r_t$ стремится при $\tau \to \infty$ к нормальному закону распределения $N\left(r, \dfrac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$.

**Доказательство**: по свойству 10) интеграла Ито интеграл $I(t) = \int_0^t f(p)dW_p$ от произвольной детерминированной функции $f$ имеет нормальное распределение. Так как в равенстве (73) первые два слагаемые в правой части детерминированы, а последнее слагаемое – интеграл Ито от детерминированной функции, то вся правая часть в (73) подчинена нормальному закону распределения. Далее, беря условное математическое ожидание от обеих частей (73), получаем:

$$E_Q\left(r_t \middle| F_s\right) = r + (r_s - r)\exp(-\alpha\tau) + \sigma E_Q\left(\int_s^t \exp\left(-\alpha(t-u)\right)d\overline{W} \middle| F_s\right) =$$

=(под интегралом стоит детерминированная функция, поэтому фильтрацию $F_s$ опускаем) =

$$= r + (r_s - r)\exp(-\alpha\tau) + \sigma E_Q\left(\int_s^t \exp\left(-\alpha(t-u)\right)d\overline{W}_s\right) = \text{ (по свойству 4) для интеграла Ито) =}$$

$$= \bar{r} + (r_s - \bar{r})\exp(-\alpha\tau).$$

Вычислим условную дисперсию для выражения (73):

$$D_Q\left(r_t \middle| F_s\right) = D_Q\left[\left(\bar{r} + (r_s - \bar{r})\exp(-\alpha\tau) + \sigma\int_s^t \exp\left(-\alpha(t-u)\right)d\overline{W}_u\right)\middle| F_s\right] = \sigma^2 D_Q\left[\left(\int_s^t \exp\left(-\alpha(t-u)\right)d\overline{W}_u\right)\middle| F_s\right] =$$

= (по свойству изометрии Ито для интеграла) =

$$= \sigma^2\left(\int_s^t \exp\left(-2\alpha(t-u)\right)du\right) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - \exp(-2\alpha\tau)\right).$$

Для того, чтобы найти параметры предельного распределения вероятности для процентной ставки $r_t$, переходим в доказанных выражениях (74) к пределу при $\tau \to \infty$ и учитываем, что предел нормальных распределений для $r_\tau$ так же будет иметь нормальное распределение, ч.т.д.

***Теорема* 19**: цена облигации $P(r,t,T)$ по модели Васичека определяется соотношением вида:

$$P(r,t,T) = \exp\left(A(\tau) - B(\tau)r\right),$$

где $A(\tau) = \left(B(\tau) - \tau\right)\left(\bar{r} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right) - \frac{\sigma^2}{4\alpha}B^2(\tau)$, $B(\tau) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \exp(-\alpha\tau)\right), \tau = (T-t)$.

**Доказательство**: воспользуемся теоремой 17 с функциями $a(t) = \alpha\bar{r}, b(t) = -\alpha, c(t) = \sigma^2$, $d(t) = 0$. Система (71) приобретает вид (для упрощения записи далее мы отбросили аргументы функций):

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \alpha\bar{r}B + \frac{\sigma^2}{2}B^2 = 0,\ A(T,T) = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \alpha B = -1,\ B(T,T) = 0.$$

Решение второго уравнения системы $B(\tau) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \exp(-\alpha\tau)\right)$, подставляем его в первое уравнение. Получаем

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \bar{r}\left(1 - \exp(-\alpha\tau)\right) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\left(1 - \exp(-\alpha\tau)\right)^2,$$

решение которого находится непосредственным интегрированием на интервале $[t,T]$. Теорема доказана.

### *Модель Кокса – Росса – Ингерсола (CIR)*

Рассмотрим модель CIR для краткосрочной процентной ставки $r$:

$$dr = \alpha\left(\bar{r} - r\right)dt + \sigma\sqrt{r}\,d\overline{W}. \tag{75}$$

В отличие от модели Васичека процентная ставка $r_t$ может быть только неотрицательной. Однако свойство средне-возвратного поведения процентной ставки остается.

*Определение*: функция плотности $\chi^2(x;k,\lambda)$ нецентрированного хи-квадрат распределения с числом степеней свободы $k$ и параметром сдвига $\lambda$ имеет вид:

$$\chi^2(x;k,\lambda) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x+\lambda}{2}\right)\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k/4-1/2} I_{k/2-1}(\sqrt{\lambda x}),$$

где $I_q(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^q \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^j}{j!\Gamma(q+j+1)}$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка $q$.

Справедлива следующая теорема.

***Теорема* 20**: пусть случайный процесс $r_t$ с условием $r = r_0$ в нулевой момент времени является решением уравнения (75). Тогда он имеет нецентральное $\chi^2$– распределение с плотностью вида:

$$f(r) = c_t \chi^2(c_t r; d, \lambda_t),$$

где $d = \frac{4\alpha r}{\sigma^2}$, $\lambda_l = c_t r_0 \exp(-\alpha t)$, $c_l = \frac{4\alpha}{\sigma^2(1-\exp(-\alpha t))}$,

причем для $s \le t$ условное математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам

$$E(r_t | r_s) = r_s \exp(-\alpha\tau) + r(1-\exp(-\alpha\tau)),$$

$$D(r_t | r_s) = r_s \frac{\sigma^2}{\alpha}(\exp(-\alpha\tau) - \exp(-2\alpha\tau)) + r\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1-\exp(-\alpha\tau))^2,$$

где $\tau = (t - s)$.

Наконец, предельное распределение вероятности для процентной ставки $r_t$ стремится при $\tau \to \infty$ к закону распределения с плотностью $\frac{4\alpha}{\sigma^2}\chi^2\left(\frac{4\alpha}{\sigma^2}r; \frac{4\alpha}{\sigma^2}r, 0\right)$.

**Доказательство**: полное доказательство приведено в [28].

***Теорема 21***: цена облигации $P(r,t,T)$ по модели *CIR* определяется соотношением вида:

$$P(r,t,T) = \exp(A(\tau) - B(\tau)r),$$

где $A(\tau) = \frac{2\alpha r}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\gamma\exp((\alpha+\gamma)\tau/2)}{(\alpha+\gamma)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}\right)$, $B(\tau) = \frac{2(e^{\gamma\tau}-1)}{(\alpha+\gamma)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2+2\sigma^2}$ , $\tau = (T - t)$.

**Доказательство**: воспользуемся теоремой 17 с функциями $a(t)=\alpha r, b(t)=-\alpha, c(t)=0$, $d(t)=\sigma^2$. Поэтому система (71) приобретает вид (для упрощения записи далее мы отбросили аргументы функций):

$$\frac{\partial A}{\partial t}-\alpha r B=0,\ A(T,T)=0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}-\alpha B-\frac{\sigma^2}{2}B^2+1=0,\ B(T,T)=0.$$

Решение второго уравнения системы $B(\tau)=\dfrac{2\left(e^{\gamma\tau}-1\right)}{(\alpha+\gamma)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}$, что можно проверить непосредственной подстановкой. При найденном $B(\tau)$ первое уравнение системы легко разрешается интегрированием на интервале $[t,T]$ и

$$A(\tau)=\frac{2\alpha r}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\gamma\exp\left((\alpha+\gamma)\tau/2\right)}{(\alpha+\gamma)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}\right),$$

то есть теорема доказана.

### *Модель Халла – Уайта*

Рассмотрим модель я краткосрочной процентной ставки $r$:

$$dr=\left(\theta(t)-\gamma r\right)dt+\sigma d\overline{W}, \tag{76}$$

где $\overline{W}$ – винеровский процесс относительно вероятности $Q$, $\gamma$ и $\sigma$ – положительные константы, $\theta(t)$ – известная функция времени, задаваемая для соответствия модели (76) структуре рыночных процентных ставок.

