Aula de Exercícios

§ Teorema de Green
§ Rotacional e Divergente
§ Curvas parametricas e suas areas
§ Integrais de Superficie

Neemias Martins
neemias.org/ped

16.4 - Stewart 7ª Ed.
Ex. 13

1. Use o Teorema de Green para calcular $\int_C F \cdot dr$ sendo

$$F(x,y) = \langle y - \cos y,\ x \operatorname{sen} y \rangle$$

e C é o círculo $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$.
orientado no sentido horário.

Teorema de Green

Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D uma região delimitada por C.
Se P e Q tem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\int_C F \cdot dr = \int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Solução:

$$F(x,y) = \langle y - \cos y,\ x \operatorname{sen} y \rangle$$

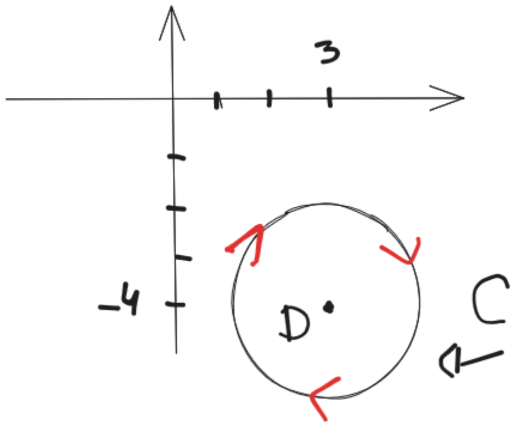
$$= \underbrace{(y - \cos y)}_{P}\, i + \underbrace{(x \operatorname{sen} y)}_{Q}\, j$$

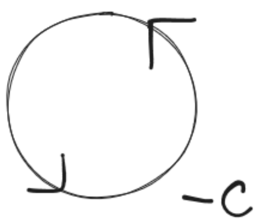
$$F = P i + Q j$$

C

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$$

círculo centrado em $(3,-4)$
com raio 2





orientação negativa (horario)

Note que a curva -C é uma curva fechada, simples, contínua por partes e orientada positivamente, então segue pelo Teorema de Green:

$$\int_{-C} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x \operatorname{sen} y) - \frac{\partial}{\partial y}(y - \cos y) \right) dA$$

$$\Rightarrow \int_C F\, dr = -\int_{-C} F \cdot dr = -\iint_D \Big(\operatorname{sen} y - (1 + \operatorname{sen} y)\Big)\, dA$$

$$= -\iint_D -1\, dA = \iint_D 1 \cdot dA \qquad = A(D)$$

Usando coordenadas polares, fazemos

$$x = r\cos\theta \qquad 0 \leq r \leq 2$$
$$y = r \operatorname{sen}\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\int_C F \cdot dr = \iint_D dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^2 \right)$$

$$= 2\pi \cdot (2 - 0) = 4\pi$$

Portanto, $\int_C F \cdot dr = 4\pi$.

Rotacional e Divergente

Se $F = P\,i + Q\,j + R\,k$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então o rotacional de F é o campo vetorial definido por

$$\text{rot}\,F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}R - \frac{\partial}{\partial z}Q\right)i - \left(\frac{\partial}{\partial x}R - \frac{\partial}{\partial z}P\right)j + \left(\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P\right)$$

O divergente de F é a função de 3 variáveis dada por:

$$\text{div}\,F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(P, Q, R)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R$$

16.5 - Stewart 7ª Ed.
Ex. 1

2. Determine o rotacional e o divergente do campo vetorial

$$F(x,y,z) = xyz\,i - x^2y\,k$$

16.5 - Stewart 7ª Ed.
Ex. 1

2. Determine o rotacional e o divergente do campo vetorial

$$F(x,y,z) = xyz\, i - x^2y\, k$$

Solução:

