## Aula de Exercícios

Cálculo II - MA211

## Funções de várias variáveis

Exercício 1. Determine e esboce o domínio das funções:

(a) 
$$f(x,y) = \sqrt{x+y}$$

(b) 
$$f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$$

(b) 
$$f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$$
  
(c)  $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ 

Solução: (a)

 $\sqrt{x+y}$  está definido somente se

$$x + y \ge 0$$
,

i.e

$$y \ge -x$$
.

Então

$$dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \ge -x \}.$$

(b)

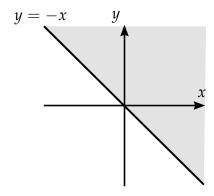
 $\ln (9 - x^2 - 9y^2)$  está definida somente O domínio é o interior de uma elipse: quando  $9 - x^2 - 9y^2 > 0$ , ou seja,  $dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{9} + y^2 < 1\}.$ 

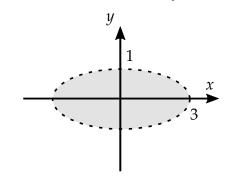
$$9 - x^{2} - 9y^{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow -x^{2} - 9y^{2} > -9$$

$$\Leftrightarrow x^{2} + 9y^{2} < 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{2}}{9} + y^{2} < 1.$$



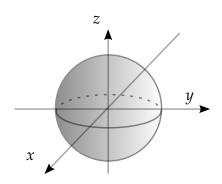


(c)

$$\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$$
 é bem definida somente se  $1-x^2-y^2-z^2\geq 0$ , ou seja,  $x^2+y^2+z^2\leq 1$ .

Portanto o domínio de f é a esfera de raio 1 com centro na origem e todo o seu interior:

$$dom(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}.$$



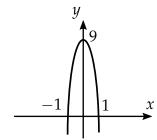
Exercício 2. Esboce o gráfico da função  $f(x,y) = 9 - x^2 - 9y^2$ .

Solução:

$$gr(f) = \{(x,y,z) | (x,y) \in dom(f) \text{ e } z = f(x,y)\}.$$

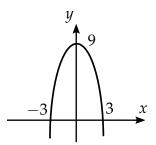
Analisamos inicialmente as intersecções de gr(f) com os planos x=0, y=0 e z=0. Traço-yz:

$$x = 0 \Rightarrow z = 9 - 9y^2.$$



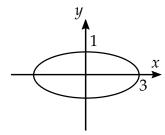
Traço-xz:

$$y = 0 \Rightarrow z = 9 - x^2.$$

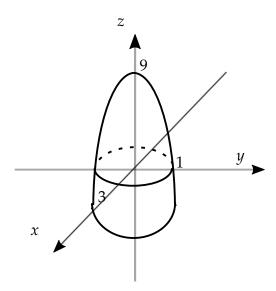


Traço-xy:

$$z = 0 \Rightarrow 9 - x^2 - 9y^2 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 = 1.$$



O gráfico de f é um paraboloide elíptico. Esboço do gráfico:



Exercício 3. Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

(a) 
$$f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$$
.

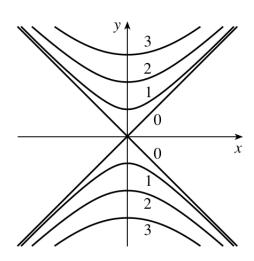
(a) 
$$f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$$
.  
(b)  $f(x,y) = (y - 2x)^2$  Inão foi feito em sala

Solução: (a) Fazemos 
$$\sqrt{y^2 - x^2} = k$$
, logo  $y^2 - x^2 = k^2$ , ou seja

Se 
$$k = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x$$

Se 
$$k \neq 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = k^2 \Rightarrow \frac{-x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$
.