***Теорема* 22**: цена облигации $P(r,t,T)$ по модели Халла –Уайта определяется соотношением вида:

$$P(r,t,T)=\exp\left(A(t)-B(t)r\right),$$

где $B(t)=\dfrac{1}{\gamma}\left(1-\exp(-\gamma\tau)\right)$, $A(t)=-\displaystyle\int_t^T B(u)\theta(u)du+\frac{\sigma^2}{2\gamma^2}\left(\tau+\frac{1-\exp(-2\gamma\tau)}{2\gamma}\right)-2B(t)$, $\tau=(T-t)$.

**Доказательство**: полностью приведено в [29, с. 90].

### *Ценообразование облигаций кредитного риска. Модель Мертона.*

Пусть некоторая фирма занимает у банка сумму, которая обеспечена ликвидными активами (или акциями) фирмы на сумму $V$ (стоимость фирмы в терминах быстрой ликвидности). Пусть $K$ – сумма, которую нужно вернуть кредитору в момент времени $T$, $K<V$. Банк, желая минимизировать риск дефолта предприятия и невозврата кредита, выпускает дефолтные облигации, обеспечением которых являются активы фирмы на сумму

$V$. Все дефолтные облигации продаются банку – страховщику выпуском опциона продавца: страховщик предполагает падение стоимости облигаций в случае дефолта и продает опцион продавца банку на всю сумму облигаций. Это эквивалентно тому, что предприятие выпускает облигации, продает их банку, а банк продает предприятию опцион продавца на весь объем эмиссии облигаций, чтобы компенсировать падение стоимости облигаций в случае дефолта предприятия. Если акции фирмы падают в цене и их стоимость меньше $V$, то банк требуют от предприятия исполнить опцион и продают облигации по цене, которая была на момент предоставления кредита (она выше текущей, если стоимость фирмы падает). Таким образом, мы имеем дело с корпоративными облигациями на сумму дефолта $K$ и опционом продавца с ценой исполнения $K$ в момент $T$. В нашем случае, $V$ – переменная стоимость компании. Тогда функция выплаты по опциону составит $\varphi(T) = K - \max(K - V, 0) \equiv \min(V, K)$.

Пусть стоимость фирмы является стохастическим дифференциальным процессом Ито $dV = rVdt + \sigma Vd\overline{W}$ относительно риск–нейтральной вероятности $P^*$, или $dV = \mu Vdt + \sigma VdW$ относительно произвольной вероятности $P$. В данной формуле $r$ – безрисковая процентная ставка, $\sigma$ – волатильность.

Заметим, что сам актив $V$ не продается и не покупается на бирже. Торгуется только производные от $V$ бумаги – акции (облигации) компании.

Мертон показал, что цена фирмы $V$ не зависит от неприятия риска инвесторами, поэтому мы можем предположить, не умоляя общности, риск – нейтральность вероятности. Это приведет нас к рассмотрению формулы Блэка – Шоулса для опциона с функцией выплаты $f(T) = max\{K – V, 0\}$.

Действительно, покажем, что цена дефолтной облигаций будет найдена по формуле Блэка – Шоулса. Рассмотрим модель со стороны банка.

Обозначим

- через $P^d(t,T)$ - стоимость дефолтных облигаций со сроком исполнения $T$, $t < T$;
- через $P(t, T)$, как и ранее, - стоимость бескупонных облигаций со сроком исполнения $T$;
- $p(t)$ – стоимость опциона продавца на стоимость компании $V$.

В момент выдачи кредита банк выпускает дефолтные облигации стоимостью $P^d(t,T)$, которые он продает страховщику (третьему лицу), где $P^d(t,T) = P(t,T) - p(t)$ (продали бескупонные облигации на активы заемщика страховщику = выдали кредит, купили опцион продавца у страховщика на эти облигации в качестве обеспечения), причем

$p(t) = -V \cdot \Phi(-d_1) + P(T,T)\exp(-r(T-t))\Phi(-d_2)$ (по формуле Блэка – Шоулса), где $P(T,T)=P(t,T)\exp\left(r(T-t)\right)$ – финальная цена бескупонной облигации или цена исполнения опциона, $V$ – цена базового актива или стоимость компании,

$$d_1=\left[\ln\frac{V}{P(T,T)}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]\cdot(\sigma\sqrt{T-t})^{-1},\ d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}.$$

Кроме того, известно, что $\Phi(-d_i)=1-\Phi(d_i)$. Поэтому

$$P^d(t,T)=P(t,T)+V\Phi(-d_1)-P(t,T)\Phi(-d_2)=$$
$$=P(t,T)(1-\Phi(-d_2))+V\Phi(-d_1)=P(t,T)\Phi(d_2)+V\Phi(-d_1).$$

Пусть $\Gamma=\dfrac{V}{P(t,T)}$ - это дисконтированная стоимость фирмы или отношение $\dfrac{\textit{капитализация}}{\textit{долг}}$.

Цена дефолтной облигации есть

$$P^d(t,T)=P(t,T)\Phi(d_2)+P(t,T)\cdot\Gamma\cdot\Phi(-d_1), \tag{77}$$

причем $d_1=\left[\ln\dfrac{V}{P(T,T)}+(r+\dfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right]\cdot(\sigma\sqrt{T-t})^{-1}=$(так как $P(T,T)=P(t,T)\exp\left(r(T-t)\right)$)=

$$=\left\{\ln\left[\frac{V}{P(t,T)}\exp(-r(T-t))\right]+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\}(\sigma\sqrt{T-t})^{-1}=$$

$$=\left\{\ln\Gamma-r(T-t)+r(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right\}(\sigma\sqrt{T-t})^{-1}=\frac{\ln\Gamma+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}};\ d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}.$$

Сравнивая (77) с формулой Блэка – Шоулса для опциона на фьючерс, видим, что они похожи, так как $P(t,T)=P(T,T)\exp\left(-r(T-t)\right)$. Кроме того, $\Gamma$ можно рассматривать как показатель расстояния до дефолта: чем больше соотношение $\dfrac{\textit{капитализация}}{\textit{долг}}$, тем меньше вероятность наступления дефолта, тем больше расстояние до дефолта. Действительно, при $\Gamma\to\infty$ в (77) цена $P^d(t,T)\to P(t,T)$ и страховщик не получает никакой премии за риск дефолта (цена дефолтных облигаций полностью равна стоимости долга заемщика в текущий момент времени). Однако при $\Gamma\to 0$ (дефолт) цена дефолтных облигаций равна нулю $P^d(t,T)\to 0$. Следовательно, мы обналичиваем опцион, который хеджировал наш кредитный риск.

Формула (77) дает так же величину спрэда (разницы доходностей) дефолтных и обыкновенных бескупонных облигаций. Действительно, $\dfrac{P^d(t,T)}{P(t,T)}=\Phi(d_2)+\Gamma\Phi(-d_1)$.

Выбирая в качестве $P(t,T)$ банковский депозит под безрисковую процентную ставку $r$, то есть $P(t,T)=1\cdot\exp(-r(T-t))$, а в качестве $P^d(t,T)=1\cdot\exp(-r_d(T-t))$, где $r_d$ – процентная ставка по кредиту, получаем: $\exp(-r_d(T-t)+r(T-t))=\Phi(d_2)+\Gamma\Phi(-d_1)$, или, логарифмируя,

$$(r-r_d)(T-t)=\ln\left[\Phi(d_2)+\Gamma\Phi(-d_1)\right],$$

откуда

$$r_d-r=-\frac{\ln[\Phi(d_2)+\Gamma\Phi(-d_1)]}{T-t}, \qquad (78)$$

причем эта разность может быть как положительна, так и отрицательна при различных значениях Γ (когда $\Gamma\to 0$ или $\Gamma\to\infty$).