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & 0 & x^2y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-x^2y) - 0\right) i - \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right) j + \left(0 - \frac{\partial}{\partial y}(xyz)\right) k$$

$$= -x^2\, i - \left(-2xy - xy\right) j - xz\, k$$

$$= -x^2 i + 3xy\, j - xz\, k.$$

16.5 - Stewart 7ª Ed.
Ex. 13

3. Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se for conservativo, determine uma função f tal que $F = \nabla f$:

$$F(x,y,z) = y^2z^3\, i + 2xyz^3\, j + 3xy^2z^2\, k$$

Usaremos o seguinte teorema:
Teorema: Se F for um campo vetorial definido sobre todo $\mathbb{R}^3$ cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $\boxed{\text{rot } F = 0,}$ F será um campo vetorial conservativo. $\rightarrow F = \nabla f$

Solução:

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(3xy^2z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz^3)\right) i - \left(\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2z^3)\right) j + $$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xyz^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2z^3)\right) k$$

$$= (6xyz^2 - 6xyz^2)\, i - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\, j +$$

$$+ (2yz^3 - 2yz^3)\, k$$

$$= 0\, i + 0\, j + 0\, k$$

$$= 0$$

Como F está definido em todo $\mathbb{R}^3$, e suas funções componentes possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, segue que F é conservativo. Então existe uma função f tal que $F = \nabla f$.

$$\nabla f = F$$

$$f_x(x,y,z) = y^2 z^3$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = xy^2z^3 + g(y,z)$$

$$\Rightarrow f_y(x,y,z) = 2xyz^3 + g_y(y,z).$$

Mas $f_y(x,y,z) = 2xyz^3$

$$\Rightarrow g_y(y,z) = h(z)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = xy^2z^3 + h(z)$$

$$\Rightarrow f_z(x,y,z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$$

Mas $f_z(x,y,z) = 3xy^2z^2$ $\qquad \nabla f = F$

$$\Rightarrow h'(z) = 0$$

$$\Rightarrow h(z) = K$$

Logo, uma função potencial para F é:

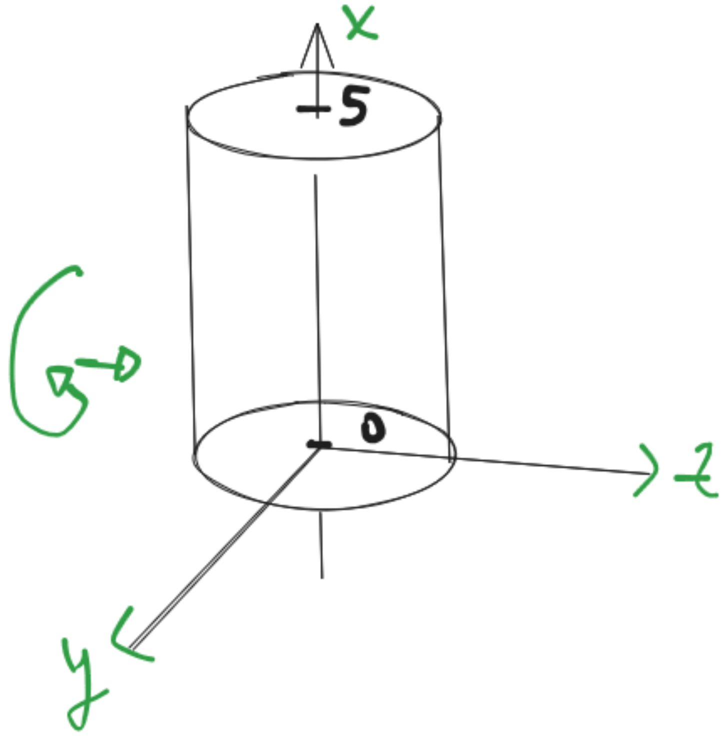
$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + K$$

