

Aula de Exercícios

- § Teorema de Green
- § Rotacional e Divergente
- § Curvas paramétricas e suas áreas
- § Integrais de Superfície

Neemias Martins
neemias.org/ped

16.4 - Stewart 7^a Ed.
Ex. 13

1. Use o Teorema de Green para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
sendo

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \cos y, x \sin y \rangle$$

e C é o círculo $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$.
orientado no sentido horário.

Teorema de Green

Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D uma região delimitada por C .

Se P e Q tem derivadas parciais de 1^a ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

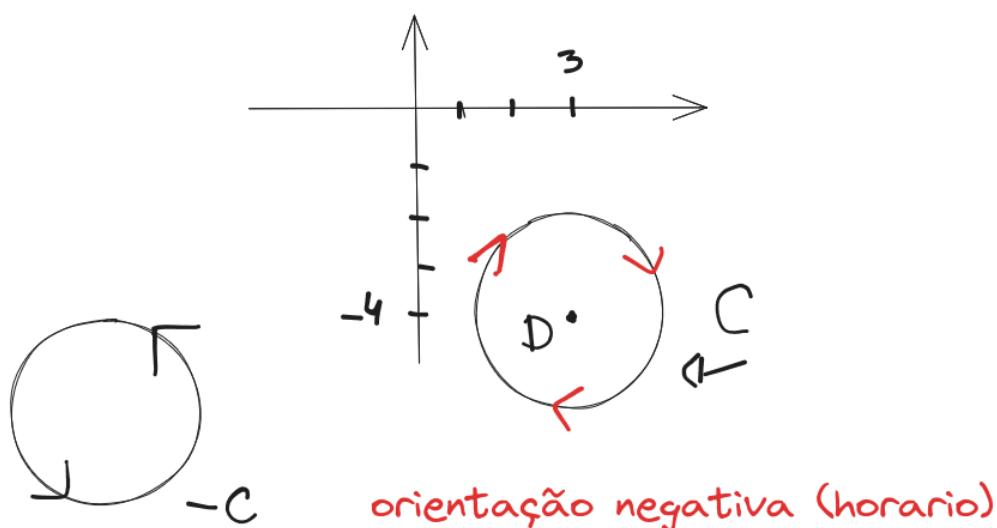
Solução:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \langle y - \cos y, x \sin y \rangle \\ &= (\underbrace{y - \cos y}_P) i + (\underbrace{x \sin y}_Q) j \\ F &= P i + Q j \end{aligned}$$

C

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$$

círculo centrado em $(3, -4)$
com raio 2



orientação negativa (horário)

Note que a curva $-C$ é uma curva fechada, simples, contínua por partes e orientada positivamente, então segue pelo Teorema de Green:

$$\int_{-C} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (x \sin y) - \frac{\partial}{\partial y} (y - \cos y) \right) dA$$

$$\Rightarrow \int_C F \cdot d\mathbf{r} = - \iint_{-C} F \cdot d\mathbf{n} = - \iint_D \left(\sin y - (1 + \sin y) \right) dA$$

$$= - \iint_D -1 dA = \iint_D 1 \cdot dA = A(D)$$

\mathcal{R}

Usando coordenadas polares, fazemos

$$x = r \cos \theta \quad 0 \leq r \leq 2$$

$$y = r \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^2 \right) \\ &= 2\pi \cdot (2 - 0) = 4\pi \end{aligned}$$

Portanto, $\int_C F \cdot d\mathbf{r} = 4\pi$.

