

AULA DE EXERCÍCIOS

NEEMIAS MARTINS

1. Use o Teorema de Stokes para calcular a integral de linha

$$\oint_C z dx - 2x dy + 3y dz,$$

em que C é a curva obtida pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$, orientada no sentido anti-horário quando visto de cima.

Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\int_C F \cdot dr = \int_C P dx + Q dy + R dz = \int \int_S \text{rot}(F) \cdot dS,$$

sendo $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ e C é a fronteira da superfície S . Temos,

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & -2x & 3y \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} = (3, 1, -2).$$

Usando x e y como parâmetros, S pode ser descrita por

$$r(x, y) = (x, y, 1 - x - y), (x, y) \in D$$

sendo $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Agora, como $r_x = (1, 0, -1)$ e $r_y = (0, 1, -1)$, então

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1).$$

Note que a orientação de S induz a orientação positiva de C . Pela definição de integral de superfície, temos

$$\begin{aligned} \int \int_D \text{rot}F(r(x, y)) \cdot (r_x \times r_y) dA &= \int \int_D (3, 1, -2) \cdot (1, 1, 1) dA = \int \int_D 3 + 1 - 2 dA \\ &= 2 \int \int_D dA = 2\pi. \end{aligned}$$

2. Sejam $F(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2)$ e C é a fronteira da parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ no 1º octante. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot dr$, sendo C orientada no sentido anti-horário quando visto de cima.

S é parte da superfície dada por $z = g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ no 1º octante. Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_C F \cdot dr = \int \int_S \text{rot}(F) dS.$$

Temos

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & -y & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = (2y, -2x, 0).$$

Como o rotacional é um campo vetorial e a superfície S é dada pelo gráfico $z = g(x, y)$, podemos usar a seguinte relação

$$\int \int_S \text{rot}(F) dS = \int \int_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

sendo $P = 2y, Q = -2x, R = 0$. Portanto,

$$\int \int_S \text{rot}(F) dS = \int \int_D (-2y(-2x) + 2x(-2y)) dA = \int \int_D 0 dA = 0.$$

3. Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície $\int \int_S F \cdot dS$, ou seja, calcule o fluxo de F através de S , sendo

$$F(x, y, z) = (x^3 + y \sin z, y^3 + z \sin x, 3z)$$

e S a superfície do sólido limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$.

$\text{div}(F) = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x^3 + y \sin z, y^3 + z \sin x, 3z) = 3x^2 + 3y^2 + 3 = 3(x^2 + y^2 + 1)$. Considere S orientada positivamente e seja E o sólido delimitado por S . Pelo Teorema do divergente, e usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi, \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 \int \int_S F \cdot dS &= \int \int \int_E \operatorname{div}(F) dV = \int \int \int_E 3(x^2 + y^2 + 1) dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 3(\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + 1) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 3(\rho^2 \sin^2 + 1) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 3(\rho^4 \sin^3 + \rho^2 \sin \varphi) d\rho d\varphi d\theta \\
 &= 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \left[\frac{\rho^5}{5} \sin^3 \varphi + \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right]_1^2 d\varphi \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \left[\frac{31}{5} \sin^3 \varphi + \frac{7}{3} \sin \varphi \right] d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{93}{5} \sin^3 \varphi + 7 \sin \varphi \right] d\varphi \\
 &= 2\pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{93}{5} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi + 7 \sin \varphi \right] d\varphi \right. \\
 &= 2\pi \left[\frac{93}{5} \left(-\cos \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) - 7 \cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{194}{5} \pi.
 \end{aligned}$$

4. Sejam $F(x, y, z) = (x + y + z^2)\mathbf{k}$ e S a fronteira do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$. Calcule $\int \int_S F \cdot \mathbf{n} dS$, em que \mathbf{n} é o vetor normal unitário que aponta para fora do cilindro.

Temos $\int \int_S F \cdot \mathbf{n} dS = \int \int_S F \cdot dS$. Pelo Teorema do Divergente, segue que

$$\int \int_S F \cdot dS = \int \int \int_E \operatorname{div}(F) dV,$$

sendo E o cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$.

Como

$$\operatorname{div}(F) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (x + y + z^2)\mathbf{k} = 2z,$$

então

$$\int \int_S F \cdot dS = \int \int \int_E 2z dV.$$

Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z, \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int \int_S F \cdot dS &= \int \int \int_E 2z dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 2z r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r z^2 \Big|_0^3 dr d\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^2 \cdot 9 = 36\pi. \end{aligned}$$

5.[Extra - Revisão]. Considere o campo

$$F(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2yz, y^2).$$

Verifique que o campo vetorial F é conservativo e calcule $f(x, y, z)$ tal que $\nabla f = F$.

