Fundamentos de Matemática Discreta

Curso: Sistemas de Informação

Prof. Neemias Martins

neemias.silva@puc-campinas.edu.br

PUC Campinas

Tipos de Relações

Considere um dado conjunto A. Vamos discutir os tipos de relações que estão definidas em A. (Ou seja, $R \subset A \times A$).

1. Relação Reflexiva

Uma relação R em um conjunto A é *reflexiva* se

$$aRa \text{ para todo } \quad a \in A,$$

isto é, se

$$(a, a) \in R \text{ para todo } a \in A.$$

Ou seja, cada elemento é relacionado consigo mesmo. Portanto, se existe pelo menos um $a \in A$ tal que $(a, a) \notin R$, então R não é reflexiva.

Exemplo

Considere as seguintes relações em um conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quais delas são reflexivas?

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$

$R_4 = \varnothing$

$R_5 = A \times A$.

Exemplo

Considere as seguintes relações em um conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quais delas são reflexivas?

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$

$R_4 = \varnothing$

$R_5 = A \times A$.

Resposta: R_2 e R_5.

(Note que R_4 não é reflexiva porque não contém os elementos (a, a) para todo $a \in A$.)

Tipos de Relações

2. Relação Simétrica

Uma relação R em um conjunto A é *simétrica* se

$$aRb \text{ implica } bRa,$$

isto é, se

$$(a, b) \in R \text{ implica } (b, a) \in R.$$

Ou seja, para cada elemento relacionado a outro, o segundo é relacionado com o primeiro.

Portanto, R não é simétrica se existe $(a, b) \in A$, mas $(b, a) \notin R$.

Exemplo

Considere as seguintes relações em um conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quais delas são simétricas?

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$

$R_4 = \varnothing$

$R_5 = A \times A$.

Exemplo

Considere as seguintes relações em um conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quais delas são simétricas?

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (1,4)\}$

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

$R_3 = \{(1,3), (2,1)\}$

$R_4 = \emptyset$

$R_5 = A \times A$.

Resposta: R_2, R_4 e R_5.

(Para R_4, note que $(a,b) \in R$ implica $(b,a) \in R$. Como (a,b) não está em R, a implicação é verdadeira).

Tipos de relações

3. Relação Antissimétrica

Uma relação R em um conjunto A é *antissimétrica* se aRb e bRa implica $a = b$, isto é,

$$\text{se } (a, b) \in R \ \text{ e } \ (b, a) \in R, \ \text{então} \ \ a = b.$$

Portanto, R não é antissimétrica se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, mas $a \neq b$.

Exemplo

Considere as seguintes relações em um conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quais delas são antissimétricas?

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (1,4)\}$

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

$R_3 = \{(1,3), (2,1)\}$

$R_4 = \varnothing$

$R_5 = A \times A$.

Exemplo

Considere as seguintes relações em um conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quais delas são antissimétricas?

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$

$R_4 = \emptyset$

$R_5 = A \times A$.

Resposta: R_1, R_3 e R_4.

(Para R_4, note que $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$. Como (a, b) e (b, a) não estão em R, a implicação é verdadeira).

Tipos de relações

4. Relação Transitiva

Uma relação R em um conjunto A é *transitiva* se

$$aRb \text{ e } bRc \text{ implica } aRc,$$

isto é,

$$\text{se } (a,b) \text{ e } (b,c) \in R, \text{então } (a,c) \in R.$$

Ou seja, cada elemento relacionado com um segundo, sendo o segundo relacionado com um terceiro, então o primeiro é relacionado com o terceiro.

Portanto, R não é transitiva se existem $a,b,c \in A$ tais que (a,b) e $(b,c) \in R$, mas $(a,c) \notin R$.

Exemplo

Considere as seguintes relações em um conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
Quais delas são transitivas?

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$

$R_4 = \varnothing$

$R_5 = A \times A.$

Exemplo

Considere as seguintes relações em um conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quais delas são transitivas?

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$

$R_4 = \varnothing$

$R_5 = A \times A$.

Resposta: R_1, R_2, R_4 e R_5.

(Para R_4, note que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$. Como (a, b) e (b, a) não estão em R, a implicação é verdadeira).

Exercícios

Verifique se as relações abaixo definidas em A são reflexivas, simétricas e transitivas.

a) $A = \{1, 3, 5\}, R = \{(1, 3), (5, 3), (5, 5), (3, 5)\}$

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, R = \{(1, 3), (3, 3), (2, 4), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}.$

Exercícios

Verifique se as relações abaixo definidas em A são reflexivas, simétricas e transitivas.

a) $A = \{1, 3, 5\}, R = \{(1, 3), (5, 3), (5, 5), (3, 5)\}$

N,N,N

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, R = \{(1, 3), (3, 3), (2, 4), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.
N,N,N

Exercícios

a) Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$, verifique se a relação $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ é reflexiva.

b) Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$, verifique se a relação $R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$ é simétrica.

c) Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$, verifique se a relação $R = \{(a, a), (b, c), (a, c), (c, a), (c, c), (b, a)\}$ é transitiva.

d) Seja $A = \{1, 2, 3\}$, verifique se a relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$ é reflexiva, simétrica, transitiva.

