Cálculo II - MA211
PED Neemias Martins
IMECC - UNICAMP

#3 - AULA DE EXERCÍCIOS

NEEMIAS MARTINS

1. Seja $z = x^2 + xy^3$ com $x = uv^2 + w^3$ e $y = u + ve^w$. Determine $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2, v = 1, w = 0$.

Pela Regra da Cadeia, temos

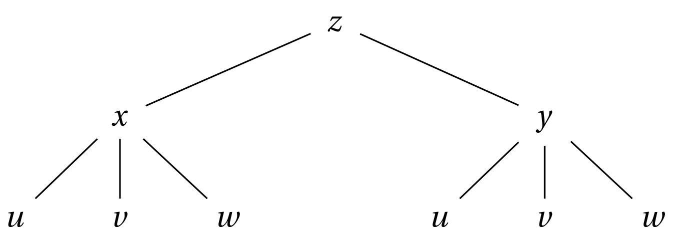
$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (2x + y^3)v^2 + 3xy^2,\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = (2x + y^3)2uv + 3xy^2e^w\\
\frac{\partial z}{\partial w} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} = (2x + y^3)3w^2 + 3xy^2ve^w.
\end{aligned}$$

Quando $u = 2, v = 1, w = 0$, temos

$$x = 2, y = 3,$$

logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= 31 \cdot 1 + 54 \cdot 1 = 85,\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= 31 \cdot 4 + 54 \cdot 1 = 178\\
\frac{\partial z}{\partial w} &= 31 \cdot 0 + 54 \cdot 1 = 54.
\end{aligned}$$



2. Suponha que a equação $e^z = xyz$ determine $z = f(x, y)$ como função de x e y. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Seja $F(x, y, z) = e^z - xyz = 0$. Então, pela derivação implícita, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

Date: 18/08/23.

3. Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

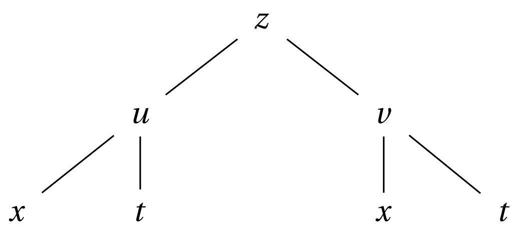
é solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

[Dica: $u = x + at$, $v = x - at$.]

Sejam $u := x + at$ e $v := x - at$. Então, $z = f(u) + g(v)$. Logo, $\frac{\partial z}{\partial u} = f'(u)$ e $\frac{\partial z}{\partial v} = g'(v)$.

Então,



$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = af'(u) - ag'(v),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= a\frac{\partial}{\partial t}[f'(u) - g'(v)]\\ &= a\left(\frac{df'(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{dg'(v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\\ &= a^2[f''(u) + g''(v)],\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f'(u) + g'(v),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[f'(u) + g'(v)] = \frac{df'(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dg'(v)}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} = f''(u) + g''(v).$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

4. Uma função f é dita **homogênea de grau** n se $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo t, sendo n um inteiro positivo e f tem as segundas derivadas parciais contínuas.
(a) Verifique que $f(x, y) = x^2 y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.
(b) Mostre que que, se f é homogênea de grau n, então

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y).$$

[Dica: Use a Regra da Cadeia para derivar $f(tx, ty)$ em relação a t.]

(a) Como f é uma função polinomial, f é contínua e possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas e

$$\begin{aligned}f(tx, ty) &= (tx)^2(ty) + 2(tx)(ty)^2 + 5(ty)^3\\ &= t^3x^2y + 2t^3xy^2 + 5t^3y^3\\ &= t^3(x^2y + 2xy^2 + 5y^3)\\ &= t^3 f(x, y).\end{aligned}$$

Portanto, f é homogênea de grau 3.