Rotacional e Divergente

Se $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais de P , Q e R existem, então o rotacional de \mathbf{F} é o campo vetorial definido por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

O divergente de \mathbf{F} é a função de 3 variáveis dada por:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) \\ = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

16.5 - Stewart 7º Ed.
Ex. 1

2. Determine o rotacional e o divergente do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xyz \mathbf{i} - x^2y \mathbf{k}$$

2. Determine o rotacional e o divergente do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xyz \mathbf{i} - x^2y \mathbf{k}$$

Solução:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & 0 & x^2y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-x^2y) - 0 \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz) \right) \mathbf{j} + \left(0 - \frac{\partial}{\partial y}(xyz) \right) \mathbf{k}$$

$$= -x^2 \mathbf{i} - (-2xy - xy) \mathbf{j} - xz \mathbf{k}$$

$$= -x^2 \mathbf{i} + 3xy \mathbf{j} - xz \mathbf{k}.$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2y)$$

$$= yz + 0 + 0$$

$$\text{div } \mathbf{F} = yz.$$

Na videoaula omiti sem querer o cálculo do divergente

3. Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se for conservativo, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + 3xy^2 z^2 \mathbf{k}$$

Usaremos o seguinte teorema:

Teorema: Se \mathbf{F} for um campo vetorial definido sobre todo \mathbb{R}^3 cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $\text{rot } \mathbf{F} = 0$, \mathbf{F} será um campo vetorial conservativo.

$$\overbrace{\quad\quad\quad}^{\mathbf{F} = \nabla f}$$

Solução:

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2 z^2 \end{vmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial y} (3xy^2 z^2) - \frac{\partial}{\partial z} (2xyz^3) \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x} (3xy^2 z^2) - \frac{\partial}{\partial z} (y^2 z^3) \right) \mathbf{j} + \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} (2xyz^3) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2 z^3) \right) \mathbf{k} \\
 &= (6xyz^2 - 6xyz^2) \mathbf{i} - (3y^2 z^2 - 3y^2 z^2) \mathbf{j} + \\
 &\quad + (2yz^3 - 2yz^3) \mathbf{k} \\
 &= 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Como \mathbf{F} está definido em todo \mathbb{R}^3 , e suas funções componentes possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, segue que \mathbf{F} é conservativo.
 Então existe uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

$$\nabla f = \mathbf{F}$$

$$f_x(x, y, z) = y^2 z^3$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = xy^2 z^3 + g(y, z)$$

$$\Rightarrow f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z).$$

$$\text{Mas } f_y(x, y, z) = 2xyz^3$$

$$\Rightarrow g_y(y, z) = h(z)$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = xy^2 z^3 + h(z)$$

$$\Rightarrow f_z(x, y, z) = 3xy^2 z^2 + h'(z)$$

$$\text{Mas } f_z(x, y, z) = 3xyz^2$$

$$\nabla f = \mathbf{F}$$

$$\Rightarrow h'(z) = 0$$

$$\Rightarrow h(z) = K$$

Logo, uma função potencial para \mathbf{F} é:

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3 + K$$

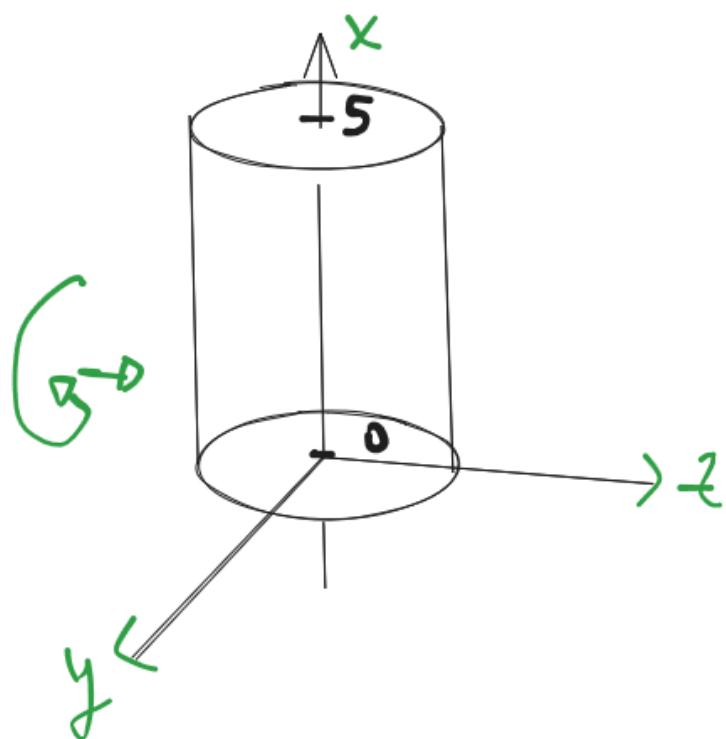
$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } K=0 \\ f(x, y, z) = xy^2 z^3 \end{array} \right)$$