Exercícios

a) Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$, verifique se a relação $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ é reflexiva. **S**

b) Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$, verifique se a relação $R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$ é simétrica. **S**

c) Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$, verifique se a relação $R = \{(a, a), (b, c), (a, c), (c, a), (c, c), (b, a)\}$ é transitiva. **S**

d) Seja $A = \{1, 2, 3\}$, verifique se a relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$ é reflexiva, simétrica, transitiva. **N, N, N**

Exercícios

Considere $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine se as relações a seguir são reflexivas, simétricas, antissimétricas, transitivas.

a) $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

b) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$

Exercícios

Considere $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine se as relações a seguir são reflexivas, simétricas, antissimétricas, transitivas.

a) $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

N, N, N, N

b) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$

S, S, N, S

Exercícios

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e sejam $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$. Determine quais delas são:

a) Reflexivas

b) Simétrica

Exercícios

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e sejam $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$ e $S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$. Determine quais delas são:

a) Reflexivas: R

b) Simétrica: R e S.

Exercícios

Determine se as relações abaixo são reflexivas, simétricas, antissimétricas, transitivas. Justifique suas respostas.

a) $S = \mathbb{N}$, $xRy \leftrightarrow x \cdot y$ é par.

b) $S =$ conjunto das pessoas no Brasil, $xRy \leftrightarrow x$ tem a mesma altura que y.

c) $S =$ conjunto das pessoas no Brasil, $xRy \leftrightarrow x$é irmão de y.

Exercícios

Determine se as relações abaixo são reflexivas, simétricas, antissimétricas, transitivas. Justifique suas respostas.

a) $S = \mathbb{N},\ xRy \leftrightarrow x \cdot y$ é par.

- reflexiva: não pois $(1, 1) \notin R$
- simétrica: sim, pois se xy é par, então yx é par.
- antissimétrica: não, pois $(2, 4), (4, 2) \in R$ e $2 \neq 4$.
- transitiva: não, $(3, 2) \in R$ e $(2, 5) \in R$, mas $(3, 5) \notin R$.

Exercícios

Determine se as relações abaixo são reflexivas, simétricas, antissimétricas, transitivas. Justifique suas respostas.

a) $S = \mathbb{N}$, $xRy \leftrightarrow x \cdot y$ é par.

b) $S =$ conjunto das pessoas no Brasil, $xRy \leftrightarrow x$ tem a mesma altura que y.
   - reflexiva: sim, $(x, x) \in R$ pois é a mesma pessoa xRx.
   - simétrica: sim, pois se x tem a mesma altura que y, a recípocra é verdadeira.
   - antissimétrica: não, pois se x tem a mesma altura que y e y tem a mesma altura que x não significam que x e y são a mesma pessoa.
   - transitiva: sim, se x tem a mesma altura que y que tem a mesma altura que z, então x e z têm a mesma altura.

Exercícios

Determine se as relações abaixo são reflexivas, simétricas, antissimétricas, transitivas. Justifique suas respostas.

a) $S = \mathbb{N},\ xRy \leftrightarrow x \cdot y$ é par.

b) $S =$ conjunto das pessoas no Brasil, $xRy \leftrightarrow x$ tem a mesma altura que y.

c) $S =$ conjunto das pessoas no Brasil, $xRy \leftrightarrow x$é irmão de y.
   - reflexiva: não, $(x, x) \notin R$, pois x não é irmão de si mesmo.
   - simétrica: sim, pois se x é irmão de y, a recípocra é verdadeira.
   - antissimétrica: não, pois se x é irmão de y; e y é irmão de X, não significa que x e y são a mesma pessoa.
   - transitiva: sim, se x é irmão y que é irmão de z, então x e z são irmãos.

