# Dinâmica simbólica e as transformações baker n-por-1

Neemias Martins[1]
neemias@ime.unicamp.br
neemias.org

Orientador: Régis Varão[1]
Coorientadora: Pouya Mehdipour[2]

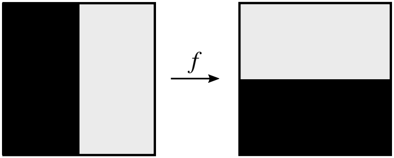
[1] Universidade Estadual de Campinas
[2] Universidade Federal de Viçosa

# Baker map

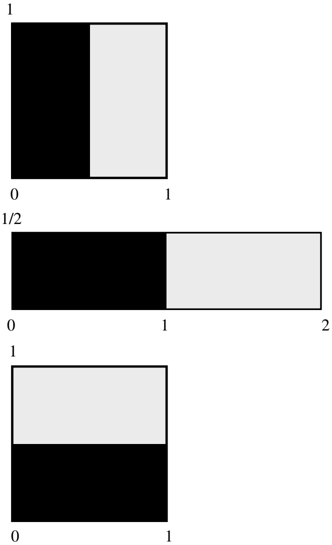
# Baker map

O baker map é a transformação invertível $T : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ dada por

$$T(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y); & 0 \leq x < \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq 1 \\ (2x-1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

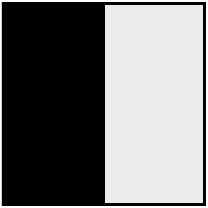


# Baker map



## Baker map

Considere a partição de $X = [0,1]^2$ dada pelos retângulos verticais $V_0$ e $V_1$ identificados com os símbolos $0$ e $1$, respectivamente.



# Baker map

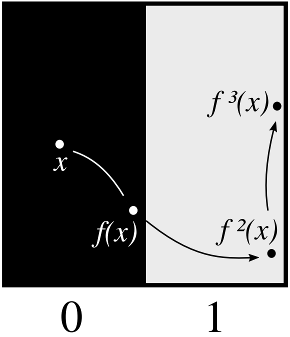
A órbita de um ponto $x \in X$ é a trajetória

$$\{\cdots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \cdots\}$$

A cada órbita associamos uma sequência bi-infinita de símbolos $(s_n)_n$ de modo que

$$s_n = i \Leftrightarrow f^n(x) \in V_i, \quad i \in \{0, 1\}.$$

## Baker map




Se a órbita de $x$ é representada por

$$(\cdots \bullet 0011\cdots)$$

então a órbita de $f(x)$ é representada por

$$(\cdots 0 \bullet 011\cdots)$$

# Shift de Bernoulli

# O espaço de sequências de símbolos

Sejam $S$ um *alfabeto* finito e $\Sigma := S^{\mathbb{Z}}$ o conjunto de todas sequências bi-infinitas de símbolos de $S$ :

$$(s_n) = (\cdots s_{-1} \bullet s_0 s_1 \cdots) \in \Sigma; \quad s_i \in S \, \forall i.$$

Os *cilindros* de $\Sigma$ são subconjuntos da forma:

- $C_i^j := \{(s_n) \in \Sigma \,|\, s_i = j\}$
- $C_{i \,\dots\, k}^{j_i \cdots j_k} := \{(s_n) \in \Sigma \,|\, s_i = j, \dots, s_k = j_k\} = C_i^{j_i} \cap \cdots \cap C_k^{j_k}.$

# Espaço de probabilidade

Seja $\mathcal{C}$ a $\sigma$-álgebra gerada pelos cilindros. Definimos uma medida em $(\Sigma, \mathcal{C})$ considerando uma distribuição de probabilidade $(p_j | \, j \in S)$ e definindo

- $\mu(C_i^j) := p_j$
- $\mu(C_{i \, \dots \, k}^{j_i \cdots j_k}) := \mu(C_i^{j_i} \cap \cdots \cap C_k^{j_k}) = p_{j_i} \cdots p_{j_k}$

de modo a obter um espaço de probabilidade $(\Sigma, \mathcal{C}, \mu)$.

# Shift de Bernoulli

O shift map ou o shift de Bernoulli é a transformação $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ tal que $\sigma((s_n)) = (s_{n+1})$ i.e

$$\sigma(\cdots\cdots s_{-1} \bullet s_0 s_1 \cdots) = (\cdots s_{-1} s_0 \bullet s_1 s_2 \cdots).$$

Uma transformação $f : X \to X$ em um espaço de Lebesgue $(X, \mathcal{B}, m)$ possui a propriedade Bernoulli se é isomorfa (mod 0) a um shift map.

**Exemplo:** O baker map possui a propriedade Bernoulli.

# Zip shift

# O espaço estendido de sequências de símbolos

Sejam $Z$ e $S$ dois alfabetos com $\#S \geq \#Z$ e $\varphi : S \to Z$ um mapa sobrejetivo.

Consideraremos as sequências

$$( \cdots z_{-2} z_{-1} \bullet s_0 s_1 \cdots ),$$

tais que $z_{-1}, z_{-2}, \ldots \in Z$ and $x_0, x_1, \ldots \in S$.