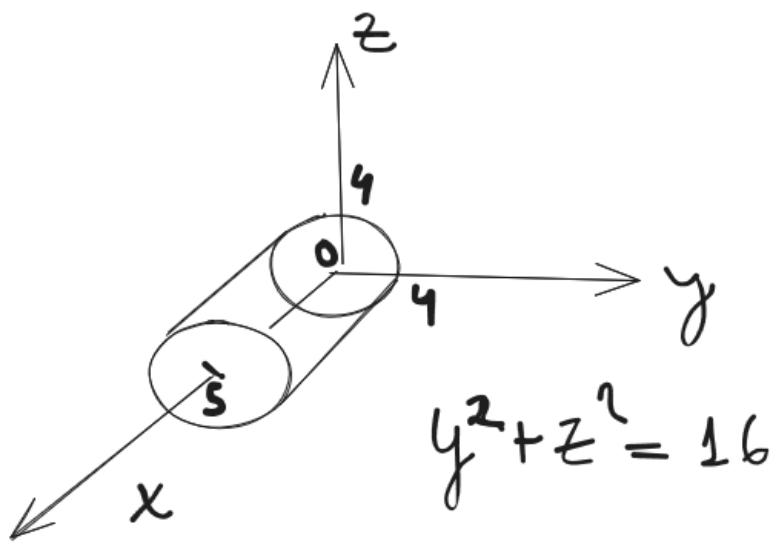
Superfícies Parametrizadas e suas Áreas

16.6 - Stewart 7^a Ed.
Ex. 25

4. Determine uma representação parametrizada para a superfície:

S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 16$
que se encontra entre os planos $x=0$ e $x=5$.





$$x = x$$

$$0 \leq x \leq 5$$

$$y = 4 \cos \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$z = 4 \sin \theta$$

Observe que S também pode ser descrito como uma superfície de revolução:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = f(x) \cos \theta \\ z = f(x) \sin \theta \\ t.g \quad f(x) = 4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

5. Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada por
 $x = u + v$, $y = 3u^2$, $z = u - v$
no ponto $(2, 3, 0)$.

Solução:

A equação paramétrica da superfície pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} r(u, v) &= x(u, v) \hat{i} + y(u, v) \hat{j} + z(u, v) \hat{k} \\ &= (u + v) \hat{i} + 3u^2 \hat{j} + (u - v) \hat{k}. \end{aligned}$$

Primeiro vamos calcular os vetores tangentes:

$$\begin{aligned} r_u &= \frac{\partial x}{\partial u} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \hat{k} \\ &= 1 \hat{i} + 6u \hat{j} + 1 \cdot \hat{k} \\ &= \langle 1, 6u, 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_v &= \frac{\partial x}{\partial v} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \hat{k} \\ &= 1 \hat{i} + 0 \hat{j} + (-1) \hat{k} = \hat{i} - \hat{k} \\ &= \langle 1, 0, -1 \rangle \end{aligned}$$

Assim, o vetor normal ao plano tangente é

$$\nabla_u \times \nabla_N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 6u & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -6u i - (-1-1) j + (-6u) k \\ &= -6u i + 2 j - 6u k \\ &= \langle -6u, 2, -6u \rangle \end{aligned}$$

Como $(2, 3, 0) \in S$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u + v = 2 \\ y = 3u = 3 \\ z = u - v = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} u = v \\ \xrightarrow{\text{ }} 2u = 2 \\ \Rightarrow u = 1 \end{array}$$

Observe que o ponto $(2, 3, 0)$ corresponde aos valores dos parâmetros $u=1$ e $v=1$.