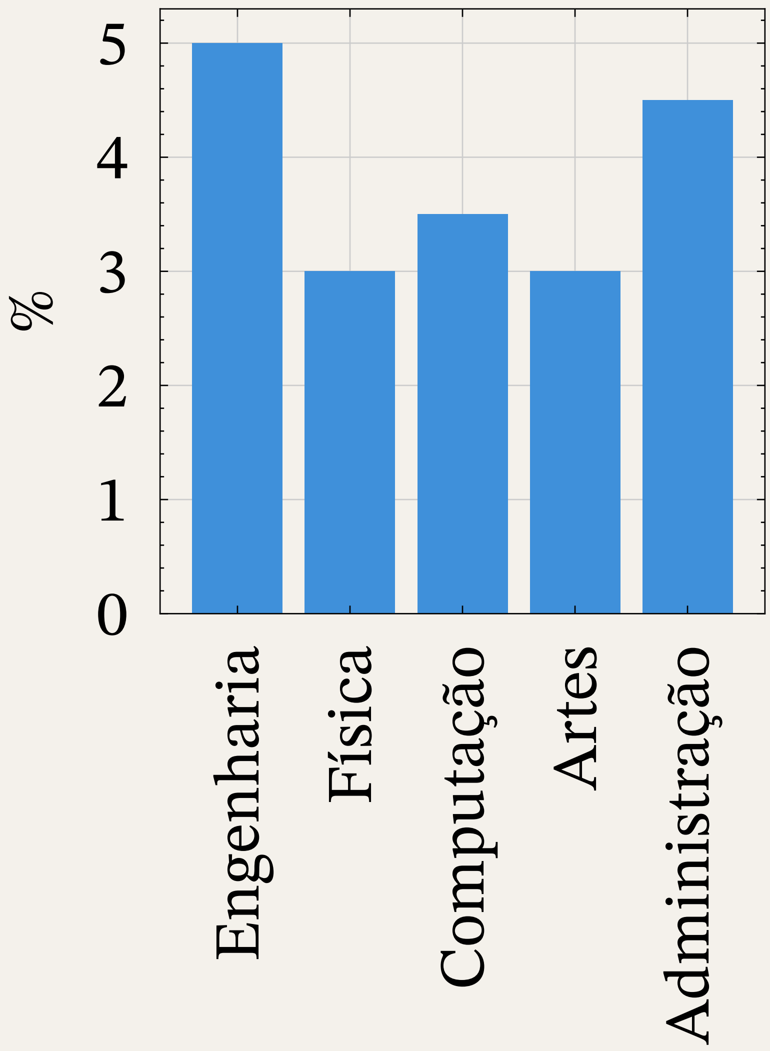
Funções

Funções

Veremos agora as *funções*, que são casos especiais de relações binárias.

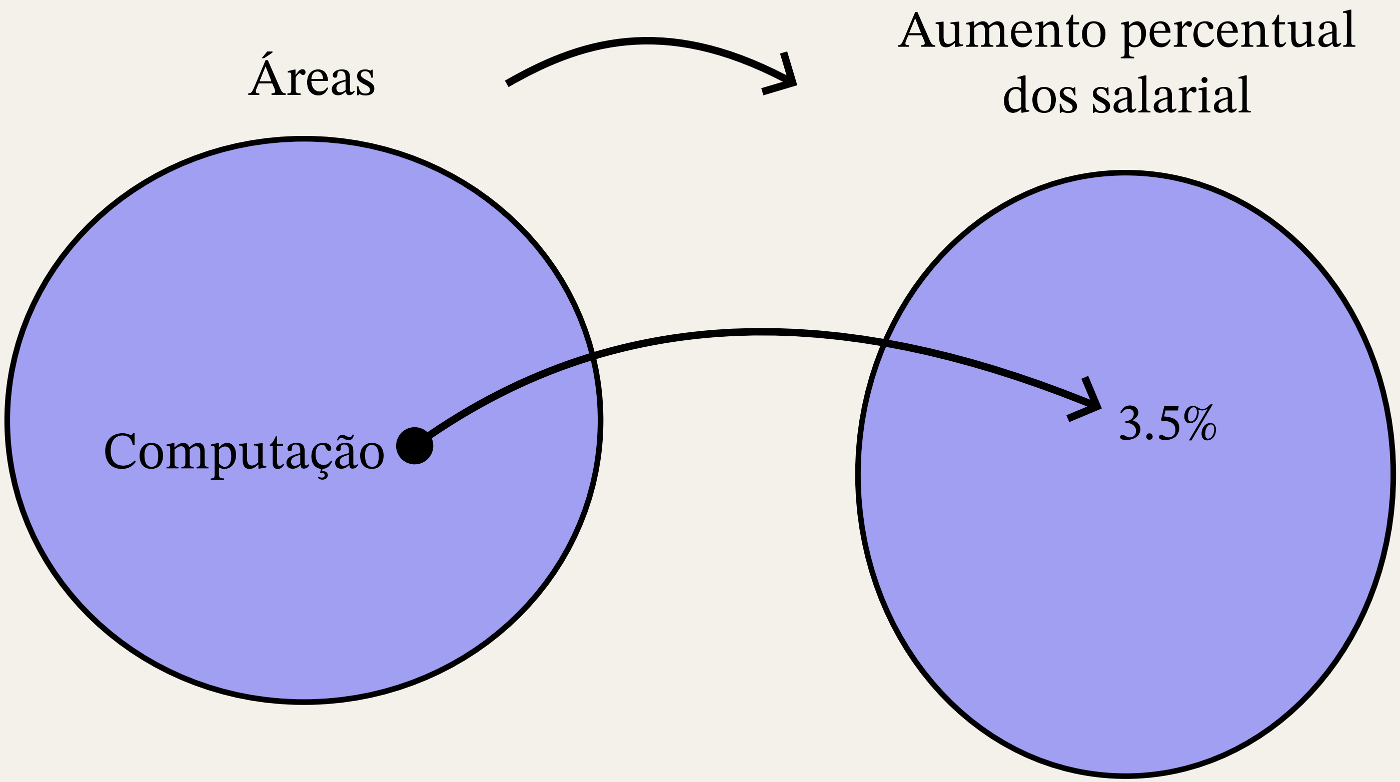
A palavra função é muito comum, mesmo em contextos não técnicos. Um jornal pode ter um artigo sobre o aumento neste ano dos salários iniciais para recém-formados. O artigo poderia dizer algo como "O aumento dos salários varia de acordo com a área de atuação" ou "O aumento dos salários é uma função da área de atuação". O jornal pode ilustrar este relacionamento de função com um gráfico como o mostrado a seguir.

