

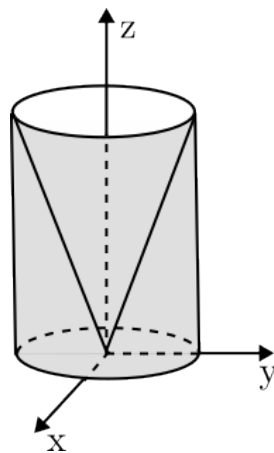
#8 AULA DE EXERCÍCIOS

NEEMIAS MARTINS

1.[Feito na Turma T]. Utilize coordenadas cilíndricas para calcular

$$\iiint_E x^2 dV$$

em que E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.



Usando coordenadas cilíndricas, fazemos

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z.$$

O cilindro e o cone são descritos por

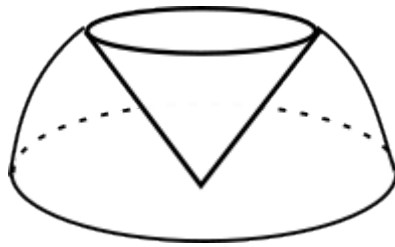
$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1$$

$$z^2 = 4x^2 + 4y^2 \Rightarrow z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0 \Rightarrow z = 2r.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \iiint_E x^2 dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2r} r^2 \cos^2 \theta \cdot r dz dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 [(r^3 \cos \theta) z]_0^{2r} dr d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \cos^2 \theta dr d\theta \\
 &= \frac{2}{5} \int_0^{2\pi} [r^5 \cos \theta]_0^1 d\theta \\
 &= \frac{2}{5} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{2}{5} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
 &= \frac{1}{5} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{5}.
 \end{aligned}$$

2. Calcule o volume do sólido dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano-xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Usaremos coordenadas esféricas:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \theta.$$

Em coordenadas esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ é equivalente a $\rho^2 = 4$ i.e. $\rho = 2$. E o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ é equivalente a $\phi = \frac{\pi}{4}$, pois

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \rho \sin \phi \Rightarrow \cos \phi = \sin \phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Então, $E = \{(\rho, \theta, \phi) | 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_E dV = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho \\
 &= [-\cos \phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\theta \right]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

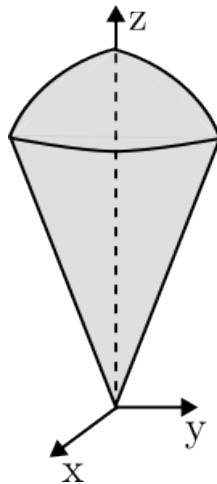
3. Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi.$$

A região de integração está descrita em coordenadas esféricas por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | 0 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}\}.$$

E representa o sólido no primeiro octante limitada superiormente pela esfera de raio 3, i.e $\rho = 3$, e inferiormente pelo cone $\phi = \frac{\pi}{6}$. Esboço:



$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \phi \, d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^3 \rho^2 \, d\rho \\ &= [-\cos \phi]_0^{\frac{\pi}{6}} [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^3 \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 9 \\ &= \frac{9\pi}{2} \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{9\pi}{4} (2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

4. Calcule

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dV,$$

sendo B a bola com centro na origem e raio 5.

Usaremos coordenadas esféricas:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^5 \rho^4 \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\rho^7}{7} \sin \phi \right]_0^5 d\phi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{5^7}{7} \sin \phi d\phi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{5^7}{7} \cos \phi \right]_0^\pi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{5^7}{7} \cdot 2 d\theta \\
 &= \frac{5^7}{7} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{312500\pi}{7}.
 \end{aligned}$$

5. (Feito na Turma 2 / Próxima Aula). Use a transformação $x = 2u + v$, $y = u + 2v$ para calcular

$$\iint_R (x - 3y) dA$$

sendo R a região triangular de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$.

O jacobiano da transformação é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Ainda,

$$x - 3y = (2u + v) - 3(u + 2v) = -u - 5v.$$

Encontraremos as curvas que delimitam a região R :

- $y = ax + b$ passando por $(0,0)$ e $(2,1)$. Como $(0,0)$ está na reta,

$$0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0.$$

Como $(2,1)$ está na reta,

$$1 = 2a + 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Logo $y = \frac{1}{2}x$.

- $y = ax + b$ passando por $(0,0)$ e $(1,2)$. Como $(0,0)$ está na reta, temos $b = 0$. Como $(1,2)$ está na reta,

$$2 = a + 0.$$

Logo $y = 2x$.

- $y = ax + b$ passando por $(1,2)$ e $(2,1)$. Como $(1,2)$ pertence à reta,

$$2 = a + b \Rightarrow b = 2 - a.$$

Como $(2,1)$ pertence à reta,

$$1 = 2a + b \Rightarrow b = 1 - 2a.$$

Daí

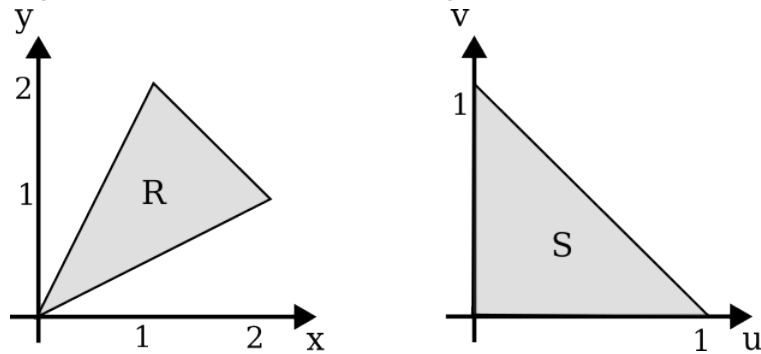
$$2 - a = 1 - 2a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 3.$$

Logo $y = -x + 3$.

Agora procuremos as curvas que delimitam a região S :

- $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow u + 2v = \frac{1}{2}(2u + v) \Rightarrow v = 0$.
- $y = 2x \Rightarrow u + 2v = 4u + 2v \Rightarrow u = 0$.
- $y = -x + 3 \Rightarrow u + 2v = -2u - v + 3 \Rightarrow v = -u + 1$.

Então a região de integração S no plano- uv é o triângulo tal que $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq -u + 1$.



Portanto, pelo Teorema de Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned}
 \iint_R (x - 3y) dA &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-u - 5v) |3| dv du \\
 &= -3 \int_0^1 \int_0^{1-u} (u + 5v) dv du \\
 &= -3 \int_0^1 \left[uv + 5 \frac{v^2}{2} \right]_0^{1-u} du \\
 &= -3 \int_0^1 \left(u - u^2 + \frac{5}{2}(1-u)^2 \right) du \\
 &= -3 \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{5}{2} \left(-\frac{(1-u)^3}{3} \right) \right]_0^1 \\
 &= -3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \right) = -3.
 \end{aligned}$$