



Dinâmica simbólica e as transformações baker n-por-1


Neemias Martins¹

✉ neemias@ime.unicamp.br

🌐 neemias.org

Orientador: Régis Varão¹

Coorientadora: Pouya Mehdipour²

¹  Universidade Estadual de Campinas

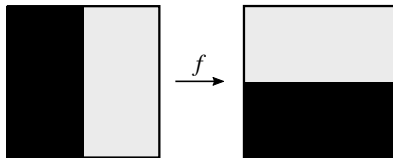
²  Universidade Federal de Viçosa

Baker map

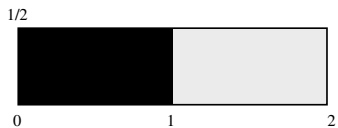
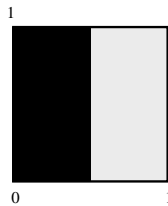
Baker map

O **baker map** é a transformação invertível $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ dada por

$$T(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y); & 0 \leq x < \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1 \\ (2x - 1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

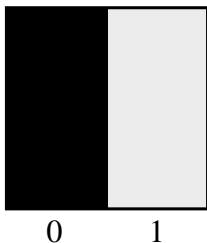


Baker map



Baker map

Considere a partição de $X = [0, 1]^2$ dada pelos retângulos verticais V_0 e V_1 identificados com os símbolos 0 e 1, respectivamente.



Baker map

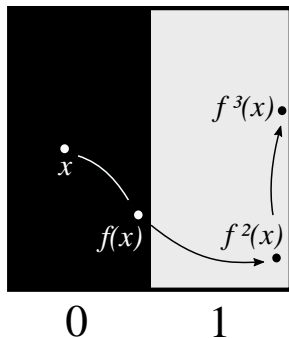
A órbita de um ponto $x \in X$ é a trajetória

$$\{\dots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \dots\}$$

A cada órbita associamos uma sequência bi-infinita de símbolos $(s_n)_n$ de modo que

$$s_n = i \Leftrightarrow f^n(x) \in V_i, \quad i \in \{0, 1\}.$$

Baker map



Se a órbita de x é representada por

$$(\dots \bullet 0011 \dots)$$

então a órbita de $f(x)$ é representada por

$$(\dots 0 \bullet 011 \dots)$$

Shift de Bernoulli

O espaço de sequências de símbolos

Sejam S um *alfabeto* finito e $\Sigma := S^{\mathbb{Z}}$ o conjunto de todas sequências bi-infinitas de símbolos de S :

$$(s_n) = (\cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots) \in \Sigma; \quad s_i \in S \forall i.$$

Os *cilindros* de Σ são subconjuntos da forma:

- $C_i^j := \{(s_n) \in \Sigma \mid s_i = j\}$
- $C_i^{j_i \cdots j_k} := \{(s_n) \in \Sigma \mid s_i = j_i, \dots, s_k = j_k\} = C_i^{j_i} \cap \cdots \cap C_k^{j_k}.$

Espaço de probabilidade

Seja \mathcal{C} a σ -álgebra gerada pelos cilindros. Definimos uma medida em (Σ, \mathcal{C}) considerando uma distribuição de probabilidade $(p_j | j \in S)$ e definindo

- $\mu(C_i^j) := p_j$
- $\mu(C_i^{j_i \dots j_k}) := \mu(C_i^{j_i} \cap \dots \cap C_k^{j_k}) = p_{j_i} \dots p_{j_k}$

de modo a obter um espaço de probabilidade $(\Sigma, \mathcal{C}, \mu)$.

Shift de Bernoulli

O **shift map** ou o **shift de Bernoulli** é a transformação $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que $\sigma((s_n)) = (s_{n+1})$ i.e

$$\sigma(\cdots \cdots s_{-1} \bullet s_0 s_1 \cdots) = (\cdots s_{-1} s_0 \bullet s_1 s_2 \cdots).$$

Uma transformação $f : X \rightarrow X$ em um espaço de Lebesgue (X, \mathcal{B}, m) possui a **propriedade Bernoulli** se é isomorfa (mod 0) a um shift map.

Exemplo: O baker map possui a propriedade Bernoulli.

Zip shift

O espaço estendido de sequências de símbolos

Sejam Z e S dois alfabetos com $\#S \geq \#Z$ e $\varphi : S \rightarrow Z$ um mapa sobrejetivo.

Consideraremos as sequências

$$(\cdots z_{-2}z_{-1} \bullet s_0s_1 \cdots),$$

tais que $z_{-1}, z_{-2}, \dots \in Z$ and $x_0, x_1, \dots \in S$.

