

Aula de Exercícios

📌 Cálculo II - MA211

INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS ESFÉRICAS

EXERCÍCIO 1. Calcule

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 dV,$$

sendo B a bola com centro na origem e raio 5.

SOLUÇÃO: Usaremos coordenadas esféricas:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$$

$$z = \rho \cos \theta.$$

Então,

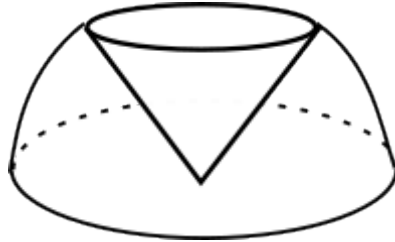
$$\begin{aligned} \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^5 \rho^4 \cdot \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\rho^7}{7} \operatorname{sen} \phi \right]_0^5 d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{5^7}{7} \operatorname{sen} \phi \, d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{5^7}{7} \cos \phi \right]_0^\pi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{5^7}{7} \cdot 2 d\theta \\ &= \frac{5^7}{7} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{312500\pi}{7}. \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 2. Calcule o volume do sólido:

- (a) dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano-xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
 (b) dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano-xy e acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

SOLUÇÃO:

(a)



Usaremos coordenadas esféricas:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \theta.$$

Em coordenadas esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ é equivalente a $\rho^2 = 4$ i.e $\rho = 2$. E o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ é equivalente a $\phi = \frac{\pi}{4}$, pois

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \rho \sin \phi \Rightarrow \cos \phi = \sin \phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Então, $E = \{(\rho, \theta, \phi) | 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \int \int \int_E dV = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho \\ &= [-\cos \phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}. \end{aligned}$$

(b) Neste caso temos

$$\begin{aligned} V &= \int \int \int_E dV = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho \\ &= [-\cos \phi]_0^{\frac{\pi}{4}} [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \cdot 2\pi \cdot \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

MUDANÇAS DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS MÚLTIPLAS

EXERCÍCIO 3. Use a transformação $x = 2u + v$, $y = u + 2v$ para calcular

$$\iint_R (x - 3y) dA$$

sendo R a região triangular de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$.

Extra: Mostre que a transformação é injetiva.

SOLUÇÃO: O jacobiano da transformação é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Ainda,

$$x - 3y = (2u + v) - 3u + 2v = -u - 5v.$$

Encontraremos as curvas que delimitam a região R :

- $y = ax + b$ passando por $(0,0)$ e $(2,1)$. Como $(0,0)$ está na reta,

$$0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0.$$

Como $(2,1)$ está na reta,

$$1 = 2a + 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Logo $y = \frac{1}{2}x$.

- $y = ax + b$ passando por $(0,0)$ e $(1,2)$. Como $(0,0)$ está na reta, temos $b = 0$. Como $(1,2)$ está na reta,

$$2 = a + 0.$$

Logo $y = 2x$.

- $y = ax + b$ passando por $(1,2)$ e $(2,1)$. Como $(1,2)$ pertence à reta,

$$2 = a + b \Rightarrow b = 2 - a.$$

Como $(2,1)$ pertence à reta,

$$1 = 2a + b \Rightarrow b = 1 - 2a.$$

Daí

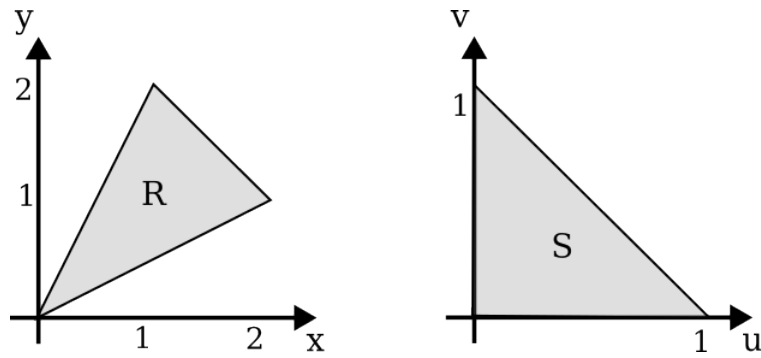
$$2 - a = 1 - 2a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 3.$$

Logo $y = -x + 3$.

