

TEOREMA DE STOKES

Exercício 1

Use o Teorema de Stokes para calcular

$$\iint_S \text{rot}(F) \cdot d\vec{S},$$

para $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ e S sendo a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 5$, com orientação para cima.

SOLUÇÃO: Interseção do parabolóide com o plano:

$$\begin{aligned} 5 &= 9 - x^2 - y^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 4, \quad z = 5. \end{aligned}$$

Esta é a curva C que delimita a superfície S e é orientada no sentido anti-horário. Sua parametrização é dada por:

$$r(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), 5); \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Então

$$\begin{aligned} r'(t) &= (-2 \sin(t), 2 \cos(t), 0) \\ F(r(t)) &= (10 \sin(t), 10 \cos(t), 4 \cos(t) \sin(t)). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot}(F) \cdot d\vec{S} &= \int_C F \cdot dr \\ &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (10 \sin(t), 10 \cos(t), 4 \cos(t) \sin(t)) \cdot (-2 \sin(t), 2 \cos(t), 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 20(-\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt \\ &= 20 \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt \\ &= 20 \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Exercício 2

Use o Teorema de Stokes para calcular a integral de linha

$$\oint_C zdx - 2xdy + 3ydz,$$

em que C é a curva dada pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$, orientada no sentido anti-horário quando visto de cima.

SOLUÇÃO:

Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\int_C F \cdot dr = \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \text{rot}(F) \cdot d\vec{S},$$

sendo $F = (P, Q, R)$ e C a fronteira da superfície S .

Temos $F(x, y, z) = (z, -2x, 3y)$ e

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & -2x & 3y \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (3, 1, -2).$$

A superfície S é parametrizada por

$$r(u, v) = (u, v, 1 - u - v), (u, v) \in D$$

sendo $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Logo,

$$r_u = (1, 0, -1)$$

$$r_v = (0, 1, -1)$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

$$\text{rot} F(r(u, v)) = (3, 1, -2)$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_C zdx - 2xdy + 3ydz &= \iint_S \text{rot}(F) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_D \text{rot} F(r(u, v)) \cdot (r_u \times r_v) dA \\ &= \iint_D (3, 1, -2) \cdot (1, 1, 1) dA \\ &= 2 \iint_D dA \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta \\ &= 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = 2\pi. \end{aligned}$$

Alternativamente, poderíamos ter calculado usando o vetor normal:

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}.$$

Daí, pelo Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_C zdx - 2xdy + 3ydz &= \int \int_S \operatorname{rot}(F) \cdot d\vec{S} \\ &= \int \int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS \\ &= \int \int_S (3, 1, -2) \cdot \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} \, dS \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \int_S 1 \cdot dS \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \int_D |r_u \times r_v| \, dA \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \int_D \sqrt{3} \, dA = 2\pi. \end{aligned}$$

TEOREMA DO DIVERGENTE

Exercício 3

Sejam $F(x, y, z) = (x + y + z^2)\vec{k}$ e S a fronteira do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$. Calcule

$$\int \int_S F \cdot n \, dS,$$

em que n é o vetor normal unitário que aponta para fora do cilindro.

SOLUÇÃO:

Temos

$$\int \int_S F \cdot n \, dS = \int \int_S F \cdot d\vec{S}.$$

Pelo Teorema do Divergente (ou Teorema de Gauss), segue que

$$\int \int_S F \cdot d\vec{S} = \int \int \int_E \operatorname{div}(F) \, dV,$$

sendo E o sólido dado pelo cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 < z < 3$.

Como $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z^2)$, então $\operatorname{div}(F) = 2z$. Portanto,

$$\int \int_S F \cdot d\vec{S} = \int \int \int_E 2z \, dV.$$

Usaremos coordenadas cilíndricas:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int \int_S F \cdot d\vec{S} &= \int \int \int_E 2z \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 2z \cdot r \, dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [z^2]_0^3 \cdot r \, dr d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 \cdot 9 = 36\pi. \end{aligned}$$

Exercício 4

Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície

$$\iint_S F \cdot d\vec{S},$$

ou seja, calcule o fluxo de F através de S , sendo

$$F(x, y, z) = (x^3 + y \sin(z), y^3 + z \sin(x), 3z)$$

e S a superfície do sólido limitado pelos hemisférios

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

e pelo plano $z = 0$.

SOLUÇÃO:

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 + 3 = 3(x^2 + y^2 + 1).$$

Considere S orientada positivamente e seja E o sólido delimitado por S . Pelo Teorema do divergente, e usando coordenadas esféricas,

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot d\vec{S} &= \iiint_E \operatorname{div}(F) \, dV \\ &= 3 \iiint_E (x^2 + y^2 + 1) \, dV \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (\rho^2 \sin^2(\varphi) \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2(\varphi) \sin^2 \theta + 1) \cdot \rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\varphi d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (\rho^2 \sin^2(\varphi) + 1) \cdot \rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\varphi d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho^4 \sin^3(\varphi) + \rho^2 \sin \varphi) \, d\rho d\varphi d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\varphi) \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_1^2 + \sin \varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 d\varphi d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\varphi) \left[\frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} \right] + \sin \varphi \left[\frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} \right] d\varphi d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(\varphi)) \cdot \sin \varphi \cdot \frac{31}{5} + \frac{7}{3} \sin \varphi \, d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left[\frac{93}{5} \left(-\cos \varphi + \frac{\cos^3(\varphi)}{3} \right) - 7 \cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{194}{5} \pi. \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS EXTRAS

Exercício 5

Sejam $F(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2)$ e C a fronteira da parte do parabolóide
$$z = 1 - x^2 - y^2$$

no 1º octante. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot dr$, sendo C orientada no sentido anti-horário quando visto de cima.

SOLUÇÃO:

Exercício 6

Calcule $\int_S F \cdot d\vec{S}$ em que $F(x, y, z) = (3xy^2, xe^z, z^3)$ e S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e os planos $x = -1$ e $x = 2$.

SOLUÇÃO: