Lei da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Curso: Estatística e Probabilidade

Prof. Neemias Martins

PUC Campinas

neemias.silva@puc-campinas.edu.br
neemias.org

Lei da Probabilidade Total

Seja $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *uma partição de* Ω*. Então, para cada evento* A*,*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + \cdots + P(A \cap B_n) \\ &= P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + \cdots + P(A \mid B_n) \cdot P(B_n). \end{aligned}$$

Em particular, considerando a partição dada por $\Omega = B \cup B^{\complement}$*, então*

$$P(A) = P(A \mid B) \cdot P(B) + P\left(A \mid B^{\complement}\right) \cdot P\left(B^{\complement}\right).$$

Exemplo

Uma startup está treinando uma inteligência artificial para lançar um assistente virtual.

A chance de terminar o projeto no prazo é de 0.42 se houver queda nos servidores em nuvem (que eles usam para processar os dados), e 0.90 se os servidores funcionarem normalmente.

A probabilidade de haver queda nos servidores é de 0,45. Qual é a chance de a IA ficar pronta no prazo?

Solução

Considere A o evento de terminar a IA no prazo; B o evento de se ter queda nos servidores.

Queremos calcular $P(A)$ sabendo que

$$P(A|B) = 0.42,\ P\left(A|B^{\complement}\right) = 0.90 \text{ e } P(B) = 0.45.$$

Pela Lei da Probabilidade Total, sabemos que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B) \cdot P(B) + P\left(A\,|B^{\complement}\right) \cdot P\left(B^{\complement}\right) \\ &= 0.42 \cdot 0.45 + 0.90 \cdot (1 - 0.45) \\ &= 0.189 + 0.90 \cdot 0.55 \\ &= 0.189 + 0.495 \\ &= 0.684 = 68.4\% \end{aligned}$$

Exemplo

Suponha que a probabilidade de a seleção brasileira vencer a próxima copa se contratar o Ancellotti como técnico seja de 0.15 e a probabilidade de vencer a copa seja de 0.10 caso não contrate o Ancellotti.

Estima-se que a probabilidade de Ancelotti ser contratato pelo Brasil seja de 0.85. Calcule a probabilidade da seleção brasileira não vencer a próxima copa.

Solução

Seja A o evento em que o Brasil ganha a próxima copa e B o evento em que o Brasil contrata o Ancelotti.

Queremos calcular $P\left(A^{\complement}\right)$ dado que

$$P(A|B) = 0.15,\; P\left(A|B^{\complement}\right) = 0.10 \;\text{ e }\; P(B) = 0.85.$$

Pela Lei da Probabilidade Total, temos

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B) \cdot P(B) + P\left(A|B^{\complement}\right) \cdot P\left(B^{\complement}\right) \\ &= 0.15 \cdot 0.85 + 0.10 \cdot (1 - 0.85) \\ &= 0.1275 + 0.10 \cdot 0.15 = 0.1275 + 0.015 = 0.1425. \end{aligned}$$

Então $P\left(A^{\complement}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0.1425 = 0.8575 = 85.75\%$

Exemplo

Uma empresa está contratando para uma vaga de Analista Júnior, e os candidatos vêm de três áreas diferentes:

- 50% são de Tecnologia de Informação
- 30% são de Ciência de Dados
- 20% são de Cibersegurança.

Com base no histórico de contratações da empresa, 70% dos candidatos de T.I. são aprovados após a entrevista técnica; enquanto 60% dos cientistas de dados e 50% dos profissionais de cibersegurança são aprovados após a entrevista técnica.

Calcule a probabilidade de um candidato escolhido ao acaso ser aprovado após a entrevista.

Solução

Considere os eventos:

- A : o candidato foi aprovado após a entrevista
- B : o candidato é de T.I
- C : o candidato é cientista de dados
- D : o candidato é profissional de cibersegurança.

Temos

$$P(A|B) = 0.70,\ P(A|C) = 0.60,\ P(A|D) = 0.50$$
$$P(B) = 0.50,\ P(C) = 0.30,\ P(D) = 0.20$$

Solução

Note que $B \cup C \cup D = \Omega$ e B, C, D são dois a dois disjuntos, ou seja, B, C, D é uma partição de Ω.

