

Aula de Exercícios

📌 Cálculo II - MA211

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

EXERCÍCIO 1. Determine e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

(b) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

(c) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

SOLUÇÃO: (a)

$\sqrt{x + y}$ está definido somente se

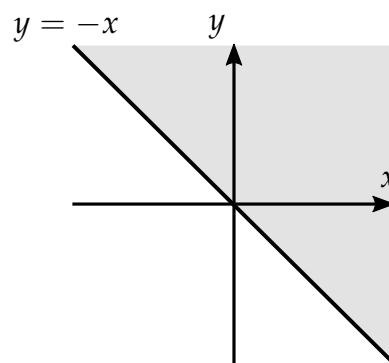
$$x + y \geq 0,$$

i.e

$$y \geq -x.$$

Então

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x\}.$$



(b)

$\ln(9 - x^2 - 9y^2)$ está definida somente quando $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, ou seja, O domínio é o interior de uma elipse:

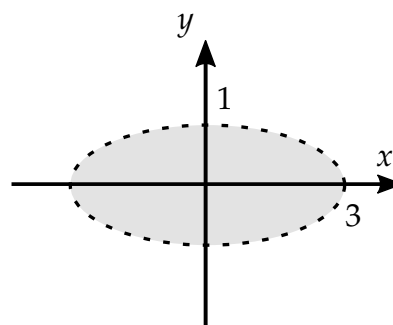
$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + y^2 < 1\}.$$

$$9 - x^2 - 9y^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 9y^2 > -9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9y^2 < 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 < 1.$$

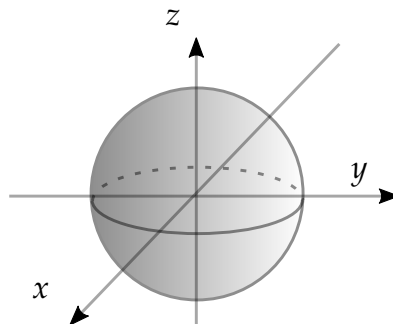


(c)

$\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ é bem definida somente se $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, ou seja, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Portanto o domínio de f é a esfera de raio 1 com centro na origem e todo o seu interior:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$



EXERCÍCIO 2. Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 9 - x^2 - 9y^2$.

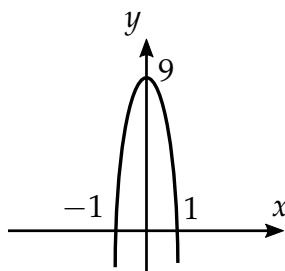
SOLUÇÃO:

$$\text{gr}(f) = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \text{dom}(f) \text{ e } z = f(x, y)\}.$$

Analisamos inicialmente as intersecções de $\text{gr}(f)$ com os planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

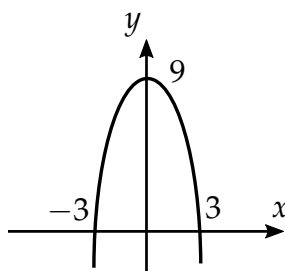
Traço- yz :

$$x = 0 \Rightarrow z = 9 - 9y^2.$$



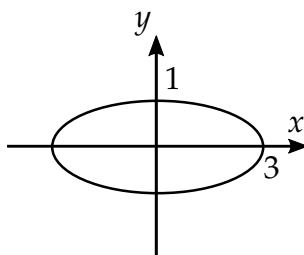
Traço- xz :

$$y = 0 \Rightarrow z = 9 - x^2.$$

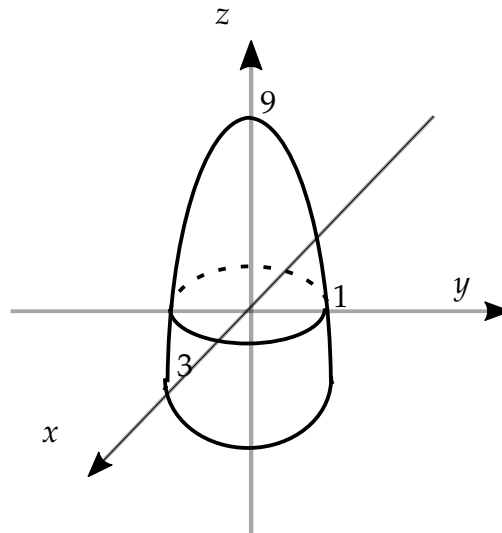


Traço- xy :

$$z = 0 \Rightarrow 9 - x^2 - 9y^2 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 = 1.$$



O gráfico de f é um parabolóide elíptico. Esboço do gráfico:



EXERCÍCIO 3. Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

(a) $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$.