Agora procuremos as curvas que delimitam a região S :

- $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow u + 2v = \frac{1}{2}(2u + v) \Rightarrow v = 0.$
- $y = 2x \Rightarrow u + 2v = 4u + 2v \Rightarrow u = 0.$
- $y = -x + 3 \Rightarrow u + 2v = -2u - v + 3 \Rightarrow v = -u + 1.$

Então a região de integração S no plano- uv é o triângulo tal que $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq -u + 1$.



Portanto, pelo Teorema de Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned}
 \int \int_R (x - 3y) dA &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-u - 5v) |3| dv du \\
 &= -3 \int_0^1 \int_0^{1-u} (u + 5v) dv du \\
 &= -3 \int_0^1 \left[uv + 5\frac{v^2}{2} \right]_0^{1-u} du \\
 &= -3 \int_0^1 \left(u - u^2 + \frac{5}{2}(1-u)^2 \right) du \\
 &= -3 \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{5}{2} \left(-\frac{(1-u)^3}{3} \right) \right]_0^1 \\
 &= -3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \right) = -3.
 \end{aligned}$$

Extra: A transformação é injetiva. De fato, temos $T(u, v) = (x, y)$ sendo $x = 2u + v$ e $y = u + 2v$. Suponha que $T(u_1, v_1) = T(u_2, v_2)$, então

$$\begin{cases} 2u_1 + v_1 = 2u_2 + v_2 \\ u_1 + 2v_1 = u_2 + 2v_2 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por (-2) e somando com a primeira obtemos

$$\begin{aligned}
 v_1 - 4v_1 &= v_2 - 4v_2 \\
 \Rightarrow -3v_1 &= -3v_2 \\
 \Rightarrow v_1 &= v_2.
 \end{aligned}$$

Substituindo $v_1 = v_2$ em qualquer uma das duas equações, obtem-se $u_1 = u_2$. Como $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$, a transformação é injetiva.

EXERCÍCIO 4. Calcule o volume do sólido limitado pelo elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

SOLUÇÃO: Usaremos a transformação

$$x = au, y = bv, z = cw.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{a^2 u^2}{a^2} + \frac{b^2 v^2}{b^2} + \frac{c^2 w^2}{c^2} &= 1 \\ \Rightarrow u^2 + v^2 + w^2 &= 1. \end{aligned}$$

O jacobiano da transformação é dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = abc.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_E dV = \iint_B |abc| dV(u, v, w) \\ &= abc \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin\phi \, d\phi d\theta d\rho \\ &= \dots \text{ calcule} \\ &= abc \cdot \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 5. Calcule

$$\iint_B \frac{\cos(x-y)}{\sin(x+y)} dx dy$$

sendo B o trapézio dado por

$$1 \leq x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0.$$

Façamos a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y. \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtemos

$$x = \frac{1}{2}(u+v).$$

Multiplicando a segunda equação por (-1)

$$\begin{cases} u = x - y \\ -v = -x - y \end{cases}$$

e somando as duas obtemos

$$y = \frac{1}{2}(v-u).$$

Calculando o jacobiano,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Vejamos a ação da transformação no trapézio B :

- $y = 1 - x$:

$$\frac{1}{2}(v-u) = 1 - \frac{1}{2}(u+v) \Rightarrow v = 1.$$

- $y = 2 - x$:

