Pesquisa Operacional e Programação Linear

Curso: Elementos de Pesquisa Operacional e de Simulação

Prof. Neemias Martins

neemias.silva@puc-campinas.edu.br

PUC Campinas

Pesquisa Operacional

O que é Pesquisa Operacional

- A Pesquisa Operacional é um método científico de tomada de decisões.
- Surgiu durante as duas guerras mundiais a partir de estudos feitos por equipes interdisciplinares para otimizar operações militares.
- É usada em diversos setores hoje em dia (indústria, logística, finanças, saúde, etc) para otimizar processos; maximizar lucros, eficiência ; minimizar custos, tempo, etc.

Etapas de um estudo em Pesquisa Operacional

1. **Formulação do problema**
   - Definir os objetivos, as limitações técnicas do problema e uma medida de eficiência para o sistema.
2. **Modelagem do sistema**
   - Traduzir o problema em equações e inequações matemáticas.
3. **Cálculo da solução**
   - Resolução do modelo matemático
   - Análise da sensibilidade da solução ótima aos parâmetros iniciais

Etapas de um estudo em Pesquisa Operacional

4. **Validação do modelo**
   - Comparar as soluções obtidas pelo modelo com dados históricos do problema.
   - Se o desvio verificado não for aceitável, o modelo deve ser reformulado ou descartado.
   - Estabelecer controles para os parâmetros do problema de modo a tornar o modelo aceitável.
5. **Implementação e acompanhamento**
   - Descrição dos resultados obtidos em forma de instruções operacionais inteligíveis, evitando o uso da linguagem técnica do modelo.

Programação linear

Programação Linear

- A programação linear é uma das técnicas mais utilizadas na abordagem de problemas em Pesquisa Operacional.
- Vantagens: modelagem de simples entendimento e disponibilidade de técnica de solução programável em computador.
- É muito usado em sistemas estruturados, como os de produção, controle de estoques, finanças, etc.
- O modelo matemático de programação linear é composto por uma função linear que descreve o **objetivo**; e de **restrições técnicas** representadas por inequações lineares.

Exemplo

- **Variáveis controladas** ou variáveis de decisão: x_1 e x_2.
- Função **objetivo**. Queremos maximizar o lucro expresso por

$$2x_1 + 3x_2.$$

- **Restrições**:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 6x_1 - x_2 \geq 20 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problema 1 - Plano de Produção

Certa empresa fabrica dois produtos P_1 e P_2. O lucro unitário do produto P_1 é de R$ 1.000,00 e o lucro unitário de P_2 é de R$ 1.800,00. A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P_1 e de 30 horas para fabricar uma unidade de P_2. O tempo anual de produção disponível para isso é de 1.200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais para P_1 e 30 unidades anuais para P_2. Qual o plano de produção para que a empresa maximize o lucro nesses itens? Construa o modelo de programação linear para esse caso.

Solução

1. **Variáveis de decisão:**

   x_1 é a quantidade anual a produzir de P_1,

   x_2 é a quantidade anual a produzir de P_2.

2. **Objetivo:**

   Maximizar o lucro. O Lucro total é dado por:

   $$L = 1000 \cdot x_1 + 1800 \cdot x_2$$

3. **Restrições:**
   - $x_1, x_2 \geq 0$ (não-negatividade)
   - Disponibilidade de horas para a produção: $1200h$
   - Horas ocupadas com a produção: $20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2$.

Solução

Então $20x_1 + 30x_2 \leq 1200.$

- Demanda dos produtos:

$$x_1 \leq 40$$
$$x_2 \leq 30.$$

Resumo do modelo: maximizar $L = 1000x_1 + 1800x_2$ sujeito a

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \leq 1200 \\ 0 \leq x_1 \leq 40 \\ 0 \leq x_2 \leq 30 \end{cases}$$

Problema 2 - Dieta

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne ovos para se alimentar. Cada unidade de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de carne custa R$3,00 e cada unidade de ovo custa R$2,50. Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível?

