

MATERIAL EXTRA: ALGUNS EXERCÍCIOS DE REVISÃO

E1. Seja $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$ e suponha que $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 4$. Determine $g'(0)$.

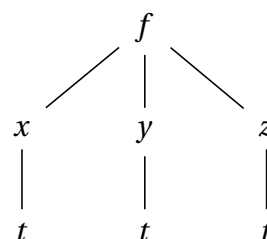
Pela Regra da Cadeia, fazendo

$$x = 3t^2, y = t^3, z = e^{2t},$$

temos

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow g'(t) = 6t \frac{\partial f}{\partial x}(3t^2, t^3, e^{2t}) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(3t^2, t^3, e^{2t}) + 2e^{2t} \frac{\partial f}{\partial z}(3t^2, t^3, e^{2t}).$$



Para $t = 0$, como $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 4$, temos

$$g'(0) = 2 \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 8.$$

E2. Seja $f(u, v, w)$ diferenciável. Mostre que se $u = x - y$, $v = y - z$ e $w = z - x$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w} \right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \right) = 0.$$

E3. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

Seja $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. O plano tangente à F em um ponto (a, b, c) satisfaz:

$$\begin{aligned}\nabla F(a, b, c) \cdot (x - a, y - b, z - c) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a, 2b, -2c) \cdot (x - a, y - b, z - c) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a(x - a) + 2b(y - b) - 2c(z - c) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2ax - 2a^2 + 2by - 2b^2 - 2cz + 2c^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(ax + by - cz) - 2(a^2 + b^2 - c^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow ax + by - cz - (a^2 + b^2 - c^2) &= 0.\end{aligned}$$

Uma vez que (a, b, c) pertence ao cone, então $a^2 + b^2 = c^2$, ou seja

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0.$$

Então, todo ponto (x, y, z) do plano tangente satisfaz a equação

$$\begin{aligned}ax + by - cz - (a^2 + b^2 - c^2) &= 0 \\ \Rightarrow ax + by - cz &= 0.\end{aligned}$$

Observe que essa equação é verdadeira para $(x, y, z) = (0, 0, 0)$:

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 - c \cdot 0 = 0.$$

Portanto, qualquer plano tangente ao cone passa por $(0, 0, 0)$.

E4. Determine a derivada direcional da função $z = f(x, y)$, na direção do vetor $(2, 2)$ e no ponto $(0, 1)$, sendo z definida implicitamente pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 0.$$

Qual é o valor máximo da derivada direcional de $z = f(x, y)$ no ponto $(0, 1)$?

O vetor unitário da direção de $u = (2, 2)$ é $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{8}}(2, 2)$. A derivada direcional é dada por:

$$D_u f(0, 1) = \nabla f(0, 1) \cdot \hat{u}.$$

Vamos calcular o vetor gradiente em $(0, 1)$: $\nabla f(0, 1) = (f_x(0, 1), f_y(0, 1))$. Substituindo x_0 e $y = 1$ em $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 0$, obtemos

$$1 + z^3 = 0 \Rightarrow z = -1.$$

Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$. Então,

$$F_x(x, y, z) = 3x^2 + yz$$

$$F_y(x, y, z) = 3y^2 + xz$$

$$F_z(x, y, z) = 3z^2 + xy.$$

Então,

$$\begin{aligned}f_x(0, 1) &= \frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{(0, 1, -1)} = -\frac{F_x(0, 1, -1)}{F_z(0, 1, -1)} = \frac{1}{3} \\ f_y(0, 1) &= \frac{\partial z}{\partial y} \bigg|_{(0, 1, -1)} = -\frac{F_y(0, 1, -1)}{F_z(0, 1, -1)} = -\frac{3}{3} = -1.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_u f(0,1) &= \left(\frac{1}{3}, -1\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}\right) \\ &= \frac{2}{3\sqrt{8}} - \frac{2}{\sqrt{8}} = -\frac{4}{3\sqrt{8}}. \end{aligned}$$

O valor máximo da derivada direcional, que ocorre na direção do gradiente, é dado por

$$|\nabla f(0,1)| = \left| \left(\frac{1}{3}, -1\right) \right| = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

E5. Determine os máximos e mínimos absolutos de f no conjunto D .

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2); D \text{ é o disco } x^2+y^2 \leq 4.$$

Primeiro vamos investigar no interior do disco. Procuramos pelos pontos críticos de f :

$$\nabla f(x, y) = (2xe^{-x^2-y^2}(1-x^2-2y^2), 2ye^{-x^2-y^2}(2-x^2-2y^2)) = (0, 0).$$

Agora,

$$f_x = 2xe^{-x^2-y^2}(1-x^2-2y^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x^2+2y^2 = 1.$$

Se $x = 0$, então de $f_y = 0$ obtemos

$$2ye^{-y^2}(2-2y^2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = \pm 1.$$

Daí, temos os pontos $(0, 0), (0, 1), (0, -1)$.

Agora, se $x^2+2y^2 = 1$, então de $f_y = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2ye^{-x^2-y^2}(2-x^2-2y^2) = 2ye^{-x^2-y^2}(2-(x^2+2y^2)) = 2ye^{-x^2-y^2} \\ &\Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Daí, substituindo $y = 0$ em $x^2+2y^2 = 1$, obtemos $x = \pm 1$. O que nos dá os pontos $(1, 0), (-1, 0)$.

Agora analisemos os pontos críticos na fronteira de D . Como na fronteira temos $x^2+y^2 = 4$, então $f(x, y) = e^{-4}(4+y^2) = \frac{4+y^2}{e^4}$. Note que o menor valor de f (na fronteira) ocorre quando $y = 0$ (logo $x^2 = 4$ e assim $x = \pm 2$) e o maior ocorre quando $y^2 = 4$ i.e $y = \pm 2$ (e nesse caso $x = 0$). Ou seja, temos os pontos $(2, 0), (-2, 0), (0, 2), (0, -2)$.

Mas

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(0,\pm 1) &= 2e^{-1} = \frac{2}{e} \\ f(\pm 1,0) &= e^{-1} = \frac{1}{e} \\ f(\pm 2,0) &= 4e^{-4} = \frac{4}{e^4} \\ f(0,\pm 2) &= 8e^{-4} = \frac{8}{e^4}. \end{aligned}$$

Portanto, em D o valor máximo absoluto de f é $f(0,\pm 1) = 2e^{-1}$ e o valor mínimo absoluto é $f(0,0) = 0$.