AULA DE EXERCÍCIOS

NEEMIAS MARTINS

1. Use o Teorema de Stokes para calcular a integral de linha

$$\oint_C z\,dx - 2x\,dy + 3y\,dz,$$

em que C é a curva obtida pela intersecção do cilindro $x^2+y^2=1$ com o plano $x+y+z=1$, orientada no sentido anti-horário quando visto de cima.

Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\int_C F\cdot dr = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\int_S \text{rot}(F)\cdot dS,$$

sendo $F = P\,\boldsymbol{i} + Q\,\boldsymbol{j} + R\,\boldsymbol{k}$ e C é a fronteira da superfície S. Temos,

$$\text{rot}(F) = \nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & -2x & 3y \end{vmatrix} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} = (3,1,-2).$$

Usando x e y como parâmetros, S pode ser descrita por

$$r(x,y) = (x,\,y,\,1-x-y), (x,y)\in D$$

sendo $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$.

Agora, como $r_x = (1,0,-1)$ e $r_y = (0,1,-1)$, então

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1).$$

Note que a orientação de S induz a orientação positiva de C. Pela definição de integral de superfície, temos

$$\int\int_D \text{rot}F(r(x,y))\cdot(r_x\times r_y)dA = \int\int_D (3,1,-2)\cdot(1,1,1)dA = \int\int_D 3+1-2dA$$
$$= 2\int\int_D dA = 2\pi.$$

2. Sejam $F(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2)$ e C é a fronteira da parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ no 1º octante. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot dr$, sendo C orientada no sentido anti-horário quando visto de cima.

S é parte da superfície dada por $z = g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ no 1º octante. Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_C F \cdot dr = \int\int_S \text{rot}(F) dS.$$

Temos

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & -y & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = (2y, -2x, 0).$$

Como o rotacional é um campo vetorial e a superfície S é dada pelo gráfico $z = g(x, y)$, podemos usar a seguinte relação

$$\int\int_S \text{rot}(F) dS = \int\int_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

sendo $P = 2y, Q = -2x, R = 0$. Portanto,

$$\int\int_S \text{rot}(F) dS = \int\int_D (-2y(-2x) + 2x(-2y)) dA = \int\int_D 0 dA = 0.$$

3. Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície $\int\int_S F \cdot dS$, ou seja, calcule o fluxo de F através de S, sendo

$$F(x, y, z) = (x^3 + y \sin z,\ y^3 + z \sin x,\ 3z)$$

e S a superfície do sólido limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$.

$\text{div}(F) = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x^3 + y \sin z,\ y^3 + z \sin x, 3z) = 3x^2 + 3y^2 + 3 = 3(x^2 + y^2 + 1)$. Considere S orientada positivamente e seja E o sólido delimitado por S. Pelo Teorema do divergente, e usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi, \end{cases}$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\int\int_S F\cdot dS &= \int\int\int_E \operatorname{div}(F)dV = \int\int\int_E 3(x^2+y^2+1)dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 3(\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+1)\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 3(\rho^2\sin^2+1)\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 3(\rho^4\sin^3+\rho^2\sin\varphi)d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&= 2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\left[\frac{\rho^5}{5}\sin^3\varphi+\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi\right]_1^2 d\varphi \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\left[\frac{31}{5}\sin^3\varphi+\frac{7}{3}\sin\varphi\right]d\varphi = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{93}{5}\sin^3\varphi+7\sin\varphi\right]d\varphi \\
&= 2\pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{93}{5}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi+7\sin\varphi\right]d\varphi\right. \\
&= 2\pi\left[\frac{93}{5}\left(-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)-7\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{194}{5}\pi.
\end{aligned}
$$

4. Sejam $F(x,y,z)=(x+y+z^2)\boldsymbol{k}$ e S a fronteira do cilindro $x^2+y^2\leq 4$ e $0\leq z\leq 3$. Calcule $\int\int_S F\cdot\boldsymbol{n}\,dS$, em que $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para fora do cilindro.

Temos $\int\int_S F\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int\int_S F\cdot dS$. Pelo Teorema do Divergente, segue que

$$\int\int_S F\cdot dS=\int\int\int_E \operatorname{div}(F)\,dV,$$

sendo E o cilindro $x^2+y^2\leq 4$ e $0\leq z\leq 3$.

Como

$$\operatorname{div}(F)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(x+y+z^2)\boldsymbol{k}=2z,$$

então

$$\int\int_S F\cdot dS=\int\int\int_E 2z\,dV.$$

Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z,\end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int\int_S F\cdot dS&=\int\int\int_E 2z\,dV\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 2zr\,dz\,dr\,d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^2 rz^2\Big|_0^3\,dr\,d\theta\\ &=2\pi\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^2\cdot 9=36\pi.\end{aligned}$$

5.[Extra - Revisão]. Considere o campo

$$F(x,y,z)=(2xy,x^2+2yz,y^2).$$

Verifique que o campo vetorial F é conservativo e calcule $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f=F$.

Temos

$$\operatorname{rot}(F)=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 2xy & x^2+2yz & y^2\end{vmatrix}=(2y-2y)\boldsymbol{i}-(0-0)\boldsymbol{j}+(2x-2x)\boldsymbol{k}=(0,0,0).$$

Como $\operatorname{rot}(F)=\mathbf{0}$, e as derivadas parciais das funções componentes são contínuas, então F é conservativo. Logo, existe uma função f tal que $\nabla f=F$.

A fim de determinarmos f, devemos ter

$$\begin{cases} f_x(x,y,z)=2xy\\ f_y(x,y,z)=x^2+2yz\\ f_z(x,y,z)=y^2\end{cases}$$

Da primeira igualdade, temos

$$\begin{aligned}
&f_x(x,y,z) = 2xy\\
&\Rightarrow f(x,y,z) = x^2y + g(y,z)\\
&\Rightarrow f_y(x,y,z) = x^2 + g_y(y,z).
\end{aligned}$$

Uma vez que $f_y(x,y,z) = x^2 + 2yz$, obtemos

$$\begin{aligned}
&f_y(x,y,z) = x^2 + 2yz\\
&\Rightarrow g_y(y,z) = 2yz\\
&\Rightarrow g(y,z) = y^2z + h(z)\\
&\Rightarrow f(x,y,z) = x^2y + y^2z + h(z)\\
&\Rightarrow f_z(x,y,z) = y^2 + h'(z).
\end{aligned}$$

Mas como $f_z(x,y,z) = y^2$, então

$$\begin{aligned}
&f_z(x,y,z) = y^2\\
&\Rightarrow h'(z) = 0\\
&\Rightarrow h(z) = K\\
&\Rightarrow f(x,y,z) = x^2y + y^2z + K.
\end{aligned}$$