***Ценообразование кредитного риска с риском дефолта одной из сторон с постоянной суммой долга***

Пусть $X(T)$ – обещанная к выплате сумма долга, выплачиваемая по опциону европейского типа в момент $T$. Если фирма – заемщик остается платежеспособной до момента $T$ включительно, то она выплачивает держателю опциона сумму $X(T)$. Если в момент $t<T$ наступает дефолт по платежам, то держатель опциона получает только часть от обещанного количества $X(T)$. В этом случае размер выплаты зависит от текущей стоимости активов и обязательств. Пусть, как и ранее, $V(t)$ – стоимость активов заемщика. Кроме того, пусть $D(t)$ – стоимость обязательств фирмы. Тогда в случае банкротства фирма выплачивает банку следующую часть $X(T)$:

$$X^d(T)=X(T)\frac{V(T)}{D(T)}.$$

Дробь $\frac{V(T)}{D(T)}$ называют скоростью восстановления активов фирмы, или соотношением единицы активов на единицу долга. Чем ближе оно к нулю, тем быстрее фирма станет банкротом.

Обозначим через $\delta(T)=\frac{V(T)}{D(T)}$. Тогда сумма дефолтной выплаты $X^d$ по опциону кредитного риска может быть представлена в общем виде как:

$$X^d(T)=X(T)I_{\tau>T}+\delta(T)X(T)I_{\tau\le T}, \qquad (79)$$

где $I_{\tau\le T}=\begin{cases}1, \tau\le T\\ 0, \tau>T\end{cases}$ – индексная функция множествв, τ – момент дефолта.

Из (79) видно, что при банкротстве в момент $\tau > T$ банк получает $X(T)$ (момент банкротства не влияет в этом случае на размер выплаты, долг выплачивается полностью), а при $\tau \le T$ выплачивается пропорциональная часть долга $\delta(T)X(T)$.

Заметим, что в случае $\delta(T) > 1$, или при $V(T) > D(T)$, долг $X(T)$ будет полностью погашен, даже если наступит дефолт по обязательствам. Если $V(T) < D(T)$, то долг оплачивается с коэффициентом пропорциональности $\delta(T)$. Поэтому равенство (79) эквивалентно следующему выражению:

$$X^d(T) = X(T) I_{V(T) \ge D(T)} + \delta(T) X(T) I_{V(T) < D(T)} \, .$$

Мы знаем, что при $t = 0$ цена опциона европейского типа $C$ с функцией выплаты $X(T)$ находится по формуле:

$$C = E^* \left( \frac{X(T)}{B_T} \middle| F_t \right),$$

где $X(T) = (S_T - E)^+$, $E^*$ – риск–нейтральное математическое ожидание, $B_T = B_0 e^{rT}$ – цена облигации с безрисковой процентной ставкой (условились, что $B_0 = 1$ – единица капитала), $F_t$ – фильтрация.

В нашем случае функция выплаты по опциону $X(T) = (S_T - E)^+$, поэтому при $t = 0$

$$X^d(0) = E^* \left( \frac{X(T) I_{V(T) \ge D(T)} + \delta(T) X(T) I_{V(T) < D(T)}}{\exp(rT)} \middle| F_t \right) . \qquad (80)$$

Пусть далее сумма долга является постоянной величиной: $D(T) = D$. Пусть $\delta(T) = \dfrac{V_t}{D}$. Тогда справедлива следующая теорема 23.

***Теорема 23*** (о цене опциона покупателя кредитного риска или незащищенного опциона при постоянной сумме долга $D$):

Пусть $X^d(t)$ – цена дефолтного опциона с функцией выплаты $X(T) = (S_T - E)^+$ и выплачиваемой в действительности суммой $X(T) = \delta(T)(S_T - E)^+$. Тогда цена дефортного опциона есть:

$$X^d(t) = S_t \Phi(a_1, a_2, \rho) - e^{-r(T-t)} E \Phi(b_1, b_2, \rho) + \delta(t) \left[ \exp((r + \sigma_1 \sigma_2 \rho)(T-t)) S_t \Phi(c_1, c_2, -\rho) - E \Phi(d_1, d_2, -\rho) \right],$$

где $\delta(T) = \dfrac{V_t}{D}$, $D$ – размер долга, $E$ – цена исполнения опциона,

$$V_t = V_0 \exp\left[(r-\frac{\sigma_2^2}{2})t + \sigma_2 W_2(t)\right],\ S_t = S_0 \exp\left[(r-\frac{\sigma_1^2}{2})t + \sigma_1 W_1(t)\right],\ \rho = corr(W_1, W_2),$$

$$a_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{E} + (r+\frac{1}{2}\sigma_1^2)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}},\ a_2 = \frac{\ln\delta(T) + (r-\frac{1}{2}\sigma_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}},$$

$$b_1 = a_1 - \sigma_1\sqrt{T-t};\ b_2 = a_2 - \rho\sigma_1\sqrt{T-t};\ c_1 = a_1 + \rho\sigma_2\sqrt{T-t};\ c_2 = -a_2 - \rho\sigma_1\sqrt{T-t},$$

$$d_1 = a_1 + (\rho\sigma_2 + \sigma_1)\sqrt{T-t}; d_2 = -a_2 + (\rho\sigma_1 + \sigma_2)\sqrt{T-t},$$

$\Phi(x_1, x_2, \rho) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dz_1 dz_2$ – двумерная функция распределения нормальной СВ.

**Доказательство**: цена опциона может быть переписана как

$$X_t = B_t E^*\left(\frac{(S_T - E)^+ I_{V(T)\ge D} + \delta(t)(S_T - E)^+ I_{V(T)<D}}{B_T}\middle| F_t\right),$$

где $F_t$ – фильтрация. Знаем, что $B_t E^*\left(\frac{1}{B_T}\middle| F_t\right) = e^{-r(T-t)}$, т.к. $B_t = e^{rt}$. Тогда $X_t$ может быть выражена в виде суммы:

$$X_t = E_1 - E_2 + E_3 - E_4,$$

где

$E_1 = B_t E^*\left(\frac{S_T I_{S_T>E} I_{V(T)\ge D}}{B_T}\middle| F_t\right)$, $E_2 = B_t E^*\left(\frac{E I_{S_T>E} I_{V(T)\ge D}}{B_T}\middle| F_t\right)$, $E_3 = B_t E^*\left(\frac{S_T \delta_T I_{S_T>E} I_{V(T)<D}}{B_T}\middle| F_t\right)$,

$E_4 = B_t E^*\left(\frac{E\,\delta_T I_{S_T>E} I_{V(T)<D}}{B_T}\middle| F_t\right)$, $(S_T - E)^+ = (S_T - E) I_{S>E}$. Каждое слагаемое вычислим отдельно.

