FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA

SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

AULA 8 – 25/04/2025

Relações Binárias

Sejam A e B conjuntos. Uma relação binária ou, simplesmente, relação de A para B é um subconjunto de A x B.

Suponha que R é uma relação de A para B. Então R é um conjunto de pares ordenados onde cada primeiro elemento pertence a A e cada segundo elemento pertence a B. Isto é, para cada par $a \in A$ e $b \in B$, exatamente uma das seguintes afirmativas é verdadeira:

(i) $(a,b) \in R$; dizemos que "a é R-relacionado a b", escrevendo aRb.

(ii) $(a,b) \notin R$; dizemos que "a não é R-relacionado a b", escrevendo $a \not R b$.

Se R é uma relação de um conjunto A para si mesmo, isto é, se R é um subconjunto de $A^2 = AxA$, então dizemos que R é uma relação em A.

Definição: O **domínio** de uma relação R é o conjunto de todos os primeiros elementos de um par ordenado que pertence a R, e a **imagem** de R é o conjunto dos segundos elementos.

Exercícios: 1) Sejam A={1,2,3} e B={x,y,z} e R={(1,y),(1,z),(3,y)} uma relação de A para B. Encontre o domínio e a imagem de R.

Dom(R) =

Img(R) =

Exercícios: 1) Sejam $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{x,y,z\}$ e $R=\{(1,y),(1,z),(3,y)\}$ uma relação de A para B. Encontre o domínio e a imagem de R.

$Dom(R) =$

$Dom(R) = \{1,3\}$

$Img(R) =$

$Img(R) = \{y,z\}$

2) Sejam A={ovos, leite, milho} e B={vacas,cabras,galinhas}. Podemos definir uma relação R de A para B por:

$(a,b) \in R$ se a é produzido por b. Encontre os elementos de R e seu domínio e imagem.

R =

Dom(R) =

Img(R) =

2) Sejam A={ovos, leite, milho} e B={vacas,cabras,galinhas}. Podemos definir uma relação R de A para B por:

(a,b) ∈ R se a é produzido por b. Encontre os elementos de R e seu domínio e imagem.

R =

R = {(ovos,galinhas),(leite,vacas),(leite,cabras)}

Dom(R) =

Dom(R) = {ovos, leite}

Img(R) =

Img(R) = {galinhas, vacas, cabras}

3) Sejam S={1,2} e T={2,3,4} e R uma relação de S para T dada por:

xRy se, e somente se, x+y for ímpar

Encontre os elementos de R e seu domínio e imagem.

R =

Dom(R) =

Img(R) =

E se R fosse uma relação de T para S? Quais os elementos de R, Dom(R), Img(R)?

3) Sejam S={1,2} e T={2,3,4} e R uma relação de S para T dada por:

xRy se, e somente se, x+y for ímpar

Encontre os elementos de R e seu domínio e imagem.

R =

R = {(1,2),(1,4),(2,3)}

Dom(R) =

Dom(R) = {1,2}

Img(R) =

Img(R) = {2,3,4}

E se R fosse uma relação de T para S? Quais os elementos de R, Dom(R), Img(R)?

R = {(2,1),(3,2),(4,1)}

Dom(R) = {2,3,4}

Img(R) = {1,2}

Classificação das relações:

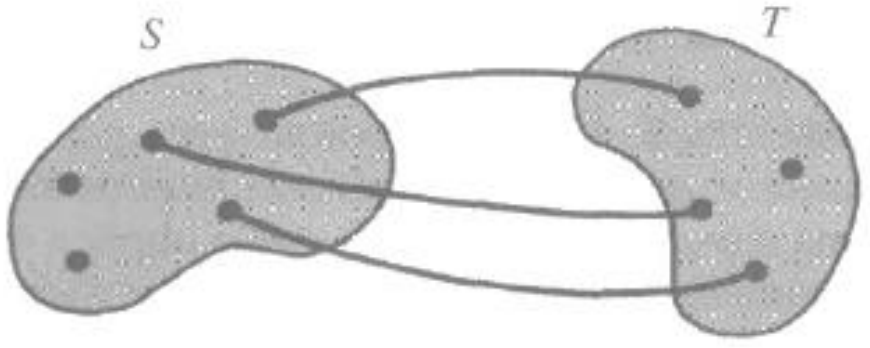
Vimos que se R for uma relação binária em AxB, então R consistirá em um conjunto de pares ordenados da forma (a,b).

