Cálculo II - MA211
IMECC - UNICAMP
Neemias Martins
neemias.org/ped

#7 AULA DE EXERCÍCIOS

NEEMIAS MARTINS

1. Calcule a integral dupla

$$\iint_D y^3 \, dA$$

sendo D a região triangular com vértices $(0,2),(1,1),(3,2)$.

Observe na figura que D é uma região do Tipo II: Para encontrarmos as expressões das retas $h_1(y)$ e $h_2(y)$ que delimitam D, fazemos

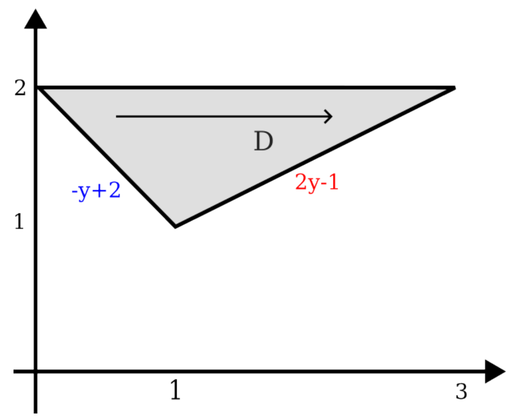
- $h_1(y) = x = ay + b$. Como $(0,2)$ e $(1,1)$ estão na reta $x = ay + b$, temos

$$\begin{aligned} &0 = a \cdot 2 + b \Rightarrow b = -2a \\ &1 = a \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1 - a \\ &\Rightarrow -2a = 1 - a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 2. \end{aligned}$$

  Logo $h_1(y) = -y + 2$.
- $h_2(y) = x = ay + b$. Como $(1,1)$ e $(3,2)$ estão na reta $x = ay + b$, temos

$$\begin{aligned} &1 = a \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1 - a \\ &3 = a \cdot 2 + b \Rightarrow b = 3 - 2a \\ &\Rightarrow 1 - a = 3 - 2a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -1. \end{aligned}$$

  Logo $h_2(y) = 2y - 1$.



Portanto,

$$\begin{aligned}
\int\int_D y^3 dA &= \int_1^2 \int_{-y+2}^{2y-1} y^3 dx dy = \int_1^2 [xy^3]_{x=-y+2}^{x=2y-1} dy \\
&= \int_1^2 y^3[(2y-1)-(-y+2)]dy \\
&= \int_1^2 y^3[3y-3]dy \\
&= \int_1^2 3y^4-3y^3 dy \\
&= \frac{3}{5}y^5-\frac{3}{4}y^4\Big|_1^2 \\
&= \frac{96}{5}-12-\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=\frac{147}{20}.
\end{aligned}$$

2. Determine o volume do sólido que está abaixo do plano $x-2y+z=1$ e acima da região limitada por $x+y=1$ e $x^2+y=1$.

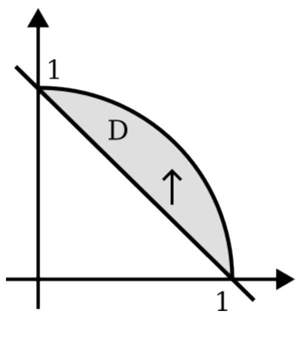
Como $x-2y+z=1$, então $z=1-x+2y$. A região é limitada pelas curvas:

(1) $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$
(2) $x^2+y=1 \Rightarrow y=1-x^2$.

Vejamos os pontos de intersecção:

$$\begin{aligned}
1-x=1-x^2 &\Rightarrow x^2-x=0 \\
&\Rightarrow x(x-1)=0 \\
&\Rightarrow x=0 \text{ ou } x=1.
\end{aligned}$$

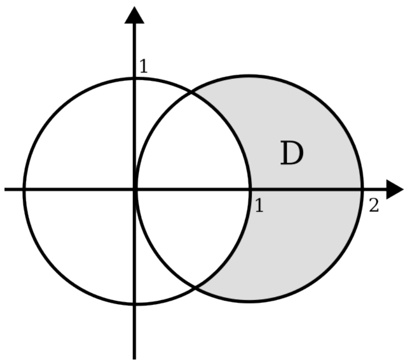
Note que a região D é do Tipo I.



Portanto,

$$\begin{aligned}\int\int_D (1-x+2y)\,dA &= \int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} (1-x+2y)\,dy\,dx\\ &= \int_0^1 [(1-x)y+y^2]_{1-x}^{1-x^2}\,dx\\ &= \int_0^1 [(1-x)(1-x^2)+(1-x^2)^2-2(1-x)^2]\,dx\\ &= \int_0^1 (1-x^2-x+x^3+1-2x^2+x^4-2+4x-2x^2)\,dx\\ &= \int_0^1 (x^4+x^3-5x^2+3x)\,dx\\ &= \frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-5\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{17}{60}.\end{aligned}$$

3. Utilize a integral dupla para determinar a área da região dentro do círculo $(x-1)^2+y^2=1$ e fora do círculo $x^2+y^2=1$.