**Вычисление $E_1$.**

$E_1 = B_t E^*\left(\frac{S_T I_{S_T>E} I_{V(T)\ge D}}{B_T}\middle| F_t\right)$(подставляем выражение для риск-нейтральной цены базового актива $S_T = S_t \exp\left[-\frac{\sigma_1^2}{2}(T-t) + \sigma_1\Delta W\right]$, где $\Delta W = W_T - W_t \sim N(0,(T-t))$ и учтем сокращение члена $B_t/B_T$, отвечающего за дисконтирование):

$$E_1 = B_t E^*\left(\frac{S_T I_{S_T>E} I_{V(T)\ge D}}{B_T}\middle| F_t\right) = E^*\left(S_t \exp\left[-\frac{\sigma_1^2}{2}(T-t) + \sigma_1\Delta W\right] I_{S_T>E} I_{V(T)\ge D}\middle| F_t\right).$$

Заметим, что СВ $z = \dfrac{\Delta W}{\sqrt{T-t}} \sim N(0,1)$ – стандартная нормальная СВ, что помогает выразить $E_1$ через функцию двумерного нормального стандартного распределения:

$$E_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_t \exp\left[-\frac{\sigma_1^2}{2}(T-t)+\sigma_1 z_1\sqrt{T-t}\right] I_{S_T>E} I_{V(T)\geq D} \exp\left(-\frac{(z_1^2-2\rho z_1 z_2+z_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dz_1 dz_2 .$$

Легко проверить, что выполнено следующее тождество для любых действительных чисел $a$, $b$, $c$ (аналог выделения полного квадрата):

$$\left(-\frac{(z_1^2-2\rho z_1 z_2+z_2^2)}{2(1-\rho^2)}+a z_1+b z_2+c\right) = -\frac{(z_1-a-\rho b)^2-2\rho(z_1-a-\rho b)(z_2-b-\rho a)+(z_2-b-\rho a)^2}{2(1-\rho^2)}+$$

$+\dfrac{1}{2}a^2+\rho ab+\dfrac{1}{2}b^2+c$. Поэтому с его помощью выражение для $E_1$ может быть записано как:

$$E_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_t\, I_{S_T>E} I_{V(T)\geq D} \exp\left(-\frac{(v_1^2-2\rho v_1 v_2+v_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dz_1 dz_2 ,$$

где $v_1 = z_1 - \sigma_1\sqrt{T-t}$, $v_2 = z_2 - \rho\sigma_1\sqrt{T-t}$, или через двумерную функцию стандартного нормального распределения:

$$E_1 = \Phi(X_1, X_2, \rho),$$

где $X_1 = \sigma_1\sqrt{T-t}$, $X_2 = \rho\sigma_1\sqrt{T-t}$.

По теореме Гирсанова введем в рассмотрение эквивалентную для $dQ$ вероятностную риск-нейтральную меру: $d\dot{Q} = \exp\left(\gamma W_T - \sigma^2\dfrac{T}{2}\right)dQ$ с некоторыми векторами $\gamma = (\sigma_1, \rho\sigma_2)$ и $W = (W_1, W_2)$. По этой же теореме существует эквивалентное преобразование винеровского процесса вида $\dot{W}_t = W_t - \gamma t$ по мере $d\dot{Q}$. Тогда относительно этой меры $z = \dfrac{\Delta W}{\sqrt{T-t}} = \dfrac{W_T - W_t}{\sqrt{T-t}} =$ (подставляем $\dot{W}_t = W_t - \gamma t$) $= \dfrac{\dot{W}_T - \dot{W}_t + \gamma(T-t)}{\sqrt{T-t}} = \dot{z} + \gamma\sqrt{T-t}$, где $\dot{z}$ – новая стандартная нормальная СВ относительно меры $d\dot{Q}$. Вспоминая выражение для $E_1$

$$E_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_t\, I_{S_T>E} I_{V(T)\geq D} \exp\left(-\frac{(v_1^2-2\rho v_1 v_2+v_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dz_1 dz_2 ,$$

видим, что $v_1 = \dot{z}_1, v_2 = \dot{z}_2$, т.е. $E_1$ вычислено относительно новой риск-нейтральной меры $d\dot{Q}$.

Найдем риск-нейтральные математические ожидания каждой индикаторной функции относительно меры $d\dot{Q}$. Имеем (подставляя выражение для эволюции $S_T$):

$$E^*_{\dot{Q}}\left(I_{S_T>E}\right)=\dot{Q}\left(S_T>K\right)=P_{\dot{Q}}\left(S_t \exp\left[\left(r+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)+\sigma_1\left(\Delta\dot{W}+\sigma_1(T-t)\right)\right]>E\right),$$

где $\Delta\dot{W}=\dot{W}_T-\dot{W}_t$ - преобразованный винеровский процесс, $P$ – вероятностная мера (вероятность), $E$ – цена исполнения.

Далее, логарифмируя неравенство под знаком вероятности, получаем:

$$E^*_{\dot{Q}}\left(I_{S_T>E}\right)=P_{\dot{Q}}\left(\sigma_1\Delta\dot{W}>\ln E-\ln S_t-\left(r+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)\right)=\text{(по обозначениям для } \dot{z}_1=\frac{\Delta\dot{W}_1}{\sqrt{T-t}}\text{)}=$$

$$=P_{\dot{Q}}\left(\dot{z}_1<\frac{\ln S_t-\ln E+\left(r+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}\right).$$

Аналогично, (**здесь все верно!**)

$$E^*_{\dot{Q}}\left(I_{V(T)\geq D}\right)=P_{\dot{Q}}\left(V(T)>D\right)=P_{\dot{Q}}\left(V_t\exp\left[\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)+\sigma_2\left(\Delta\dot{W}+\rho\sigma_1(T-t)\right)\right]>D\right)=$$

$$=P_{\dot{Q}}\left(\sigma_2\Delta\dot{W}>\ln D-\ln V_t-\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)\right)=P_{\dot{Q}}\left(\dot{z}_2<\frac{\ln V_t-\ln D+\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}\right),$$

так как $\dot{z}_2=\dfrac{\Delta\dot{W}_2}{\sqrt{T-t}}$.

Далее, вычислим следующий интеграл (переменные внутри интеграла без точек) в зависимости от трех произвольных параметров $a_1,a_2,\rho$ с участием функции плотности двумерного нормального распределения $f(z_1,z_2,\rho)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{z_1\geq a_1}I_{z_2\geq a_2}f(z_1,z_2,\rho)dz_1dz_2=\int_{a_1}^{\infty}\int_{a_2}^{\infty}f(z_1,z_2,\rho)dz_1dz_2=\text{(по свойствам двумерной функции}$$

$$\text{плотности распределения)}=\int_{a_1}^{\infty}\int_{-\infty}^{-a_2}f(z_1,z_2,-\rho)dz_2dz_1=\int_{-\infty}^{-a_1}\int_{-\infty}^{-a_2}f(z_1,z_2,\rho)dz_2dz_1=\Phi(a_1,a_2,\rho). \quad (81)$$

Окончательно, вспоминая, что нам нужно было вычислить интеграл

$$E_1=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_t\,I_{S_T>E}I_{V(T)\geq D}\exp\left(-\frac{(v_1^2-2\rho v_1v_2+v_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right)dz_1dz_2,$$ учитывая все ранее найденные соотношения, имеем:

$$E_1=S_t\Phi(a_1,a_2,\rho),$$

где $a_1 = \dfrac{\ln\dfrac{S_t}{E} + (r + \dfrac{1}{2}\sigma_1^2)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}$, $a_2 = \dfrac{\ln\delta(T) + (r - \dfrac{1}{2}\sigma_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}$ берутся из правых частей вычисленных ранее $E_{\dot{Q}}^*\left(I_{S_T>E}\right)$ и $E_{\dot{Q}}^*\left(I_{V(T)\geq D}\right)$ соответственно.

Вычислим теперь $E_2$, используя ту же идею, что и при нахождении $E_1$.