A primeira componente dos pares ordenados de uma relação pode estar relacionada com a segunda componente de diversas maneiras.

Assim, podemos classificar as relações dependendo de quantas vezes os elementos de A estão relacionados com os elementos de B.

Relação um-para-um

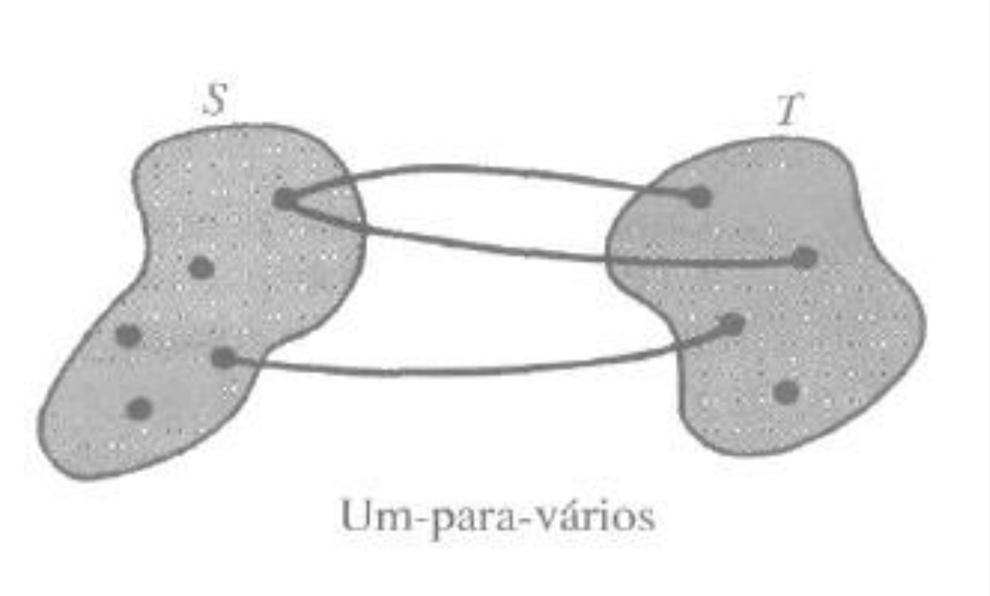
A relação é um-para-um (ou injetiva ou biunívoca) se cada primeira componente ‘a’ e cada segunda componente ‘b’ aparecem apenas uma vez na relação.



Um-para-um

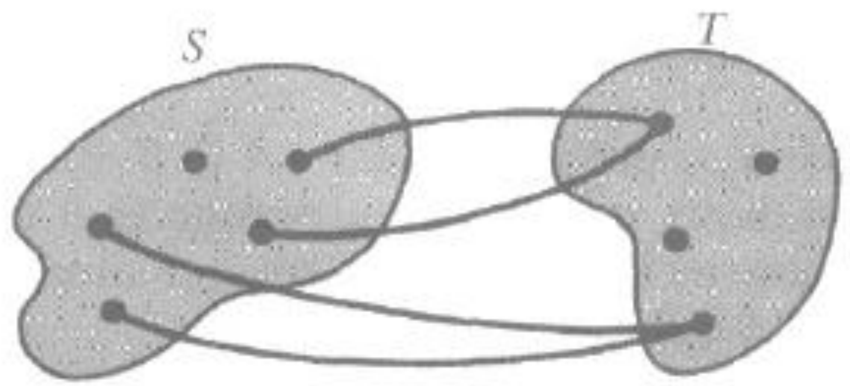
Relação um-para-vários (ou um para muitos)

A relação é um-para-vários se alguma primeira componente ‘a’ aparece mais de uma vez, isto é, se um ‘a’ faz par com mais de um ‘b’.