Logo um vetor normal no ponto $(2, 3, 0)$ é

$$\begin{aligned} &-6i + 2j - 6k \\ &= \langle -6, 2, -6 \rangle \end{aligned}$$

Logo uma equação do plano tangente à superfície no ponto $(2,3,0)$ é:

$$-6(x-2) + 2(y-3) - 6(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x + 12 + 2y - 6 - 6z = 0$$

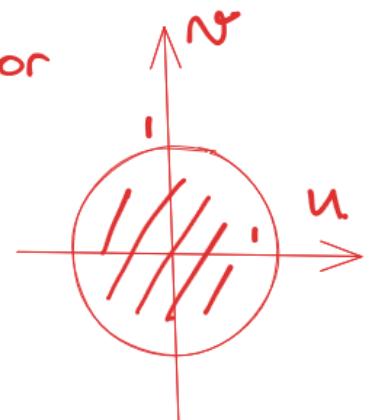
$$\Leftrightarrow -6x + 2y - 6z = -6$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + 3 = 3$$

6. Determine a área da superfície dada por

$$\begin{aligned}x &= u \mathbf{i} \\y &= u \mathbf{i} + v \mathbf{j} \\z &= u \mathbf{i} - v \mathbf{k}\end{aligned}$$

tal que
 $u^2 + v^2 \leq 1$



Solução:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v) &= u \mathbf{i} + (u + v) \mathbf{j} + (u - v) \mathbf{k} \\&= \langle u \mathbf{i}, (u + v) \mathbf{j}, (u - v) \mathbf{k} \rangle\end{aligned}$$

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

$$\mathbf{r}_u = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

$$\mathbf{r}_v = \langle 0, 1, -1 \rangle$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-1) \mathbf{i} - (-v-u) \mathbf{j} + (v-u) \mathbf{k}$$

$$= -2 \mathbf{i} + (u+v) \mathbf{j} + (v-u) \mathbf{k}$$

$$= \langle -2, u+v, v-u \rangle$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{(-2)^2 + (u+v)^2 + (v-u)^2}$$

$$= \sqrt{4 + u^2 + 2uv + v^2 + v^2 - 2uv + u^2}$$

$$= \sqrt{4 + 2(u^2 + v^2)}$$

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA = \iint_D \sqrt{4 + 2(u^2 + v^2)} dA =$$

$$u = \alpha \cos \theta$$

$$v = \alpha \sin \theta$$

$$= \int_{\alpha=0}^{\alpha=1} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sqrt{4 + 2\alpha^2} \cdot \alpha \, d\alpha \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \sqrt{4 + 2\alpha^2} \alpha \, d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\alpha \cdot \int_0^1 \sqrt{4+2\alpha^2} \underbrace{\alpha \cdot d\alpha}_{w = 4+2\alpha^2} =$$

$$\left. \begin{aligned} w &= 4+2\alpha^2 \\ dw &= 4\alpha d\alpha \Rightarrow \alpha d\alpha = \frac{1}{4} dw \\ \int \sqrt{w} \frac{1}{4} dw &= \frac{1}{4} \frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} w^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned} \right]$$

