Neemias Martins
neemias. org/ped
neemias@ime.unicamp.br

Aula de Exercícios

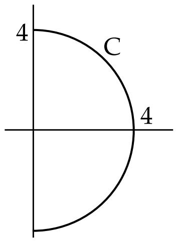
Cálculo II - MA211

Integrais de Linha

Exercício 1

Calcule a integral de linha $\int_C xy^4 ds$, sendo C a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.

Solução:



Se uma curva C é suave e possui as equações $x = x(t)$ $y = y(t)$ $a \leq t \leq b$, então

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t)).\sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2}dt$$

No nosso caso, as equações paramétricas da curva C são:

$$x = 4\cos(t) \quad y = 4\sin(t) \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_C xy^4 ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos(t)(4\sin(t))^4\sqrt{[-4\sin(t)]^2 + [4\cos(t)]^2}dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4^5\cos(t)\sin^4(t)\sqrt{16\big(\sin^2(t) + \cos^2(t)\big)}dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4^6\cos(t)\sin^4(t)dt \ (*) \\
&= \left[4^6\left(\frac{\sin^5(t)}{5}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4^6 \cdot 2}{5}
\end{aligned}$$

$(*)$ Substituição: $u = \sin(t),\ du = \cos(t)dt,\ \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + k.$

Exercício 2

Calcule o comprimento de arco da curva

$$x = \theta - \sin(\theta)\ y = 1 - \cos(\theta)\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Solução:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left[\frac{dx}{d\theta}\right]^2 + \left[\frac{dy}{d\theta}\right]^2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{[1-\cos(\theta)]^2 + [\sin(\theta)]^2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(\theta))} d\theta
\end{aligned}$$

Usaremos a identidade $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ substituindo $\theta = 2x$. Daí, $1 - \cos(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Logo,

$$\sqrt{2(1-\cos(\theta))} = \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right);\ 0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \pi.$$

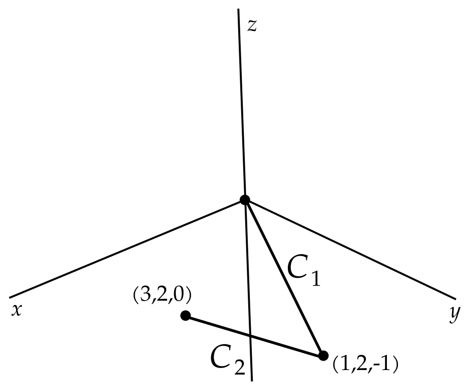
Portanto,

$$\begin{aligned}
L &= 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
&= 2\left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= 2[2+2] = 8.
\end{aligned}$$

Exercício 3

Calcule $\int_C x^2dx + y^2dy + z^2dz$, sendo C os segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(1,2,-1)$ e de $(1,2,-1)$ a $(3,2,0)$.

Solução:



Observe que $C = C_1 \cup C_2$.

- Parametrização de C_1 :

$$\begin{aligned} r(t) &= (1-t)A + tB; t \in [0,1] \\ &= (1-t)(0,0,0) + t(1,2,-1) \\ &= (t, 2t, -t) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} &x = t \Rightarrow dx = dt \\ &y = 2t \Rightarrow dy = 2\,dt \\ &z = -t \Rightarrow dz = -1\,dt. \end{aligned}$$

- Parametrização de C_2 :

$$\begin{aligned} r(t) &= (1-t)B + tC; t \in [0,1] \\ &= (1-t)(1,2,-1) + t(3,2,0) \\ &= (1+2t, 2, t-1) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} &x = 1+2t \Rightarrow dt = 2\,dt \\ &y = 2 \Rightarrow dy = 0\,dt \\ &z = t-1 \Rightarrow dz = dt. \end{aligned}$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
\int_C x^2dx + y^2dy + z^2dzdx &= \int_{C_1} x^2dx + y^2dy + z^2dzdx + \int_{C_2} x^2dx + y^2dy + z^2dzdx \\
&= \int_0^1 t^2 \cdot 1dt + (2t)^2 \cdot 2dt + (-t)^2 \cdot (-1)dt + \int_0^1 (1+2t)^2 \cdot 2dt + 2^2 \cdot 0dt + (t-1)^2 \cdot 1dt \\
&= \int_0^1 8t^2dt + \int_0^1 2 + 8t + 8t^2 + t^2 - 2t + 1dt \\
&= \left[8\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[3t + 6\frac{t^2}{2} + 9\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{8}{3} + 3 + 3 + 3 = \frac{35}{3}.
\end{aligned}
$$

Exercício 4

Calcule a integral de linha do campo $F(x,y) = xy\vec{i} + 3y^2\vec{j}$ ao longo da curva C dada pela função vetorial $r(t) = 11t^4\vec{i} + t^3\vec{j}$; $0 \leq t \leq 1$.