Relação vários-para-um (ou muitos para um)

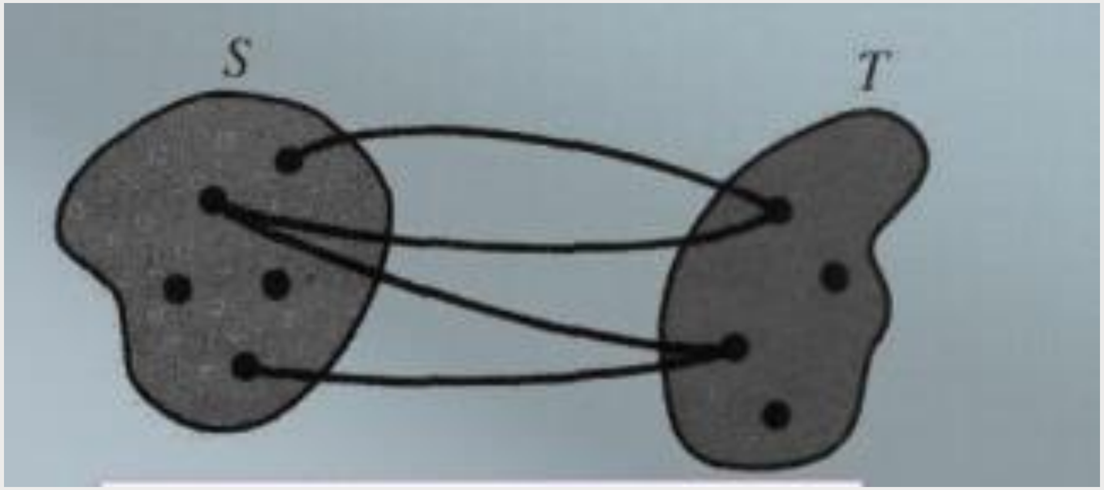
A relação é vários-para-um se alguma segunda componente ‘b’ fizer par com mais de um ‘a’.



Vários-para-um

Relação vários-para-vários (ou muitos para muitos)

A relação é vários-para-vários se alguma primeira componente ‘a’ aparece mais de uma vez e se alguma componente ‘b’ fizer par com mais de um ‘a’.



Exercício: Indique cada uma das relações em AxB apresentadas abaixo como sendo um-para-um, um-para-vários, vários-para-um e vários-para-vários, onde

$A = \{2,5,7,9\}$ e $B = \{3,4,5\}$

a) $\{(5,3), (7,5), (9,3)\}$

b) $\{(2,4), (5,5), (7,3)\}$

c) $\{(7,4), (2,5), (9,4),(2,3)\}$

d) $\{(2,3),(2,4),(7,5)\}$

Exercício: Indique cada uma das relações em AxB apresentadas abaixo como sendo um-para-um, um-para-vários, vários-para-um e vários-para-vários, onde

$A = \{2,5,7,9\}$ e $B = \{3,4,5\}$

a) $\{(5,3), (7,5), (9,3)\}$
Vários para um

b) $\{(2,4), (5,5), (7,3)\}$
Um para um

c) $\{(7,4), (2,5), (9,4),(2,3)\}$
Vários para vários

d) $\{(2,3),(2,4),(7,5)\}$
Um para vários

Relações Inversas

Seja R uma relação qualquer de um conjunto A para um conjunto B. A inversa de R, denotada por R^{-1} ,é a relação de B para A que consiste nos pares ordenados que, quando tem sua ordem revertida, pertencem a R, isto é:

R^{-1}={(b,a)/ (a,b) ∈ R}.

Note que $Dom(R^{-1}) = Img(R) \quad e \quad Img(R^{-1}) = Dom(R)$

Exemplo: Sejam A={1,2,3}, B={x,y,z} e a relação em AxB dada por R={(1,y),(1,z),(3,y)}. Encontre a relação inversa.