Então, pela Lei de Probabilidade Total,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B) \cdot P(B) + P(A\ |C) \cdot P(C) + P(A|D) \cdot P(D) \\ &= 0.70 \cdot 0.50 + 0.60 \cdot 0.30 + 0.50 \cdot 0.20 \\ &= 0.35 + 0.18 + 0.10 = 0.63 \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Seja $B_1, B_2, \dots, B_n$ *uma partição de* Ω. *Então para cada evento* A,

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \cdots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}.$$

Em particular, considerando a partição dada por $\Omega = B \cup B^\complement$, *então*

$$P(B \mid A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P\left(A|B^\complement\right) \cdot P\left(B^\complement\right)}$$

Exemplo

Uma determinada doença afeta 10% da população.

Um teste para a doença tem 90% de precisão para pacientes com a doença e 80% para pacientes sem a doença.

Suponha que você testou positivo para a doença. Qual é a probabilidade de você realmente ter a doença?

Solução

Considere os eventos:

- A: teste positivo para a doença
- B : ter a doença.

Sabemos que

$$P(B) = 0.10,\ P(A|B) = 0.90,\ P\left(A|B^{\complement}\right) = 0.20.$$

Solução

Pelo Teorema de Bayes, a probabilidade de você ter a doença se você testou positivo é de

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P\left(A|B^{\complement}\right) \cdot P\left(B^{\complement}\right)} \\
&= \frac{0.90 \cdot 0.10}{0.90 \cdot 0.10 + 0.20 \cdot (1 - 0.10)} \\
&= \frac{0.09}{0.09 + 0.18} = 0.3333 = 33.33\%
\end{aligned}
$$

Exemplo

Um sistema de e-mail usa uma análise de palavras para identificar se um e-mail é spam ou não spam. Suponha que:

- 20% dos e-mails são spam;
- A palavra "grátis" aparece em 60% dos e-mails spam e em 10% dos e-mails não spam.

Você acabou de receber um e-mail que contém a palavra "grátis". Qual é a probabilidade de que ele seja spam?

Solução

Considere os eventos:

- A : o e-mail é spam
- B : o e-mail contém a palavra "grátis."

Sabemos que $P(A) = 0.20,\ P(B|A) = 0.60,\ P\left(B|A^{\complement}\right) = 0.10.$

Pelo Teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P\left(B|A^{\complement}\right) \cdot P\left(A^{\complement}\right)} \\ &= \frac{0.60 \cdot 0.20}{0.60 \cdot 0.20 + 0.10 \cdot (1 - 0.20)} \\ &= \frac{0.12}{0.12 + 0.08} = \frac{0.12}{0.2} = 0.6 = 60\% \end{aligned}$$

Exemplo

Uma empresa está analisando a eficácia de um anúncio em seu site.

- Apenas 5% dos clientes que visualizam o anúncio realmente compram o produto.
- Quando um cliente compra o produto, há 90% de chance de ele ter acessado a página do anúncio por mais de 5 minutos.
- Quando um cliente não compra o produto, em apenas 10% dos casos ele acessou a página por mais de 5 minutos.

Se um cliente passou mais de 5 minutos na página do anúncio, qual é a probabilidade de que ele compre o produto anunciado?

Solução

- A: o cliente compra
- B : o cliente acessou a página por mais de 5 minutos.

Sabemos que $P(A) = 0.05,\ P(B|A) = 0.90,\ P\left(B|A^{\complement}\right) = 0.10.$

Pelo Teorema de Bayes,

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P\left(B|A^{\complement}\right) \cdot P\left(A^{\complement}\right)} \\
&= \frac{0.90 \cdot 0.05}{0.90 \cdot 0.05 + 0.10 \cdot (1 - 0.05)} \\
&= \frac{0.045}{0.045 + 0.095} \\
&= 0.3214 = 32.14\%
\end{aligned}
$$

Bons estudos!