O espaço de todas sequências é dado por

$$\Sigma := \prod_{i=-\infty}^{-1} Z \times \prod_{i=0}^{\infty} S.$$

# Espaço de probabilidade

Seja $\mathcal{C}$ a $\sigma$-álgebra gerada pelos cilindros de $\Sigma$. A partir de uma distribuição de probabilidade $(p_s | s \in S)$, obtemos uma distribuição $(p_z | z \in Z)$ definindo

$$p_z = \sum_{s \in \varphi^{-1}(z)} p_s.$$

A medida será dada por

- $\mu(C_i^j) := p_j; \quad j \in Z$ se $i \leq -1$ e $j \in S$ se $i \geq 0$
- $\mu(C_{i\,\cdots\,k}^{j_i \cdots j_k}) := \mu(C_i^{j_i} \cap \cdots \cap C_k^{j_k}) = p_{j_i} \cdots p_{j_k}.$

# Zip shift

Denote $m := \#Z$ e $l := \#S$. A transformação $\sigma_\varphi : \Sigma \to \Sigma$ dada por

$$\sigma_\varphi(\cdots\, z_{-2}\, z_{-1} \bullet s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) = (\cdots\, z_{-2}\, z_{-1}\, \varphi(s_0) \bullet s_1\, s_2\, \cdots)$$

é chamado de Zip shift map[1] com $(m, l)$ símbolos.

O par $(\Sigma, \sigma_\varphi)$ é chamado de espaço Zip shift.

[1] Lamei and Mehdipour, "Zip shift space".

## A propriedade *(m,l)* Bernoulli

Uma transformação $f : X \to X$ definida em um espaço de Lebesgue $(X, \mathcal{B}, m)$ é uma transformação *(m,l)* Bernoulli se é isomorfa a um Zip shift com $(m, l)$ símbolos.

# Baker map n-por-1

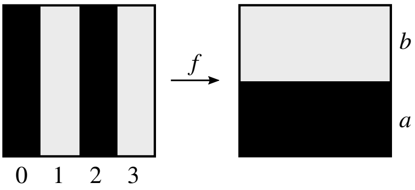
# Baker map 2-por-1

Seja $X = [0,1]^2$. O baker map 2-por-1 é a transformação $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (4x, \frac{1}{2}y); & 0 \leq x < \frac{1}{4},\ 0 \leq y \leq 1 \\ (4x-1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}); & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq 1 \\ (4x-2, \frac{1}{2}y); & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4},\ 0 \leq y \leq 1 \\ (4x-3, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}); & \frac{3}{4} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

# Baker 2-por-1

# Baker map 2-por-1




O baker map 2-por-1 é do tipo (2,4)-Bernoulli:

$$Z = \{a, b\} \quad S = \{0, 1, 2, 3\},$$

$$\varphi(0) = \varphi(2) = a \quad \varphi(1) = \varphi(3) = b.$$

# Baker map n-por-1

O baker map n-por-1 é a transformação descrita por:

$$f(x,y)=\begin{cases}(2nx,\frac{1}{2}y); & 0\le x<\frac{1}{2n},\ 0\le y\le 1\\ (2nx-1,\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}); & \frac{1}{2n}\le x\le \frac{2}{2n},\ 0\le y\le 1\\ (2nx-2,\frac{1}{2}y); & \frac{2}{2n}\le x\le \frac{3}{2n},\ 0\le y\le 1\\ \vdots & \vdots\\ (2nx-(2n-1),\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}); & \frac{2n-1}{2n}\le x\le 1,\ 0\le y\le 1.\end{cases}$$

***Teorema***
O baker map n-por-1 é uma transformação $(2,2n)$-Bernoulli.[2]

[2]Mehdipour and Martins, "Encoding n-to-1 baker's transformations".

# Baker map n-por-1

***Propriedades***

- $f$ preserva a medida $m$

$$m(f^{-1}(A)) = m(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

# Baker map n-por-1

***Propriedades***

- $f$ preserva a medida $m$
- $f$ é ergódico

$$f^{-1}(A) = A \Rightarrow m(A) = 0 \text{ ou } m(A) = 1$$

# Baker map n-por-1

***Propriedades***

- $f$ preserva a medida $m$
- $f$ é ergódico
- $f$ é mixing

$$\lim_{n\to\infty} m(f^{-n}A \cap B) = m(A)m(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{B}$$

## Baker map n-por-1

***Propriedades***

- $f$ preserva a medida $m$
- $f$ é ergódico
- $f$ é mixing
- $f$ possui comportamento caótico

# Problema do Isomorfismo

***Teorema de Ornstein***
Dois shifts de Bernoulli são isomorfos se e somente se possuem a mesma entropia.

🔍 Podemos classificar as transformações $(m, l)$ Bernoulli usando entropia?

# Referências


Lamei, S. and P. Mehdipour. **“Zip shift space”.** submitted. 2022.

Mehdipour, P. and N. Martins. **“Encoding n-to-1 baker’s transformations”.** In: *Arch. Math.* 119 (2022), pp. 199–211.

( ··· *obrigado*! • *obrigado*! ··· )