

Combinatória

Curso: Estatística e Probabilidade

Prof. Neemias Martins

PUC Campinas

neemias.silva@puc-campinas.edu.br

neemias.org

Regra da multiplicação

Para uma sequência de eventos em que o primeiro evento pode ocorrer de n_1 maneiras, o segundo evento pode ocorrer de n_2 maneiras, o terceiro evento de n_3 maneiras e assim por diante, o total de possibilidades é

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots$$

Exemplo

Um hacker sabe que uma senha digitada é da forma

• • • • •

em que os caracteres usados estão ocultos. (Ou seja, a senha tem 5 caracteres.) Considerando que o teclado utilizado possui 92 diferentes caracteres, quantas são as senhas possíveis?

Solução

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 92 \cdot 92 \cdot 92 \cdot 92 \cdot 92 = 6\,590\,815\,232.$$

Considerando que todos os caracteres possuem a mesma probabilidade de serem usadas, a probabilidade de se digitar a senha correta numa primeira tentativa é de

$$\frac{1}{6\,590\,815\,232} = 0.000000000152.$$

Fatorial

O *fatorial* de um número natural n , denotado por $n!$, é o produto de todos os naturais menores ou iguais a n . Por convenção, $0!=1$.

Exemplo:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Regra Fatorial

O número de diferentes *arranjos* (em que ordem importa) de n diferentes itens quando todos os n itens são selecionados é $n!$.

Exemplo

Considere a palavra *aluno*. De quantas maneiras podemos reorganizar as letras de modo a formar novas “palavras”?

Solução

Temos $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ possibilidades.

Permutação

Permutações de itens são arranjos em que sequências distintas dos mesmos itens são contadas separadamente.

Por exemplo:

abc, acb, bac, bca, cab, cba

são contados separadamente como 6 diferentes permutações das letras a, b e c.

Combinação

Combinações de itens são arranjos em que diferentes sequências distintas dos mesmos itens são contadas como sendo a mesma.

Por exemplo:

abc, acb, bac, bca, cab, cba

são contados como sendo a mesma combinação das letras a,b e c.

Regra da Permutação

Quando n itens distintos estão disponíveis e r deles são selecionados sem reposição, o número de permutações distintas (a ordem importa) é dada por

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Exemplo

Em uma sala há 11 alunos e 2 deles serão selecionados para serem o representante de turma e o vice representante, respectivamente.

Quantos são os possíveis arranjos?

Solução

O número de possíveis arranjos é dado por

$$\begin{aligned}P(11, 2) &= \frac{11!}{(11 - 2)!} \\&= \frac{11!}{9!} \\&= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} \\&= 11 \cdot 10 \\&= 110.\end{aligned}$$

Exemplo

A próxima copa do mundo de futebol será uma competição entre 48 equipes, que disputam 1º, 2º e 3º lugares. Quantos são os possíveis arranjos do pódio?

Solução

O número de arranjos é dado por

$$\begin{aligned}P(48, 3) &= \frac{48!}{(48 - 3)!} \\&= \frac{48!}{45!} \\&= 48 \cdot 47 \cdot 46 \\&= 103\,776.\end{aligned}$$

Permutação com itens idênticos

O número de permutações distintas (a ordem importa) quando n itens são disponíveis e todos os n itens são selecionados sem reposição, mas alguns são idênticos aos outros, é dado por

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

quando n_1 termos são iguais, n_2 outros termos são iguais, ..., n_k outros termos são iguais.

Exemplo

Quantas são as possíveis permutações da palavra *Araraquara*?

Solução

Araraquara

- A letra *a* aparece 5 vezes
- A letra *r* aparece 3 vezes
- As letras *q* e *u* aparecem 1 vez cada.

Então o número de permutações (a ordem importa), é

$$\frac{12!}{5! \cdot 3!} = 665\,288.$$

Combinação

Quando n itens distintos estão disponíveis e r deles são selecionados sem reposição, o número de combinações distintas (a ordem não importa) é dada por

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n - r)! \cdot r!}$$

Exemplo

Uma dupla de alunos será sorteada aleatoriamente dentre 11 alunos. Calcule o número de combinações.

Solução

O número de combinações (em que a ordem não importa) é

$$\begin{aligned}C(11, 2) &= \frac{11!}{(11 - 2)! \cdot 2!} \\&= \frac{11!}{9!2!} \\&= \frac{11 \cdot 10}{2} \\&= 55.\end{aligned}$$

Exemplo

Para ganhar na Megasena, deve-se selecionar 6 números que variam de 1 a 60 e os mesmos 6 números devem ser sorteados na loteria. (A ordem dos números não importa.)

- a) Quantas apostas distintas são possíveis?
- b) Qual a probabilidade de se acertar uma aposta?

Solução

a) O número de apostas distintas é dado pela combinação

$$C(60, 6) = \frac{60!}{(60 - 6)!6!} = \frac{60!}{54!6!} = 50\,063\,860.$$

b) A probabilidade de se acertar os 6 números é de

$$\frac{1}{50\,063\,860} = 0.00000001997 = 1.997 \cdot 10^{-8}$$

Exemplo

A empresa Google deve nomear três diretores corporativos: diretor executivo (CEO), presidente executivo e diretor de operações. Também deve nomear um Comitê de Planejamento com três membros diferentes. Há oito candidatos qualificados, e diretores também podem atuar no Comitê de Planejamento.

- a) De quantas maneiras diferentes os diretores podem ser nomeados?
- b) De quantas maneiras diferentes o comitê pode ser nomeado?

Solução

Note que no item (a), a ordem é importante, pois os diretores possuem funções diferentes. No entanto, no item (b), a ordem da seleção não importa, pois membros do comitê exercem a mesma função.

a) Permutação de 3 pessoas de 8 disponíveis:

$$P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

b) Combinação de 3 pessoas de 8 disponíveis:

$$C(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{336}{3!} = 56.$$

Exercícios

Exercícios

Uma senha de 9 dígitos é formada pelos seguintes caracteres, não necessariamente nessa ordem,

$$a\%iMqx = v0.$$

- a) Quantas possibilidades existem para essa senha?
- b) Qual a probabilidade de que a ordem acima forneça a senha correta?

Exercícios

Uma urna contém 12 bolas. Destas, 6 são pretas, 3 são vermelhas e 3 são brancas. Retira-se uma por uma, sem reposição, e anota-se a sequência de cores obtida. Calcule o número de sequências possíveis.

Exercícios

Uma universidade escolherá 3 alunos dentre 50 alunos inscritos para participarem de um programa de intercâmbio. Quantas são as combinações possíveis de alunos selecionados?

Exercícios

A série A do campeonato brasileiro de futebol possui 20 times. Os 4 últimos times da classificação final são rebaixados para a série B.

- a) Calcule o número de permutações para os 17º, 18º, 19º e 20º colocados.
- b) Calcule o número de combinações possíveis de times rebaixados.

Bons estudos!