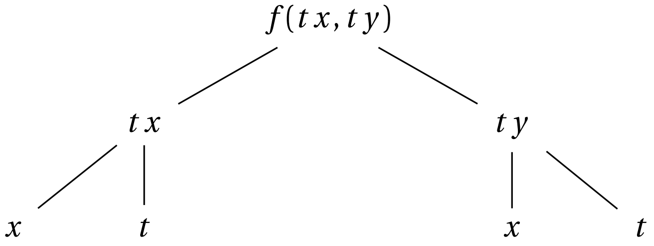
(b) Seja f homogênea de grau n. Diferenciando ambos os lados de $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ em relação a t:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx,ty) = \frac{\partial}{\partial t}[t^n f(x,y)] \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial(tx)} f(tx,ty) \cdot \frac{\partial(tx)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial(ty)} f(tx,ty) \cdot \frac{\partial(ty)}{\partial t} = x\frac{\partial}{\partial(tx)} f(tx,ty) + y\frac{\partial}{\partial(tx)} f(tx,ty) = nt^{n-1} f(x,y).$$

Tomando $t = 1$:

$$x\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + y\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = nf(x,y).$$



> 5. Determine a derivada direcional de $f(x,y) = ye^{-x}$ no ponto $p = (0,4)$ no sentido do ângulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

$f(x,y) = ye^{-x} \Rightarrow f_x(x,y) = -ye^{-x}$ e $f_y = e^{-x}$. Se u é um vetor unitário na direção do ângulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$, i.e. $u = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$, então

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\text{sen}\,\theta,$$

logo,

$$\begin{aligned} D_u f(0,4) &= f_x(0,4)\cos\frac{2\pi}{3} + f_y(0,4)\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} \\ &= -4(-\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

> 6. Determine a derivada direcional de $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$ no ponto $p = (0,0,0)$ na direção e sentido do vetor $v = (5,1,-2)$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) \\ &= (e^y + ze^x, xe^y + e^z, ye^z + e^x). \end{aligned}$$

Logo, $\nabla f(0,0,0) = (1,1,1)$. Um vetor unitário na direção de $v = (5,1,-2)$ é

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}\right).$$

Então,

$$\begin{aligned} D_{\hat{v}} f(0,0,0) &= \nabla f(0,0,0) \cdot \hat{v} \\ &= (1,1,1) \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{30}}. \end{aligned}$$

7. Determine a taxa de variação máxima de $f(x,y) = \text{sen (xy)}$ no ponto $p = (1,0)$ e a direção em que isso ocorre.

$\nabla f(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$. Logo, $\nabla f(1,0) = (0,1)$.
Então a variação máxima é dada por $|\nabla f(1,0)| = 1$ e ocorre na direção do vetor gradiente $(0,1)$.

8. Determine equações de plano tangente e reta normal a uma superfície dada no ponto especificado:

$$S = \{xyz^2 = 6\}, \quad p = (3,2,1).$$

Seja $F(x,y,z) = xyz^2$. (S é a superfície de nível de equação $F(x,y,z) = 6$). Temos

$$\nabla F(x,y,z) = (yz^2, xz^2, 2xyz),$$

daí

$$\nabla F(3,2,1) = (2,3,12).$$

Equação de $T_pS = \{(x,y,z)) \in \mathbb{R}^3 | \nabla F(p)\cdot((x,y,z)-p) = 0\}$:

$$\nabla F(3,2,1)\cdot(x-3, y-2, z-1) = 0$$
$$\Longleftrightarrow 2(x-3)+3(y-2)+12(z-1) = 0.$$

Equação da reta normal $R_p = \{p + tN_p | \, t \in \mathbb{R}\}$:

$$(x,y,z) = (3,2,1) + t(2,3,12);\ t \in \mathbb{R},$$

escrevendo em equações simétricas:

$$\frac{x-3}{F_x(3,2,1)} = \frac{y-2}{F_y(3,2,1)} = \frac{z-1}{F_z(3,2,1)}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{12}$$