Se k = 1, temos  $-x^2 + y^2 = 1$ . Se k = 2, temos  $\frac{-x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Se k = 4, então  $\frac{-x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1.$ 



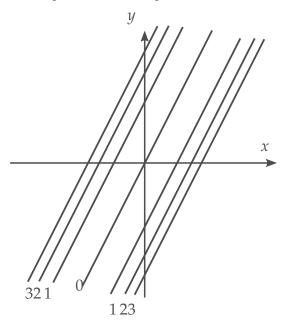
(b) **C** As curvas de nível são da forma  $(y - 2x)^2 = k$ .

$$(y - 2x)^2 = k$$

$$\Rightarrow y - 2x = \pm \sqrt{k}$$

$$\Rightarrow y = 2x \pm \sqrt{k}.$$

Se k = 0, então y = 2x. Se k = 1, então y = 2x + 1 ou y = 2x - 1. Se k = 4, então y = 2x + 2 ou y = 2x - 2. Se k = 25, então y = 2x + 5 ou y = 2x - 5.



LIMITES E CONTINUIDADE

Exercício 4. Determine o limite, se existir ou mostre que não existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2}$$

Solução:

Note que sobre o eixo x, i.e. fazendo y=0 temos f(x,0)=0. Assim  $f(x,y)\to 0$  quando  $(x,y)\to (0,0)$  ao longo do eixo x.

Agora, sobre a curva  $y=x^2$ , temos  $f(x,x^2)=\frac{x^4e^{x^2}}{5x^4}$ . Então  $f(x,y)\to \frac{1}{5}$  quando  $(x,y)\to (0,0)$  sobre a curva  $y=x^2$ , pois

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 e^{x^2}}{5x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}}{5} = \frac{1}{5}.$$

Como os limites de f ao aproximarmos de (0,0) pelas curvas y=0 e  $y=x^2$  são distintos, segue que não existe  $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ .

Exercício 5. Determine o maior conjunto em que a função é contínua:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solução:

Quando  $(x,y) \neq (0,0)$ , f é uma função racional e portanto contínua. Vejamos se f é contínua em (x,y)=(0,0).

Note que  $0 \le x^2 \le 2x^2 \le 2x^2 + y^2$ . Logo,

$$x^{2} \le 2x^{2} + y^{2} \Rightarrow 0 \le \frac{x^{2}}{2x^{2} + y^{2}} \le 1$$
  
 $\Rightarrow 0 \le \left| \frac{x^{2}y^{3}}{2x^{2} + y^{2}} \right| \le |y^{3}|.$ 

Como  $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y^3|=0$  e  $\lim_{(x,y)\to(0,0)}0=0$ , segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}=0.$$

Uma vez que f(0,0)=1 e  $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}=0$ , segue que f não é contínua em (0,0).

Portanto o maior conjunto de continuidade de  $f \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , isto é  $\{(x,y)|(x,y) \neq (0,0)\}$ .

Exercício 6. Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

## Solução 1:

Usaremos coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Quando  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , temos  $r \rightarrow \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ . Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r}=\lim_{r\to 0}r\cos\theta\sin\theta$$

Como  $-1 \le \cos \theta \le 1$  e  $-1 \le \sin \theta \le 1$ , então  $-1 \le \cos \theta \sin \theta \le 1$ , daí  $-r < r \cos \theta \sin \theta < r$ .

Como  $\lim_{r\to 0} -r = \lim_{r\to 0} r = 0$ , segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0}r\cos\theta\sin\theta=0.$$

## Solução 2:

É suficiente mostrarmos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = 0$$

ou seja

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

Note que  $|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2 + y^2}$ . Então

$$0 \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le 1$$
$$\Rightarrow 0 \le \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le |y|.$$

Como  $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0$ , segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

e portanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

Solução 3: Seja  $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .

**Rascunho:** Dado  $\varepsilon > 0$  qualquer, queremos encontrar um  $\delta > 0$  tal que se  $(x,y) \neq (0,0)$  com

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \text{ i.e. } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta,$$

então

$$|f(x,y) - 0| < \varepsilon \text{ i.e. } \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \le \varepsilon.$$

Note que  $|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2 + y^2}$ . Então

$$0 \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le 1$$

$$\Rightarrow 0 \le \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \le |y|.$$

Como  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ , então escolhendo  $\delta = \varepsilon$ , obtemos

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le |y| < \delta = \varepsilon.$$

**Resposta:** Dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta = \varepsilon$ . Suponha que  $(x,y) \neq (0,0)$  e  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$ . Então, como  $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ , e  $y \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ , temos

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot |y| \le |y| \le \sqrt{x^2 + y^2} \le \varepsilon.$$