**Вычисление $E_2$.**

$$E_2 = B_t E^*\left(\frac{E I_{S_T>E} I_{V(T)\geq D}}{B_T}\middle| F_t\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\,e^{-r(T-t)} I_{S_T>E} I_{V(T)\geq D}\exp\left(-\frac{(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right)dz_1 dz_2 .$$

Так как $E\,e^{-r(T-t)}$ – константа, то последний интеграл сводится к интегралу типа (81). Значит,

$$E_2 = E\,e^{-r(T-t)}\,\Phi(b_1, b_2, \rho),$$

где $b_1, b_2$ – неизвестные пока значения параметров, которые зависят от математических ожиданий индикаторных функций $E^*\left(I_{S_T>E}\right)$ и $E^*\left(I_{V(T)\geq D}\right)$ без перехода к эквивалентным вероятностям. Вычисляем относительно меры $Q$:

$$E_Q^*\left(I_{S_T>E}\right) = P_Q\left(S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_1\Delta W\right] > E\right) = P_Q\left(z_1 < \frac{\ln S_t - \ln E + \left(r - \dfrac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}\right).$$

Поэтому $b_1 = \dfrac{\ln S_t - \ln E + \left(r - \dfrac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}$. Далее, в полном соответствии с вычислением $E_{\dot{Q}}^*\left(I_{V(T)\geq D}\right)$ для слагаемого $E_1$, имеем

$$E_Q^*\left(I_{V(T)\geq D}\right) = P_Q(V(T) > D) = P_Q\left(V_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_2\left(\Delta W + \rho\sigma_1(T-t)\right)\right] > D\right) =$$

$$= P_Q\left(\sigma_2\Delta W > \ln D - \ln V_t - \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)\right) = P_Q\left(z_2 < \frac{\ln V_t - \ln D + \left(r - \dfrac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}\right),$$

т.е. $b_2 = \dfrac{\ln V_t - \ln D + \left( r - \dfrac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2 \right)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}$, что завершает определение всех составляющих $E_2 = E\, e^{-r(T-t)}\Phi(b_1, b_2, \rho)$. Кроме того, можно заметить, что $b_1 = a_1 - \sigma_1\sqrt{T-t};\; b_2 = a_2 - \rho\sigma_1\sqrt{T-t}$ .

**Вычисление $E_3$.**

Вычисление $E_3$ будет немного сложнее, чем вычисление $E_2$.

$$E_3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_t \exp\left[ -\frac{\sigma_1^2}{2}(T-t) + \sigma_1 z_1\sqrt{T-t} \right] \delta_T I_{S_T>E} I_{V(T)>D} \exp\left( -\frac{(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\rho^2)} \right) dz_1 dz_2 .$$

Выделим, как и ранее, полный квадрат и введем новые переменные $v_1 = z_1 - \sigma_1\sqrt{T-t} - \rho\sigma_2\sqrt{T-t}$, $v_2 = z_2 - \sigma_2\sqrt{T-t} - \rho\sigma_1\sqrt{T-t}$, чтобы записать $E_3$ в компактном виде:

$$E_3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_t\, \delta_T I_{S_T>E} I_{V(T)<D} \exp\left( -\frac{(v_1^2 - 2\rho v_1 v_2 + v_2^2)}{2(1-\rho^2)} \right) dz_1 dz_2 ,$$

Для того, чтобы преобразовать функцию плотности некоторого нормального распределения, участвующую при определении интеграла выше, к плотности двумерного стандартного нормального распределения, необходимо перейти к эквивалентной мере $d\dot{Q}$ по теореме Гирсанова только по первой координате вектора $\gamma$ (вторую оставляем неизменной) с $\gamma_1 = \sigma_1 + \rho\sigma_2$:

$$d\dot{Q} = \exp\left( \gamma W_T - \sigma^2 \frac{T}{2} \right) dQ ,$$

а также к новому винеровскому процессу $\dot{W}_t = W_t - \gamma t$ (здесь запись в векторном виде) и к новой вектор-переменной $z = \dot{z} + \gamma\sqrt{T-t}$, как и в случае вычисления $E_1$. Тогда

$$E_3 = e^{r(T-t)} S_t \delta_T e^{\rho\sigma_1\sigma_2(T-t)} \Phi(c_1, c_2, -\rho)$$

с некоторыми неизвестными пока постоянными $c_1, c_2$, которые находятся из значений математических ожиданий индикаторных функций.

Заметим, что знак минус при корреляции в функции $\Phi(c_1, c_2, -\rho)$ связан с отрицательным направлением в неравенстве индикаторной функции $I_{V(T)<D}$ и со свойством функции нормального распределения.

$$E^*_{\dot{Q}}\left(I_{S_T>E}\right) = \dot{Q}(S_T > K) = P_{\dot{Q}}\left( S_t \exp\left[ \left( r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right)(T-t) + \sigma_1\left( \Delta\dot{W} + (\sigma_1 + \rho\sigma_2)(T-t) \right) \right] > E \right) =$$

$$= P_{\dot{Q}}\left(\sigma_1 \Delta\dot{W} > \ln E - \ln S_t - \left(r + \frac{\sigma_1^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)\right) = P_{\dot{Q}}\left(\dot{z}_1 < \frac{\ln S_t - \ln E + \left(r + \frac{\sigma_1^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}\right).$$

И второе математическое ожидание

$$E^*_{\dot{Q}}\left(I_{V(T)<D}\right) = P_{\dot{Q}}\left(V(T) < D\right) = P_{\dot{Q}}\left(V_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_2\left(\Delta\dot{W} + (\sigma_2 + \rho\sigma_1)(T-t)\right)\right] < D\right) =$$

$$= P_{\dot{Q}}\left(\sigma_2 \Delta\dot{W} < \ln D - \ln V_t - \left(r + \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)\right) = P_{\dot{Q}}\left(\dot{z}_2 < -\frac{\ln V_t - \ln D + \left(r + \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}\right).$$

Таким образом, получили, что в выражении для $E_3$ константы $c_1, c_2$ определяются как

$$c_1 = \frac{\ln S_t - \ln E + \left(r + \frac{\sigma_1^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}} = a_1 + \rho\sigma_2\sqrt{T-t}\,,$$

$$c_2 = -\frac{\ln V_t - \ln D + \left(r + \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}} = -a_2 - \rho\sigma_1\sqrt{T-t}\,.$$

Вычислим, наконец, $E_4$.

**Вычисление $E_4$.**

$$E_4 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\delta_T \exp\left[-\frac{\sigma_2^2}{2}(T-t) + \sigma_2 z_2\sqrt{T-t}\right] I_{S_T>E} I_{V(T)<D} \exp\left(-\frac{(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dz_1 dz_2\,.$$

Как и при вычислении $E_1$, перейдем к эквивалентной вероятностной мере с $\gamma_1 = \rho\sigma_2$ и $\gamma_2 = \sigma_2$ и к новой переменной $z = \dot{z} + \gamma\sqrt{T-t}$. Тогда

$$E^*_{\dot{Q}}\left(I_{S_T>E}\right) = P_{\dot{Q}}\left(S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_1\left(\Delta\dot{W} + \rho\sigma_2(T-t)\right)\right] > E\right) =$$

$$= P_{\dot{Q}}\left(\dot{z}_1 < \frac{\ln S_t - \ln E + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}\right).$$

$$E^*_{\dot{Q}}\left(I_{V(T)<D}\right) = P_{\dot{Q}}\left(V_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_2\left(\Delta\dot{W} + \sigma_2(T-t)\right)\right] < D\right) =$$

$$= P_{\dot{Q}}\left( \dot{z}_2 < -\frac{\ln V_t - \ln D + \left( r + \frac{\sigma_2^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma_2 \sqrt{T-t}} \right).$$

Окончательно,

$$E_4 = E\,\delta_T \Phi(d_1, d_2, -\rho)$$

с параметрами $d_1, d_2$ как в формулировке теоремы. **Теорема доказана полностью.**

Выведем уравнение Блэка – Шоулса для рассмотренного выше случая риска дефолта одной из сторон с постоянной суммой долга *D*.