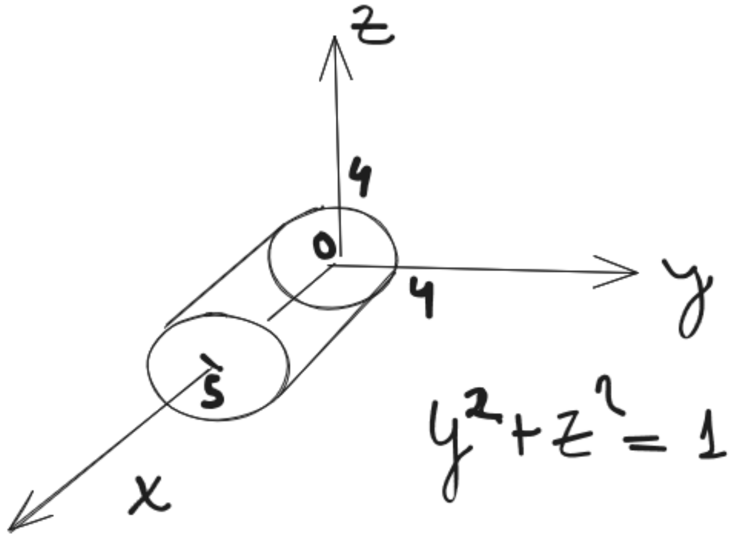
(Se $K=0$
$f(x,y,z) = xy^2z^3$)

Superfícies Parametrizadas
e suas Áreas

16.6 - Stewart 7ª Ed.
Ex. 25

4. Determine uma representação parametrizada para a superfície:
S é a parte do cilindro $y^2+z^2=16$
que se encontra entre os planos $x=0$ e $x=5$.





$$y^2+z^2=16$$

$$x = x \qquad 0 \leq x \leq 5$$
$$y = 4\cos\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$z = 4\,\text{sen}\,\theta$$

Observe que S também pode ser descrito como uma superfície de revolução:

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x)\cos\theta \\ z = f(x)\,\text{sen}\,\theta \\ \text{tq} \quad f(x) = 4 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

16.6 - Stewart 7ª Ed.
Ex. 33

5. Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada por
$x = u+v,\ y = 3u^2,\ z = u - v$
no ponto $(2,3,0)$.

Solução:

A equação paramétrica da superfície pode ser escrita como:

$$r(u,v) = x(u,v)\,i + y(u,v)\,j + z(u,v)\,k$$
$$= (u+v)\,i + 3u^2\,j + (u-v)\,k.$$

Primeiro vamos calcular os vetores tangentes:

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,i + \frac{\partial y}{\partial u}\,j + \frac{\partial z}{\partial u}\,k$$
$$= 1\,i + 6u\,j + 1\cdot k$$
$$= \langle 1, 6u, 1\rangle$$

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,i + \frac{\partial y}{\partial v}\,j + \frac{\partial z}{\partial v}\,k$$
$$= 1\,i + 0\,j + (-1)\,k = i - k.$$
$$= \langle 1, 0, -1\rangle$$

Assim, o vetor normal ao plano tangente é

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 6u & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -6u\,i - (-1-1)j + (-6u)k$$

$$= -6u\,i + 2j - 6uk$$

$$= \langle -6u, 2, -6u \rangle$$

Como $(2,3,0) \in S$,

$$\begin{cases} x = u+v = 2 \\ y = 3u^2 = 3 \\ z = u-v = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow u = v$

$\Rightarrow 2u = 2$

$\Rightarrow u = 1$

Observe que o ponto $(2,3,0)$ corresponde aos valores dos parâmetros $u=1$ e $v=1$.
Logo um vetor normal no ponto $(2,3,0)$ é

$$-6i + 2j - 6k$$

$$= \langle -6, 2, -6 \rangle$$

Logo uma equação do plano tangente à superfície no ponto $(2,3,0)$ é:

