#5 AULA DE EXERCÍCIOS

NEEMIAS MARTINS

0. Existe uma função f cujas derivadas parciais são $f_x = 1 - y$ e $f_y = 2x + y$?

Note que $f_{xy} = -1$ e $f_{yx} = 2$. Como f_{xy} e f_{yx} são contínuas em todo ponto (pois são constantes), mas $f_{xy} \neq f_{yx}$, segue do Teorema de Schwarz que a função $f(x, y)$ não existe.

1. Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq (0,0)\}$. Existe uma função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{x^2 + y^2} \text{ ?}$$

Calculando as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial yx} = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Observe que em U, as derivadas parciais $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial yx}$ são funções racionais e, portanto, são contínuas. Agora,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial yx} \Leftrightarrow \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \Leftrightarrow -2y = 2x \Leftrightarrow y = -x.$$

Então, para pontos (x, y) em U tais que $y \neq -x$, teremos $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x, y)$. Por exemplo, $(x, y) = (1, 1)$ é tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(1, 1) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(1, 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Portanto, como $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial yx}$ são contínuas e $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial yx}$, segue do Teorema de Schwarz que não existe $f(x, y)$.

2. Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

Os pontos críticos de f satisfazem a igualdade:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = (0, 0).$$

Ou seja,

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow x^2 - y = 0 & (1) \\ 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow y^2 - x = 0 & (2) \end{cases}$$

Date: 01/09/2023.

Da Equação (1), temos $y = x^2$. Substituindo na Equação (2), obtemos

$$\begin{aligned} & x^4 - x = 0 \\ & \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \\ & \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Se $x = 0$, temos $y = 0$. Se $x = 1$, então $y = 1$. Os pontos críticos são $(0,0)$ e $(1,1)$. A fim de classificar os pontos críticos, calculamos as derivadas parciais de segunda ordem e o determinante da matriz Hessiana.

$$f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = f_{yx} = -3,\ f_{yy} = 6y.$$
$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy} = 36xy - 9.$$

Então, pelo Teste da Segunda Derivada:

(1) Como $D(0,0) = -9 < 0$, o ponto $(0,0)$ é um ponto de sela.
(2) Como $D(1,1) = 27 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, então $f(1,1) = 3$ é valor mínimo local, ou seja, f possui um mínimo local em $(1,1)$.

3. Determine a taxa de variação máxima da função $f(x,y) = x^2 - y^2$ no ponto $(1,1)$ e a direção em que ocorre.

$\nabla f(x,y) = (2x,-2y)$. Logo $\nabla f(1,1) = (2,-2)$. Então a taxa de variação máxima é dada por $|\nabla f(1,1)| = |(2,-2)| = \sqrt{8}$ e ocorre na direção do vetor gradiente $\nabla f(1,1) = (2,-2)$.

4. Encontre todos os valores extremos da função $f(x,y) = xy$ sobre a elipse
$$x^2 + 4y^2 = 8$$
e classifique-os como máximo ou mínimo.

Considere
$$g(x,y) = x^2 + 4y^2.$$
Note que 8 é valor regular de g, ou seja,
$$\nabla g(x,y) = (2x, 8y) \neq (0,0) \text{ para todo } (x,y) \text{ que satisfaz } x^2 + 4y^2 = 8.$$
Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, devemos ter
$$\nabla f = \lambda \nabla g \text{ e } g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 8.$$
Logo,
$$\begin{cases} y = 2x\lambda & (1) \\ x = 8y\lambda & (2) \\ x^2 + 4y^2 = 8 & (3) \end{cases}$$
Substituindo (1) em (2), obtemos
$$\begin{aligned} & x = 16x\lambda^2 \\ & \Rightarrow 1 = 16\lambda^2 \text{ pois } x \neq 0 \text{ (Se } x = 0, \text{ teremos } y = 0 \text{ por (1) e isto contradiz (3))} \\ & \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{16} \\ & \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Se $\lambda = \frac{1}{4}$, então da Equação (1), temos $y = \frac{x}{2}$. Substituindo na Equação (3), obtemos

$$\begin{aligned} & x^2 + 4\Big(\frac{x}{2}\Big)^2 = 8 \\ & \Rightarrow 2x^2 = 8 \\ & \Rightarrow x^2 = 4 \\ & \Rightarrow x = \pm 2. \end{aligned}$$

Se $x = 2$, então $y = 1$. Se $x = -2$, então $y = -1$.

Agora, se $\lambda = -\frac{1}{4}$, obtemos $y = -\frac{x}{2}$, e substituindo na Equação (3) obtemos $x = \pm 2$ e assim, se $x = 2$ temos $y = -1$ e quando $x = -2$ temos $y = 1$.

As soluções são então $(2,1), (-2,-1), (2,-1)$ e $(-2,1)$. Agora, como $B = \{(x,y) | x^2 + 4y^2 = 8\}$ é compacto (limitado e fechado) e

$$f(2,1) = f(-2,-1) = 2 > f(-2,1) = f(2,-1) = -2,$$

então, o valor máximo de f sobre a elipse é 2 e o valor mínimo é -2.