Aula de Exercícios

Cálculo II - MA211

Neemias Martins
neemias. org/ped
neemias@ime.unicamp.br

Rotacional e Divergente

Exercício 1

Mostre que não existe um campo vetorial G em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\text{rot}(G) = (x \sin y, \cos y, z - xy).$$

Solução:
Se existe tal campo G, ele deve satisfazer à igualdade: $\text{div}(\text{rot}(G)) = 0$. Mas,

$$\text{div}(\text{rot}(G)) = \sin y - \sin y + 1 = 1 \neq 0.$$

Portanto não existe campo G com o rotacional dado.

Exercício 2

Considere o campo

$$F(x,y,z) = \left(2xy, x^2 + 2yz, y^2\right).$$

Verifique que o campo vetorial F é conservativo e calcule $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f = F$.

SOLUÇÃO:

$$\text{rot }(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + 2yz & y^2 \end{vmatrix} = (2y - 2y)\vec{i} - (0 - 0)\vec{j} + (2x - 2x)\vec{k} = (0,0,0).$$

Como $\text{rot}(F) = \vec{0}$ e as derivadas parciais de 2ª ordem das funções componentes são contínuas, então F é conservativo. Logo, existe uma função f tal que $\nabla f = F$.
A fim de determinarmos f, devemos ter

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 2xy \\ f_y(x,y,z) &= x^2 + 2yz \\ f_z(x,y,z) &= y^2 \end{aligned}$$

Da primeira igualdade, temos

$$\begin{aligned} & f_x(x,y,z) = 2xy \\ & \Rightarrow f(x,y,z) = x^2y + g(y,z) \\ & \Rightarrow f_y(x,y,z) = x^2 + g_y(y,z). \end{aligned}$$

Uma vez que $f_y(x,y,z) = x^2 + 2yz$ e $f_y(x,y,z) = x^2 + g_y(y,z)$ obtemos

$$\begin{aligned} & x^2 + 2yz = x^2 + g_y(y,z) \\ & \Rightarrow g_y(y,z) = 2yz \\ & \Rightarrow g(y,z) = y^2z + h(z) \end{aligned}$$

Como $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z)$ e $g(y,z) = y^2z + h(z)$, então

$$\begin{aligned} & f(x,y,z) = x^2y + y^2z + h(z) \\ & \Rightarrow f_z(x,y,z) = y^2 + h'(z). \end{aligned}$$

Uma vez que $f_z(x,y,z) = y^2$ e $f_z(x,y,z) = y^2 + h'(z)$, temos

$$\begin{aligned} & y^2 = y^2 + h'(z) \\ & \Rightarrow h'(z) = 0 \\ & \Rightarrow h(z) = K. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x,y,z) = x^2y + y^2z + K.$$

Exercício 3

Calcule a área da superfície dada por

$$\begin{aligned} x &= uv \\ y &= u+v \\ z &= u-v \end{aligned}$$

com $u^2+v^2 \leq 1$.

Solução: Seja S a superfície parametrizada por

$$r(u,v) = (uv, u+v, u-v);\ u^2+v^2 \leq 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} r_u &= (v,1,1) \\ r_v &= (u,1,-1) \end{aligned}$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v & 1 & 1 \\ u & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-1)\vec{i} - (-v-u)\vec{j} + (v-u)\vec{k} = (-2, u+v, v-u)$$

$$\begin{aligned} |r_u \times r_v| &= \sqrt{(-2)^2 + (u+v)^2 + (v-u)^2} = \sqrt{4+u^2+2uv+v^2+u^2-2uv+v^2} \\ &= \sqrt{4+2\left(u^2+v^2\right)} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A(S) = \int\int_S 1 \cdot dS &= \int\int_D |r_u \times r_v|\ dA \\ &= \int\int_{u^2+v^2\leq 1} \sqrt{4+2\left(u^2+v^2\right)}\, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4+2\alpha^2} \cdot \alpha\ d\alpha d\theta \ \ \text{(coordenadas polares)} \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\left(4+2\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}}{6} \right]_0^1 d\theta \quad (\star) \\ &= [\theta]_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{6}\left(6^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\pi}{3}\left(6^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\pi}{3}\left(6\sqrt{6}-8\right). \end{aligned}$$

$(\star)$ Substituição: $w = 4+2\alpha^2 \Rightarrow \int \sqrt{4+2\alpha^2} \cdot \alpha\ d\alpha = \frac{1}{4}\int \sqrt{w}\ dw = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}} + k = \frac{1}{6} w^{\frac{3}{2}} + k.$

Exercício 4

Calcule a integral de superfície

$$\int\int_S (x^2z + y^2z)\, dS,$$

sendo S o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$.

