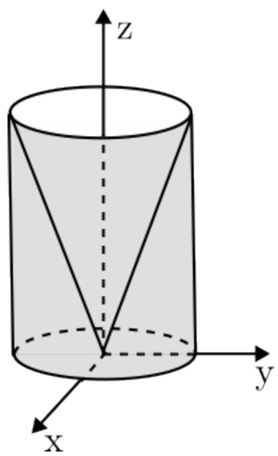
Cálculo II - MA211
IMECC - UNICAMP
Neemias Martins
neemias.org/ped

#8 AULA DE EXERCÍCIOS

NEEMIAS MARTINS

1.[Feito na Turma T]. Utilize coordenadas cilíndricas para calcular
$$\int\int\int_E x^2 dV$$
em que E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.



Usando coordenadas cilíndricas, fazemos

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z.$$

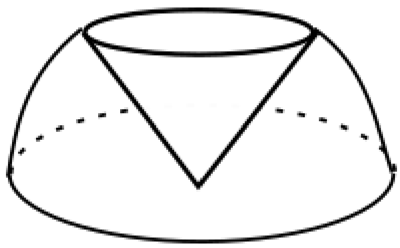
O cilindro e o cone são descritos por

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1$$
$$z^2 = 4x^2 + 4y^2 \Rightarrow z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0 \Rightarrow z = 2r.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\int\int\int_E x^2 dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2r} r^2\cos^2\theta\cdot r\, dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 [(r^3\cos\theta)z]_0^{2r}\, dr d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cos^2\theta\, dr d\theta \\
&= \frac{2}{5}\int_0^{2\pi} [r^5\cos^2\theta]_0^1 d\theta \\
&= \frac{2}{5}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{2}{5}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta \\
&= \frac{1}{5}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\Big]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

2. Calcule o volume do sólido dentro da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, acima do plano-xy e abaixo do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.



Usaremos coordenadas esféricas:

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\sin\phi\cos\theta \\
y &= \rho\sin\phi\sin\theta \\
z &= \rho\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Em coordenadas esféricas $x^2+y^2+z^2=4$ é equivalente a $\rho^2=4$ i.e $\rho=2$. E o cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ é equivalente a $\phi=\frac{\pi}{4}$, pois

$$
\rho\cos\phi=\sqrt{p^2\sin^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\rho\sin\phi \Rightarrow \cos\phi=\sin\phi \Rightarrow \phi=\frac{\pi}{4}.
$$

Então, $E=\{(\rho,\theta,\phi)|0\le\rho\le 2,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad \frac{\pi}{4}\le\phi\le\frac{\pi}{2}\}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
V=\int\int\int_E dV &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^2\sin\phi\, d\rho d\theta d\phi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\, d\phi\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2\rho^2\, d\rho \\
&= \big[-\cos\phi\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\big[\theta\big]_0^{2\pi}\Big[\frac{\rho^3}{3}\Big]_0^2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{8}{3}=\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

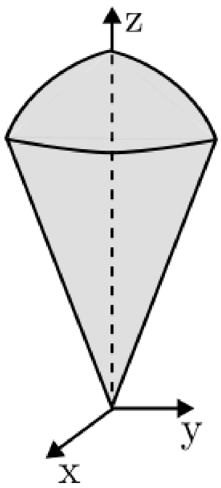
3. Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3}\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

A região de integração está descrita em coordenadas esféricas por

$$E=\left\{(\rho,\theta,\phi)|\, 0\le\rho\le 3,\, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\, 0\le\phi\le\frac{\pi}{6}\right\}.$$

E representa o sólido no primeiro octante limitada superiormente pela esfera de raio 3, i.e $\rho=3$, e inferiormente pelo cone $\phi=\frac{\pi}{6}$. Esboço:



$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3}\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\phi\, d\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{3}\rho^2 d\rho\\ &=[-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{6}}[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\rho^3}{3}]_0^3\\ &=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 9\\ &=\frac{9\pi}{2}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\\ &=\frac{9\pi}{4}(2-\sqrt{3}).\end{aligned}$$

4. Calcule

$$\int\int\int_B (x^2+y^2+z^2)^2 dV,$$

sendo B a bola com centro na origem e raio 5.

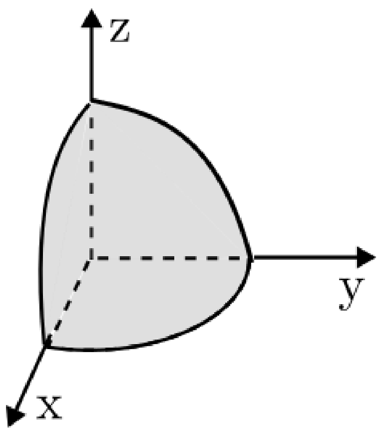
Usaremos coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}x&=\rho\sin\phi\cos\theta\\ y&=\rho\sin\phi\sin\theta\\ z&=\rho\cos\theta.\end{aligned}$$

Então,

$$\int\int\int_B (x^2+y^2+z^2)^2 dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{5} \rho^4\cdot\rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [\frac{\rho^7}{7}\sin\phi]_0^5 d\phi\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{5^7}{7}\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} [-\frac{5^7}{7}\cos\phi]_0^{\pi} d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{5^7}{7}\cdot 2 d\theta$$
$$= \frac{5^7}{7}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{312500\pi}{7}.$$

5. Calcule $\int\int\int_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV$ em que E é delimitado pela esfera $x^2+y^2+z^2=9$ no primeiro octante.



