Dinâmica simbólica
e as transformações baker n-por-1

Neemias Martins[1]
neemias@ime.unicamp.br
neemias.org

Orientador: Régis Varão[1]
Coorientadora: Pouya Mehdipour[2]

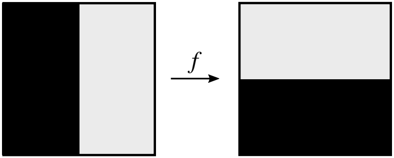
[1] Universidade Estadual de Campinas
[2] Universidade Federal de Viçosa

Baker map

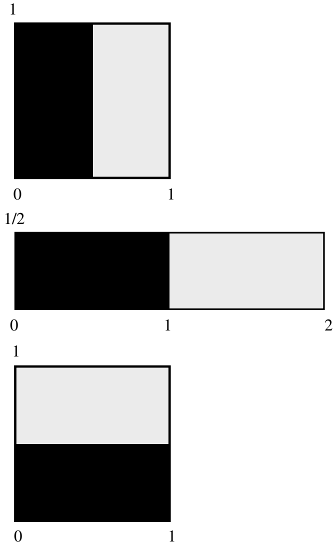
Baker map

O baker map é a transformação invertível $T : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ dada por

$$T(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y); & 0 \le x < \frac{1}{2},\ 0 \le y \le 1 \\ (2x-1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

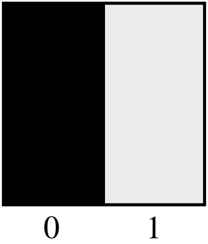


Baker map



Baker map

Considere a partição de $X = [0,1]^2$ dada pelos retângulos verticais V_0 e V_1 identificados com os símbolos 0 e 1, respectivamente.



Baker map

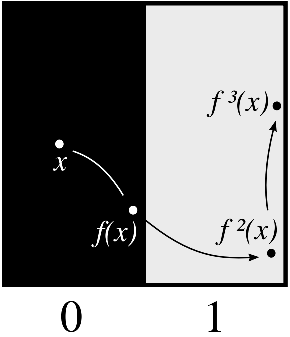
A órbita de um ponto $x \in X$ é a trajetória

$$\{\cdots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^{2}(x), \cdots\}$$

A cada órbita associamos uma sequência bi-infinita de símbolos $(s_n)_n$ de modo que

$$s_n = i \Leftrightarrow f^{n}(x) \in V_i, \quad i \in \{0, 1\}.$$

Baker map



Se a órbita de x é representada por

$$(\cdots \bullet\ 0011 \cdots)$$

então a órbita de $f(x)$ é representada por

$$(\cdots 0\ \bullet\ 011 \cdots)$$

Shift de Bernoulli

O espaço de sequências de símbolos

Sejam S um *alfabeto* finito e $\Sigma := S^{\mathbb{Z}}$ o conjunto de todas sequências bi-infinitas de símbolos de S :

$$(s_n) = (\cdots s_{-1} \bullet s_0 s_1 \cdots) \in \Sigma; \quad s_i \in S \, \forall i.$$

Os *cilindros* de Σ são subconjuntos da forma:

- $C_i^j := \{(s_n) \in \Sigma \mid s_i = j\}$
- $C_{i \, \dots \, k}^{j_i \cdots j_k} := \{(s_n) \in \Sigma \mid s_i = j_i, \dots, s_k = j_k\} = C_i^{j_i} \cap \cdots \cap C_k^{j_k}.$

Espaço de probabilidade

Seja $\mathcal{C}$ a σ-álgebra gerada pelos cilindros. Definimos uma medida em $(\Sigma, \mathcal{C})$ considerando uma distribuição de probabilidade $(p_j | \, j \in S)$ e definindo

- $\mu(C_i^j) := p_j$
- $\mu(C_{i \,\cdots\, k}^{j_i \cdots j_k}) := \mu(C_i^{j_i} \cap \cdots \cap C_k^{j_k}) = p_{j_i} \cdots p_{j_k}$

de modo a obter um espaço de probabilidade $(\Sigma, \mathcal{C}, \mu)$.

Shift de Bernoulli

O shift map ou o shift de Bernoulli é a transformação $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ tal que $\sigma((s_n)) = (s_{n+1})$ i.e

$$\sigma(\cdots\cdots s_{-1} \bullet s_0 s_1 \cdots) = (\cdots s_{-1} s_0 \bullet s_1 s_2 \cdots).$$

Uma transformação $f : X \to X$ em um espaço de Lebesgue $(X, \mathcal{B}, \mathfrak{m})$ possui a propriedade Bernoulli se é isomorfa (mod 0) a um shift map.

Exemplo: O baker map possui a propriedade Bernoulli.

Zip shift

O espaço estendido de sequências de símbolos

Sejam Z e S dois alfabetos com $\#S \geq \#Z$ e $\varphi : S \to Z$ um mapa sobrejetivo.

Consideraremos as sequências

$$(\cdots z_{-2} z_{-1} \bullet s_0 s_1 \cdots),$$

tais que $z_{-1}, z_{-2}, \ldots \in Z$ and $x_0, x_1, \ldots \in S$.

