Neemias Martins
neemias.org/ped
neemias@ime.unicamp.br

Aula de Exercícios

Cálculo II - MA211

Derivadas Parciais

Exercício 1. Seja $f(x,y) = 16 - 4x^2 - y^2$. Calcule $f_x(1,2)$ e $f_y(1,2)$ e interprete esses números como inclinações.

Solução:

$$f_x(x,y) = -8x \Rightarrow f_x(1,2) = -8.$$
$$f_y(x,y) = -2x \Rightarrow f_x(1,2) = -4.$$

O gráfico de f é o paraboloide $z = 16 - 4x^2 - y^2$. A interseção do plano $y = 2$ e $\text{gr}(f)$ é dado pela parábola $z = 12 - 4x^2, x = 2$:

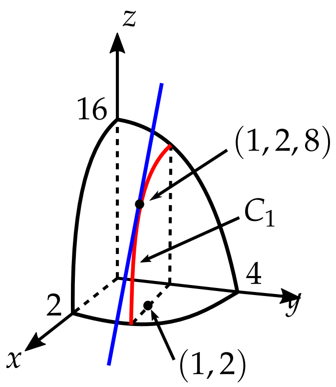
$$C_1(x) = (x, 2, 12 - 4x^2), x \in \mathbb{R}.$$

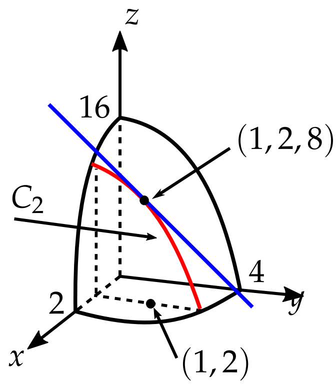
A inclinação da reta tangente à curva C_1 no ponto $(1,2,f(1,2)) = (1,2,8)$ é $f_x(1,2) = -8$.

Analogamente, a intersecção do plano $x = 1$ e $\text{gr}(f)$ é dado pela parábola $z = 12 - y^2, x = 1$:

$$C_2(y) = (1, y, 12 - y^2), y \in \mathbb{R}.$$

A inclinação da reta tangente à curva C_2 no ponto $(1,2,8)$ é $f_y(1,2) = -4$.





Exercício 2. Determine as derivadas parciais de 1ª ordem das funções:

a) $f(x,y,z) = \ln(x + 2y + 3z)$

b) $F(x,y) = \int_y^x \cos(e^t)dt$

Solução: (a)

$$f_x(x,y,z) = \frac{1}{x+2y+3z}, \; f_y(x,y,z) = \frac{2}{x+2y+3z}, \; f_z(x,y,z) = \frac{3}{x+2y+3z}.$$

b)

O Teorema Fundamental do cálculo diz que se uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua então a função $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivável e $g'(x) = f(x)$, ou seja,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Como $f(t) = \cos(e^t)$ é contínua, então pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$F_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_y^x \cos(e^t)dt = \cos(e^x).$$

$$F_y(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}\int_x^y \cos(e^t)dt = -\cos(e^y).$$

Exercício 3. Verifique se $u(t,x) = e^{-\alpha^2 k^2 t}\mathrm{sen}(kx)$ é solução da equação do calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

Solução:

$$\begin{aligned} u_x &= ke^{-\alpha^2k^2t}\cos(kx) \\ u_{xx} &= -k^2e^{-\alpha^2k^2t}\mathrm{sen}(kx) \\ u_t &= -\alpha^2k^2e^{-\alpha^2k^2t}\mathrm{sen}(kx) = \alpha^2 u_{xx}. \end{aligned}$$

Planos tangentes e Aproximações Lineares

Exercício 4. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right); & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determine $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$.
b) Mostre que $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ não são contínuas em $(0,0)$.
c) Prove que f é diferenciável em $(0,0)$.