Temos

$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy & x^2 + 2yz & y^2 \end{vmatrix} = (2y - 2y)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k} = (0, 0, 0).$$

Como $\operatorname{rot}(F) = \mathbf{0}$, e as derivadas parciais das funções componentes são contínuas, então F é conservativo. Logo, existe uma função f tal que $\nabla f = F$.

A fim de determinarmos f , devemos ter

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = 2xy \\ f_y(x, y, z) = x^2 + 2yz \\ f_z(x, y, z) = y^2 \end{cases}$$

Da primeira igualdade, temos

$$\begin{aligned}f_x(x, y, z) &= 2xy \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= x^2y + g(y, z) \\ \Rightarrow f_y(x, y, z) &= x^2 + g_y(y, z).\end{aligned}$$

Uma vez que $f_y(x, y, z) = x^2 + 2yz$, obtemos

$$\begin{aligned}f_y(x, y, z) &= x^2 + 2yz \\ \Rightarrow g_y(y, z) &= 2yz \\ \Rightarrow g(y, z) &= y^2z + h(z) \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= x^2y + y^2z + h(z) \\ \Rightarrow f_z(x, y, z) &= y^2 + h'(z).\end{aligned}$$

Mas como $f_z(x, y, z) = y^2$, então

$$\begin{aligned}f_z(x, y, z) &= y^2 \\ \Rightarrow h'(z) &= 0 \\ \Rightarrow h(z) &= K \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= x^2y + y^2z + K.\end{aligned}$$

6.[Extra - Não foi feito em sala]. Use o Teorema de Green para calcular a área sob um arco do cicloide

$$x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Observe que pelo Teorema de Green, se $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, então

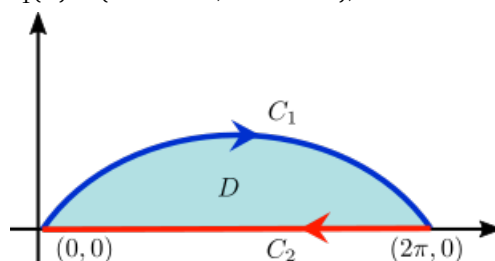
$$\int_C F \cdot dr = \int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D 1 \cdot dA = A(D).$$

Podemos então escolher um campo F conveniente, como por exemplo supondo $P = 0$ e $Q = x$ ou então $P = -y$ e $Q = 0$, de modo a obter a área de D através da integral de linha. Por exemplo, para $F(x, y) = xj = (0, x)$, temos

$$\int_C F \cdot dr = \int_C 0 dx + x dy = \int_C x dy = \iint_D 1 \cdot dA = A(D).$$

Para o exercício acima, temos uma curva C_1 dada pela cicloide, orientada no sentido horário, parametrizada por

$$r_1(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Observe que a curva C_1 não é fechada, vamos então considerar também a curva dada pelo segmento que une o ponto final da curva C_1 ao seu ponto inicial. Isto é segmento C_2 que vai de $(2\pi, 0)$ a $(0, 0)$, nesse sentido. Podemos parametrizar C_2 por

$$r_2(t) = (1-t)(2\pi, 0) + t(0, 0), 0 \leq t \leq 1,$$

i.e

$$r_2(t) = ((1-t)2\pi, 0), 0 \leq t \leq 1.$$

Consideremos agora a curva $C = C_1 \cup C_2$. Note que C é uma curva fechada dada pela fronteira da região D que está abaixo do arco da cicloide. Ainda, a curva C está orientada no sentido horário. Consideremos então a curva $-C$ dada por C no sentido anti-horário. Tomando o campo $F(x, y) = (-y, 0)$, segue pelo Teorema de Green:

$$\int_{-C} F \cdot dr = \int_{-C} -y dx = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D 1 \cdot dA = A(D).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D dA = \int_{-C} -y dx = - \int_C -y dx \\ &= \int_{C_1} y dx + \int_{C_2} y dx \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot (1 - \cos t) dt + \int_0^1 0 \cdot (-2\pi) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) dt \\ &= t - 2 \sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin(2t) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi + \pi = 3\pi. \end{aligned}$$