Очевидно, что $X^d(t) \equiv F(S,V,t)$, то есть выплата в случае дефолта является функцией переменных *S,V, t*. Пусть *S, V* – процессы Ито:

$$dS = a_1 Sdt + \sigma_1 SdW_1; dV = a_2 Vdt + \sigma_2 VdW_2; \rho = corr(W_1, W_2).$$

Применим двумерную формулу Ито к $X^d(t) \equiv F(S,V,t)$. Имеем:

$dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} dV^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} dSdV + \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS^2 \right\}$. Так как

$dV^2 = \sigma_2^2 V^2 dt; dS^2 = \sigma_1^2 S^2 dt; dVdS = \sigma_1 \sigma_2\, SV\rho dt$, то окончательно имеем:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \sigma_2^2 V^2 dt + 2\rho\sigma_1\sigma_2 SV \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} dt + \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma_1^2 S^2 dt \right\} \qquad (82)$$

Составим хеджирующий портфель, чтобы избавиться от стохастической части в (82). Пусть *H* – хеджирующий портфель, $H = F - \Delta_1 V - \Delta_2 S$, или, как при Δ–хеджировании, заменяя $\Delta_1$ и $\Delta_2$ соответствующими значениями производных, получаем $dH = dF - \frac{\partial F}{\partial V} dV - \frac{\partial F}{\partial S} dS$.

Тогда $dF = dH + \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial S} dS$, подставляя которое в (82), имеем:

$$dH = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \sigma_2^2 V^2 dt + 2\rho\sigma_1\sigma_2 SV \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} dt + \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma_1^2 S^2 dt \right\}. \qquad (83)$$

Изменения в хеджирующем портфеле зависят теперь только от *dt*, он безрисковый и, как альтернатива, его можно инвестировать под ставку *r*. Тогда *dH* = *rHdt*, или так как $H = F - \frac{\partial F}{\partial V} V - \frac{\partial F}{\partial S} S; dH = r(F - \frac{\partial F}{\partial V} V - \frac{\partial F}{\partial S} S) dt$. Поэтому в (83):

$$\left( rF - rV\frac{\partial F}{\partial V} - rS\frac{\partial F}{\partial S} \right) dt = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \sigma_2^2 V^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 SV \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma_1^2 S^2 \right) dt.$$

Окончательно,

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\sigma_2^2 V^2+\rho\sigma_1\sigma_2 SV\,\frac{\partial^2 F}{\partial S\partial V}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma_1^2 S^2-rF+rV\,\frac{\partial F}{\partial V}+rS\,\frac{\partial F}{\partial S}=0\,. \qquad (84)$$

Это ***двухмерное*** уравнение Блэка – Шоулса для опциона покупателя кредитного риска с **постоянной** суммой долга, где $F = X^d(t)$, которое с точностью до обозначений совпадает с уравнением для стохастической волатильности.

***Замечание:*** При $\delta(t) = 1$ для каждого $t \in [0,T]$ весь долг обеспечен суммой активов $V_t$. Поэтому цена незащищенного опциона $X^d(t)$ будет равна цене опциона без кредитного риска, то есть обычного опциона покупателя. Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить $\delta = 1$ в формулировку теоремы 23 о цене опциона кредитного риска. При $\delta = 1$ формула расчета цены превращается в формулу Блэка – Шоулса.

Действительно, воспользуемся следующим утверждением.

**Лемма:** в случае, если $\delta = \text{const}$ и не зависит от времени, то дефолтный опцион имеет цену, удовлетворяющую следующей формуле:

$$X^d(t)=S_t\Phi(a_1,a_2,\rho)+\delta S\Phi(a_1,-a_2,-\rho)-e^{-r(T-t)}E\big(\Phi(b_1,b_2,\rho)+\delta\Phi(b_1,-b_2,-\rho)\big).$$

Теперь для доказательства эквивалентности формулы

$$X^d(t)=S_t\Phi(a_1,a_2,\rho)-e^{-r(T-t)}E\Phi(b_1,b_2,\rho)+\delta(t)\big[\exp((r+\sigma_1\sigma_2\rho)(T-t))\,S_t\Phi(c_1,c_2,-\rho)-E\Phi(d_1,d_2,-\rho)\big]$$

формуле Блэка – Шоулса при $\delta = 1$ заметим, что по лемме выражение для $X^d(t)$ редуцируется до формулы вида:

$$X^d(t)=S_t\Phi(a_1,a_2,\rho)+\delta S\Phi(a_1,-a_2,-\rho)-e^{-r(T-t)}E\big(\Phi(b_1,b_2,\rho)+\delta\Phi(b_1,-b_2,-\rho)\big).$$

Для дальнейшего ее упрощения воспользуемся свойством двумерной функции нормального распределения

$$\Phi(x,y,\rho)=\Phi(x)-\Phi(x,-y,-\rho)\,,$$

применив его для значений $\Phi(b_1,-b_2,\rho)$ и $\Phi(a_1,-a_2,\rho)$:

$$\Phi(b_1,-b_2,\rho)=\Phi(b_1)-\Phi(b_1,b_2,\rho)\,,$$

$$\Phi(a_1,-a_2,-\rho)=\Phi(a_1)-\Phi(a_1,a_2,\rho)\,.$$

Подставляя найденные выражения в $X^d(t)$, приводя подобные, получаем:

$$X^d(t)=S_t\big(\delta\Phi(a_1)+(1-\delta)\Phi(a_1,a_2,\rho)\big)-e^{-r(T-t)}E\big(\delta\Phi(b_1)+(1-\delta)\Phi(b_1,b_2,\rho)\big),$$

откуда при $\delta = 1$ окончательно имеем:

$$X^d(t)=S_t\Phi(a_1)-e^{-r(T-t)}E\Phi(b_1)\,,$$

что полностью соответствует классической формуле Блэка – Шоулса при сделанных ранее обозначениях в теореме 23.

### *Стохастические обязательства*

Усложним рассматриваемую модель: в прошлом параграфе мы предполагали сумму долга неизменной. Предположим теперь, что долг т.ж. является стохастическим процессом, удовлетворяющим уравнению Ито: $dD_t = a_3 D_t dt + \sigma_3 D_t dW_3$. Напомню, что того же типа уравнения были и для *S,V*: $dS = a_1 S dt + \sigma_1 S dW_1; dV = a_2 V dt + \sigma_2 V dW_2$.

Пусть винеровские процессы коррелируют и имеют матрицу ковариаций

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{13}\sigma_2\sigma_3 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}; \rho_{ij} = corr(W_i, W_j).$$

Найдем соотношение для скорости восстановления активов $f_t = \dfrac{V_t}{D_t}$. Используем для этого формулу интегрирования по частям: $d(UV) = VdU + UdV + dUdV$.