R^{-1} = {(y,1),(z,1),(y,3)}

Exercício:

Sejam A = {4,5,6}, B = {0,1,2,3,4}.

Construa a relação R = AxB e sua inversa

R =
{(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,0),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,0),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4)}

R^{-1} =
{(0,4),(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(0,5),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(0,6),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6)}

Relações Compostas

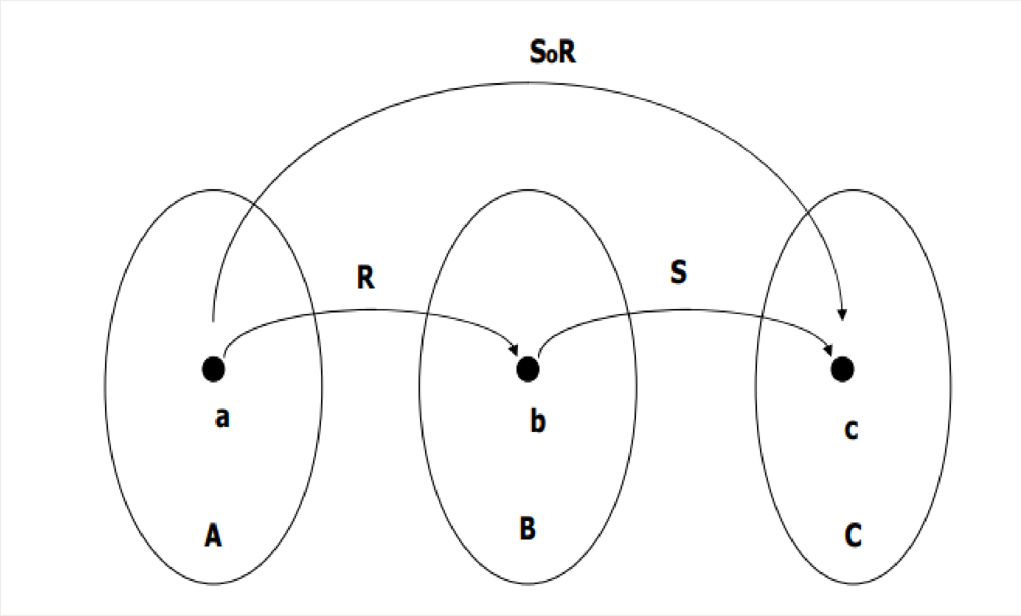
Sejam A, B e C conjuntos, e seja R uma relação de A para B e S uma relação de B para C.

Podemos definir uma relação de A para C denotada por $S \circ R$ dada por:

$$S \circ R = \{(a,c) \mid \exists b \text{ com } (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}$$

Note que temos S em seguida a R (primeiro R, depois S)

Em ger $S \circ R \neq R \circ S$



Exercícios:

1) Sejam A = {1,2,3,4}, B = {a,b,c,d}, C = {x,y,z} conjuntos e
R = {(1,a), (2,d), (3,a), (3,b), (3,d)} uma relação em AxB e
S = {(b,x), (b,z), (c,y), (d,z)} uma relação em BxC.
Encontre
S∘R e R∘S.

2) Sejam A = {1,2,3,4} e as relações R e S sobre A definidas por:
R={(1,2),(1,1),(1,3),(2,4),(3,2)}
S={(1,4),(1,3),(2,3),(3,1),(4,1)}

Encontre S∘R e R∘S.

Respostas:

1) $S \circ R = \{(2,z),(3,x),(3,z)\}$ (primeiro R, depois S)

$R \circ S = \{\ \}$ (primeiro S, depois R)

2) $S \circ R = \{(1,3),(1,4),(1,1),(2,1),(3,3)\}$ (primeiro R, depois S)

$R \circ S = \{(1,2),(2,2),(3,2),(3,1),(3,3),(4,2),(4,1),(4,3)\}$ (primeiro S, depois R)