$$-6(x-2)+2(y-3)-6(z-0)=0$$

$$\Leftrightarrow -6x+12+2y-6-6z=0$$

$$\Leftrightarrow -6x+2y-6z=-6$$

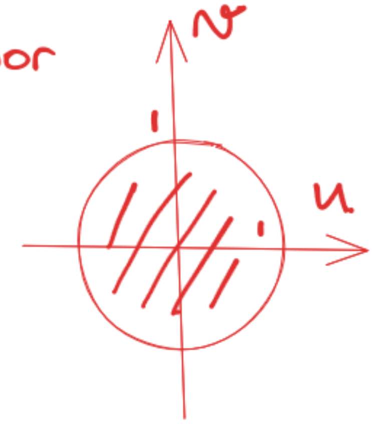
$$\Leftrightarrow 3x-y+3=3$$

16.6 - Stewart 5ª Ed.
Ex. 45

6. Determine a área da superfície dada por

$x = uv$
$y = u + v$
$z = u - v$

tal que $u^2 + v^2 \leq 1$



Solução:

$$r(u,v) = uv\,i + (u+v)\,j + (u-v)\,k$$
$$= \langle uv,\ u+v,\ u-v \rangle$$

$$A(S) = \iint_D |r_u \times r_v|\, dA$$

$r_u = \langle v, 1, 1 \rangle$
$r_v = \langle u, 1, -1 \rangle$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v & 1 & 1 \\ u & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-1)\,i - (-v-u)\,j + (v-u)\,k$$

$$= -2i + (u+v)\,j + (v-u)\,k$$

$$= \langle -2, u+v, v-u \rangle$$

$$|r_u \times r_v| = \sqrt{(-2)^2 + (u+v)^2 + (v-u)^2}$$

$$= \sqrt{4 + u^2 + \cancel{2uv} + v^2 + v^2 - \cancel{2uv} + u^2}$$

$$= \sqrt{4 + 2(u^2+v^2)}$$

$$A(S) = \iint_D |r_u \times r_v|\, dA = \iint_D \sqrt{4+2(u^2+v^2)}\, dA =$$

$u = \alpha \cos\theta$

$v = \alpha \operatorname{sen}\theta$

$$= \int_{\alpha=0}^{\alpha=1} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sqrt{4+2\alpha^2} \cdot \alpha \; d\alpha\, d\theta$$

$$= \int^{2\pi} d\theta \cdot \int^{1} \sqrt{4+2\alpha^2}\; \alpha \cdot d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \sqrt{4+2\alpha^2}\ \underline{\alpha \cdot d\alpha} =$$

$$\left[\begin{array}{l} w = 4+2\alpha^2 \\ dw = 4\alpha\, d\alpha \Rightarrow \alpha\, d\alpha = \frac{1}{4} dw \\ \int \sqrt{w}\ \frac{1}{4} dw = \frac{1}{4}\frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6} w^{\frac{3}{2}} + c \end{array}\right]$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{6} (4+2\alpha^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1$$

$$= \frac{2\pi}{6}\left(6^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\pi}{3}\left(6\sqrt{6} - 8\right)$$

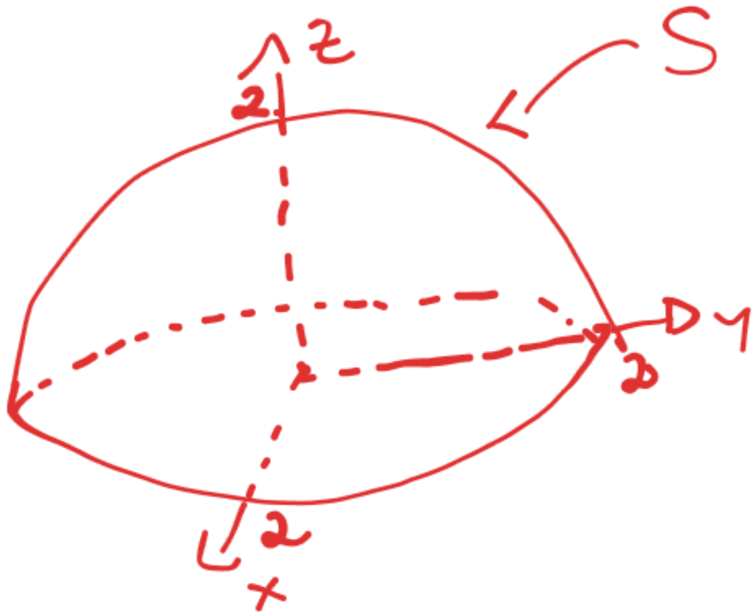
$$= \left(2\sqrt{6} - \frac{8}{3}\right)\pi$$