Funções



O gráfico mostra que cada área tem um valor de aumento dos salários associados. Nenhuma área tem mais de um valor associado, mas tanto a Física quanto as Artes têm o mesmo valor, 3%.

Funções



Funções

Naturalmente, também usamos funções matemáticas na álgebra e no cálculo.

A equação $g(x) = x^3$ expressa uma relação funcional entre os valores de x e os valores correspondentes que resultam da substituição, na equação, de x por seus valores.

Portanto, um valor 2 para x tem o valor $2^3 = 8$ associado. Este número é expresso como $g(2) = 8$. Analogamente,

$$g(1) = 1^3 = 1, g(-1) = (-1)^3 = -1,$$

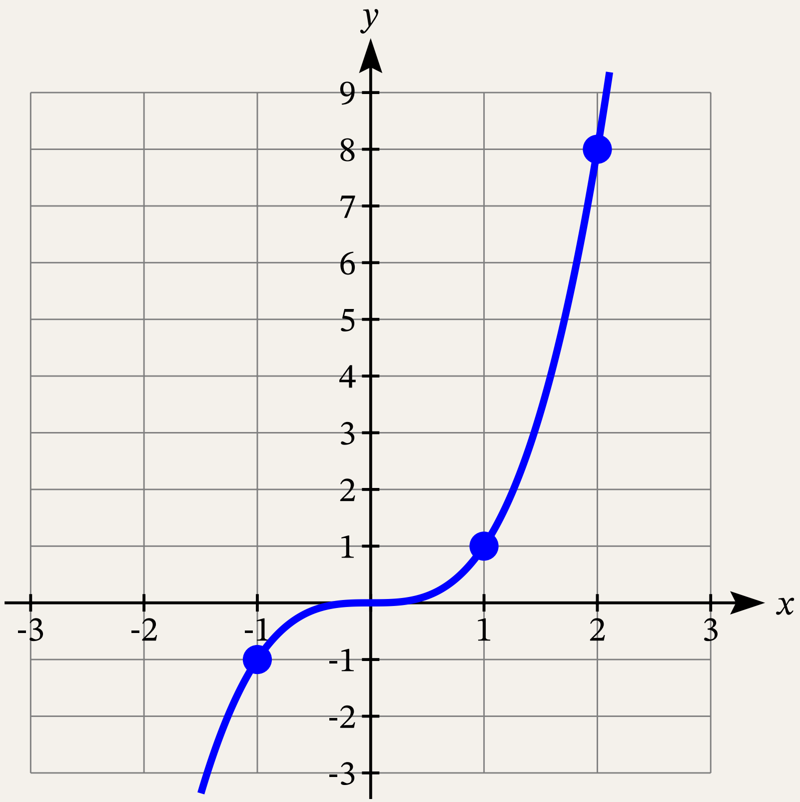
e assim por diante.

Um único valor de $g(x)$ é associado a cada valor de x.

Funções

Se traçarmos esta função em um sistema de coordenadas ortogonal, os pontos $(2,8),(1,1)$ e $(-1,-1)$ seriam pontos do gráfico.

Se fizermos com que x tome quaisquer valores reais, o gráfico resultante será a curva contínua mostrada ao lado.



Bons estudos!