Cálculo II - MA211
IMECC - UNICAMP
Neemias Martins
neemias.org/ped

#4 - AULA DE EXERCÍCIOS

NEEMIAS MARTINS

> 1. Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função
> $$f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2.$$

As derivadas parciais de primeira ordem são dadas por:

$$f_x = -2 - 2x$$
$$f_y = 4 - 8y.$$

Para encontrarmos os pontos críticos, devemos resolver as equações

$$\begin{cases} -2-2x=0 & (1) \\ 4-8y=0 & (2) \end{cases}$$

Da Equação (1), temos $2x = -2 \Rightarrow x = -1$. Da Equação (2), $8y = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Então o único ponto crítico é $(-1, \frac{1}{2})$.

Agora vamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem e $D(x,y)$:

$$f_{xx} = -2 \qquad f_{xy} = 0 \qquad f_{yy} = -8$$
$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-8) - 0^2 = 16.$$

Como $D(-1, \frac{1}{2}) = 16 > 0$ e $f_{xx}(-1, \frac{1}{2}) = -2 < 0$, então pelo Teste da Segunda Derivada $f(-1, \frac{1}{2}) = 11$ é um máximo local.

> 2. Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função $f(x,y) = y^2 - x^2$ sujeita à restrição $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$.

Vamos determinar os extremos de f sujeita à restrição $g(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$. Usando os multiplicadores de Lagrange, resolveremos as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x,y) = 1$, que podem ser escritas como

$$(-2x, 2y) = \lambda\left(\frac{2x}{4}, 2y\right) \text{ e } g(x,y) = 1,$$

ou

$$\begin{cases} -2x = \frac{\lambda}{2}x & (1) \\ 2y = \lambda 2y & (2) \\ \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Date: 25/08/23.

Da Equação (2),

$$\begin{aligned}
&2y = \lambda 2y \\
&\Rightarrow \lambda = 1, \text{ se } y \neq 0 \\
&\Rightarrow -2x = \frac{x}{2}, \text{ pela Equação (1)} \\
&\Rightarrow -2x - \frac{x}{2} = 0 \\
&\Rightarrow -\frac{5}{2}x = 0 \\
&\Rightarrow x = 0 \\
&\Rightarrow y^2 = 1, \text{ pela Equação (3)} \\
&\Rightarrow y = \pm 1.
\end{aligned}$$

Se $y = 0$, pela Equação (3):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}x^2 = 1 \\
&\Rightarrow x^2 = 4 \\
&\Rightarrow x = \pm 2.
\end{aligned}$$

Os pontos críticos de f são $(0,1),(0,-1),(2,0),(-2,0)$. Calculando f nesses pontos, achamos

$$f(0,1) = f(0,-1) = 1 \text{ e } f(2,0) = f(-2,0) = -4.$$

Portanto o valor máximo de f é $f(0,\pm 1) = 1$ e o valor mínimo é $f(\pm 2, 0) = -4$.

3. Usando multiplicadores de Lagrange, determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c.

Queremos maximizar a função $f(x,y,z) = xyz$ sujeita à restrição $g(x,y,z) = 4x+4y+4z = c$. Logo, resolveremos as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x,y,z) = c$:

$$(yz, xz, xy) = \lambda(4,4,4) \text{ e } g(x,y,z) = c$$

i.e

$$\begin{cases}
yz = 4\lambda & (1) \\
xz = 4\lambda & (2) \\
xy = 4\lambda & (3) \\
4(x+y+z) = c & (4)
\end{cases}$$

Das Equações (1),(2) e (3) temos

$$\begin{aligned}
&4\lambda = yz = xz = yz \\
&\Rightarrow y = x = z
\end{aligned}$$

,

visto que $x, y, z > 0$ pela natureza do problema. Das igualdades acima e a Equação (4), temos

$$\begin{aligned}
&4(x+x+x) = c \\
&\Rightarrow 12x = c \\
&\Rightarrow x = \frac{c}{12} \\
&\Rightarrow x = y = z = \frac{c}{12}
\end{aligned}$$

Portanto as dimensões da caixa de volume máximo são $x = y = z = \frac{c}{12}$.