16.7 - Stewart 7ª Ed.
Ex. 17

7. Calcule a integral de superfície:

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS$$

S é o hemisfério $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 0$



$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(r(u,v)) \cdot |r_u \times r_v|\, dA$$

Usando coordenadas esféricas

$$x = 2 \operatorname{sen}\phi \cos\theta$$
$$y = 2 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$
$$z = 2 \cos\phi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$r(\phi, \theta) = 2\operatorname{sen}\phi\cos\theta\, i + 2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\, j + 2\cos\phi\, k$$

$$r_\phi = \langle 2\cos\phi\cos\theta, 2\cos\phi\operatorname{sen}\theta, -2\operatorname{sen}\phi \rangle$$

$$r_\theta = \langle -2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, 2\operatorname{sen}\phi\cos\theta, 0 \rangle$$

$$r_\phi \times r_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2\cos\phi\cos\theta & 2\cos\phi\operatorname{sen}\theta & -2\operatorname{sen}\phi \\ -2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & 2\operatorname{sen}\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(4\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\right) i - \left(-4\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta\right) j + \left(\underline{4\operatorname{sen}\phi\cos\phi}\cos^2\theta + \underline{4\operatorname{sen}\phi\cos\phi}\operatorname{sen}^2\theta\right) k$$

$$= \langle 4\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, 4\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta, 4\operatorname{sen}\phi\cos\phi \rangle$$

$$\Rightarrow |r_\phi \times r_\theta| = \sqrt{16\,\text{sen}^4\phi\cos^2\theta + 16\,\text{sen}^4\phi\,\text{sen}^2\theta + 16\,\text{sen}^2\phi\cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{16\,\text{sen}^4\phi\,(\ 1\ ) + 16\,\text{sen}^2\phi\cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{16\,\text{sen}^2\phi\,(\text{sen}^2\phi + \cos^2\phi)}$$

$$= 4\,.\,\text{sen}\,\phi \qquad\qquad \rho^2 .\,\text{sen}\,\phi$$

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\,\text{sen}^2\phi\cos^2\theta\; 2\cos\phi + 4\,\text{sen}^2\phi\,\text{sen}^2\theta\; 2\cos\phi\right) \overbrace{|r_\phi \times r_\theta|}^{4\,\text{sen}\,\phi\ =}\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\,\text{sen}^2\phi \cdot 2\cos\phi \cdot 4\,\text{sen}\,\phi\; d\phi\, d\theta$$

$0 \quad 0$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\, \text{sen}^2\phi \cdot 2\cos\phi \cdot 4\, \text{sen}\,\phi \; d\phi\, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\, \text{sen}^3\phi \, \cos\phi \, d\phi =$$

$u = \text{sen}\,\phi$

$du = \cos\phi \, d\phi$

$\int u^3\, du$

$$= 64\pi \left. \frac{\text{sen}^4\phi}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 16\pi\,(1-0)$$

$$= 16\pi$$

Integral de Superfície de campos vetorais

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S F \cdot n \, dS$$

fluxo de F através de S

- Se S é dado por $r(u,v)$, temos $\quad n = \dfrac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S F \cdot \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} \, dS = \iint_D F \cdot (r_u \times r_v) \, dA$$

- Se S é dada pelo gráfico $z = g(x,y)$,

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_D \left(-P \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - Q \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

