Cálculo II - MA211
IMECC - UNICAMP
Neemias Martins
neemias.org/ped

#4 - AULA DE EXERCÍCIOS

NEEMIAS MARTINS

> 1. Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função
> $$f(x,y)=9-2x+4y-x^2-4y^2.$$

As derivadas parciais de primeira ordem são dadas por:

$$f_x=-2-2x$$
$$f_y=4-8y.$$

Para encontrarmos os pontos críticos, devemos resolver as equações

$$\begin{cases} -2-2x=0 & (1) \\ 4-8y=0 & (2) \end{cases}$$

Da Equação (1), temos $2x=-2 \Rightarrow x=-1$. Da Equação (2), $8y=4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$. Então o único ponto crítico é $(-1,\frac{1}{2})$.

Agora vamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem e $D(x,y)$:

$$f_{xx}=-2 \qquad f_{xy}=0 \qquad f_{yy}=-8$$
$$D(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(-2)(-8)-0^2=16.$$

Como $D(-1,\frac{1}{2})=16>0$ e $f_{xx}(-1,\frac{1}{2})=-2<0$, então pelo Teste da Segunda Derivada $f(-1,\frac{1}{2})=11$ é um máximo local.

> 2. Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função $f(x,y)=y^2-x^2$ sujeita à restrição $\frac{1}{4}x^2+y^2=1$.

Vamos determinar os extremos de f sujeita à restrição $g(x,y)=\frac{1}{4}x^2+y^2=1$. Usando os multiplicadores de Lagrange, resolveremos as equações $\nabla f=\lambda\nabla g$ e $g(x,y)=1$, que podem ser escritas como

$$(-2x,2y)=\lambda\left(\frac{2x}{4},\frac{2y}{4}\right) \text{ e } g(x,y)=1,$$

ou

$$\begin{cases} -2x=\frac{\lambda}{2}x & (1) \\ 2y=\frac{\lambda}{2}y & (2) \\ \frac{1}{4}x^2+y^2=1 & (3) \end{cases}$$

Date: 25/08/23.

Da Equação (1),

$$\begin{aligned}
&-2x-\frac{\lambda}{2}x=0\\
&\Rightarrow x(-2-\frac{\lambda}{2})=0\\
&\Rightarrow x=0 \text{ ou } \frac{\lambda}{2}=-2\Rightarrow\lambda=-4.
\end{aligned}$$

Se $x=0$, pela Equação (3),

$$y^2=1\Rightarrow y=\pm1.$$

Se $\lambda=-4$, pela Equação (2),

$$\begin{aligned}
&2y=\frac{-4}{2}y=-2y\\
&\Rightarrow y=0\\
&\Rightarrow \frac{1}{4}x^2=1, \text{ pela Equação (4)}\\
&\Rightarrow x^2=4\\
&\Rightarrow x=\pm2.
\end{aligned}$$

(De modo análogo, a Equação (2) nos dá $y=0$ ou $\lambda=4$. Quando $y=0$, obtemos $x=\pm2$. Quando $\lambda=4$, obteríamos $x=0$ e assim $y=\pm1$.) Os pontos críticos de f são $(0,1),(0,-1),(2,0),(-2,0)$. Calculando f nesses pontos, achamos

$$f(0,1)=f(0,-1)=1 \text{ e } f(2,0)=f(-2,0)=-4.$$

Portanto o valor máximo de f é $f(0,\pm1)=1$ e o valor mínimo é $f(\pm2,0)=-4$.

3. Usando multiplicadores de Lagrange, determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c.

Queremos maximizar a função $f(x,y,z)=xyz$ sujeita à restrição $g(x,y,z)=4x+4y+4z=c$. Logo, resolveremos as equações $\nabla f=\lambda\nabla g$ e $g(x,y,z)=c$:

$$(yz,xz,xy)=\lambda(4,4,4) \text{ e } g(x,y,z)=c$$

i.e

$$\begin{cases}
yz=4\lambda \quad (1)\\
xz=4\lambda \quad (2)\\
xy=4\lambda \quad (3)\\
4(x+y+z)=c \quad (4)
\end{cases}$$

Das Equações (1),(2) e (3) temos

$$\begin{aligned}
&4\lambda=yz=xz=yz\\
&\Rightarrow y=x=z
\end{aligned}$$

,

visto que $x,y,z>0$ pela natureza do problema. Das igualdades acima e a Equação (4), temos

$$\begin{aligned}
&4(x+x+x)=c\\
&\Rightarrow 12x=c\\
&\Rightarrow x=\frac{c}{12}\\
&\Rightarrow x=y=z=\frac{c}{12}
\end{aligned}$$

Portanto as dimensões da caixa de volume máximo são $x = y = z = \frac{c}{12}$.

> 4. Resolva o exercício anterior sem usar multiplicadores de Lagrange.

Queremos maximizar o volume $V = xyz$ dado que $4x + 4y + 4z = c$. Isolando z na equação,

$$\begin{aligned} &4x + 4y + 4z = c \\ &\Rightarrow z = \frac{c - 4x - 4y}{4} \\ &\Rightarrow z = \frac{c}{4} - x - y. \end{aligned}$$

Seja $V(x, y) = xyz = xy\left(\frac{c}{4} - x - y\right) = \frac{c}{4}xy - x^2y - xy^2$, $x > 0$, $y > 0$. Calculando as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{c}{4}y - 2xy - y^2 \\ V_y &= \frac{c}{4}x - x^2 - 2xy \end{aligned}$$

Queremos encontrar os pontos críticos de V, então fazemos

$$\begin{cases} \frac{c}{4}y - 2xy - y^2 = 0 & (1) \\ \frac{c}{4}x - x^2 - 2xy = 0 & (2) \end{cases}$$

Da Equação (1),

$$\begin{aligned} &\frac{c}{4}y - 2xy - y^2 = 0 \\ &\Rightarrow y\left(\frac{c}{4} - 2x - y\right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{c}{4} - 2x - y = 0, \text{ pois } y > 0 \\ &\Rightarrow 2x + y = \frac{c}{4} \quad (3) \end{aligned}$$

Da Equação (2),

$$\begin{aligned} &\frac{c}{4}x - x^2 - 2xy = 0 \\ &\Rightarrow x\left(\frac{c}{4} - x - 2y\right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{c}{4} - x - 2y = 0, \text{ pois } x > 0 \\ &\Rightarrow x + 2y = \frac{c}{4} \quad (4) \end{aligned}$$

Igualando as expressões (4) e (5):

$$\begin{aligned} &2x + y = x + 2y \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

Substituindo $x = y$ na expressão (3):

$$\begin{aligned} &3x = \frac{c}{4} \\ &\Rightarrow x = \frac{c}{12} = y. \end{aligned}$$

Ainda,

$$z = \frac{c}{4} - x - y = \frac{c}{4} - \frac{c}{12} - \frac{c}{12} = \frac{c}{12}.$$

Pela natureza do problema, o ponto crítico nos fornece um valor máximo absoluto. A caixa é um cubo de arestas de comprimento $\frac{c}{12}$.