

## Aula de Exercícios

📌 Cálculo II - MA211

### DERIVADAS PARCIAIS

**EXERCÍCIO 1.** Seja  $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$ . Calcule  $f_x(1, 2)$  e  $f_y(1, 2)$  e interprete esses números como inclinações.

**SOLUÇÃO:**

$$f_x(x, y) = -8x \Rightarrow f_x(1, 2) = -8.$$

$$f_y(x, y) = -2y \Rightarrow f_y(1, 2) = -4.$$

O gráfico de  $f$  é o parabolóide  $z = 16 - 4x^2 - y^2$ . A interseção do plano  $y = 2$  e  $\text{gr}(f)$  é dado pela parábola  $z = 12 - 4x^2, x \in \mathbb{R}$ :

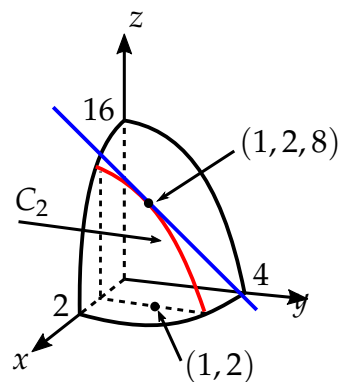
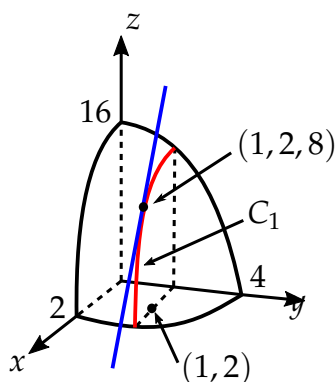
$$C_1(x) = (x, 2, 12 - 4x^2), x \in \mathbb{R}.$$

A inclinação da reta tangente à curva  $C_1$  no ponto  $(1, 2, f(1, 2)) = (1, 2, 8)$  é  $f_x(1, 2) = -8$ .

Analogamente, a interseção do plano  $x = 1$  e  $\text{gr}(f)$  é dado pela parábola  $z = 12 - y^2, y \in \mathbb{R}$ :

$$C_2(y) = (1, y, 12 - y^2), y \in \mathbb{R}.$$

A inclinação da reta tangente à curva  $C_2$  no ponto  $(1, 2, 8)$  é  $f_y(1, 2) = -4$ .



**EXERCÍCIO 2.** Determine as derivadas parciais de 1ª ordem das funções:

a)  $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$

b)  $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t) dt$

**SOLUÇÃO:** (a)

$$f_x(x, y, z) = \frac{1}{x + 2y + 3z}, \quad f_y(x, y, z) = \frac{2}{x + 2y + 3z}, \quad f_z(x, y, z) = \frac{3}{x + 2y + 3z}.$$

b)

📌 O Teorema Fundamental do cálculo diz que se uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua então a função  $g(x) = \int_a^x f(t) dt$  é derivável e  $g'(x) = f(x)$ , ou seja,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Como  $f(t) = \cos(e^t)$  é contínua, então pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$F_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_y^x \cos(e^t) dt = \cos(e^x).$$

$$F_y(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \int_x^y \cos(e^t) dt = -\cos(e^y).$$

**EXERCÍCIO 3.** Verifique se  $u(t, x) = e^{-\alpha^2 k^2 t} \text{sen}(kx)$  é solução da equação do calor  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ .

**SOLUÇÃO:**

$$u_x = k e^{-\alpha^2 k^2 t} \cos(kx)$$

$$u_{xx} = -k^2 e^{-\alpha^2 k^2 t} \text{sen}(kx)$$

$$u_t = -\alpha^2 k^2 e^{-\alpha^2 k^2 t} \text{sen}(kx) = \alpha^2 u_{xx}.$$

#### PLANOS TANGENTES E APROXIMAÇÕES LINEARES

**EXERCÍCIO 4.** Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \text{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right); & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Determine  $\frac{\partial}{\partial x}$  e  $\frac{\partial}{\partial y}$ .
- b) Mostre que  $\frac{\partial}{\partial x}$  e  $\frac{\partial}{\partial y}$  não são contínuas em  $(0, 0)$ .
- c) Prove que  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .

