FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA

SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

AULA 7 – 28/03/2025

Retomando exemplos aula passada...

2) Dados os conjuntos A = {2, 3, 4, 5, 6} e B = {-1, 0, 2, 3}, represente as operações abaixo.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

3) Dados os conjuntos A= [0,1], B= (-1,2] e C = [-2,3), determine:

a) $A \cup B$

b) $B \cap C$

Muitas vezes, os problemas que envolvem conjuntos podem ser resolvidos utilizando-se o Diagrama de Venn.

4) Em uma sala de aula, o professor investigou quais a preferência dos alunos em relação a lanches vendidos por outras turmas. A professora verificou que, de um total de 35 alunos, dezenove compraram bolo; destes, quatro compraram pão de queijo e bolo, e sete alunos não compraram lanche nesse dia. Quantos alunos compraram apenas pão de queijo?

5) Em um curso de idiomas, foi feita uma pesquisa com jovens para verificar quais línguas estrangeiras eles gostariam de aprender. O resultado foi:

- 23 gostariam de aprender inglês;
- 24 gostariam de aprender espanhol;
- 25 gostariam de aprender italiano;
- 12 gostariam de aprender inglês e italiano;
- 10 gostariam de aprender italiano e espanhol;
- 9 gostariam de aprender inglês e espanhol;
- 7 gostariam de aprender inglês, espanhol e italiano.

Quantos jovens foram entrevistados?

Exercício:

1) Descreva cada um dos conjuntos definidos abaixo:

a) $S = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x<0\}$
b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \in \{2,3,4,5\} \rightarrow x \geq y)\}$
c) $B = \{x \mid (\exists y)(\exists z)(y \in \{1,2\} \text{ e } z \in \{2,3\} \text{ e } x=y+z)\}$
d) $C = \{x \mid (\exists y)(y \in \{0,1,2\} \text{ e } x=y^3\}$
e) $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq y)\}$
f) $E = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \in \mathbb{N} \rightarrow x \leq y)\}$

a) $S = \{\ \}$ b) $A = \{x \in \mathbb{N} / \ x \geq 5\}$
c) $B= \{3,4,5\}$ d) $C=\{0,1,8\}$
a) $D = \mathbb{N}$ $E = \{0\}$

Relações entre conjuntos

Para $A=\{2,3,5,12\}$ e $B=\{2,3,4,5,9,12\}$, todo elemento de A é também um elemento de B. Quando isto acontece, dizemos que A é um subconjunto de B.

Em linguagem simbólica, A é um subconjunto de B se

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Notação: Se A é um subconjunto de B, escrevemos $A \subseteq B$. Se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$ (existe pelo menos um elemento de B que não é elemento de A), então A é dito um **subconjunto próprio de B** e podemos denotar por $A \subset B$. Em geral usamos essa última notação.

Exercícios:

1) Sejam $A = \{1,7,9,15\}$, $B = \{7,9\}$ e $C = \{7,9,15,20\}$

Quais das seguintes sentenças são verdadeiras?

a) $B \subset C$
b) $B \subset A$
c) $A \subset C$
d) $\{15\} \in C$
e) $\{15\} \subset A$
f) $7 \subset C$
g) $\emptyset \subset A$
h) $4+3 \in C$

V,V,F,F,V,F,V,V

2) Seja

$A = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geq 5\}$

$B = \{10,12,16,20\}$

$C = \{ x | (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 2y\}$

Quais das seguintes sentenças são verdadeiras?

a) $B \subset C$

b) $B \subset A$

c) $A \subset C$

d) $26 \in C$

e) $\{11,12,13\} \subset A$

f) $\{11,12,13\} \subset C$

g) $\{12\} \in B$

h) $\{12\} \subset B$

i) $\{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x<20\} \subset B$

j) $5 \subset A$

k) $\{\emptyset\} \subset B$

l) $\emptyset \notin A$

V, V, F, V, V, F, F, V, F, F, F, F

3) Seja

$$A = \{\, x |\ x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

e

$$B = \{\, x |\ x \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq x \leq 4\}$$

Mostre que $A \subset B$.

4) Seja $A = \{\, x |\ x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 < 15\}$

e

$$B = \{\, x |\ x \in \mathbb{N} \text{ e } 2x < 7\}$$

Mostre que $A=B$.

Conjuntos de Conjuntos

Dado um conjunto S, podemos criar um novo conjunto cujos elementos sejam todos os subconjuntos de S.

Este novo conjunto é chamado de **conjunto das partes de S, $\mathscr{P}$ (S).**

$\mathscr{P}$ (S) conterá, pelo menos ∅, e o próprio *S*, uma vez que ∅ ⊂ S e S ⊂ S são sempre verdade.