Solução: Note que alternativamente, podemos denotar F e r, respectivamente, por:

$$F(x,y) = \left(xy, 3y^2\right), \; r(t) = \left(11t^4, t^3\right).$$

Vamos calcular

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t)dt.$$

Para tal, $r'(t) = \left(44t^3, 3t^2\right)$. Daí,

$$\begin{aligned} F(r(t)) \cdot r'(t) &= \left(11t^4 \cdot t^3, 3\left(t^3\right)^2\right) \cdot \left(44t^3, 3t^2\right) \\ &= \left(11t^7, 3t^6\right) \cdot \left(44t^3, 3t^2\right) \\ &= 484t^{10} + 9t^8. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t)dt &= \int_0^1 484t^{10} + 9t^8 dt \\ &= \left[484\frac{t^{11}}{11} + 9\frac{t^9}{9}\right]_0^1 \\ &= \frac{484}{11} + 1 = \frac{495}{11}. \end{aligned}$$

Exercício 5

Mostre que a integral de linha é independente do caminho e a calcule

$$\int_C (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy$$

sendo C qualquer caminho de $(0,1)$ a $(1,2)$.

Solução:

Se ∇f é contínuo e C é uma curva suave dada pela equação $r(t), a \leq t \leq b$ então

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a)).$$

Daí, se F for um campo conservativo i.e. $F = \nabla f$, então F será independente de caminho, uma vez que para quaisquer caminhos C_1 e C_2 entre os pontos A e B teremos

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr = f(B) - f(A).$$

Em nosso caso, temos $F(x,y) = (1 - ye^{-x}, e^{-x})$. Mostraremos que F é conservativo. Queremos encontrar f tal que

$$f_x = 1 - ye^{-x},\ f_y = e^{-x}.$$

Integrando a primeira equação em relação a x :

$$f(x,y) = x + ye^{-x} + g(y).$$

Derivemos a expressão obtida em relação a y :

$$f_y = e^{-x} + g'(y).$$

Comparemos as duas expressões de f_y :

$$e^{-x} = e^{-x} + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0.$$

Integrando $g'(y) = 0$ em relação a y :

$$g(y) = K.$$

Escolhendo $K = 0$, obtemos a seguinte expressão de f :

$$f(x,y) = x + ye^{-x}.$$

Para tal função, $\nabla f = F$. Logo F é um campo conservativo e então a integral de linha independe do caminho. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_C (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy &= \int_C F \cdot dr \\
&= \int_C \nabla f \cdot dr \\
&= f(1,2) - f(0,1) \\
&= 1 + 2e^{-1} - e^{-0} = 2e^{-1}.
\end{aligned}$$

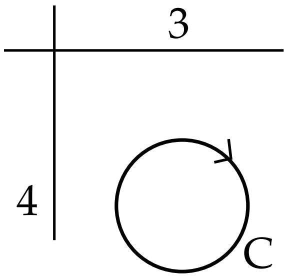
Exercício 6

Calcule $\int_C F \cdot dr$ sendo $F(x, y) = (y - \cos(y), x \sin y)$ e C é o círculo

$$(x-3)^3 + (y+4)^2 = 4$$

orientado no sentido horário. [Dica: Use o Teorema de Green].

Solução:



Temos $F(x, y) = (P, Q) = P\vec{i} + Q\vec{j}$, com $P(x, y) = y - \cos(y)$ e $Q(x, y) = x \sin y$.
Note que a curva $-C$ tem orientação positiva, é uma curva fechada, simples, contínua por partes e é a fronteira da região D dada pelo disco de raio 2 e centro $(3, -4)$. Então, pelo Teorema de Green,

$$\begin{aligned}
\int_{-C} F \cdot dr &= \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\
&= \int\int_D \sin(y) - (1 + \sin(y)) dA \\
&= \int\int_D -1 \, dA = -A(D).
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-C} F \cdot dr &= -\int_0^{2\pi} \int_0^2 r \, dr d\theta \\
&= -[\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 \\
&= -2\pi \cdot 2 \\
&= -4\pi.
\end{aligned}$$

Como $\int_C F \cdot dr = -\int_{-C} F \cdot dr$, segue que

$$\int_C F \cdot dr = 4\pi.$$

Exercício 7

Usando o Teorema de Green, calcule a área da região do plano $\mathbb{R}^2$ limitada pela curva C dada por $r(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin^3 t)\vec{j}$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

Observação: Observe que pelo Teorema de Green, se $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, então

$$\int_C F \cdot dr = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int\int_D 1\, dA = A(D).$$

Basta escolhermos um campo F que satisfaça $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ para calcularmos $A(D)$ usando o Teorema de Green. Pode-se escolher qualquer um dos campos a seguir:

- $P = 0$ e $Q = x$
- $P = -y$ e $Q = 0$
- $P = -\frac{1}{2}y$ e $Q = \frac{1}{2}x$.

Solução:
Seja D a região do plano limitada pela curva C. Escolhendo $P = 0$ e $Q = x$ e aplicando Teorema de Green, obtemos:

$$\int_C x\, dy = \int_C Pdy + Qdx = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int\int_D 1\, dA = A(D).$$

Como $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \sin^3 t$, obtemos

$$\begin{aligned}
A(D) &= \int_C x\, dy \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t) \cdot \left(3 \sin^2 t \cdot \cos(t)\right) dt \\
&= 3 \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t)^2\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(2t)}{2} \right)^2 dt \\
&= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4t)}{2}\, dt \\
&= \frac{3}{8} \left[t - \frac{\sin(4t)}{4} \right]_0^{2\pi} \\
&= 3\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$