> 4. Resolva o exercício anterior sem usar multiplicadores de Lagrange.

Queremos maximizar o volume $V = xyz$ dado que $4x+4y+4z = c$. Isolando z na equação,

$$\begin{aligned}
&4x+4y+4z = c\\
&\Rightarrow z = \frac{c-4x-4y}{4}\\
&\Rightarrow z = \frac{c}{4} - x - y.
\end{aligned}$$

Seja $V(x,y) = xyz = xy\left(\frac{c}{4} - x - y\right) = \frac{c}{4}xy - x^2y - xy^2$, $x > 0, y > 0$. Calculando as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
V_x &= \frac{c}{4}y - 2xy - y^2\\
V_y &= \frac{c}{4}x - x^2 - 2xy
\end{aligned}$$

Queremos encontrar os pontos críticos de V, então fazemos

$$\begin{cases}
\frac{c}{4}y - 2xy - y^2 = 0 & (1)\\
\frac{c}{4}x - x^2 - 2xy = 0 & (2)
\end{cases}$$

Da Equação (1),

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{4}y - 2xy - y^2 = 0\\
&\Rightarrow y\left(\frac{c}{4} - 2x - y\right) = 0\\
&\Rightarrow \frac{c}{4} - 2x - y = 0, \text{ pois } y > 0\\
&\Rightarrow 2x + y = \frac{c}{4} \quad (3)
\end{aligned}$$

Da Equação (2),

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{4}x - x^2 - 2xy = 0\\
&\Rightarrow x\left(\frac{c}{4} - x - 2y\right) = 0\\
&\Rightarrow \frac{c}{4} - x - 2y = 0, \text{ pois } x > 0\\
&\Rightarrow x + 2y = \frac{c}{4} \quad (4)
\end{aligned}$$

Igualando as expressões (4) e (5):

$$\begin{aligned}
&2x + y = x + 2y\\
&\Rightarrow x = y.
\end{aligned}$$

Substituindo $x = y$ na expressão (3):

$$\begin{aligned}
&3x = \frac{c}{4}\\
&\Rightarrow x = \frac{c}{12} = y.
\end{aligned}$$

Ainda,

$$z = \frac{c}{4} - x - y = \frac{c}{4} - \frac{c}{12} - \frac{c}{12} = \frac{c}{12}.$$

Pela natureza do problema, o ponto crítico nos fornece um valor máximo absoluto. A caixa é um cubo de arestas de comprimento $\frac{c}{12}$.

Para verificarmos que de fato o ponto crítico $(\frac{c}{12}, \frac{c}{12})$ é ponto de máximo podemos usar o Teste da Segunda Derivada:

$$V_{xx} = -2y \Rightarrow V_{xx}\Big(\frac{c}{12}, \frac{c}{12}\Big) = -\frac{c}{6}$$

$$V_{xy} = \frac{c}{4} - 2x - 2y \Rightarrow V_{xy}\Big(\frac{c}{12}, \frac{c}{12}\Big) = \frac{c}{4} - \frac{c}{3} = -\frac{c}{12}$$

$$V_{yy} = -2x \Rightarrow V_{yy}\Big(\frac{c}{12}, \frac{c}{12}\Big) = -\frac{c}{6}$$

$$D\Big(\frac{c}{12}, \frac{c}{12}\Big) = V_{xx}\Big(\frac{c}{12}, \frac{c}{12}\Big)V_{yy}\Big(\frac{c}{12}, \frac{c}{12}\Big) - V_{xy}^2\Big(\frac{c}{12}, \frac{c}{12}\Big) = \frac{-c}{6} \cdot \frac{-c}{6} - \Big(\frac{-c}{12}\Big)^2 = \frac{c^2}{48}.$$

Como $D\big(\frac{c}{12}, \frac{c}{12}\big) > 0$ e $V_{xx}(\frac{c}{12}, \frac{c}{12}) < 0$, (pois $c > 0$), segue que o ponto é de fato de máximo. Portanto $x = y = z = \frac{c}{12}$ são as dimensões que maximizam o volume.