Exemplo: Para A = {1,2,3}, qual $\mathscr{P}$ (A)?

$\mathscr{P}$ (A) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}}

Proposição: Se S tem n elementos, então $\mathscr{P}$ (S) tem 2^n elementos.

Outras operações com conjuntos

Além das operações de união ($A \cup B$) e intersecção ($A \cap B$) já vistas, temos:

Complemento de um conjunto

Para um conjunto $A \in \mathscr{P}(S)$, o complemento de A, dado por A' é o conjunto

$$A' = \{x \mid x \in S \text{ e } x \notin A\}.$$

Diferença de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos, a diferença entre os dois conjuntos é dada por $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Exercícios:

1) Sejam

$A = \{x \mid x \text{ é um inteiro não negativo par}\}$

$B = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x=2y+1)\}$

$C = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x=4y)\}$

Encontre:

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) A'

d) $A \cup C$

e) $A \cap C$

f) $A - C$

2) Sejam

$$A = \{1,2,3,5,10\}$$
$$B = \{2,4,7,8,9\}$$
$$C = \{5,8,10\}$$

Subconjuntos de $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Encontre:

a) $A \cup B$
b) $A - C$
c) $B' \cap (A \cup C)$

Respostas:

1)

a) $A \cap B = \{ \}$

b) $A \cup B = \mathbb{N}$

c) $A' = \mathbb{Z}^{-*} \cup B$

d) $A \cup C = A$

e) $A \cap C = C$

f) $A - C = \{x| (\exists y)(y \in \mathbb{N}$ e y é impar e $x=2y\}$

2)

a) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,8,9,10\}$

b) $A - C = \{1,2,3\}$

c) $B' \cap (A \cup C) = \{1,3,5,6,10\} \cap \{1,2,3,5,8,10\} = \{1,3,5,10\}$

PROPRIEDADES

1a. $A \cup B = B \cup A$	1b. $A \cap B = B \cap A$	(propriedades comutativas)
2a. $(A \cup B) \cup C =$ $A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C =$ $A \cap (B \cap C)$	(propriedades associativas)
3a. $A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$	3b. $A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$	(propriedades distributivas)
4a. $A \cup \emptyset = A$	4b. $A \cap S = A$	(propriedades de identidade)
5a. $A \cup A' = S$	5b. $A \cap A' = \emptyset$	(propriedades de complemento)

Produto Cartesiano

Sejam A e B subconjuntos de S. O produto cartesiano de A e B, denotado por A x B é definido por

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Obs: Como estaremos frequentemente interessados no produto cartesiano de um conjunto com ele próprio, abreviaremos A x A por A^2. Em geral, usaremos A^n para denotar o conjunto de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de elementos de A.

Exercícios:

1) Sejam A = {1,2} e B = {3,4}.

a) Encontre A x B
b) Encontre B x A
c) Encontre A^2

2) Dados os conjuntos A={1,2}, B={2,3,4}, C={1,2,4} , determine :

a) $A \times (B \cap C)$
b) $(A \times B) \cup (C \times A)$
c) $(B - C) \times B$

3) Sejam os conjuntos $A = \{0,1,2\}$ e $B = \{1,2,3\}$.

$A \times B =$

$B \times A =$

Quais são os elementos dos conjuntos:

$R1 = \{(x,y) \in A \times B | x < y\}$?

$R2 = \{(x,y) \in B \times A | x < y\}$?

$R3 = \{(x,y) \in A \times B | x = y\}$?

Resposta:

1) Sejam A = {1,2} e B = {3,4}.

a) Encontre A x B = {(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)}

b) Encontre B x A = {(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)}

c) Encontre A² = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}

2) Dados os conjuntos A={1,2}, B={2,3,4}, C={1,2,4} , determine :

a) $A \times (B \cap C)$ = {(1,2),(1,4),(2,2),(2,4)}

b) $(A \times B) \cup (C \times A)$ = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(1,1),(2,1),(4,1),(4,2)}

c) $(B - C) \times B$ = {(3,2),(3,3),(3,4)}

3) Sejam os conjuntos $A = \{0,1,2\}$ e $B = \{1,2,3\}$.

$A \times B =$ {(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)}

$B \times A =$ {(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)}

Quais são os elementos dos conjuntos:

$R1 = \{(x, y) \in A \times B | x < y\} = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$

$R2 = \{(x, y) \in B \times A | x < y\} = \{(1,2)\}$

$R3 = \{(x, y) \in A \times B | x = y\}$ = {(1,1),(2,2)}