Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Prof. Neemias Martins

Prova 2 - MAT 137

23/10/2025 - Turma 2

Nome:.. Matrícula: ....

Questão 1. [30 pontos]. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$: .

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 4y = 0\right\}$$
$$V = [(1, 1, -1), (0, 1, 4)].$$

a) [10 pontos] Encontre uma base do subespaço U e determine $\dim U$.

Se $(x, y, z) \in U$, então

$$(x, y, z) = (x, y, 4y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 4).$$

Logo, o conjunto $B_U = \{(1, 0, 0), (0, 1, 4)\}$ gera o subespaço U. Ainda, B_U é L.I., pois se $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazem

$$a(1, 0, 0) + b(0, 1, 4) = (0, 0, 0)$$

então $a = 0$ e $b = 0$.

Como B_U gera o subespaço U e é L.I., segue que B_U é uma base de U e $\dim U = 2$.

b) [8 pontos] Mostre que $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x - 4y + z = 0\right\}$.

Seja $(x, y, z) \in V$. Então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x, y, z) = a(1, 1, -1) + b(0, 1, 4).$$

Daí,

$$\begin{cases} a = x \\ a + b = y \\ -a + 4b = z \end{cases}.$$

Podemos resolver o sistema usando a matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 4 & z \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 4 & z+x \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-4y+5x \end{pmatrix}$$

O sistema acima tem solução se, e somente se,

$$5x - 4y + z = 0.$$

Portanto, $V = \{(x, y, z) : 5x - 4y + z = 0\}$

c) [7 pontos] Determine o subespaço $U \cap V$ e determine $\dim(U \cap V)$.

Seja $(x, y, z) \in U \cap V$. Como $(x, y, z) \in U$, então $z = 4y$. Como $(x, y, z) \in V$, então $z = 4y - 5x$. Logo

$$4y = 4y - 5x \Rightarrow 5x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Daí,

$$(x, y, z) = (0, y, 4y) = y(0, 1, 4).$$

Logo,

$$U \cap V = [(0, 1, 4)].$$

Como $B_{U \cap V} := \{(0, 1, 4)\}$ é L.I, segue que $B_{U \cap V}$ é uma base para $U \cap V$ e $\dim(U \cap V) = 1$.

d) [5 pontos] Calcule $\dim(U + V)$ e encontre uma base para $U + V$. Podemos dizer que $U + V = \mathbb{R}^3$? Justifique.

Temos

$$\begin{aligned} \dim(U + V) &= \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) \\ &= 2 + 2 - 1 = 3. \end{aligned}$$

Ainda, $U + V = [B_U \cup B_V] = [(1, 0, 0), (0, 1, 4), (1, 1, -1)]$.

Como $\dim(U + V) = 3$ e $B = B_U \cup B_V$ tem 3 vetores e gera $U + V$, segue que $B_U \cup B_V$ é base de $U + V$.

Note que $U + V \subset \mathbb{R}^3$ e $\dim(U + V) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$. Portanto, $U + V = \mathbb{R}^3$.

Questão 2. [25 pontos] Considere o espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$, das matrizes 2 por 2.

a) [10 pontos] Mostre que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : x + 3y - z = 0 \text{ e } w = 0 \right\}$$

é um subespaço vetorial de V.

1. $W \neq \emptyset$, pois $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$.

2. Sejam $A, B \in W$, digamos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & 0 \end{pmatrix}$.

   Então

   $$A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}.$$

   Como $A \in W$, temos $a + 3b - c = 0$.

   Como $B \in W$, temos $e + 3f - g = 0$.

   Então,

   $(a+e) + 3(b+f) - (c+g) = (a+3b-c) + (e+3f-g) = 0.$

   Logo, $A + B \in W$.

3. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, $\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & 0 \end{pmatrix}$. Note que

   $$\lambda a + 3\lambda b - \lambda c = \lambda(a + 3b - c) = 3 \cdot 0 = 0.$$

   Logo, $\lambda \cdot A \in W$.

Portanto, W é subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$.

b) [8 pontos] Determine uma base e a dimensão do subespaço W.

Seja $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in W$. Então, $z = x + 3y$ e $w = 0$. Logo,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ x+3y & 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right]$. Ainda, o conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ é L.I. pois se $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazem

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então $a = b = 0$.

Portanto B é uma base para W e $\dim(W) = 2$.

c) [7 pontos] $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \in W$? Se sim, determine as coordenadas do vetor A em relação à base obtida no item anterior.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \in W$ pois $3 + 3 \cdot 1 - 6 = 0$ e $a_{22} = 0$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ a + 3b = 6. \end{cases}$$

Portanto,

$$[A]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questão 3. [30 pontos] Considere as bases $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_1 = u_1 + u_2 + u_3 \\ w_2 = 2u_1 + u_2 + u_3 \\ w_3 = u_1 + u_2 \end{cases}$$

a) [5 pontos] Determine a matriz mudança de base $[I]_B^{B'}$.

$$[I]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) [10 pontos] Determine a matriz mudança de base $[I]_{B'}^{B}$.

$$[I]_{B'}^{B} = \left([I]_B^{B'}\right)^{-1}.$$

Vamos determinar a inversa de $[I]_B^{B'}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to L_3 - L_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_1 - 2L_2 \\ L_3 \to -L_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 - L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Portanto,

$$[I]_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) [15 pontos] Suponha que $[u]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, mostre que $[u]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Para cada $u \in \mathbb{R}^3$ tem-se

$$[u]_{B'} = [I]_{B'}^{B} \cdot [u]_B.$$

Portanto,

$$[u]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Questão 4. [15 pontos] Considere o espaço vetorial $V = P_2(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 2.

a) [5 pontos] Determine o número $k \in \mathbb{R}$ de modo que o polinômio

$$p(x) = 2x^2 - 3x + k$$

seja uma combinação linear dos polinômios

$$q(x) = x^2 + x + 2 \text{ e } r(x) = x^2 - x + 2.$$

O polinômio $p(x)$ é combinação linear de $q(x)$ e $r(x)$ se, e só se, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $p(x) = a \cdot q(x) + b \cdot r(x)$. Isto é,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + k &= a\big(x^2 + x + 2\big) + b\big(x^2 - x + 2\big) \\ &= (a+b)x^2 + (a-b)x + (2a+2b). \end{aligned}$$

Ou seja, o sistema a seguir é possível:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = -3 \\ 2a + 2b = k \end{cases}$$

Matriz ampliada do sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & k-4 \end{pmatrix}.$$

O sistema tem solução se, e somente se $k - 4 = 0$, ou seja, $k = 4$.

Portanto, para que $p(x)$ seja combinação linear de $q(x)$ e $r(x)$, devemos ter $k = 4$.

b) [10 pontos] Mostre que o conjunto $B = \{q(x), r(x), h(x)\}$, em que

$$h(x) = 2x^2 - 2x + 3,$$

é uma base de $V = P_2(\mathbb{R})$.

Vejamos se B é um conjunto L.I. Suponha $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a\big(x^2 + x + 2\big) + b\big(x^2 - x + 2\big) + c\big(2x^2 - 2x + 3\big) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a - b - 2c = 0 \\ 2a + 2b + 3c = 0 \end{cases}$$

Note que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, $a = 0, b = 0, c = 0$ é a única solução do sistema. Logo B é L.I.

Como $B \subset P_2(\mathbb{R})$ é um conjunto de 3 vetores linearmente independentes e $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, segue que B é base de $P_2(\mathbb{R})$.