Solução:

$$\int\int_S f(x,y,z)\, dS = \int\int_D f(r(u,v)) \cdot |r_u \times r_v|\, dA.$$

Para parametrizar a superfície S, usaremos coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= 2\sin\varphi\cos\theta \\ y &= 2\sin\varphi\sin\theta \\ z &= 2\cos\varphi \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \ \text{ e } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ou seja,

$r(\varphi,\theta) = (2\sin\varphi\cos\theta, 2\sin\varphi\sin\theta, 2\cos\varphi)$

$r_\varphi = (2\cos\varphi\cos\theta, 2\cos\varphi\sin\theta, -2\sin\varphi)$

$r_\theta = (-2\sin\varphi\sin\theta, 2\sin\varphi\cos\theta, 0)$

$$r_\varphi \times r_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\cos\varphi\cos\theta & 2\cos\varphi\sin\theta & -2\sin\varphi \\ -2\sin\varphi\sin\theta & 2\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(4\sin^2\varphi\cos\theta, 4\sin^2\varphi\sin\theta, 4\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

$|r_\varphi \times r_\theta| = 4\sin\varphi.$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int\int_S f(x,y,z)\, dS &= \int\int_D f(r(u,v)) \cdot |r_u \times r_v|\, dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\sin^2\varphi\cos^2\theta \cdot 2\cos\varphi + 4\sin^2\varphi\sin^2\theta \cdot 2\cos\varphi\right) \cdot 4\sin\varphi\, d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\varphi \cdot 2\cos\varphi \cdot 4\sin\varphi\, d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^3\varphi\cos\varphi\, d\varphi d\theta \\ &= [\theta]_0^{2\pi} \cdot 32\left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

Exercício 5

Calcule a integral de superfície $\int\int_S F \cdot d\vec{S}$ para o campo vetorial

$$F(x,y,z) = (xy, yz, zx),$$

sendo S a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1,$$

e com orientação ascendente.

Solução:

Parametrização de $S : r(u,v) = \left(u, v, 4 - u^2 - v^2\right),\ 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$. Então,

$$\begin{aligned}
r_u &= (1, 0, -2u)\\
r_v &= (0, 1, -2v)\\
r_u \times r_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v) &= \left(uv, v\left(4 - u^2 - v^2\right), \left(4 - u^2 - v^2\right)u\right) \cdot (2u, 2v, 1)\\
&= 2u^2v + 2v^2\left(4 - u^2 - v^2\right) + u\left(4 - u^2 - v^2\right)\\
&= 2u^2v + 8v^2 - 2u^2v^2 - 2v^4 + 4u - u^3 - uv^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\int_S F\, d\vec{S} &= \int_0^1 \int_0^1 F(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v)\, dudv\\
&= \int_0^1 \int_0^1 2u^2v + 8v^2 - 2u^2v^2 - 2v^4 + 4u - u^3 - uv^2\, dudv\\
&= \int_0^1 \left[\left(2v - 2v^2\right)\frac{u^3}{3} + \left(8v^2 - 2v^4\right)u + \left(4 - v^2\right)\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}\right]_0^1 dv\\
&= \int_0^1 \left[\left(2v - 2v^2\right)\frac{1}{3} + 8v^2 - 2v^4 + \left(4 - v^2\right)\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] dv\\
&= \left[\frac{v^2}{3} - \frac{2}{9}v^3 + \frac{8}{3}v^3 - \frac{2}{5}v^5 + 2v - \frac{v^3}{6} - \frac{1}{4}v\right]_0^1\\
&= \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{8}{3} - \frac{2}{5} + 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\\
&= \frac{713}{180}.
\end{aligned}$$

Exercício 6

Calcule $\int\int_S F \cdot d\vec{S}$ sendo $F(x,y,z) = (0,y,-z)$ e S dada pelo paraboloide

$$y = x^2 + z^2,\ 0 \leq y \leq 1$$

e pelo disco

$$x^2 + z^2 \leq 1,\ y = 1.$$

SOLUÇÃO: Seja S_1 o paraboloide e S_2 o disco. Temos $S = S_1 \cup S_2$. Como S é uma superfície fechada, usaremos a orientação positiva (para fora de S).
Temos,

$$\int\int_S F \cdot d\vec{S} = \int\int_{S_1} F \cdot d\vec{S} + \int\int_{S_2} F \cdot d\vec{S}.$$

Calcularemos separadamente cada uma das integrais acima.

- Em S_1 :

$$\begin{aligned} r(u,v) &= \left(u, u^2+v^2, v\right),\ u^2+v^2 \leq 1 \\ r_u \times r_v &= (2u, -1, 2v) \\ F(r(u,v)) &= \left(0, u^2+v^2, -v\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\int_{S_1} F \cdot d\vec{S} &= \int\int_{u^2+v^2\leq 1} F(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v)\, dA \\ &= \int\int_{u^2+v^2\leq 1}\left[-\left(u^2+v^2\right) - 2v^2\right] dudv \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[r^2 + 2r^2\sin^2\theta\right] r\, drd\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\left(1 + 2\sin^2\theta\right) drd\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3(1 + 1 - \cos(2\theta))drd\theta \\ &= -\left[2\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 \\ &= -4\pi \cdot \frac{1}{4} \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

- Em S_2, observe que o vetor normal unitário da superfície S_2 é o vetor $n = (0,1,0)$. (Pois S_2 é um disco de raio 1 no plano-xz, o vetor normal aponta na direção y).
  Parametrização: $x = u, y = 1, v = z,\ u^2 + v^2 \leq 1$, ou seja

$$r(u,v) = (u,1,v),\ u^2+v^2 \leq 1.$$

  Como $F(x,y) = (0,y,-z)$, temos

$$\begin{aligned} F(r(u,v)) &= (0,1,-v) \\ F(r(u,v)) \cdot n &= (0,1,-v)\cdot(0,1,0) = 1. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int\int_{S_2} F \cdot d\vec{S} &= \int\int_{S_2} F \cdot n \, dS \\
&= \int\int_{u^2+v^2 \leq 1} 1 \, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr d\theta \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\int\int_S F \cdot d\vec{S} = -\pi + \pi = 0$.