Usaremos coordenadas esféricas. Temos

$$E = \{(\rho,\theta,\phi) | 0 \le \rho \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \rho \le 3\}.$$

Portanto,

$$\int\int\int_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3} e^{\rho}\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\, d\phi \int_0^{3} e^{\rho}\rho^2 d\rho$$
$$= \frac{\pi}{2}[-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 e^{\rho}\rho^2 d\rho$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^3 e^{\rho}\rho^2 d\rho$$

Via integração por partes, tomando $u=\rho^2$ e $dv = e^{\rho} d\rho$, temos

$$\int e^{\rho}\rho^2 d\rho = uv - \int v\, du = \rho e^{\rho} - 2\int e^{\rho}\rho\, d\rho$$

Novamente por partes, $\tilde{u} = \rho$ e $d\tilde{v} = e^{\rho}d\rho$, obtemos

$$\int e^{\rho}\rho d\rho = \tilde{u}\tilde{v} - \int \tilde{v}d\tilde{u} = \rho e^{\rho} - \int e^{\rho}d\rho = \rho e^{\rho} - e^{\rho} + c.$$

Então,

$$\int e^{\rho}\rho^2 d\rho = \rho e^{\rho} - 2(\rho e^{\rho} - e^{\rho}) + c = \rho e^{\rho} - 2\rho e^{\rho} + 2e^{\rho} + c = e^{\rho}(\rho^2 - 2\rho + 2) + c.$$

Voltando à nossa integral inicial, obtemos

$$\begin{aligned}\iiint_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV &= \frac{\pi}{2}\int_0^3 e^{\rho}\rho^2 d\rho \\ &= \frac{\pi}{2}e^{\rho}(\rho^2 - 2\rho + 2)\Big|_0^3 \\ &= \frac{\pi}{2}(e^3(9 - 6 + 2) - 2) = \frac{\pi}{2}(5e^3 - 2).\end{aligned}$$

6. (Feito na Turma 2 / Próxima Aula). Use a transformação $x = 2u + v$, $y = u + 2v$ para calcular

$$\iint_R (x - 3y)dA$$

sendo R a região triangular de vértices $(0,0), (2,1), (1,2)$.

O jacobiano da transformação é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Ainda,

$$x - 3y = (2u + v) - 3u + 2v) = -u - 5v.$$

Encontraremos as curvas que delimitam a região R:

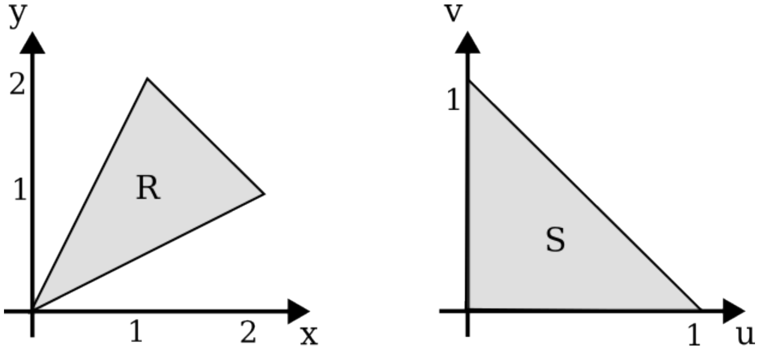
- $y = ax + b$ passando por $(0,0)$ e $(2,1)$. Como $(0,0)$ está na reta,
  $$0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0.$$
  Como $(2,1)$ está na reta,
  $$1 = 2a + 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$
  Logo $y = \frac{1}{2}x$.
- $y = ax + b$ passando por $(0,0)$ e $(1,2)$. Como $(0,0)$ está na reta, temos $b = 0$. Como $(1,2)$ está na reta,
  $$2 = a + 0.$$
  Logo y=2x.
- $y = ax + b$ passando por $(1,2)$ e $(2,1)$. Como $(1,2)$ pertence à reta,
  $$2 = a + b \Rightarrow b = 2 - a.$$
  Como $(2,1)$ pertence à reta,
  $$1 = 2a + b \Rightarrow b = 1 - 2a.$$
  Daí
  $$2 - a = 1 - 2a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 3.$$
  Logo $y = -x + 3$.

Agora procuremos as curvas que delimitam a região S:

- $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow u + 2v = \frac{1}{2}(2u + v) \Rightarrow v = 0$.

- $y = 2x \Rightarrow u + 2v = 4u + 2v \Rightarrow u = 0$.
- $y = -x + 3 \Rightarrow u + 2v = -2u - v + 3 \Rightarrow v = -u + 1$.

Então a região de integração S no plano-uv é o triângulo tal que $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq -u + 1$.



Portanto, pelo Teorema de Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned}
\int\int_R (x - 3y) dA &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-u - 5v)|3|\, dv\, du \\
&= -3 \int_0^1 \int_0^{1-u} (u + 5v)\, dv\, du \\
&= -3 \int_0^1 [uv + 5\frac{v^2}{2}]_0^{1-u}\, du \\
&= -3 \int_0^1 (u - u^2 + \frac{5}{2}(1-u)^2)\, du \\
&= -3\left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{5}{2}\left(-\frac{(1-u)^3}{3}\right)\right]_0^1 \\
&= -3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right) = -3.
\end{aligned}$$