Cálculo II - MA211
IMECC - UNICAMP
Neemias Martins
neemias.org/ped

#6 AULA DE EXERCÍCIOS

NEEMIAS MARTINS

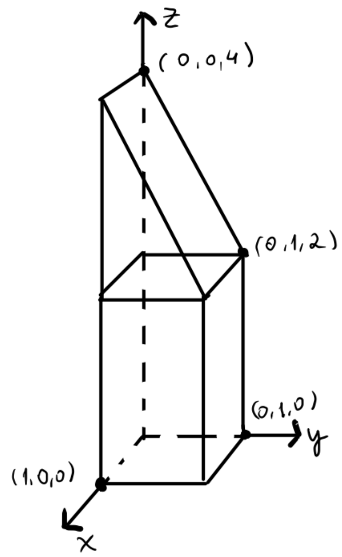
1. Calcule a integral dupla, identificando-a antes com o volume de um sólido.

$$\int\int_R (4-2y)dA, \quad R = [0,1]\times[0,1].$$

Como $z = f(x,y) = 4-2y \geq 0$ para $0 \leq y \leq 1$, a integral representa o volume do sólido dado pela porção do sólido retangular $[0,1]\times[0,1]\times[0,4]$ que se encontra abaixo do plano $z = 4-2y$. Então,

$$\int\int_R (4-2y)dA = 1\cdot 1\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 3.$$

(O volume do sólido retangular $[0,1]\times[0,1]\times[0,2]$ mais o volume do sólido triangular na figura abaixo.)



2. Calcule a integral iterada

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (y + y^2\cos x)\,dx\,dy.$$

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(y+y^2\cos x)\,dx\,dy = \int_{-3}^{3}\left[yx+y^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}dy$$
$$= \int_{-3}^{3}(y\frac{\pi}{2}+y^2\sin\frac{\pi}{2})-(y\cdot 0+y^2\sin 0)dy$$
$$= \int_{-3}^{3}\frac{\pi}{2}y+y^2dy$$
$$= \frac{\pi}{2}\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\Big|_{-3}^{3}$$
$$= \left(9\frac{\pi}{4}+\frac{27}{3}\right)-\left(9\frac{\pi}{4}-\frac{27}{3}\right)$$
$$= 18$$

3. Determine o volume do sólido limitado pelo paraboloide $z = 2+x^2+(y-2)^2$ e pelos planos $z = 1$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ e $y = 4$.

Note que $z = 2+x^2+(y-2)^2 \geq 0$ para todo (x, y). Logo, o volume do sólido que está acima do retângulo $R = [-1,1]\times[0,4]$ e abaixo da superfície $z = 2+x^2+(y-2)^2$ é dado por

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{4}2+x^2+(y-2)^2\,dy\,dx.$$

O volume do sólido limitado pelo paraboloide, pela região R e pelo plano $z = 1$ é então dado por:

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{4}2+x^2+(y-2)^2\,dy\,dx - 2\cdot 4\cdot 1.$$

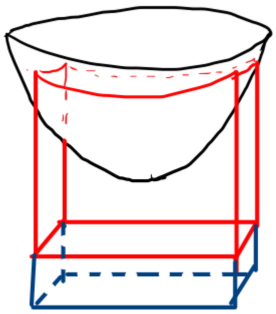
(A expressão em azul representa o volume do sólido retangular $[-1,1]\times[0,4]\times[0,1]$.)

Fazendo $u = y-2$, temos $du = dy$, logo $\int(y-2)^2dy = \int u^2du = \frac{u^3}{3}+c = \frac{(y-2)^3}{3}+c$. Então:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{4}2+x^2+(y-2)^2\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\left[(2+x^2)y+\frac{(y-2)^3}{3}\right]_0^4dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\left((2+x^2)4+\frac{8}{3}\right)-\left((2+x^2)0-\frac{8}{3}\right)dx$$
$$= \int_{-1}^{1}4x^2+8+\frac{16}{3}dx = \int_{-1}^{1}4x^2+\frac{40}{3}dx$$
$$= 4\frac{x^3}{3}+\frac{40}{3}x\Big|_{-1}^{1}$$
$$= \frac{4}{3}+\frac{40}{3}+\frac{4}{3}+\frac{40}{3} = \frac{88}{3}.$$

Portanto,

$$V = \frac{88}{3}-8 = \frac{64}{3}.$$



4. Determine o valor médio de $f(x,y) = x^2y$ sobre o retângulo R de vértices $(-1,0),(-1,5),(1,5),(1,0)$.

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{A(R)} \int\int_R f(x,y)dA,$$

sendo $A(R)$ a área do retângulo R.

Temos $R = [-1,1] \times [0,5]$, logo $A(R) = 2 \cdot 5 = 10$, então

$$\begin{aligned} f_{\text{med}} &= \frac{1}{10}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{5} x^2y\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{10}\int_{-1}^{1} x^2\frac{y^2}{2}\Big]_0^5 dx \\ &= \frac{1}{10}\int_{-1}^{1} \frac{25}{2}x^2 dx \\ &= \frac{25}{20}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

5. Calcule

$$\int\int_R ye^{-xy}dA; \quad R = [0,2]\times[0,3].$$

$$\begin{aligned} \int\int_R ye^{-xy}dA &= \int_0^3\int_0^2 ye^{-xy}dx\,dy \text{ (faça } u = -xy \Rightarrow du = -y\,dx \Rightarrow \int ye^{-xy}dx = \int -e^u du = -e^u + C) \\ &= \int_0^3 -e^{-xy}\Big|_0^2 dy \\ &= \int_0^3 -e^{-2y} + 1\,dy = \int_0^3 -e^{-2y}dy + \int_0^3 1\,dy \text{ (faça } v = -2y \Rightarrow dv = -2dy) \\ &= \frac{e^{-2y}}{2} + y\Big|_0^3 \\ &= \frac{e^{-6}}{2} + 3 - \frac{1}{2} = \frac{e^{-6}}{2} + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$