**SOLUÇÃO:**(a) Se  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x \text{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) + (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \cdot \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 2x \text{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \\ f_y(x, y) &= 2y \text{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right). \end{aligned}$$

Se  $(x, y) = (0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0 \\ f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos o fato de que  $\text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)$  é limitado:

$$-1 \leq -\left|\text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)\right| \leq \text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) \leq \left|\text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)\right| \leq 1.$$

b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Note que sobre a reta  $y = x$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_x(x,x) &= \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \frac{x}{x^2} \cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{|x|} \cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \infty. \end{aligned}$$

Como não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x,x)$ , não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y)$  e então  $f_x$  não é contínua em  $(0,0)$ . Analogamente,  $f_y$  não é contínua em  $(0,0)$ .

c)

$$f \text{ é diferenciável em } (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ admite derivadas parciais em } (0,0) \\ \text{e } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h,k)}{|(h,k)|} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{r(h,k)}{|(h,k)|} &= \frac{f(0+h, 0+k) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{(h^2+k^2) \sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{(h^2+k^2) \sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \sqrt{x^2+y^2} \sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right). \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) = 0,$$

segue que  $f$  é diferenciável em  $(0,0)$ .

**EXERCÍCIO 5.** Existe alguma função  $f$  tal que suas derivadas parciais sejam dadas por  $f_x(x,y) = x + 4y$  e  $f_y(x,y) = 3x - y$ ?

**SOLUÇÃO:** Temos  $f_{xy}(x,y) = 4$  e  $f_{yx} = 3$ . Note que  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  são funções constantes, logo são contínuas, mas  $f_{xy} \neq f_{yx}$ . Portanto, pelo Teorema de Clairaut-Schwarz não existe  $f$ .

**EXERCÍCIO 6.** Determine  $N_p$  e uma equação do plano tangente à superfície  $z = \sqrt{xy}$  em  $p = (1,1,1)$ .

**SOLUÇÃO:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}y = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}. \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}x = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo,  $N_p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ . E a equação do plano tangente é:

$$z - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1).$$

■ Em geral, a equação de  $T_p S$  é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Essa equação também pode ser determinada na forma

$$N_p \cdot ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0$$

sendo  $N_p = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$ .

**EXERCÍCIO 7.** Determine uma equação de  $T_p S$  dado que  $p = (2, 1, 3)$  e as curvas

$$c_1(t) = (2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2)$$

$$c_2(t) = (1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1)$$

estão em  $S$ .

Como as curvas dadas estão em  $S$ , conhecemos pelo menos dois vetores tangentes às  $S$ :

$$c'_1(t) = (3, -2t, -4 + 2t)$$

$$c'_2(t) = (2u, 6u^2, 2).$$

Note que ambas as curvas passam pelo ponto  $p$ . Isso ocorre quando  $t = 0$  e  $u = 1$ :

$$c_1(0) = c_2(1) = (2, 1, 3).$$

Logo  $c'_1(0) = (3, 0, -4)$  e  $c'_2(1) = (2, 6, 2)$  são vetores tangentes à  $S$  no ponto  $(2, 1, 3)$  e então são ambos paralelos ao plano tangente à  $S$  em  $p$ .

O vetor normal ao plano tangente é dado por

$$c'_1(0) \times c'_2(1) = (3, 0, -4) \times (2, 6, 2) = (24, -14, 18).$$

A equação do plano tangente é então  $N_p \cdot ((x, y, z) - (2, 1, 3)) = 0$ , i.e:

$$24(x - 2) - 14(y - 1) + 18(z - 3) = 0.$$

Simplificando,

$$12x - 7y + 9z = 44.$$

✎ **EXERCÍCIO 8.** Seja  $f$  diferenciável e  $f(2, 5) = 6$ ,  $f_x(2, 5) = 1$ ,  $f_y(2, 5) = -1$ . Use aproximação linear para estimar  $f(2.2, 4.9)$ .

**SOLUÇÃO:**

$$f(x, y) \approx f(2, 5) + f_x(2, 5)(x - 2) + f_y(2, 5)(y - 5)$$

$$= 6 + (x - 2) - (y - 5).$$

$$\Rightarrow f(2.2, 4.9) \approx 6 + (2.2 - 2) - (4.9 - 5) = 6.3.$$

✎ **EXERCÍCIO 9.** Determine a diferencial da função  $f(t, x) = e^{-2x} \cos(2\pi t)$ .

**SOLUÇÃO:** Por definição,

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx.$$

Então, como  $\frac{\partial f}{\partial t} = -2\pi e^{-2x} \text{sen}(2\pi t)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x} = -2e^{-2x} \cos(2\pi t)$ , temos

$$df = -2\pi e^{-2x} \text{sen}(2\pi t)dt - 2e^{-2x} \cos(2\pi t)dx.$$