

Aula de Exercícios

◆ Cálculo II - MA211

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

EXERCÍCIO 1. Mostre que não existe f com derivadas parciais dadas por

$$f_x(x, y) = e^{xy} + \sin(x + y) \text{ e } f_y(x, y) = \cos(xy).$$

SOLUÇÃO: Temos

$$f_{xy}(x, y) = xe^{xy} + \cos(x + y) \text{ e } f_{yx}(x, y) = -y \operatorname{sen} xy.$$

Logo, $f_{xy}(x, y) \neq f_{yx}(x, y)$, por exemplo $f_{xy}(0, 0) = 1 \neq 0 = f_{yx}(0, 0)$. Como f_{xy} e f_{yx} são contínuas e $f_{xy}(x, y) \neq f_{yx}(x, y)$, segue pelo Teorema de Schwarz que não existe f .

EXERCÍCIO 2. Verifique se f é diferenciável ou não.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUÇÃO: Mostraremos que f não é contínua em $(0, 0)$. Temos $f(0, 0) = 0$. Vamos calcular $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$.

• Sobre o eixo x :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=0}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4 + 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

• Sobre a reta $y = x$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=x}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=0}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=x}} f(x, y),$$

segue que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ não existe. Logo f não é contínua em $(0, 0)$. Portanto f não é diferenciável em $(0, 0)$.

EXERCÍCIO 3. Suponha que em certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x, y) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

- (a): Determine a taxa de variação do potencial no ponto $p = (3, 4, 5)$ em direção ao ponto $q = (4, 5, 4)$.
 (b): Determine a direção e sentido em que V varia mais rapidamente e calcule a taxa de variação máxima.

SOLUÇÃO:(a) O vetor gradiente é dado por

$$\begin{aligned}\nabla V(x, y, z) &= (10x - 3y + yz, -3x + xz, xy) \\ \Rightarrow \nabla V(3, 4, 5) &= (38, 6, 12).\end{aligned}$$

Considere o vetor $u = \vec{pq} = (4 - 3, 5 - 4, 4 - 5) = (1, 1, -1)$. Um vetor unitário na direção e sentido de u é

$$\hat{u} = \frac{(1, 1, -1)}{|(1, 1, -1)|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1).$$

A taxa de variação de V em p na direção de \hat{u} é

$$\begin{aligned}D_{\hat{u}}V(3, 4, 5) &= \nabla V(3, 4, 5) \cdot \hat{u} \\ &= (38, 6, 12) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \\ &= \frac{32}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

(b) A direção e sentido de maior crescimento de V é dada pelo vetor gradiente $\nabla V(3, 4, 5) = (38, 6, 12) = 2(19, 3, 6)$ ou, de modo equivalente, pelo vetor $(19, 3, 6)$. A taxa de variação máxima é dada por

$$|\nabla V(3, 4, 5)| = |(38, 6, 12)| = \sqrt{(38)^2 + 6^2 + (12)^2} = \sqrt{1624} = 2\sqrt{406}.$$

EXERCÍCIO 4. Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

SOLUÇÃO: Os pontos críticos de f satisfazem a igualdade:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = (0, 0).$$

Ou seja,

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow x^2 - y = 0 & (1) \\ 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow y^2 - x = 0 & (2) \end{cases}$$

Da Equação (1), temos $y = x^2$. Substituindo na Equação (2), obtemos

$$\begin{aligned}x^4 - x &= 0 \\ \Rightarrow x(x^3 - 1) &= 0 \\ \Rightarrow x &= 0 \text{ ou } x = 1.\end{aligned}$$

Se $x = 0$, temos $y = 0$. Se $x = 1$, então $y = 1$. Os pontos críticos são $(0, 0)$ e $(1, 1)$. A fim de classificar os pontos críticos, calculamos as derivadas parciais de segunda ordem e o

determinante da matriz Hessiana.

$$f_{xx} = 6x, f_{xy} = f_{yx} = -3, f_{yy} = 6y.$$

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36xy - 9.$$

Então, pelo Teste da Segunda Derivada:

- Como $D(0, 0) = -9 < 0$, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela e $f(0, 0) = 4$.
- Como $D(1, 1) = 27 > 0$ e $f_{xx}(1, 1) = 6 > 0$, então $f(1, 1) = 3$ é valor mínimo local, ou seja, f possui um mínimo local em $(1, 1)$.