$$= 2\pi \cdot \left. \frac{1}{6} (4+2\alpha^2)^{\frac{3}{2}} \right|_0^1$$

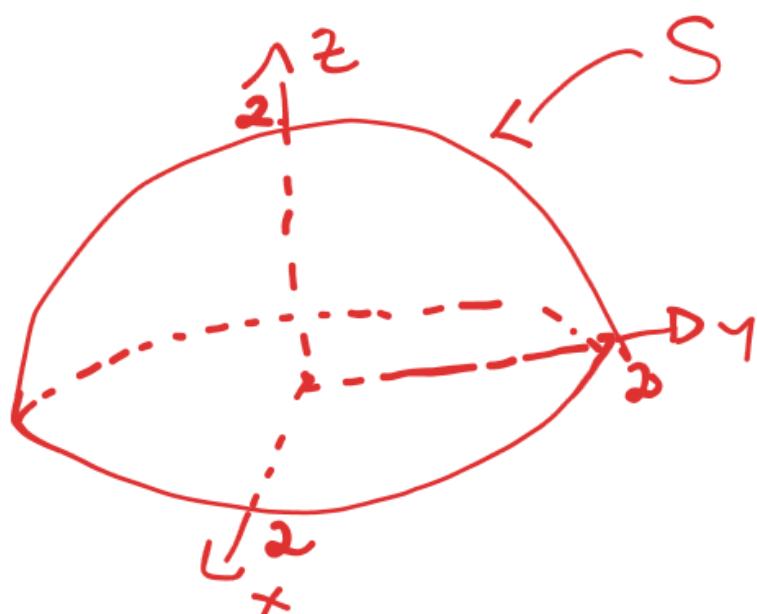
$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi}{6} \left(6^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{\pi}{3} (6\sqrt{6} - 8) \\ &= \left(2\sqrt{6} - \frac{8}{3} \right) \pi \end{aligned}$$

16.7 - Stewart 7^a Ed.
Ex. 17

7. Calcule a integral de superfície:

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z) dS$$

S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$



$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(r(u, v)) \cdot |r_u \times r_v| dA$$

Usando coordenadas esféricas

$$x = 2 \sin \phi \cos \theta$$

$$y = 2 \sin \phi \sin \theta$$

$$z = 2 \cos \phi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = 2 \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + 2 \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + 2 \cos \phi \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\phi = \langle 2 \cos \phi \cos \theta, 2 \cos \phi \sin \theta, -2 \sin \phi \rangle$$

$$\mathbf{r}_\theta = \langle -2 \sin \phi \sin \theta, 2 \sin \phi \cos \theta, 0 \rangle$$

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 \cos \phi \cos \theta & 2 \cos \phi \sin \theta & -2 \sin \phi \\ -2 \sin \phi \sin \theta & 2 \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(4 \sin^2 \phi \cos \theta \right) \mathbf{i} - \left(-4 \sin^2 \phi \sin \theta \right) \mathbf{j} + \left(4 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta + 4 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta \right) \mathbf{k}$$

$$= \langle 4 \sin^2 \phi \cos \theta, 4 \sin^2 \phi \sin \theta, 4 \sin \phi \cos \phi \rangle$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |\boldsymbol{n}_\phi \times \boldsymbol{n}_\theta| &= \sqrt{16 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + 16 \sin^4 \phi \sin^2 \theta + 16 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\
 &= \sqrt{16 \sin^4 \phi (1) + 16 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\
 &= \sqrt{16 \sin^2 \phi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)} \\
 &= 4 \cdot \sin \phi \quad p^2 \cdot \sin \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS &= \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 \sin^2 \phi \cos^2 \theta \underbrace{2 \cos \phi}_{\text{orange}} + 4 \sin^2 \phi \underbrace{\sin^2 \theta}_{\text{green}} \underbrace{2 \cos \phi}_{\text{blue}} \right) |\boldsymbol{n}_\phi \times \boldsymbol{n}_\theta| d\phi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 \phi \cdot 2 \cos \phi \cdot 4 \sin \phi d\phi d\theta
 \end{aligned}$$