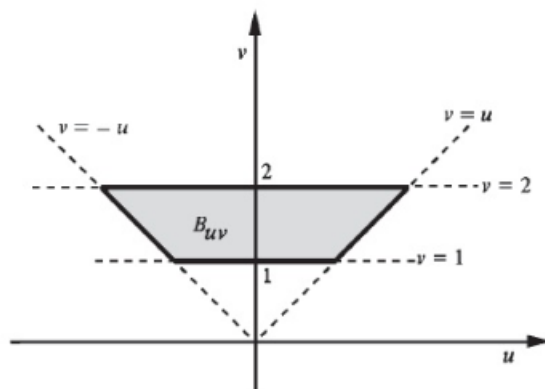
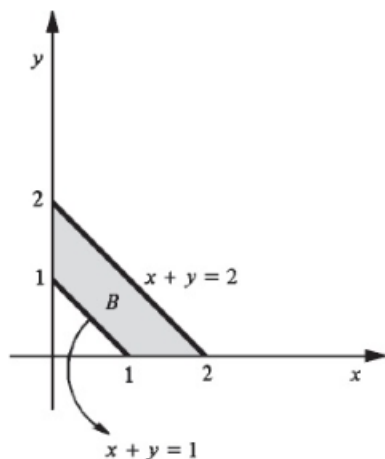
$$\frac{1}{2}(v-u) = 2 - \frac{1}{2}(u+v) \Rightarrow v = 2.$$

- $y = 0$:

$$\frac{1}{2}(v-u) = 0 \Rightarrow v = u$$

- $x = 0$:

$$\frac{1}{2}(u+v) = 0 \Rightarrow v = -u.$$



Portanto,

$$\begin{aligned}
 \iint_B \frac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)} dx dy &= \iint_{B_{uv}} \frac{\cos(u)}{\operatorname{sen}(v)} \cdot \frac{1}{2} du dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-v}^v \frac{\cos(u)}{\operatorname{sen}(v)} du dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left. \frac{\operatorname{senu}}{\operatorname{sen} v} \right|_{-v}^v dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^2 2 dv = 1.
 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS EXTRAS

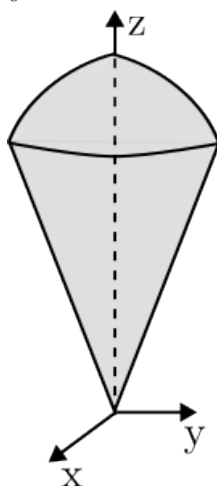
 EXERCÍCIO 6. Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi.$$


SOLUÇÃO: A região de integração está descrita em coordenadas esféricas por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}\}.$$

E representa o sólido no primeiro octante limitada superiormente pela esfera de raio 3, i.e $\rho = 3$, e inferiormente pelo cone $\phi = \frac{\pi}{6}$. Esboço:



$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^3 \rho^2 \, d\rho \\ &= [-\cos \phi]_0^{\frac{\pi}{6}} [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^3 \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 9 \\ &= \frac{9\pi}{2} \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{9\pi}{4} (2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

 EXERCÍCIO 7. Calcule $\int \int \int_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV$ em que E é delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no primeiro octante.

SOLUÇÃO: Usaremos coordenadas esféricas. Temos

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi \leq 3\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \int \int_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 e^{\rho} \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \int_0^3 e^{\rho} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} [-\cos \phi]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 e^{\rho} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^3 e^{\rho} \rho^2 d\rho \end{aligned}$$

Via integração por partes, tomando $u = \rho^2$ e $dv = e^{\rho} d\rho$, temos

$$\int e^{\rho} \rho^2 d\rho = uv - \int v du = \rho e^{\rho} - 2 \int e^{\rho} \rho d\rho$$

Novamente por partes, $\tilde{u} = \rho$ e $d\tilde{v} = e^{\rho} d\rho$, obtemos

$$\int e^{\rho} \rho d\rho = \tilde{u}\tilde{v} - \int \tilde{v} d\tilde{u} = \rho e^{\rho} - \int e^{\rho} d\rho = \rho e^{\rho} - e^{\rho} + c.$$

Então,

$$\int e^{\rho} \rho^2 d\rho = \rho e^{\rho} - 2(\rho e^{\rho} - e^{\rho}) + c = \rho e^{\rho} - 2\rho e^{\rho} + 2e^{\rho} + c = e^{\rho}(\rho^2 - 2\rho + 2) + c.$$

Voltando à nossa integral inicial, obtemos

$$\begin{aligned} \int \int \int_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV &= \frac{\pi}{2} \int_0^3 e^{\rho} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\rho}(\rho^2 - 2\rho + 2) \Big|_0^3 \\ &= \frac{\pi}{2} (e^3(9 - 6 + 2) - 2) = \frac{\pi}{2} (5e^3 - 2). \end{aligned}$$