Em coordenadas polares, temos $x^2+y^2=r^2$ e $x=r\cos\theta$, logo

$$\begin{aligned}(x-1)^2+y^2=1 &\Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1\\ &\Rightarrow r^2=2r\cos\theta\\ &\Rightarrow r=2\cos\theta.\end{aligned}$$

Ainda,

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1 \text{ pois } r\geq 0.$$

Vejamos em que pontos as duas curvas se intersectam:

$$\begin{aligned}&r^2=1, \quad r=2\cos\theta\\ &\Rightarrow 4\cos^2\theta=1\\ &\Rightarrow \cos^2\theta=\frac{1}{4}\\ &\Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{1}{2}\\ &\Rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Portanto,

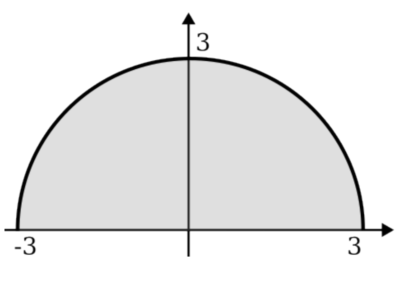
$$
\begin{aligned}
A(D) = \int\int_D dA &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\theta} r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{2\cos\theta} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[2\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right] d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[2\cdot\frac{1+\cos(2\theta)}{2} - \frac{1}{2}\right] d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\right] d\theta \quad \text{, faça } u = 2\theta \\
&= \frac{\sin(2\theta)}{2} + \frac{1}{2}\theta \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6} \\
&= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

4. Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares:

$$\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)\,dy\,dx.$$

A região de integração é dada por $-3 \le x \le 3$ e $0 \le y \le \sqrt{9-x^2}$. Note que

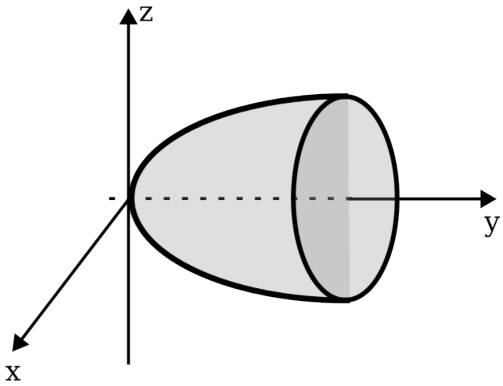
$$y = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9;\ y \ge 0.$$



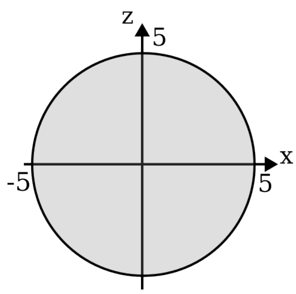
Em coordenadas polares, temos $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $x^2 + y^2 = r^2$. Então:

$$
\begin{aligned}
\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)\,dy\,dx &= \int_0^{\pi}\int_0^3 \sin(r^2)\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} [-\frac{1}{2}\cos(r^2)]_0^3 d\theta \\
&= \int_0^{\pi} (-\frac{1}{2}\cos(9) + \frac{1}{2}) d\theta \\
&= \frac{1}{2}(1-\cos(9))\theta\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}(1-\cos(9)).
\end{aligned}
$$

5. Determine a área da parte finita do paraboloide $y = x^2 + z^2$ limitada pelo plano $y = 25$.



Se projetarmos a superfície sobre o plano-xz, obtemos: $x^2 + z^2 \leq 25$.



Temos $f(x,z) = y = x^2 + z^2$, então

$$A(S) = \iint_{x^2+z^2\leq 25} \sqrt{[f_x(x,z)]^2 + [f_z(x,z)]^2 + 1}\,dA = \iint_{x^2+z^2\leq 25} \sqrt{4x^2+4z^2+1}\,dA$$

Passando para coordenadas polares, $x = r\cos\theta$, $z = r\cos\theta$, obtemos

$$
\begin{aligned}
A(S) &= \int_0^{2\pi}\int_0^5 \sqrt{4r^2+1}\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^5 (4r^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot r\,dr \quad \text{, faça } u = 4r^2+1 \Rightarrow du = 8r\,dr \\
&= [\theta]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5 \\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{12}(101^{\frac{3}{2}}-1) \\
&= \frac{\pi}{6}(101\sqrt{101}-1).
\end{aligned}
$$

6. Calcule

$$\iiint_E \frac{z}{x^2+z^2}\,dV$$

sendo $E = \{(x,y,z); 1 \le y \le 4,\ y \le z \le 4,\ 0 \le x \le z\}$.