EXERCÍCIO 5. Encontre todos os valores extremos da função $f(x, y) = xy$ sobre a elipse

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

e classifique-os como máximo ou mínimo.

SOLUÇÃO:

- Passo 1: Considere

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2.$$

Note que 8 é valor regular de g , ou seja,

$$\nabla g(x, y) = (2x, 8y) \neq (0, 0) \text{ para todo } (x, y) \text{ que satisfaz } x^2 + 4y^2 = 8,$$

pois $(2x, 8y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ e $0^2 + 4 \cdot 0^2 \neq 8$.

- Passo 2: Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, devemos ter

$$\nabla f = \lambda \nabla g \text{ e } g(x, y) = x^2 + 4y^2 = 8.$$

Logo,

$$\begin{cases} y = 2x\lambda & (1) \\ x = 8y\lambda & (2) \\ x^2 + 4y^2 = 8 & (3) \end{cases}$$

Note que $x, y \neq 0$. Ainda, pelas equações (1) e (2) obtemos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{y}{2x} = \frac{x}{8y} \\ \Rightarrow 8y^2 &= 2x^2 \\ \Rightarrow y^2 &= \frac{x^2}{4} \\ \Rightarrow y &= \pm \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Substituindo na Equação (3), obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 8 \\ x^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 &= 8 \\ \Rightarrow 2x^2 &= 8 \\ \Rightarrow x^2 &= 4 \\ \Rightarrow x &= \pm 2. \end{aligned}$$

As soluções são então $(2, 1)$, $(-2, -1)$, $(2, -1)$ e $(-2, 1)$.

• Passo 3: Como $B = \{(x, y) | x^2 + 4y^2 = 8\}$ é compacto (limitado e fechado) e f é contínua, então f admite extremos absolutos em B . Temos

$$f(2, 1) = f(-2, -1) = 2 > f(-2, 1) = f(2, -1) = -2,$$

então o valor máximo global de f sobre a elipse é 2 e o valor mínimo global é -2.

EXERCÍCIO 6. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

SOLUÇÃO: Seja $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. O plano tangente à F em um ponto (a, b, c) satisfaz:

$$\begin{aligned}\nabla F(a, b, c) \cdot (x - a, y - b, z - c) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a, 2b, -2c) \cdot (x - a, y - b, z - c) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a(x - a) + 2b(y - b) - 2c(z - c) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2ax - 2a^2 + 2by - 2b^2 - 2cz + 2c^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(ax + by - cz) - 2(a^2 + b^2 - c^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow ax + by - cz - (a^2 + b^2 - c^2) &= 0.\end{aligned}$$

Uma vez que (a, b, c) pertence ao cone, então $a^2 + b^2 = c^2$, ou seja

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0.$$

Então, todo ponto (x, y, z) do plano tangente satisfaz a equação

$$\begin{aligned}ax + by - cz - (a^2 + b^2 - c^2) &= 0 \\ \Rightarrow ax + by - cz &= 0.\end{aligned}$$

Observe que essa equação é verdadeira para $(x, y, z) = (0, 0, 0)$:

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 - c \cdot 0 = 0.$$

Portanto, qualquer plano tangente ao cone passa por $(0, 0, 0)$.

EXERCÍCIOS EXTRAS

 **EXERCÍCIO 7.** Determine os máximos e mínimos absolutos de f no conjunto D .

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}(x^2 + 2y^2); D \text{ é o disco } x^2 + y^2 \leq 4.$$

SOLUÇÃO: Primeiro vamos investigar no interior do disco. Procuramos pelos pontos críticos de f :

$$\nabla f(x, y) = (2xe^{-x^2 - y^2}(1 - x^2 - 2y^2), 2ye^{-x^2 - y^2}(2 - x^2 - 2y^2)) = (0, 0).$$

Agora,

$$f_x = 2xe^{-x^2 - y^2}(1 - x^2 - 2y^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + 2y^2 = 1.$$

Se $x = 0$, então de $f_y = 0$ obtemos

$$2ye^{-y^2}(2 - 2y^2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = \pm 1.$$

Daí, temos os pontos $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$.

