Cálculo II - MA211
IMECC - UNICAMP
Neemias Martins
`neemias.org/ped`

#2 - AULA DE EXERCÍCIOS

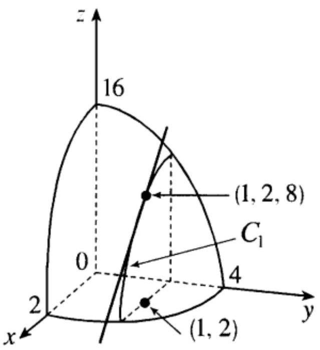
NEEMIAS MARTINS

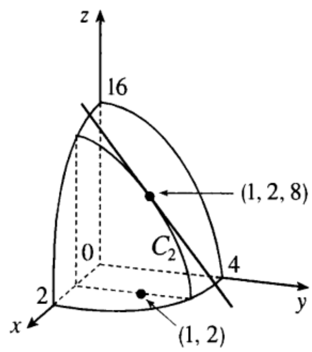
> 1. Seja $f(x,y) = 16 - 4x^2 - y^2$. Calcule $f_x(1,2)$ e $f_y(1,2)$ e interprete esses números como inclinações.

$$f_x(x,y) = -8x \Rightarrow f_x(1,2) = -8.$$
$$f_y(x,y) = -2x \Rightarrow f_x(1,2) = -4.$$

O gráfico de f é o paraboloide $z = 16 - 4x^2 - y^2$. A interseção do plano $y = 2$ e gr(f) é dado pela parábola $z = 12 - 4x^2, x = 2$. (Curva C_1 na figura.) A inclinação da reta tangente à curva C_1 no ponto $(1,2,f(1,2)) = (1,2,8)$ é $f_x(1,2) = -8$.

Analogamente, a intersecção do plano $x = 1$ e gr(f) é dado pela parábola $z = 12 - y^2, x = 1$. (Curva C_2). A inclinação da reta tangente à curva C_2 no ponto $(1,2,8)$ é $f_y(1,2) = -4$.





> 2. Determine as derivadas parciais de 1ª ordem das funções:
> a) $f(x,y,z) = \ln(x + 2y + 3z)$
> b) $F(x,y) = \int_y^x \cos(e^t)dt$

a)

$$f_x(x,y,z) = \frac{1}{x+2y+3z},\ f_y(x,y,z) = \frac{2}{x+2y+3z},\ f_z(x,y,z) = \frac{3}{x+2y+3z}.$$

Date: 11/08/23.

b) Como $f(t)=\cos(e^t)$ é contínua, então pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$F_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\int_y^x \cos(e^t)dt=\cos(e^x).$$
$$F_y(x,y)=-\frac{\partial}{\partial y}\int_x^y \cos(e^t)dt=-\cos(e^y).$$

3. Verifique se $u(t,x)=e^{-\alpha^2k^2t}\operatorname{sen}(kx)$ é solução da equação do calor $u_t=\alpha^2u_{xx}$.

$$\begin{aligned} u_x &= ke^{-\alpha^2k^2t}\cos(kx)\\ u_{xx} &= -k^2e^{-\alpha^2k^2t}\operatorname{sen}(kx)\\ u_t &= -\alpha^2k^2e^{-\alpha^2k^2t}\operatorname{sen}(kx)=\alpha^2u_{xx}. \end{aligned}$$

4. Seja

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right); & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad ; & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Determine $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$.
b) Mostre que $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ não são contínuas em $(0,0)$.
c) Prove que f é diferenciável em $(0,0)$.

a) Se $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+(x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\frac{-2x}{x^2+y^2}\right)\\ &= 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\\ f_y(x,y) &= 2y\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right). \end{aligned}$$

Se $(x,y)=(0,0)$,

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\operatorname{sen}(\frac{1}{h^2})}{h}=\lim_{h\to0}h\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)=0\\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\operatorname{sen}(\frac{1}{h^2})}{h}=\lim_{h\to0}h\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)=0. \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Note que sobre a reta $y=x$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0}f_x(x,x) &= \lim_{x\to0}2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x^2}\right)-\frac{x}{x^2}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to0}-\frac{1}{|x|}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)=\infty. \end{aligned}$$

Como não existe $\lim_{x\to0}f_x(x,x)$, não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)$ e então f_x não é contínua em $(0,0)$. Analogamente, f_y não é contínua em $(0,0)$.

c)

$$f \text{ é diferenciável em } (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ admite derivadas parciais em } (0,0) \\ \text{e } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{r(h,k)}{|(h,k)|} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{r(h,k)}{|(h,k)|} &= \frac{f(0+h,0+k) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{(h^2+k^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{(h^2+k^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \sqrt{x^2+y^2}\,\text{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right). \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\,\text{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) = 0,$$

segue que f é diferenciável em $(0,0)$.

5. Existe alguma função f tal que suas derivadas parciais sejam dadas por $f_x(x,y) = x+4y$ e $f_y(x,y) = 3x - y$?

Temos $f_{xy}(x,y) = 4$ e $f_{yx} = 3$. Note que f_{xy} e f_{yx} são funções constantes, logo são contínuas, mas $f_{xy} \neq f_{yx}$. Portanto, pelo Teorema de Clairaut-Schwarz não existe f.

6. Determine N_p e uma equação do plano tangente à superfície $z = \sqrt{xy}$ em $p = (1,1,1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}} y = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}.$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}} x = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $N_p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. E a equação do plano tangente é:

$$z - 1 = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1).$$

7. Seja f diferenciável e $f(2,5) = 6$, $f_x(2,5) = 1$, $f_y(2,5) = -1$. Use aproximação linear para estimar $f(2.2, 4.9)$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(2,5) + f_x(2,5)(x-2) + f_y(2,5)(y-5) \\ &= 6 + (x-2) - (y-5). \\ \Rightarrow f(2.2,4.9) &\approx 6 + (2.2-2) - (4.9-5) = 6.3. \end{aligned}$$

8. Determine a diferencial da função $f(t,x) = e^{-2x}\cos(2\pi t)$.

$\frac{\partial f}{\partial t} = -2\pi e^{-2x}\,\text{sen}(2\pi t)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = -2e^{-2x}\cos(2\pi t)$. Então,

$$df = -2\pi e^{-2x}\,\text{sen}(2\pi t)dt - 2e^{-2x}\cos(2\pi t)dx.$$

9. Determine uma equação de T_pS dado que $p = (2,1,3)$ e as curvas

$$c_1(t) = (2+3t, 1-t^2, 3-4t+t^2)$$
$$c_2(t) = (1+u^2, 2u^3-1, 2u+1)$$

estão em S.

Como as curvas dadas estão em S, conhecemos pelo menos dois vetores tangentes às S :

$$c_1'(t) = (3, -2t, -4+2t)$$
$$c_2'(t) = (2u, 6u^2, 2).$$

Note que ambas as curvas passam pelo ponto p. Isso ocorre quando $t = 0$ e $u = 1$:

$$c_1(0) = c_2(1) = (2,1,3).$$

Logo $c_1'(0) = (3,0,-4)$ e $c_2'(1) = (2,6,2)$ são vetores tangentes à S no ponto $(2,1,3)$ e então são ambos paralelos ao plano tangente à S em p.

O vetor normal ao plano tangente é dado por

$$c_1'(0) \times c_2'(1) = (3,0,4) \times (2,6,2) = (24,-14,18).$$

A equação do plano tangente é então

$$24(x-2) - 14(y-1) + 18(z-3) = 0.$$

Simplificando,

$$12x - 7y + 9z = 44.$$