Temos

$$\iiint_E \frac{z}{x^2+z^2}\,dV = \int_1^4\int_y^4\int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}\,dx\,dz\,dy.$$

(Para calcular a integral de dentro, lembre-se das seguintes integrais

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C \text{ e } \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

A segunda fórmula de integração acima pode ser obtida a partir da primeira, fazendo $u = \frac{x}{a}$ daí $du = \frac{1}{a}dx$, i.e $dx = a\,du$ então

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1+\frac{x^2}{a^2})}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.)$$

Então,

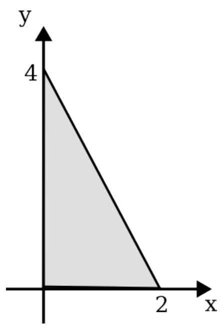
$$\begin{aligned}
\int_1^4\int_y^4\int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}\,dx\,dz\,dy &= \int_1^4\int_y^4 \left[\frac{z}{z}\arctan\Big(\frac{x}{z}\Big)\right]_0^z dz\,dy\\
&= \int_1^4\int_y^4 (\arctan(1)-\arctan(0))\,dz\,dy\\
&= \int_1^4\int_y^4 \Big(\frac{\pi}{4}-0\Big)\,dz\,dy\\
&= \int_1^4 \frac{\pi}{4}[z]_y^4\,dy\\
&= \int_1^4 \frac{\pi}{4}(4-y)\,dy\\
&= \frac{\pi}{4}\left[4y-\frac{y^2}{2}\right]_1^4\\
&= \frac{\pi}{4}\Big(16-\frac{16}{2}-4+\frac{1}{2}\Big)\\
&= \frac{9\pi}{8}.
\end{aligned}$$

7. Use a integral tripla para determinar o volume do tetraedro limitado pelo planos coordenados e o plano $2x+y+z=4$.

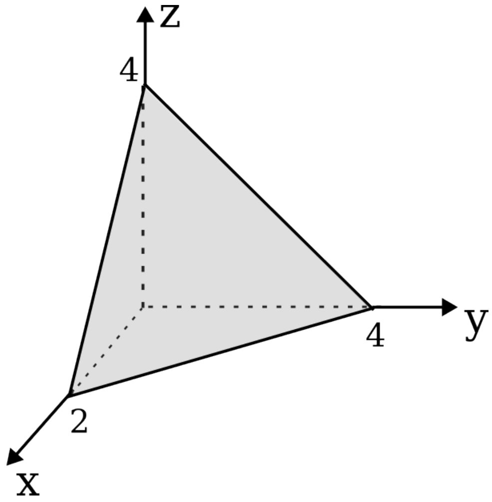
O plano $2x+y+z=4$ intersecta o plano-xy quando $z=0$, ou seja,

$$2x+y=4 \Rightarrow y=4-2x.$$

A projeção do tetraedro no plano-xy é dada pela região na figura abaixo:



(Temos $z=4-2x-y$. Fazendo a intersecção com os planos xz e yz obtemos a retas $z=4-2x$ e $z=4-y$, respectivamente - o que nos ajuda a fazer um esboço do tetraedro.)



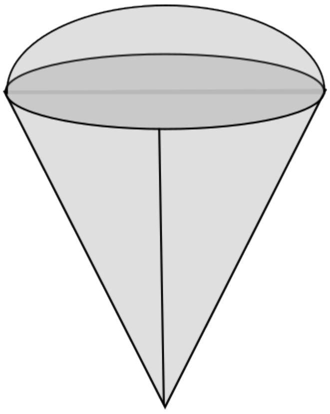
Então,

$$E = \{(x, y, z); 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4-2x, 0 \leq z \leq 4-2x-y\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
V &= \int\int\int_E dV \\
&= \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{4-y-2x} dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 \int_0^{4-2x} (4-2x-y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 \left[(4-2x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{4-2x} dx \\
&= \int_0^2 \left((4-2x)^2 - \frac{(4-2x)^2}{2}\right) dx \\
&= \int_0^2 \frac{2(4-2x)^2-(4-2x^2)}{2}\,dx \\
&= \int_0^2 \frac{(4-2x)^2}{2}\,dx \\
&= \int_0^2 \frac{16-16x+4x^2}{2}\,dx \\
&= \int_0^2 (8-8x+2x^2)\,dx \\
&= \left[8x-4x^2+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

8. Determine o volume do sólido que é limitado pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e abaixo da esfera $x^2+y^2+z^2=2$.



Usaremos coordenadas cilíndricas: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$. De $x^2+y^2+z^2=2$ obtemos $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$. Temos

$$\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq\sqrt{2-x^2-y^2},$$

em coordenadas cilíndricas:

$$r\leq z\leq\sqrt{2-r^2}.$$

Vejamos que pontos o cone intersecta a esfera:

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2=2, \quad z=\sqrt{x^2+y^2} && (1)\\
&\Rightarrow x^2+y^2+(x^2+y^2)=2 && (2)\\
&\Rightarrow 2r^2=2 && (3)\\
&\Rightarrow r=1, \text{ pois } r\geq 0. && (4)
\end{aligned}$$

Note que a projeção do sólido sobre o plano xy é então o interior do círculo de raio 1 :

$$x^2+y^2\leq 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
V &= \int\int\int_E dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(\sqrt{2-r^2}-r)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}dr-\int_0^1 r^2dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta\left(\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}dr-\int_0^1 r^2dr\right), \quad \text{faça } u=2-r^2 \\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 2\pi\left(-\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$