Solução

1. **Variáveis de decisão**:

   x_1 : quantidade de carne por dia

   x_2 : quantidade de ovos por dia.

2. **Objetivo:**

   Queremos minimizar o custo $C = 3x_1 + 2,50x_2$.

3. **Restrições:**
   - $x_1, x_2 \geq 0$
   - Necessidade mínima de vitaminas: 32
   - Total de vitaminas: $4x_1 + 8x_2$
   - Restrição: $4x_1 + 8x_2 \geq 32$.

Solução

- Necessidade mínima de proteínas: 36
- Total de proteínas: $6x_1 + 6x_2$
- Restrição: $6x_1 + 6x_2 \geq 36$.

Resumo do modelo. minimizar $C = 3x_1 + 2,5x_2$ sujeito a

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \geq 32 \\ 6x_1 + 6x_2 \geq 36 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problema 3 - Exercício

Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade de couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo-se que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de R$5 e o do cinto é de R$2, pede: o modelo do sistema de produção do sapateiro, se o objetivo é maximizar seu lucro por hora.

Solução

x_1 : número de sapatos / hora

x_2 : número de cintos / hora

max. Lucro $L = 5x_1 + 2x_2$ sujeito a

$$\begin{cases} 10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problema 4 - Produção

Uma empresa após um processo de racionalização de produção, ficou com disponibilidade de 3 recursos produtivos R_1, R_2 e R_3. Um estudo sobre o uso desses recursos indicou a possibilidade de se fabricar 2 produtos: P_1 e P_2. Verificou-se que que P_1 daria um lucro de R$ 120,00 por unidade e P_2 R$ 150,00 por unidade. O departamento de produção forneceu a seguinte tabela de uso de recursos.

Produto	R_1 *por unidade*	R_2 *por unidade*	R_3 *por unidade*
P_1	2	3	5
P_2	4	2	3
Disp. mensal	100	90	120

Defina o modelo que forneça a produção mensal de P_1 e P_2 mais lucrativa.

Solução

1. **Variáveis de decisão.**

   x_i : quantidade de a produzir de P_i, com $i = 1, 2$.

2. **Objetivo.**

   maximizar o lucro: $L = 120x_1 + 150x_2$

3. **Restrições.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 90 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 120 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problema 5 - Transporte

Uma empresa produz bicicletas em três fábricas nas cidades C_1, C_2 *e* C_3*. Sua capacidade de produção é de 1000, 2100 e 1500 bicicletas por mês, respectivamente. Quatro clientes,* A, B, C *e* D*, de quatro locais diferentes estão demandando 800, 1100, 900 e 1300 bicicletas, respectivamente, todo mês.*

A tabela a seguir mostra os custos unitários de transporte de uma bicicleta de uma determinada cidade para um determinado cliente, que pode depender da distância entre eles. Formule um modelo para encontrar o frete de custo mínimo.

	A	B	C	D
C_1	10	8	10	13
C_2	19	6	15	16
C_3	14	8	9	6

Solução

1. **Variáveis de decisão:**

   x_{ij} : número de bicicletas transportadas mensalmente da cidade C_i para o cliente j, com $i = 1, 2, 3$ e $j = A, B, C, D$.

2. **Objetivo:**

   Minimizar os custos de transporte:

$$C = 10x_{1A} + 8x_{1B} + 10x_{1C} + 13x_{1D} + +19x_{2A} + 6x_{2B} + 15x_{2C} + 16x_{2D} + \\ +14x_{3A} + 8x_{3B} + 9x_{3C} + 6x_{3D}.$$

3. **Restrições:**
   - $x_{ij} \geq 0$ para cada $i = 1, 2, 3$ e $j = A, B, C, D$.

Solução

- Capacidade de produção:

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} \leq 1000$$
$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} \leq 2100$$
$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} \leq 1500$$

- Demanda dos clientes:

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \geq 800$$
$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \geq 1100$$
$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \geq 900$$
$$x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} \geq 1300.$$

Bons estudos!