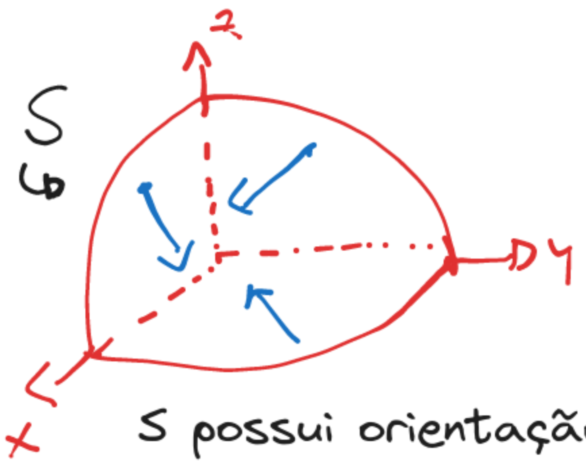
$F = Pi + Qj + Rk$

16.7 - Stewart 7ª Ed.
Ex. 25

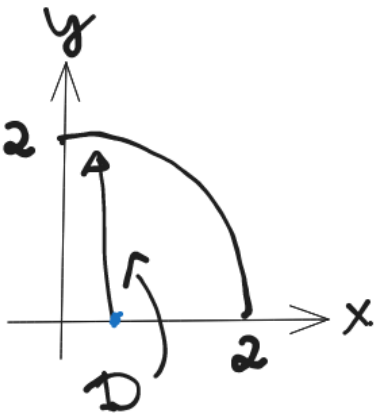
8. Avalie a integral de superfície $\iint_S F \cdot dS$ para o campo vetorial F e a superfície orientada S. Em outras palavras, localize o fluxo de F através de S.

$$F(x,y,z) = x\,i - z\,j + y\,k$$

S é parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no 1º octante com orientação para origem.



S possui orientação negativa!



Vamos parametrizar a superfície:

$$x = x$$
$$y = y$$
$$z = g(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$x^2+y^2+z^2 = 4$$
$$\Rightarrow z = \sqrt{4-x^2-y^2}, \ z \geq 0$$

$0 \leq x \leq 2$

$0 \leq y \leq 4-x^2$

$$D = \{(x,y), \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq 4-x^2\}$$

Como S possui orientação descendente, então

$$\iint_S F \cdot dS = -\iint_D \left(-P \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - Q \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA =$$

$(F = P\,i + Q\,j + R\,K)$

$(F = P\,i + Q\,j + R\,k)$

$$= -\iint_D \left(-x \cdot \frac{1}{2}(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) - (-z) \cdot \frac{1}{2}(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) + y \right) dA$$

$$= -\iint_D \left(\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - \frac{y \cdot \sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + y \right) dA$$

$$= -\iint_D \frac{x^2 - y\sqrt{4-x^2-y^2} + y\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dA$$

$$= -\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dA$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \frac{r^2 \cos^2\theta}{\sqrt{4-r^2}} \cdot \underline{r\,dr}\,d\theta$$

$u = 4 - r^2$

$du = -2r\,dr$

$r\,dr = -\frac{1}{2}\,du$

$r = 0 \Rightarrow u = 4$

$r = 2 \Rightarrow u = 0$

$r^2 = 4 - u$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_4^0 \frac{(4-u)\cos^2\theta}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{2}\right) du\, d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2} \right) d\theta \cdot \int_4^0 -\frac{1}{2}(4-u)\,u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= -\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{sen}(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left[\int_4^0 4\,u^{-\frac{1}{2}}\,du - \int_4^0 u^{\frac{1}{2}}\,du\right]$$

$$= -\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cdot 0\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(4\cdot 2u^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\,\Big|_4^0\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(-8\cdot 2 + \frac{16}{3}\right) = \frac{\pi}{8}\left(-16+\frac{16}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{-48+16}{3}\right) = -\frac{4\pi}{3}$$