Solução:(a) Se $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 2x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \\ f_y(x,y) &= 2y\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right). \end{aligned}$$

Se $(x,y) = (0,0)$,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\,\mathrm{sen}(\frac{1}{h^2})}{h} = \lim_{h\to 0} h\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\,\mathrm{sen}(\frac{1}{h^2})}{h} = \lim_{h\to 0} h\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0.$$

Na última igualdade, usamos o fato de que $\mathrm{sen}(\frac{1}{h^2})$ é limitado:

$$-1 \leq -\left|\mathrm{sen}(\frac{1}{h^2})\right| \leq \mathrm{sen}(\frac{1}{h^2}) \leq \left|\mathrm{sen}(\frac{1}{h^2})\right| \leq 1.$$

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Note que sobre a reta $y = x$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f_x(x,x) &= \lim_{x\to 0} 2x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \frac{x}{x^2}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) \text{ não existe!}\end{aligned}$$

pois $\lim_{x\to^+0} -\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) = -\infty$ e $\lim_{x\to^-0} -\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \infty$. Como não existe $\lim_{x\to 0} f_x(x,x)$, não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ e então f_x não é contínua em $(0,0)$. Analogamente, f_y não é contínua em $(0,0)$.

c)

$$f \text{ é diferenciável em } (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ admite derivadas parciais em } (0,0) \\ \text{e } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{r(h,k)}{|(h,k)|} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{r(h,k)}{|(h,k)|} &= \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \frac{(h^2+k^2)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \frac{(h^2+k^2)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right).\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) = 0,$$

segue que f é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 5. Existe alguma função f tal que suas derivadas parciais sejam dadas por $f_x(x,y) = x + 4y$ e $f_y(x,y) = 3x - y$?

Solução: Temos $f_{xy}(x,y) = 4$ e $f_{yx} = 3$. Note que f_{xy} e f_{yx} são funções constantes, logo são contínuas, mas $f_{xy} \neq f_{yx}$. Portanto, pelo Teorema de Clairaut-Schwarz não existe f.

Exercício 6. Determine N_p e uma equação do plano tangente à superfície $z = \sqrt{xy}$ em $p = (1,1,1)$.

Em geral, a equação de T_pS é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Essa equação também pode ser determinada na forma

$$N_p \cdot ((x,y,z) - (x_0,y_0,z_0) = 0)$$

sendo $N_p = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$.

Solução:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}y = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}.$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}x = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $N_p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. E a equação do plano tangente é dada por

$$\begin{aligned} &N_p \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\ &\Rightarrow (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0 \\ &\Rightarrow z - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) \end{aligned}$$

Exercício 7. Determine uma equação de T_pS dado que $p = (2, 1, 3)$ e as curvas

$$\begin{aligned} c_1(t) &= (2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2) \\ c_2(u) &= (1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1) \end{aligned}$$

estão em S.

Como as curvas dadas estão em S, conhecemos pelo menos dois vetores tangentes às S :

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= (3, -2t, -4 + 2t) \\ c_2'(u) &= (2u, 6u^2, 2). \end{aligned}$$

Note que ambas as curvas passam pelo ponto p. Isso ocorre quando $t = 0$ e $u = 1$:

$$c_1(0) = c_2(1) = (2, 1, 3).$$

Logo $c_1'(0) = (3, 0, -4)$ e $c_2'(1) = (2, 6, 2)$ são vetores tangentes à S no ponto $(2, 1, 3)$ e então são ambos paralelos ao plano tangente à S em p.

O vetor normal ao plano tangente é dado por

$$c_1'(0) \times c_2'(1) = (3, 0, -4) \times (2, 6, 2) = (24, -14, 18).$$

A equação do plano tangente é então $N_p \cdot \big((x, y, z) - (2, 1, 3)\big) = 0$, i.e:

$$24(x - 2) - 14(y - 1) + 18(z - 3) = 0.$$

Simplificando,

$$12x - 7y + 9z = 44.$$

✎ Exercício 8. Seja f diferenciável e $f(2, 5) = 6$, $f_x(2, 5) = 1$, $f_y(2, 5) = -1$. Use aproximação linear para estimar $f(2.2, 4.9)$.

Solução:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(2, 5) + f_x(2, 5)(x - 2) + f_y(2, 5)(y - 5) \\ &= 6 + (x - 2) - (y - 5). \\ \Rightarrow f(2.2, 4.9) &\approx 6 + (2.2 - 2) - (4.9 - 5) = 6.3. \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 9. Determine a diferencial da função $f(t,x) = e^{-2x}\cos(2\pi t)$.

SOLUÇÃO: Por definição,

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx.$$

Então, como $\frac{\partial f}{\partial t} = -2\pi e^{-2x}\operatorname{sen}(2\pi t)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = -2e^{-2x}\cos(2\pi t)$, temos

$$df = -2\pi e^{-2x}\operatorname{sen}(2\pi t)dt - 2e^{-2x}\cos(2\pi t)dx.$$