UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Prof. Neemias Martins

Prova 1 - MAT 137

08/09/2025 - Turma 2

Nome: ..Gabarito.. Matrícula: ....

1. [35 pontos] Considere a matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) [15 pontos] Calcule $\det A$ usando o Método de Desenvolvimento de Laplace seguindo a linha 1.

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{13} \cdot \Delta_{13} + a_{14} \cdot \Delta_{14} \\
&= 1 \cdot \Delta_{11} + 2 \cdot \Delta_{12} + 0 \cdot \Delta_{13} + 1 \cdot \Delta_{14} \\
&= 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (24 + 1 - 4) - 2 \cdot (12 - 2 - 4) - 1 \cdot (1 - 3 - 4) \\
&= 21 - 12 + 6 \\
&= 15.
\end{aligned}$$

b) [10 pontos] Calcule o determinante da matriz B sabendo que a matriz B é obtida a partir da matriz A através das seguintes operações elementares:

$$L_2 \to L_2 - L_1, \quad L_3 \to 2 \cdot L_3, \quad L_3 \leftrightarrow L_4.$$

As operações acima afetam o determinate do seguinte modo:
- $L_2 \to L_2 - L_1$ não altera o determinante
- $L_3 \to 2 \cdot L_3$ o determinante fica multiplicado por 2.
- $L_3 \leftrightarrow L_4$ o determinante muda de sinal.

Então,

$$\det B = -2 \det A = -2 \cdot 15 = -30.$$

c) [10 pontos] Usando apenas propriedades de determinante, calcule o determinante da matriz C dada a seguir:

$$C = \frac{1}{3} \cdot A^2 \cdot A^{-1} \cdot A^T$$

Temos as seguintes propriedades:
- $\det(k \cdot A_{n \times n}) = k^n \cdot \det A$

- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- $\det A^T = \det A$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\det C &= \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (\det(A))^2 \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \det A \\ &= \frac{1}{81} \cdot (\det A)^2 \\ &= \frac{15^2}{81} = \frac{225}{81} = \frac{75}{27} = \frac{25}{9}.\end{aligned}$$

2. [35 pontos] Considere o sistema linear nas variáveis x, y e z dado por:

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + 3y + az = 3 \\ 2x + 6y - z = b \end{cases}$$

Determine condições sobre a e b de modo que o sistema:

a) [10 pontos] seja possível e determinado, ou seja admita uma única solução.

b) [10 pontos] seja impossível, ou seja, não admita nenhuma solução.

c) [15 pontos] seja possível e indeterminado, ou seja, admita infinitas soluções. Nesse caso, encontre o conjunto solução do sistema.

A matriz ampliada do sistema é

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & a & 3 \\ 2 & 6 & -1 & b \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz ampliada, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & a & 3 \\ 2 & 6 & -1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & 4 \\ 2 & 6 & -1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & 4 \\ 0 & 2 & -1 & b+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & 4 \\ 0 & 0 & -1-2a & b-6 \end{pmatrix}.$$

Denotando P_A o posto da matriz dos coeficientes, $P_{\hat{A}}$ o posto da matriz ampliada, e sendo $n = 3$ o número de colunas da matriz dos coeficientes, temos:

a) Para que o sistema seja possível e determinado, devemos ter $P_A = P_{\hat{A}} = 3$. Portanto, devemos ter $a \neq -\frac{1}{2}$ e $b \in \mathbb{R}$ qualquer, pois:

$$-1 - 2a \neq 0 \Rightarrow 2a \neq -1 \Rightarrow a \neq -\frac{1}{2}.$$

b) Para que o sistema seja impossível, devemos ter $P_A < P_{\hat{A}}$, ou seja, $P_A = 2$ e $P_{\hat{A}} = 3$. Portanto, devemos ter $a = -\frac{1}{2}$ e $b \neq 6$, pois

$$-1 - 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad e \quad b - 6 \neq 0 \Rightarrow b \neq 6.$$

c) Para que o sistema seja possível e determinado, devemos ter $P_A = P_{\hat{A}} < 3$. Portanto, $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 6$:

$$-1 - 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad e \quad b - 6 = 0 \Rightarrow b = 6.$$

O sistema inicial é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y - \frac{1}{2}z = 4 \end{cases}.$$

Logo, $x = -1 - 2y$ e $z = 2y - 8$. Portanto,

$$S = \{(-1 - 2y, y, 2y - 8) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Alternativamente, S é descrito por:

$$S = \left\{\left(x, \frac{-1 - x}{2}, -9 - x\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$S = \left\{\left(-9 - z, 4 + \frac{1}{2}z, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. [30 pontos] Resolva as seguintes questões:

a) [12 pontos] Calcule a inversa da matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em seguida use o Método da Matriz Inversa para resolver o sistema $AX = B$ dado por:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$[A : I] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \to -L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 + 2L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 - L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 + L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = [I : A^-1]$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pelo método da matriz inversa, a solução do sistema $AX = B$ é dado por $X = A^{-1}B$, isto é,

$$X = A^-1 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $S = \{(0, 1, 0)\}$.

b) [10 pontos] Considerando a matriz $A = \left(a_{ij}\right)$ de ordem 3 definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{se } i < j \\ -i & \text{se } i = j \\ i & \text{se } i > j \end{cases}$$

determine a matriz produto dada por AA^T.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 12 & -6 \\ 12 & 33 & -15 \\ -6 & -15 & 27 \end{pmatrix}$$

c) [8 pontos] Se X_1 e X_2 são soluções do sistema $AX = B$, mostre que para qualquer número $\lambda \in \mathbb{R}$, vale que

$$\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$$

também é solução de $AX = B$.

Suponhamos por hipótese que X_1 e X_2 são soluções do sistema

$$AX = B,$$

ou seja,

$$AX_1 = B$$
$$AX_2 = B.$$

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} A \cdot (\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) &= A(\lambda X_1) + A((1 - \lambda)X_2) \\ &= \lambda AX_1 + (1 - \lambda)AX_2 \\ &= \lambda AX_1 + AX_2 - \lambda AX_2 \\ &= \lambda B + B - \lambda B \\ &= B. \end{aligned}$$

Portanto, $\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$ também é solução do sistema.