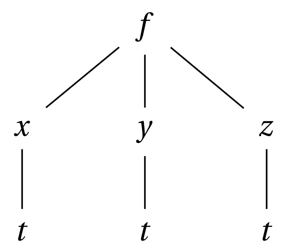
Cálculo II - MA211
IMECC - UNICAMP
Neemias Martins
`neemias.org/ped`

Material Extra: Alguns exercícios de revisão

E1. Seja $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$ e suponha que $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 4$. Determine $g'(0)$.



Pela Regra da Cadeia, fazendo

$$x = 3t^2, y = t^3, z = e^{2t},$$

temos

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow g'(t) = 6t\frac{\partial f}{\partial x}(3t^2, t^3, e^{2t}) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(3t^2, t^3, e^{2t}) + 2e^{2t}\frac{\partial f}{\partial z}(3t^2, t^3, e^{2t}).$$

Para $t = 0$, como $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 4$, temos

$$g'(0) = 2\frac{\partial f}{\partial z(0,0,1)} = 8.$$

E2. Seja $f(u, v, w)$ diferenciável. Mostre que se $u = x - y$, $v = y - z$ e $w = z - x$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}\right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\right) = 0.$$

E3. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

Seja $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. O plano tangente à F em um ponto (a,b,c) satisfaz:

$$\begin{aligned}
&\nabla F(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0\\
&\Leftrightarrow (2a,2b,-2c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0\\
&\Leftrightarrow 2a(x-a)+2b(y-b)-2c(z-c)=0\\
&\Leftrightarrow 2ax-2a^2+2by-2b^2-2cz+2c^2=0\\
&\Leftrightarrow 2(ax+by-cz)-2(a^2+b^2-c^2)=0\\
&\Leftrightarrow ax+by-cz-(a^2+b^2-c^2)=0.
\end{aligned}$$

Uma vez que (a,b,c) pertence ao cone, então $a^2+b^2=c^2$, ou seja

$$a^2+b^2-c^2=0.$$

Então, todo ponto (x,y,z) do plano tangente satisfaz a equação

$$\begin{aligned}
&ax+by-cz-(a^2+b^2-c^2)=0\\
&\Rightarrow ax+by-cz=0.
\end{aligned}$$

Observe que essa equação é verdadeira para $(x,y,z)=(0,0,0)$:

$$a\cdot 0+b\cdot 0-c\cdot 0=0.$$

Portanto, qualquer plano tangente ao cone passa por $(0,0,0)$.

E4. Determine a derivada direcional da função $z=f(x,y)$, na direção do vetor $(2,2)$ e no ponto $(0,1)$, sendo z definida implicitamente pela equação

$$x^3+y^3+z^3+xyz=0.$$

Qual é o valor máximo da derivada direcional de $z=f(x,y)$ no ponto $(0,1)$?

O vetor unitário da direção de $u=(2,2)$ é $\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{8}}(2,2)$. A derivada direcional é dada por:

$$D_u f(0,1)=\nabla f(0,1)\cdot\hat{u}.$$

Vamos calcular o vetor gradiente em $(0,1)$: $\nabla f(0,1)=(f_x(0,1),f_y(0,1))$. Substituindo x_0 e $y=1$ em $x^3+y^3+z^3+xyz=0$, obtemos

$$1+z^3=0\Rightarrow z=-1.$$

Seja $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+xyz$. Então,

$$\begin{aligned}
F_x(x,y,z)&=3x^2+yz\\
F_y(x,y,z)&=3y^2+xz\\
F_z(x,y,z)&=3z^2+xy.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
f_x(0,1)&=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1,-1)}=-\frac{F_x(0,1,-1)}{F_z(0,1,-1)}=\frac{1}{3}\\
f_y(0,1)&=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1,-1)}=-\frac{F_y(0,1,-1)}{F_z(0,1,-1)}=-\frac{3}{3}=-1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_u f(0,1) &= \left(\frac{1}{3}, -1\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}\right) \\ &= \frac{2}{3\sqrt{8}} - \frac{2}{\sqrt{8}} = -\frac{4}{3\sqrt{8}}. \end{aligned}$$

O valor máximo da derivada direcional, que ocorre na direção do gradiente, é dado por

$$|\nabla f(0,1)| = \left|\left(\frac{1}{3}, -1\right)\right| = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

> E5. Determine os máximos e mínimos absolutos de f no conjunto D.
> $$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2);\ D \text{ é o disco } x^2+y^2 \leq 4.$$

Primeiro vamos investigar no interior do disco. Procuramos pelos pontos críticos de f :

$$\nabla f(x,y) = (2xe^{-x^2-y^2}(1-x^2-2y^2), 2ye^{-x^2-y^2}(2-x^2-2y^2)) = (0,0).$$

Agora,

$$f_x = 2xe^{-x^2-y^2}(1-x^2-2y^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x^2+2y^2 = 1.$$

Se $x = 0$, então de $f_y = 0$ obtemos

$$2ye^{-y^2}(2-2y^2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = \pm 1.$$

Daí, temos os pontos $(0,0), (0,1), (0,-1)$.