4 sin φ
 " "
 ~~~~~

$$= \int_0^{\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 \phi \cdot 2 \cos \phi \cdot 4 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 32 \sin^3 \phi \underbrace{\cos \phi \, d\phi}_{du} =$$

$$u = \sin \phi$$

$$du = \cos \phi \, d\phi$$

$$\int u^3 \, du$$

$$= 64\pi \cdot \frac{\sin^4 \phi}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 16\pi (1-0)$$

$$= 16\pi$$

## Integral de Superfície de campos vetoriais

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$\uparrow$

fluxo de  $\mathbf{F}$  através de  $S$

- Se  $S$  é dado por  $\mathbf{r}(u,v)$ , temos  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$
- $$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \, dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA$$

- Se  $S$  é dada pelo gráfico  $z = g(x,y)$ ,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left( -P \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - Q \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

$F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$

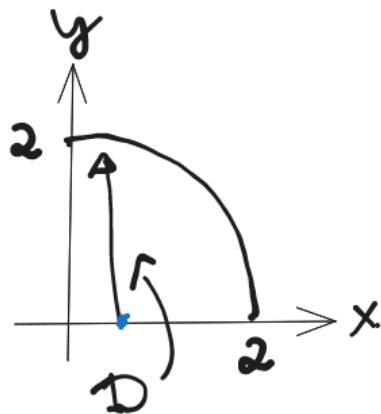
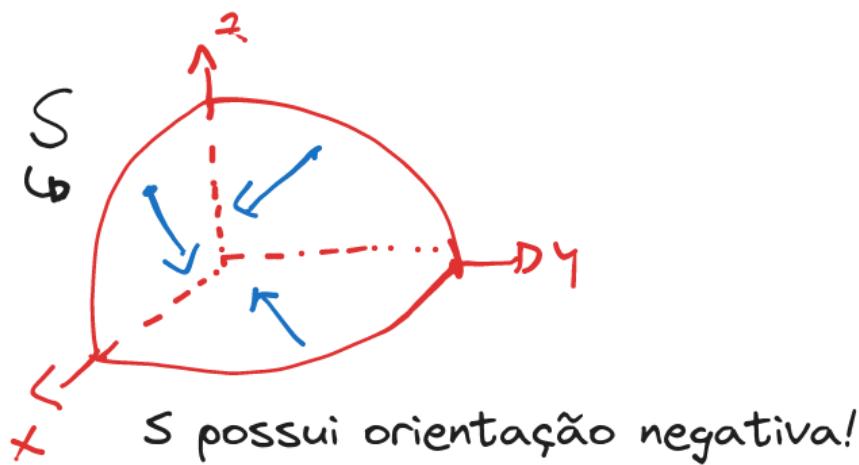
16.7 - Stewart 7º Ed.

Ex. 25

8. Avalie a integral de superfície  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$   
 para o campo vetorial  $\mathbf{F}$  e a superfície orientada  $S$ .  
 Em outras palavras, localize o fluxo de  $\mathbf{F}$  através  
 de  $S$ .

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

$S$  é parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$   
 no 1º octante com orientação para origem.



Vamos parametrizar a superfície:

$$x = x$$

$$y = y$$

$$z = g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z \geq 0$$

$$\hookrightarrow D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

Como  $S$  possui orientação descendente, então

$$\iint_S F \cdot dS = - \iint_D \left( P \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - Q \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA =$$

$$(F = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k})$$

$$(F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + RK)$$

$$= - \iint_D \left( -x \cdot \frac{1}{2} (4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) - (-z) \cdot \frac{1}{2} (4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) + y \right) dA$$

$$= - \iint_D \left( \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - \frac{y \cdot \sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + y \right) dA$$

$$= - \iint_D \frac{x^2 - y \sqrt{4-x^2-y^2} + y \sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dA$$

$$= - \iint_D \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dA$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{4-r^2}} \cdot r dr d\theta$$

$$\begin{aligned} u &= 4-r^2 \\ du &= -2r dr \\ r dr &= -\frac{1}{2} du \end{aligned}$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^0 \frac{(4-u) \cos^2 \theta}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{2}\right) du dr$$

$$\begin{aligned} r=0 &\Rightarrow u=4 \\ r=2 &\Rightarrow u=0 \end{aligned}$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \right) d\theta \cdot \int_{\frac{1}{2}(4-u)}^0 \frac{-1}{2} (4-u) u^2 du$$

7

$$= - \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(2\pi)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \left[ \int_4^0 u^{\frac{1}{2}} du - \int_4^0 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} du \right]$$

$$= - \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0 \right] \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \left( 4 \cdot 2u^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} \Big|_4^0 \right)$$

$$= \frac{\pi}{8} \left( -8 \cdot 2 + \frac{16}{3} \right) = \frac{\pi}{8} \left( -16 + \frac{16}{3} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} \left( -\frac{48 + 16}{3} \right) = -\frac{4\pi}{3}$$