Пусть всюду далее $\rho_{23} = \rho = corr(W_2, W_3)$ для простоты изложения.

$$d\delta_t = d\left(\frac{V_t}{D_t}\right) = d\left(V_t \cdot \frac{1}{D_t}\right) = dV_t \cdot \frac{1}{D_t} + V_t d\left(\frac{1}{D_t}\right) + dV_t d\left(\frac{1}{D_t}\right).$$

Заметим, что (по формуле Ито)

$$d\left(\frac{1}{D_t}\right) = -\frac{1}{D_t^2} dD_t + \frac{1}{2}\frac{2}{D_t^3} dD_t^2 = -\frac{1}{D_t^2} dD_t + \frac{1}{D_t^3}\sigma_3^2 D_t^2 dt = -\frac{1}{D_t^2} dD_t + \frac{\sigma_3^2}{D_t} dt$$

Тогда,

$$dV_t d\left(\frac{1}{D_t}\right) = \left[-\frac{1}{D_t}(a_3 D_t dt + \sigma_3 D_t dW_3) + \frac{\sigma_3^2}{D_t} dt\right]\left(a_2 V dt + \sigma_2 V dW_2\right) = -\sigma_3\sigma_2 V_t dW_2 dW_3 = -\sigma_3\sigma_2 V_t \rho dt,$$

потому что остаются только коэффициенты при $dW_3, dW_2$.

Поэтому

$$d\delta_t = dV_t \frac{1}{D_t} - \frac{V_t}{D_t} dD_t + \frac{\sigma_3^2 V_t}{D_t} dt - \sigma_3\sigma_2 V_t \rho dt = a_2 \frac{V_t}{D_t} dt + \frac{\sigma_2 V_t}{D_t} dW_2 - \frac{V_t}{D_t}(a_3 D_t dt + \sigma_3 D_t dW_3) - \sigma_3\sigma_2 V_t \rho dt$$

или вспоминая, что $\delta_t = \dfrac{V_t}{D_t}$, получаем:

$$d\delta_t = a_2\delta_t dt + \sigma_2\delta_t dW_2 - a_3 V_t dt - V_t\sigma_3 dW_3 - \sigma_3\sigma_2 V_t \rho dt$$

Разделим все на $\delta_t$ (представим выражение «хитрым» способом)

$$\frac{d\delta_t}{\delta_t} = \frac{a_2 V_t dt + \sigma_2 V_t dW_2}{V_t} - a_3 D_t dt - \sigma_3 D_t dW_3 - \sigma_3\sigma_2 D_t \rho dt = \frac{dV_t}{V_t} - \frac{dD_t}{D_t} + \left(\frac{dD_t}{D_t}\right)^2 - \frac{dV_t dD_t}{V_t D_t}$$

Перепишем, чтобы обозначить

$$\frac{d\delta_t}{\delta_t} = \frac{dV_t}{V_t} - \frac{dD_t}{D_t} + \left(\frac{dD_t}{D_t}\right)^2 - \frac{dV_t dD_t}{V_t D_t}. \tag{85}$$

Перейдем к риск – нейтральной вероятности. Мы знаем, что в этом случае $dV_t = rV_t dt + \sigma_2 V_t d\overline{W}_2$, $dD_t = rD_t dt + \sigma_3 V_t d\overline{W}_3$. Поэтому (85) преобразуется к виду:

$$\frac{d\delta_t}{\delta_t} = rdt + \sigma_2 d\overline{W}_2 - rdt - \sigma_3 d\overline{W}_3 + (rdt + \sigma_3 d\overline{W}_3)^2 - (rdt + \sigma_2 d\overline{W}_2)\left(rdt + \sigma_3 d\overline{W}_3\right) =$$
$$= \sigma_2 d\overline{W}_2 - \sigma_3 d\overline{W}_3 + \sigma_3^2 dt - \sigma_2\sigma_3\rho dt.$$

Обозначим через $\sigma_\delta W_\delta \equiv \sigma_2 \overline{W}_2 - \sigma_3 \overline{W}_3$, причем

$$D(\sigma_\delta w_\delta) = E(\sigma_2 \overline{W}_2 - \sigma_3 \overline{W}_3)^2 = \sigma_2^2 E(\overline{W}_2^{\,2}) + \sigma_3^2 E(\overline{W}_3^{\,2}) - 2\sigma_2\sigma_3\rho t,$$

так как

$$D(W_\delta) = t; D(\overline{W}_2) = D(\overline{W}_3) = t, E\left(\overline{W}_2 \overline{W}_3\right) = \rho t,$$

то $\sigma_\delta^2 = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3\rho$.

Уравнение перепишется в виде

$$\frac{d\delta_t}{\delta_t} = \sigma_\delta dW_\delta + (\sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3\rho)dt,$$

то есть оно представляет собой линейное стохастическое дифференциальное уравнение типа Ито. Мы знаем его решение (если $\sigma_2$, $\sigma_3$ - константы):

$$\delta_t = \delta_0 \exp\left(\frac{1}{2}(\sigma_3^2 - \sigma_2^2)t + \sigma_\delta w_\delta\right) \equiv \frac{V_t}{D_t}; V_t = V_0 \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_2^2 t + \sigma_2 W_2\right); D_t = D_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_3^2 t + \sigma_3 W_3\right) -$$

цена незащищенного опциона со стохастической стоимостью долга.

Ранее мы получили формулу (80) для цены незащищенного опциона, когда долг был детерминирован. Сформулируем без доказательства теорему 24 – аналог теоремы 23.

***Теорема 24*** (о цене опциона кредитного риска со стохастической суммой долга): Если $X_t$ – цена опциона покупателя с номинальной функцией выплаты $X_T = (S_T - E)^+$ и действительной выплачиваемой суммой $X_T = \delta_t(S_T - E)^+$, где $\delta_T = V_T/D_T$, причем $dD_t = a_3 D_t dt + \sigma_3 D_t dW_3$. Тогда в случае банкротства

$$X_t = S_t\Phi(a_1, a_2, \rho) - E\exp(-r(T-t))\Phi(b_1, b_2, \rho) + S_t\delta_t \exp\left[(\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 - \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2)(T-t)\right]\times$$
$$\times\Phi(c_1, c_2, -\rho) - \exp\left[(-r + \sigma_3^2 - \rho_{23}\sigma_2\sigma_3)(T-t)\right]E\,\delta_t\,\Phi(d_1, d_2, -\rho)$$

где

$$a_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{E} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}, a_2 = \frac{\ln\delta_t - \frac{1}{2}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\Theta)(T-t)}{\sigma_\delta\sqrt{T-t}},$$

$$b_1 = a_1 - \sigma_1\sqrt{T-t};\ b_2 = \frac{\ln\delta_t - \frac{1}{2}(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)(T-t)}{\sigma_\delta\sqrt{T-t}};$$

$$c_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{E} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \Theta\right)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}; c_2 = -\frac{\ln f_t - \left(\frac{3}{2}\sigma_3^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + \Theta - 2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3\right)(T-t)}{\sigma_\delta\sqrt{T-t}};$$

$$d_1 = c_1 - \sigma_1\sqrt{T-t}; d_2 = -c_2 - \frac{\Theta}{\sigma_\delta}\sqrt{T-t}; \rho = \frac{1}{\sigma_\delta}(\rho_{12}\sigma_2 - \rho_{13}\sigma_3);$$

$$\sigma_\delta = \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3}; \Theta = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - \rho_{13}\sigma_1\sigma_3;$$

$$\Phi(x_1, x_2, \rho) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2)}{2(1-\rho^2)}\right) dz_1 dz_2 .$$