Agora, se $x^2 + 2y^2 = 1$, então de $f_y = 0$ obtemos

$$0 = 2ye^{-x^2-y^2}(2 - x^2 - 2y^2) = 2ye^{-x^2-y^2}(2 - (x^2 + 2y^2)) = 2ye^{-x^2-y^2} \\ \Rightarrow y = 0.$$

Daí, substituindo $y = 0$ em $x^2 + 2y^2 = 1$, obtemos $x = \pm 1$. O que nos dá os pontos $(1, 0), (-1, 0)$.


Agora analisemos os pontos críticos na fronteira de D . Como na fronteira temos $x^2 + y^2 = 4$, então $f(x, y) = e^{-4}(4 + y^2) = \frac{4 + y^2}{e^4}$. Note que o menor valor de f (na fronteira) ocorre quando $y = 0$ (logo $x^2 = 4$ e assim $x = \pm 2$) e o maior ocorre quando $y^2 = 4$ i.e $y = \pm 2$ (e nesse caso $x = 0$.) Ou seja, temos os pontos $(2, 0), (-2, 0), (0, 2), (0, -2)$.

Como o disco D é um conjunto **compacto** (limitado e fechado) e f é contínua em D , então f admite máximos e mínimos absolutos em D . Comparando os valores de f nos pontos críticos, temos

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0 \\ f(0, \pm 1) &= 2e^{-1} = \frac{2}{e} \\ f(\pm 1, 0) &= e^{-1} = \frac{1}{e} \\ f(\pm 2, 0) &= 4e^{-4} = \frac{4}{e^4} \\ f(0, \pm 2) &= 8e^{-4} = \frac{8}{e^4}. \end{aligned}$$

Portanto, em D o valor máximo absoluto de f é $f(0, \pm 1) = 2e^{-1}$ e o valor mínimo absoluto é $f(0, 0) = 0$.

Observação: A análise dos pontos críticos e máximos/mínimos na fronteira de D (i.e quando $x^2 + y^2 = 4$) também pode ser feita usando os Multiplicadores de Lagrange.

 **EXERCÍCIO 8.** Determine os valores máximo/mínimo da função $f(x, y, z) = x + 2y$ na curva da interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $y^2 + z^2 = 4$.

SOLUÇÃO: Seja $g(x, y, z) = x + y + z = 1$ e $h(x, y, z) = y^2 + z^2 = 4$. Observe que:

- 1 é valor regular de g , pois $\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- 4 é valor regular de h , pois $\nabla h(x, y, z) = (0, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ sempre que $y^2 + z^2 = 4$. (Note que $(0, 2y, 2z) = (0, 0, 0)$ se e só se $y = z = 0$ mas $0^2 + 0^2 \neq 4$.)
- ∇g não é paralelo a ∇h , pois $(1, 1, 1) \neq k(0, 2y, 2z)$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Podemos então usar o Método dos Multiplicadores de Lagrange para encontrarmos nossos candidatos a máximos e mínimos de f sobre a curva.

Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, devemos resolver as equações

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h, \quad g(x, y, z) = 1, \quad h(x, y, z) = 4.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} 1 = \lambda & (1) \\ 2 = \lambda + 2\mu y & (2) \\ 0 = \lambda + 2\mu z & (3) \\ x + y + z = 1 & (4) \\ y^2 + z^2 = 4 & (5) \end{cases}$$

Substituindo $\lambda = 1$ em (2), obtemos

$$2\mu y = 1 \Rightarrow \mu y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2\mu}.$$

Substituindo $\lambda = 1$ em (3), obtemos

$$2\mu z = -1 \Rightarrow \mu z = \frac{-1}{2} \Rightarrow z = \frac{-1}{2\mu}.$$

Da equação (4), temos então

$$x + y + z = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{2\mu} = 1 \Rightarrow x = 1.$$

Da equação (5), temos

$$y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{4\mu^2} + \frac{1}{4\mu^2} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2\mu^2} = 4 \Rightarrow \mu^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{8}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Substituindo o valor encontrado de μ nas expressões de y e z acima, obtemos os seguintes possíveis pontos : $(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), (1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Agora, observe que a interseção entre o plano e o cilindro é dado por uma elipse - que é um conjunto compacto em \mathbb{R}^3 , e como f é contínua, então f admite máximos e mínimos absolutos na curva de interseção. Portanto, uma vez que $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$ e $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$, então $(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ é ponto de máximo absoluto de f sobre a curva e $(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$ é ponto de mínimo absoluto de f sobre a curva.