(b) $f(x, y) = (y - 2x)^2$ não foi feito em sala

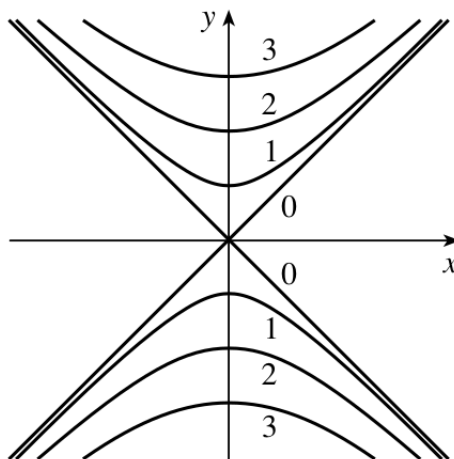
SOLUÇÃO: (a)

Fazemos $\sqrt{y^2 - x^2} = k$, logo $y^2 - x^2 = k^2$, ou seja

$$\text{Se } k = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x$$

$$\text{Se } k \neq 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = k^2 \Rightarrow \frac{-x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1.$$

Se $k = 1$, temos $-x^2 + y^2 = 1$. Se $k = 2$, temos $\frac{-x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$. Se $k = 4$, então $\frac{-x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$.



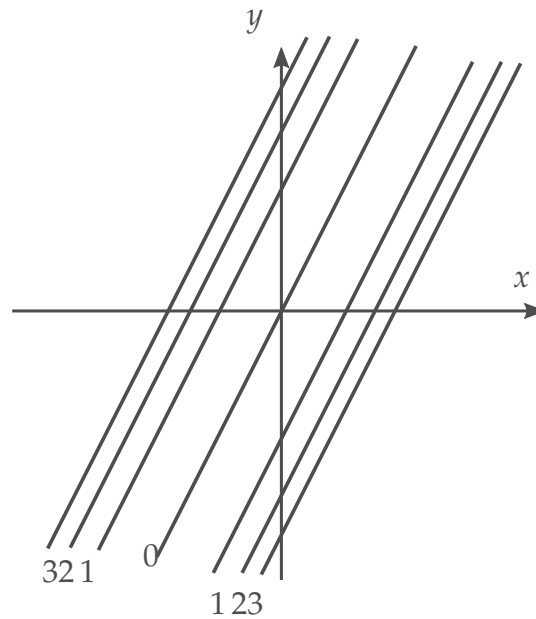
(b) As curvas de nível são da forma $(y - 2x)^2 = k$.

$$(y - 2x)^2 = k$$

$$\Rightarrow y - 2x = \pm \sqrt{k}$$

$$\Rightarrow y = 2x \pm \sqrt{k}.$$

Se $k = 0$, então $y = 2x$. Se $k = 1$, então $y = 2x + 1$ ou $y = 2x - 1$. Se $k = 4$, então $y = 2x + 2$ ou $y = 2x - 2$. Se $k = 25$, então $y = 2x + 5$ ou $y = 2x - 5$.



LIMITES E CONTINUIDADE

EXERCÍCIO 4. Determine o limite, se existir ou mostre que não existe:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2}$$

SOLUÇÃO:

Note que sobre o eixo x , i.e. fazendo $y = 0$ temos $f(x, 0) = 0$. Assim $f(x, y) \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo do eixo x .

Agora, sobre a curva $y = x^2$, temos $f(x, x^2) = \frac{x^4 e^{x^2}}{5x^4}$. Então $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{5}$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ sobre a curva $y = x^2$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 e^{x^2}}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}}{5} = \frac{1}{5}.$$

Como os limites de f ao aproximarmos de $(0, 0)$ pelas curvas $y = 0$ e $y = x^2$ são distintos, segue que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

EXERCÍCIO 5. Determine o maior conjunto em que a função é contínua:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

Quando $(x, y) \neq (0, 0)$, f é uma função racional e portanto contínua. Vejamos se f é contínua em $(x, y) = (0, 0)$.

Note que $0 \leq x^2 \leq 2x^2 \leq 2x^2 + y^2$. Logo,

$$\begin{aligned} x^2 \leq 2x^2 + y^2 &\Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{2x^2 + y^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq \left| \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} \right| \leq |y^3|. \end{aligned}$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y^3| = 0$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0$, segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} = 0.$$

Uma vez que $f(0,0) = 1$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} = 0$, segue que f não é contínua em $(0,0)$.

Portanto o maior conjunto de continuidade de f é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, isto é $\{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$.

EXERCÍCIO 6. Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

SOLUÇÃO 1:

Usaremos coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$, temos $r \rightarrow \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$. Logo,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin \theta$$

Como $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ e $-1 \leq \sin \theta \leq 1$, então $-1 \leq \cos \theta \sin \theta \leq 1$, daí

$$-r \leq r \cos \theta \sin \theta \leq r.$$

Como $\lim_{r \rightarrow 0} -r = \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$, segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin \theta = 0.$$

SOLUÇÃO 2:

É suficiente mostrarmos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = 0$$

ou seja

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Note que $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Então

$$0 \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |y|.$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$, segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

e portanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

 SOLUÇÃO 3: Seja $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Rascunho: Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, queremos encontrar um $\delta > 0$ tal que se $(x, y) \neq (0, 0)$ com

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \text{ i.e. } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta,$$

então

$$|f(x, y) - 0| < \varepsilon \text{ i.e. } \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \varepsilon.$$

Note que $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Então

$$0 \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq |y|.$$

Como $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, então escolhendo $\delta = \varepsilon$, obtemos

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq |y| < \delta = \varepsilon.$$

Resposta: Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$. Suponha que $(x, y) \neq (0, 0)$ e $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$. Então, como $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, e $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, temos

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot |y| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varepsilon.$$