O espaço de todas sequências é dado por

$$\Sigma := \prod_{i=-\infty}^{-1} Z \times \prod_{i=0}^{\infty} S.$$

Espaço de probabilidade

Seja \mathcal{C} a σ -álgebra gerada pelos cilindros de Σ . Considere uma distribuição de probabilidade $(p_s | s \in S)$ e obtemos uma distribuição $(p_z | z \in Z)$ definindo

$$p_z = \sum_{s \in \varphi^{-1}(z)} p_s.$$

A medida será dada por

- $\mu(C_i^j) := p_j$; $j \in Z$ se $i \leq -1$ e $j \in S$ se $i \geq 0$
- $\mu(C_i^{j_i \dots j_k}) := \mu(C_i^{j_i} \cap \dots \cap C_k^{j_k}) = p_{j_i} \dots p_{j_k}$.

Zip shift

Denote $m := \#Z$ e $l := \#S$. A transformação $\sigma_\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ dada por

$$\sigma_\varphi(\cdots z_{-2} z_{-1} \bullet s_0 s_1 s_2 \cdots) = (\cdots z_{-2} z_{-1} \varphi(s_0) \bullet s_1 s_2 \cdots)$$

é chamado de **Zip shift map**¹ com (m, l) símbolos.

O par (Σ, σ_φ) é chamado de **espaço Zip shift**.

¹Lamei and Mehdipour, “Zip shift space”.

A propriedade (m, l) Bernoulli

Uma transformação $f : X \rightarrow X$ definida em um espaço de Lebesgue (X, \mathcal{B}, m) é uma transformação (m, l) Bernoulli se é isomorfa a um Zip shift com (m, l) símbolos.

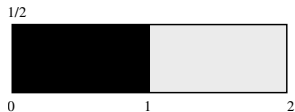
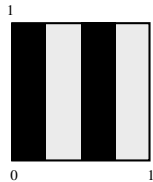
Baker map n-por-1

Baker map 2-por-1

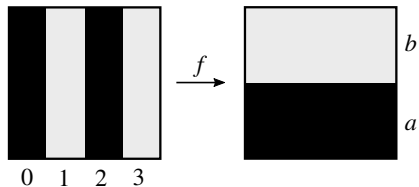
Seja $X = [0, 1]^2$. O baker map 2-por-1 é a transformação $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (4x, \frac{1}{2}y); & 0 \leq x < \frac{1}{4}, 0 \leq y \leq 1 \\ (4x - 1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}); & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1 \\ (4x - 2, \frac{1}{2}y); & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, 0 \leq y \leq 1 \\ (4x - 3, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}); & \frac{3}{4} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Baker 2-por-1



Baker map 2-por-1



O baker map 2-por-1 é do tipo (2,4)-Bernoulli:

$$Z = \{a, b\} \quad S = \{0, 1, 2, 3\},$$

$$\varphi(0) = \varphi(2) = a \quad \varphi(1) = \varphi(3) = b.$$

Baker map n-por-1

O baker map n-por-1 é a transformação descrita por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (2nx, \frac{1}{2}y); & 0 \leq x < \frac{1}{2n}, 0 \leq y \leq 1 \\ (2nx - 1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}); & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{2}{2n}, 0 \leq y \leq 1 \\ (2nx - 2, \frac{1}{2}y); & \frac{2}{2n} \leq x \leq \frac{3}{2n}, 0 \leq y \leq 1 \\ \vdots & \vdots \\ (2nx - (2n - 1), \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}); & \frac{2n-1}{2n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Teorema

O baker map n-por-1 é uma transformação $(2, 2n)$ -Bernoulli.²

²Mehdipour and Martins, “Encoding n-to-1 baker’s transformations”.

Propriedades

- f preserva a medida m

$$m(f^{-1}(A)) = m(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

Propriedades

- f preserva a medida m
- f é ergódico

$$f^{-1}(A) = A \Rightarrow m(A) = 0 \text{ ou } m(A) = 1$$

Propriedades

- f preserva a medida m
- f é ergódico
- f é mixing

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(f^{-n}A \cap B) = m(A)m(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{B}$$

Propriedades

- f preserva a medida m
- f é ergódico
- f é mixing
- f possui comportamento caótico

possui densidade de pontos periódicos e é transitivo

Problema do Isomorfismo

- **Teorema de Ornstein:** Dois shifts de Bernoulli são isomorfos se e somente se possuem a mesma entropia.
- Podemos classificar as transformações (m, l) Bernoulli usando entropia?

Referências



Lamei, S. and P. Mehdipour. **“Zip shift space”**. submitted. 2022.



Mehdipour, P. and N. Martins. **“Encoding n-to-1 baker’s transformations”**. In: *Arch. Math.* 119 (2022), pp. 199–211.

(... obrigado!obrigado! • obrigado!obrigado! ...)