O espaço de todas sequências é dado por

$$\Sigma := \prod_{i=-\infty}^{-1} Z \times \prod_{i=0}^{\infty} S.$$

Espaço de probabilidade

Seja $\mathcal{C}$ a σ-álgebra gerada pelos cilindros de Σ. A partir de uma distribuição de probabilidade $(p_s | \, s \in S)$, obtemos uma distribuição $(p_z | \, z \in Z)$ definindo

$$p_z = \sum_{s \in \varphi^{-1}(z)} p_s.$$

A medida será dada por

- $\mu(C_i^j) := p_j; \quad j \in Z$ se $i \leq -1$ e $j \in S$ se $i \geq 0$
- $\mu(C_{i \, \cdots \, k}^{j_i \cdots j_k}) := \mu(C_i^{j_i} \cap \cdots \cap C_k^{j_k}) = p_{j_i} \cdots p_{j_k}.$

Zip shift

Denote $m := \#Z$ e $l := \#S$. A transformação $\sigma_\varphi : \Sigma \to \Sigma$ dada por

$$\sigma_\varphi(\cdots\ z_{-2}\, z_{-1}\ \bullet\ s_0\, s_1\, s_2\ \cdots) = (\cdots\ z_{-2}\, z_{-1}\, \varphi(s_0)\ \bullet\ s_1\, s_2\ \cdots)$$

é chamado de Zip shift map[1] com (m, l) símbolos.

O par (Σ, σ_φ) é chamado de espaço Zip shift.

[1] Lamei and Mehdipour, "Zip shift space".

A propriedade *(m,l)* Bernoulli

Uma transformação $f : X \to X$ definida em um espaço de Lebesgue $(X, \mathcal{B}, \mathfrak{m})$ é uma transformação *(m,l)* Bernoulli se é isomorfa a um Zip shift com (m, l) símbolos.

Baker map n-por-1

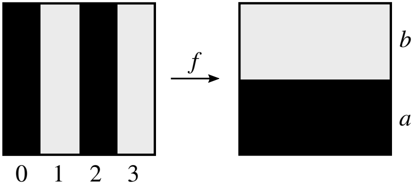
Baker map 2-por-1

Seja $X = [0,1]^2$. O baker map 2-por-1 é a transformação $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (4x, \frac{1}{2}y); & 0 \le x < \frac{1}{4}, \, 0 \le y \le 1 \\ (4x-1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}); & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}, \, 0 \le y \le 1 \\ (4x-2, \frac{1}{2}y); & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}, \, 0 \le y \le 1 \\ (4x-3, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}); & \frac{3}{4} \le x \le 1, \, 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Baker map 2-por-1

Baker map 2-por-1



O baker map 2-por-1 é do tipo (2,4)-Bernoulli:

$$Z = \{a, b\} \quad S = \{0, 1, 2, 3\},$$

$$\varphi(0) = \varphi(2) = a \quad \varphi(1) = \varphi(3) = b.$$

Baker map n-por-1

O baker map n-por-1 é a transformação descrita por:

$$f(x,y)=\begin{cases}(2nx,\frac{1}{2}y); & 0\leq x<\frac{1}{2n},\ 0\leq y\leq 1\\ (2nx-1,\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}); & \frac{1}{2n}\leq x\leq\frac{2}{2n},\ 0\leq y\leq 1\\ (2nx-2,\frac{1}{2}y); & \frac{2}{2n}\leq x\leq\frac{3}{2n},\ 0\leq y\leq 1\\ \vdots & \vdots\\ (2nx-(2n-1),\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}); & \frac{2n-1}{2n}\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1.\end{cases}$$

Teorema

O baker map n-por-1 é uma transformação $(2, 2n)$-Bernoulli.[2]

[2] Mehdipour and Martins, "Encoding n-to-1 baker's transformations".

Baker map n-por-1

Propriedades

- f preserva a medida $\mathfrak{m}$

$$\mathfrak{m}(f^{-1}(A)) = \mathfrak{m}(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

Baker map n-por-1

Propriedades

- f preserva a medida $\mathfrak{m}$
- f é ergódico

$$f^{-1}(A) = A \Rightarrow \mathfrak{m}(A) = 0 \text{ ou } \mathfrak{m}(A) = 1$$

Baker map n-por-1

Propriedades

- f preserva a medida $\mathfrak{m}$
- f é ergódico
- f é mixing

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(f^{-n}A \cap B) = \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{B}$$

Baker map n-por-1

Propriedades

- f preserva a medida $\mathfrak{m}$
- f é ergódico
- f é mixing
- f possui comportamento caótico

Problema do Isomorfismo

Teorema de Ornstein
Dois shifts de Bernoulli são isomorfos se e somente se possuem a mesma entropia.

🔍 Podemos classificar as transformações (m, l) Bernoulli usando entropia?

Referências

Lamei, S. and P. Mehdipour. **“Zip shift space”.** submitted. 2022.

Mehdipour, P. and N. Martins. **“Encoding n-to-1 baker’s transformations”.** In: *Arch. Math.* 119 (2022), pp. 199–211.

($\cdots$ *obrigado*! • *obrigado*! $\cdots$)