***Замечание:*** При $\delta_t \equiv 1$ получаем частный случай, сформулированный в теореме 23. При $D_t$, стремящимся к бесконечности, когда $\delta_t$ стремится к нулю, банкротство произойдет с вероятностью 1, исчезают два последних слагаемых формулы (77) и получается классическая формула Блэка – Шоулса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Курс теории случайных процессов: Учебное пособие / А. Д. Вентцель.—2-е изд., доп.—М.: Наука; Физматлит, 1996.—398 с.
2. Случайные процессы: Учебник для вузов / И. К. Волков, С. М. Зуев, Г. М. Цветкова.—М.: Изд-во МГТУ, 1999.—448 с.
3. Курс теории вероятностей: Учебник для вузов / В. П. Чистяков.—5-е изд.—М.: Агар, 2000.—255 с.
4. Теория стохастических систем: Учебное пособие / В. С. Пугачев, И. Н. Синицын.—М.: Логос, 2000.—1000 с.
5. Теория вероятностей и случайных процессов: Учебное пособие / В. Н. Тутубалин.—М.: Изд-во МГУ, 1992.—400 с.
6. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: Учебное пособие для вузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров.—2-е изд., стер.—М.: Высшая школа, 2000.—383 с.
7. Курс статистического моделирования: Учебное пособие для вузов / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов.—М.: Наука, 1976.—319 с.
8. Феллер, Вильям. Введение в теорию вероятностей и её приложения: Пер. с англ.: В 2 т. / В. Феллер.—М.: Мир, 1984- Т. 1.—1984.—527 с.
9. Феллер, Вильям. Введение в теорию вероятностей и её приложения: Пер. с англ.: В 2 т. / В. Феллер.—М.: Мир, 1984- Т. 2.—1984.—751 с.
10. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров.—М.: Наука, 1991.—384 с.
11. Стратонович Р. Л. Теория информации.—М.: Советское радио, 1975.—423 с.
12. Курс теории случайных процессов: Учебное пособие для университетов / А. Д. Вентцель. — М.: Наука: Физматлит, 1975.—319 с.
13. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы: Пер. с англ. / С. Ватанабэ, Н. Икэда.—М.: Наука, 1986.—445 с.
14. Прикладные задачи теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров.—М.: Радио и связь, 1983.—416 с.
15. Гихман И.И. Теория случайных процессов: В 3 т. / И. И. Гихман, А. В. Скороход.—М.: Наука, 1971.
16. Стохастические уравнения глазами физика: Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения / В. И. Кляцкин.—М.: Физматлит, 2001.—528 с.
17. Колебания, волны, структуры / Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко.—М.: Физматлит, 2001.—496 с.
18. Прикладная статистика: Основы эконометрики: Учебник: В 2-х т.—М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001/ С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян.—2001.—656 с.
19. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
20. P. Wilmott, Derivatives. The theory and practice of financial engineering, New York, John Wiley & Sons, 1999.
21. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов прогноз. М: Мир, 1974.
22. Hull J. Options, Futures, and Other Derivatives. New Jersey: Prentice-Hall, Saddle River, 2021. 11th edition. 888 p.
23. Суслов В.И., Ибрагимов Н.М., Талышева Л.П., Цыплаков А.А. Эконометрия. Новосибирск, изд-во СО РАН, 2005, 744 с.
24. Schroder M. Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula// Journal of Finance, 1989, Vol. 44, No. 1, pp. 211-219.
25. Larguinho M., Dias J.C., Braumann C.A. On the computation of option prices and Greeks under the CEV model// Quantitative Finance, 2013, V. 13, Issue 6, p. 907–917.
26. Iacus S.M. Simulation and inference for stochastic differential equations: with R examples, New York, Springer, 2008, 284 p.

27. Ait-Sahalia Y., Lo A.W., Nonparametric risk management and implied risk aversion, Journal of Econometrics, 2000, 94, p. 9-51.
28. Cairns A.J.G., Interest Rate Models: An Introduction, Princeton University Press, Princeton, 2004, 274 p.
29. D. Filipovic, Term-Structure Models: A Graduate Course, Springer, Berlin, 2009, 256 p.
30. Poon S., A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility. John Wiley Sons Inc., Hoboken, 2005, 214 p.
31. Williams D., Probability with martingales, Cambridge, Cambridge University Press, 1991, 252p.
32. Breeden, D.T. and Litzenberger, R.H., Prices of state-contingent claims implicit in option prices// Journal of Business, 1978, V. 51, p. 621–651.
33. Larguinho, M., Dias, J.C. and Braumann, C.A., On the computation of option prices and Greeks under the CEV Model// Quantitative Finance, 2013, V. 13, p. 907–917.
34. Barrier Options [Электронный ресурс] : инф. ресурс // [сайт Nicolas Privault, Division of Mathematical Sciences, School of Physical and Mathematical Sciences at Nanyang Technological University]. – Ред. 2022 г. – URL: https://personal.ntu.edu.sg/nprivault/MA5182/barrier-options.pdf, доступ свободный. Загл. с экрана (дата 31.10.2022).
35. Ширяев А.Н. Вероятность, М: Наука, 1980.
36. Ширяев А.Н. Основы стахостической финансовой математики. В двух томах. Том 1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998. 512 с.
37. Справочник по математике /Корн Г., Корн Т., М.: Наука, 1973.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

## ТАБЛИЦА СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Все равенства в таблице понимаются в смысле предела «почти наверное».

| | |
|---|---|
| $\int_0^t W_t\, dt = 0$ | $\int_0^t \sin(W_t) dt = 0$ |
| $\int_0^t t W_t\, dt = 0$ | $\int_0^t W_t \sin(W_t) dt = \int_0^t \cos(W_t) dt$ |
| $\int_0^t W_t^3\, dt = 0$ | $\int_0^t W_t \cos(W_t) dt = 0$ |
| $\int_0^t t W_t^3 dt = 0$ | $\int_0^t W_t^2 \cos(W_t) dt = 0$ |
| $\int_0^t t^2 W_t^3 dt = 0$ | $\int_0^t W_t^2 \sin(W_t) dt = 0$ |
| $\int_0^t W_t^5\, dt = 0$ | $\int_0^t \sin^3(W_t) dt = 0$ |
| $\int\limits_0^t W^2 dt = \frac{t^2}{2}$ | $\int\limits_0^t W^4 dt = t^3$ |

*Пример доказательства:*

вычислим параметры распределения для случайной величины $\int\limits_0^t \frac{W^2}{2} dt$ следующим образом.

По определению интеграла Римана $\int\limits_0^t \frac{W^2}{2} dt = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{W_i^2}{2}\ \Delta t_{i+1}\right)$. Обычно суммы $n$ квадратов нормально распределенных случайных величин имеют распределение $\chi^2(n\text{-}1)$. В данном случае распределение другое.

Математическое ожидание этого случайного процесса вычисляем непосредственно:

$$E\left(\int\limits_0^t \frac{W^2}{2} dt\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} E\left(\frac{W_i^2}{2}\Delta t_{i+1}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} E\left(W_i^2\right)\Delta t_{i+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} t_i \Delta t_{i+1}\right) = \int\limits_0^t \frac{t}{2} dt = \frac{t^2}{4}.$$

Учитывая, что $D\left(W_i^2\right) = E\left(W_i\right)^4 = 3t_i^2$, можем вычислить и дисперсию интеграла:

$$0 \le D\left(\int\limits_0^t \frac{W^2}{2} dt\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} D\left(\frac{W_i^2}{2}\Delta t_{i+1}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta^2 t_{i+1}}{4} E\left(W_i^4\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{3\Delta^2 t_{i+1}}{4} t_i^2\right) \le$$

$$\le \lim\limits_{n\to\infty} \lambda \left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{3\Delta t_{i+1}}{4} t_i^2\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda \left(\int\limits_0^t \frac{3t^2}{4} dt\right) = 0,$$

так как интеграл существует и конечен ($\lambda$ – максимум модуля приращений между точками разбиения интервала интегрирования).

По свойству дисперсии получили, что $\int\limits_0^t \frac{W^2}{2} dt$ - это случайная величина, которая почти наверное равна своему математическому ожиданию:

$$\int\limits_0^t \frac{W^2}{2} dt = \frac{t^2}{4}.$$