Notas de Aula
📕 Lógica Matemática
🗺️ Curso: Cibersegurança

Prof. Neemias Martins
neemias.silva@puc-campinas.edu.br
neemias.org

Conjuntos

Definições

Um *conjunto* A é uma coleção não-ordenada de objetos, que são chamados de *elementos* de A.

Se x pertence ao conjunto A, escrevemos

$$x \in A.$$

Se x não pertence ao conjunto A, escrevemos

$$x \notin A.$$

Se A não possui elementos, então ele é o *conjunto vazio*, denotado por

$$A = \varnothing = \{\,\}.$$

Se todo elemento de um conjunto A também é elemento de um conjunto B, dizemos que A é subconjunto de B (ou A está contido em B) e escrevemos

$$A \subset B.$$

Em linguagem proposicional,

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B).$$

Quando dois conjuntos tem os mesmos elementos eles são iguais: $A = B$. Ou seja,

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

A *interseção* entre dois conjuntos A e B é o subconjunto formado pelos elementos comuns de A e B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

A união entre A e B é formada pelos elementos que estão em A ou B (ou ambos):

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

A diferença entre os conjuntos A e B é dada por $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

O *conjunto universal,* em um dado contexto, é o conjunto que contém todos os possíveis objetos em consideração. O complementar de um conjunto A, é dado por

$$A^{\complement} = \Omega \setminus A.$$

Por exemplo, se consideramos $\Omega = \{\text{números naturais}\}$, e $A = \{\text{conjunto dos pares}\}$, então

$$A^{\complement} = \{\text{conjunto dos ímpares}\}.$$

Exemplos

Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{0, 1, 7, 10, 12\}$. Então:

a) $5 \in A$
b) $\{0, 1\} \subset A$
c) $12 \notin A$
d) $\{5\} \notin A$
e) $\varnothing \notin A$
f) $\varnothing \subset A$
g) $A \cap B = \{0, 1\}$
h) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12\}$
i) $A \not\subset B$
j) $B \not\subset A$
k) $A \setminus B = \{3, 4, 5\}$
l) $B \setminus A = \{7, 10, 12\}$.

Representando conjuntos

Podemos representar conjuntos das seguintes formas:

a) Forma explícita: listando os elementos do conjunto

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Por exemplo, $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

b) Por uma propriedade $P(x)$:

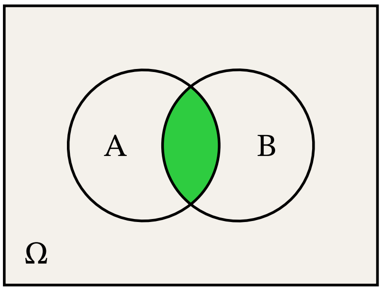
$$A = \{x \mid P(x)\}.$$

Por exemplo, $A = \{x \mid x \text{ é natural e } 0 \leq x \leq 4\}$

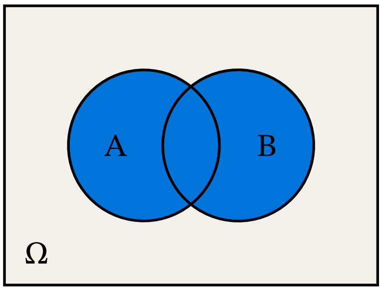
c) Por recursividade: A exemplo, vamos definir o conjunto dos números pares maiores ou iguais a 2:

$$\begin{aligned} &2 \in A \\ &\text{Se } n \in A, \text{então } n + 2 \in A. \end{aligned}$$

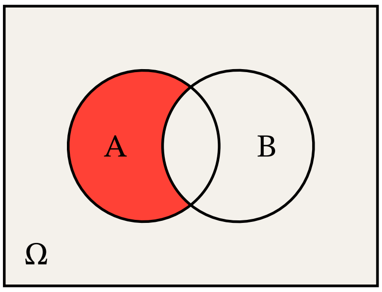
d) Diagramas de Venn:



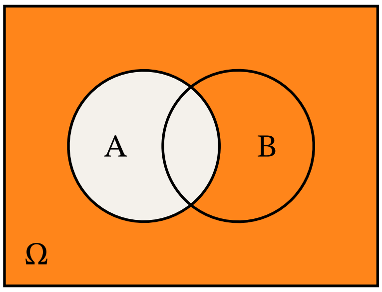
$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$



$A^{\complement}$

Conjuntos numéricos

- Conjunto dos naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

- Conjunto dos inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

- Conjunto dos racionais:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\right\}$$

- Conjunto dos irracionais:

$$I = \{x |\, x \notin \mathbb{Q}\}$$

- Conjunto dos números reais:

$$\mathbb{R} = \{\text{todos os números}\}.$$

Exercícios

1. Em um curso de introdução à cibersegurança, foi feita uma pesquisa com estudantes para verificar em quais áreas da cibersegurança eles gostariam de se aprofundar. O resultado foi:

   - 23 gostariam de aprender sobre segurança de redes;
   - 24 gostariam de aprender sobre criptografia;
   - 25 gostariam de aprender sobre análise forense digital;
   - 12 gostariam de aprender segurança de redes e análise forense digital;
   - 10 gostariam de aprender análise forense digital e criptografia;
   - 9 gostariam de aprender segurança de redes e criptografia;
   - 7 gostariam de aprender segurança de redes, criptografia e análise forense digital.

   Quantos estudantes foram entrevistados?

2. Em um congresso de cibersegurança, os participantes podiam se inscrever em três palestras:

   - Palestra A: Defesa contra ataques de ransomware
   - Palestra B: Técnicas de engenharia social
   - Palestra C: Monitoramento e resposta a incidentes

   O resultado das inscrições foi o seguinte:

   - 40 pessoas se inscreveram na Palestra A;
   - 30 pessoas se inscreveram na Palestra B;
   - 25 pessoas se inscreveram na Palestra C;
   - 15 se inscreveram tanto na A quanto na B;
   - 10 se inscreveram tanto na A quanto na C;
   - 8 se inscreveram tanto na B quanto na C;
   - 5 se inscreveram nas três palestras.

   Agora, responda:

   a) Quantas pessoas se inscreveram somente na Palestra A?

   b) Quantas pessoas se inscreveram em exatamente duas das três palestras?

   c) Quantas pessoas se inscreveram em pelo menos uma palestra?

   d) Quantas pessoas não se inscreveram na Palestra B?