Agora, se $x^2+2y^2 = 1$, então de $f_y = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2ye^{-x^2-y^2}(2-x^2-2y^2) = 2ye^{-x^2-y^2}(2-(x^2+2y^2)) = 2ye^{-x^2-y^2} \\ &\Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Daí, substituindo $y = 0$ em $x^2+2y^2 = 1$, obtemos $x = \pm 1$. O que nos dá os pontos $(1,0), (-1,0)$.

Agora analisemos os pontos críticos na fronteira de D. Como na fronteira temos $x^2+y^2 = 4$, então $f(x,y) = e^{-4}(4+y^2) = \dfrac{4+y^2}{e^4}$. Note que o menor valor de f (na fronteira) ocorre quando $y = 0$ (logo $x^2 = 4$ e assim $x = \pm 2$) e o maior ocorre quando $y^2 = 4$ i.e $y = \pm 2$ (e nesse caso $x = 0$.) Ou seja, temos os pontos $(2,0), (-2,0), (0,2), (0,-2)$.

Como o disco D é um conjunto **compacto** (limitado e fechado) e f é contínua em D, então f admite máximos e mínimos absolutos em D. Comparando os valores de f nos pontos críticos, temos

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(0,\pm 1) &= 2e^{-1} = \frac{2}{e} \\ f(\pm 1,0) &= e^{-1} = \frac{1}{e} \\ f(\pm 2,0) &= 4e^{-4} = \frac{4}{e^4} \\ f(0,\pm 2) &= 8e^{-4} = \frac{8}{e^4}. \end{aligned}$$

Portanto, em D o valor máximo absoluto de f é $f(0,\pm 1) = 2e^{-1}$ e o valor mínimo absoluto é $f(0,0) = 0$.

Observação: A análise dos pontos críticos e máximos/mínimos na fronteira de D (i.e quando $x^2+y^2 = 4$) também pode ser feita usando os Multiplicadores de Lagrange.

E6. Determine os valores máximo/mínimo da função $f(x,y,z) = x+2y$ na curva da interseção do plano $x+y+z=1$ com o cilindro $y^2+z^2=4$.

Seja $g(x,y,z) = x+y+z=1$ e $h(x,y,z) = y^2+z^2=4$. Observe que:

- 1 é valor regular de g, pois $\nabla g(x,y,z) = (1,1,1) \neq (0,0,0)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
- 4 é valor regular de h, pois $\nabla h(x,y,z) = (0,2y,2z) \neq (0,0,0)$ sempre que $y^2+z^2=4$. (Note que $(0,2y,2z) = (0,0,0)$ se e só se $y=z=0$ mas $0^2+0^2 \neq 4$.)
- ∇g não é paralelo a ∇h, pois $(1,1,1) \neq k(0,2y,2z)$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Podemos então usar o Método dos Multiplicadores de Lagrange para encontrarmos nossos candidatos a máximos e mínimos de f sobre a curva.

Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, devemos resolver as equações

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h, \qquad g(x,y,z) = 1, \qquad h(x,y,z) = 4.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} 1 = \lambda & (1) \\ 2 = \lambda + 2\mu y & (2) \\ 0 = \lambda + 2\mu z & (3) \\ x+y+z=1 & (4) \\ y^2+z^2=4 & (5) \end{cases}$$

Substituindo $\lambda = 1$ em (2), obtemos

$$2\mu y = 1 \Rightarrow \mu y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2\mu}.$$

Substituindo $\lambda = 1$ em (3), obtemos

$$2\mu z = -1 \Rightarrow \mu z = \frac{-1}{2} \Rightarrow z = \frac{-1}{2\mu}.$$

Da equação (4), temos então

$$x+y+z=1 \Rightarrow x + \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{2\mu} = 1 \Rightarrow x = 1.$$

Da equação (5), temos

$$y^2+z^2=4 \Rightarrow \frac{1}{4\mu^2} + \frac{1}{4\mu^2} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2\mu^2} = 4 \Rightarrow \mu^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \mu = \pm\frac{1}{\sqrt{8}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Substituindo o valor encontrado de μ nas expressões de y e z acima, obtemos os seguintes possíveis pontos : $(1,\sqrt{2},-\sqrt{2}), (1,-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Agora, observe que a interseção entre o plano e o cilindro é dado por uma elipse - que é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^3$, e como f é contínua, então f admite máximos e mínimos absolutos na curva de interseção. Portanto, uma vez que $f(1,\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 1+2\sqrt{2}$ e $f(1,-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 1-2\sqrt{2}$, então $(1,\sqrt{2},-\sqrt{2})$ é ponto de máximo absoluto de f sobre a curva e $(1,-\sqrt{2},\sqrt{2})$ é ponto de mínimo absoluto de f sobre a curva.