Probabilidade Condicional

Curso: Estatística e Probabilidade

Prof. Neemias Martins

PUC Campinas

neemias.silva@puc-campinas.edu.br

Probabilidade Condicional

Sejam A e B dois eventos com $P(B) \neq 0$.

A *probabilidade condicional* de A dado B é

$$P(A \mid B) \coloneqq \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemplo 1

Em um lançamento de dados justos, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$.

Então $A \cap B = \{1, 3\}$, $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6}$ e $P(A \cap B) = \frac{2}{6}$.

Suponha que se sabe que o primeiro número lançado seja ímpar. O novo espaço amostral é $\{1, 3, 5\} = B$.

Sabendo-se que o número lançado é impar, qual a probabilidade de ele ser menor do que 4?

Exemplo 1

A probabilidade condicional do evento A dado que o evento B ocorreu, neste caso, é a probabilidade de saírem os números 1 ou 3 sabendo que o número é 1,2 ou 3. Ou seja, $P(A \mid B) = \frac{2}{3}$.

Usando a expressão da probabilidade condicional, de fato obtemos

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}.$$

Exemplo 2

A tabela a seguir fornece a distribuição de uso de redes sociais por grupos geracionais em um grupo de 1000 pessoas.

	X	Millennials	Z	Alpha	**Total**
Facebook	100	30	15	5	*160*
Linkedin	60	40	20	5	*125*
Twitter	50	70	50	10	*180*
Instagram	20	100	80	50	*250*
TikTok	5	60	100	120	*285*
Total	*235*	*300*	*265*	*190*	*1000*

Exemplo 2

a) Qual a probabilidade de se escolher ao acaso alguém que use o Linkedin?

b) Escolhendo-se alguém da Geração Millennials ao acaso, qual a probabilidade de ele usar o Tiktok?

c) Escolhendo-se alguém que usa o Instagram ao acaso, qual a probabilidade de ele ser da geração Alpha?

Exemplo 2

a) $P(\text{Linkedin}) = \frac{125}{1000} = 0.125 = 12.5\%$

b) $P(\text{Tiktok}|\text{Millennials}) = \frac{60}{300} = 0.2 = 20\%$

c) $P(\text{Alpha }|\text{Instagram}) = \frac{50}{250} = 0.2 = 20\%$

Regra da Multiplicação

Como $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, então

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A).$$

Exemplo 3

Uma urna contém 3 bolas brancas e 7 bolas vermelhas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade de ambas serem vermelhas.

Exemplo 3

$$A := \{\text{a primeira bola é vermelha}\}$$
$$B := \{\text{a segunda bola é vermelha}\}.$$

Após retirar uma bola vermelha, sobram 6 bolas vermelhas na urna e 9 bolas no total. Logo, a probabilidade da segunda bola ser vermelha é $P(B \mid A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Então, a probabilidade das duas primeiras bolas serem vermelhas é

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B \mid A) \cdot P(A) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{14}{30} = 0.4666 = 46.67\% \end{aligned}$$

Eventos independentes

Dois eventos (de probabilidades não nulas) A e B são ditos *independentes* se o conhecimento de um deles não afeta a probabilidade do outro ocorrer, isto é, se

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Note que dois eventos são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B).$$

Exemplo 4

Uma moeda honesta é lançada e, simultaneamente, um dado honesto de 6 faces é jogado. Qual é a probabilidade de sair cara na moeda e um número par no dado?

Exemplo 4

$\mathbb{K} := \{\text{A face da moeda é cara}\}$

$\mathbb{P} := \{\text{O número obtido no dado é par}\} = \{2, 4, 6\}.$

Os dois eventos são independentes, então

$$P(\mathbb{K} \cap \mathbb{P}) = P(\mathbb{K}) \cdot P(\mathbb{P}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Bons estudos!