

#5 AULA DE EXERCÍCIOS

NEEMIAS MARTINS

0. Existe uma função f cujas derivadas parciais são $f_x = 1 - y$ e $f_y = 2x + y$?

Note que $f_{xy} = -1$ e $f_{yx} = 2$. Como f_{xy} e f_{yx} são contínuas em todo ponto (pois são constantes), mas $f_{xy} \neq f_{yx}$, segue do Teorema de Schwarz que a função $f(x, y)$ não existe.

1. Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq (0, 0)\}$. Existe uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{x^2 + y^2} ?$$

Calculando as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Observe que em U , as derivadas parciais $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ são funções racionais e, portanto, são contínuas. Agora,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Leftrightarrow \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \Leftrightarrow -2y = 2x \Leftrightarrow y = -x.$$

Então, para pontos (x, y) em U tais que $y \neq -x$, teremos $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$. Por exemplo, $(x, y) = (1, 1)$ é tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Portanto, como $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ são contínuas e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, segue do Teorema de Schwarz que não existe $f(x, y)$.

2. Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

Os pontos críticos de f satisfazem a igualdade:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = (0, 0).$$

Ou seja,

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow x^2 - y = 0 & (1) \\ 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow y^2 - x = 0 & (2) \end{cases}$$

Da Equação (1), temos $y = x^2$. Substituindo na Equação (2), obtemos

$$\begin{aligned}x^4 - x &= 0 \\ \Rightarrow x(x^3 - 1) &= 0 \\ \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.\end{aligned}$$

Se $x = 0$, temos $y = 0$. Se $x = 1$, então $y = 1$. Os pontos críticos são $(0, 0)$ e $(1, 1)$. A fim de classificar os pontos críticos, calculamos as derivadas parciais de segunda ordem e o determinante da matriz Hessiana.

$$\begin{aligned}f_{xx} &= 6x, f_{xy} = f_{yx} = -3, f_{yy} = 6y. \\ D(x, y) &= f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36xy - 9.\end{aligned}$$

Então, pelo Teste da Segunda Derivada:

- (1) Como $D(0, 0) = -9 < 0$, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.
- (2) Como $D(1, 1) = 27 > 0$ e $f_{xx}(1, 1) = 6 > 0$, então $f(1, 1) = 3$ é valor mínimo local, ou seja, f possui um mínimo local em $(1, 1)$.

3. Determine a taxa de variação máxima da função $f(x, y) = x^2 - y^2$ no ponto $(1, 1)$ e a direção em que ocorre.

$\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$. Logo $\nabla f(1, 1) = (2, -2)$. Então a taxa de variação máxima é dada por $|\nabla f(1, 1)| = |(2, -2)| = \sqrt{8}$ e ocorre na direção do vetor gradiente $\nabla f(1, 1) = (2, -2)$.

4. Encontre todos os valores extremos da função $f(x, y) = xy$ sobre a elipse

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

e classifique-os como máximo ou mínimo.

Considere

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2.$$

Note que 8 é valor regular de g , ou seja,

$$\nabla g(x, y) = (2x, 8y) \neq (0, 0) \text{ para todo } (x, y) \text{ que satisfaz } x^2 + 4y^2 = 8.$$

Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, devemos ter

$$\nabla f = \lambda \nabla g \text{ e } g(x, y) = x^2 + 4y^2 = 8.$$

Logo,

$$\begin{cases} y = 2x\lambda & (1) \\ x = 8y\lambda & (2) \\ x^2 + 4y^2 = 8 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), obtemos

$$\begin{aligned}x &= 16x\lambda^2 \\ \Rightarrow 1 &= 16\lambda^2 \\ \Rightarrow \lambda^2 &= \frac{1}{16} \\ \Rightarrow \lambda &= \pm \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Se $\lambda = \frac{1}{4}$, então da Equação (1), temos $y = \frac{x}{2}$. Substituindo na Equação (3), obtemos

$$x^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 8$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 8$$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2.$$

Se $x = 2$, então $y = 1$. Se $x = -2$, então $y = -1$.

Agora, se $\lambda = -\frac{1}{4}$, obtemos $y = -\frac{x}{2}$, e substituindo na Equação (3) obtemos $x = \pm 2$ e assim, se $x = 2$ temos $y = -1$ e quando $x = -2$ temos $y = 1$.

As soluções são então $(2, 1), (-2, -1), (2, -1)$ e $(-2, 1)$. Agora, como $B = \{(x, y) | x^2 + 4y^2 = 8\}$ é compacto (limitado e fechado) e

$$f(2, 1) = f(-2, -1) = 2 > f(-2, 1) = f(2, -1) = -2,$$

então, o valor máximo de f sobre a elipse é 2 e o valor mínimo é -2.