

Aula de Exercícios

◆ Cálculo II - MA211

REGRA DA CADEIA

EXERCÍCIO 1. Seja $z = x^2 + xy^3$ com $x = uv^2 + w^3$ e $y = u + ve^w$. Determine $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2, v = 1, w = 0$.

SOLUÇÃO:

Pela Regra da Cadeia, temos

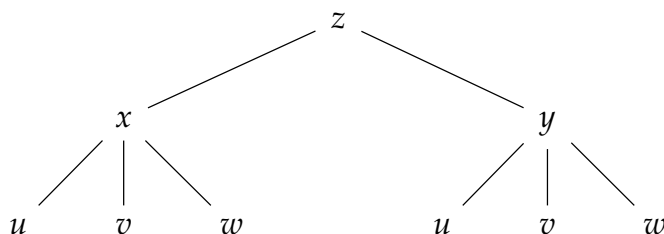
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = (2x + y^3)v^2 + 3xy^2, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = (2x + y^3)2uv + 3xy^2e^w \\ \frac{\partial z}{\partial w} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} = (2x + y^3)3w^2 + 3xy^2ve^w.\end{aligned}$$

Quando $u = 2, v = 1, w = 0$, temos

$$x = 2, y = 3,$$

logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= 31 \cdot 1 + 54 \cdot 1 = 85, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= 31 \cdot 4 + 54 \cdot 1 = 178 \\ \frac{\partial z}{\partial w} &= 31 \cdot 0 + 54 \cdot 1 = 54.\end{aligned}$$



EXERCÍCIO 2. Suponha que a equação $e^z = xyz$ determine $z = f(x, y)$ como função de x e y . Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

SOLUÇÃO 1: Seja $F(x, y, z) = e^z - xyz = 0$. Então, pela regra de derivação implícita, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

SOLUÇÃO 2: Derivando a equação $e^z = xyz$ em relação a x , obtemos

$$\begin{aligned} e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= yz + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(e^z - xy) &= yz \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{yz}{e^z - xy}. \end{aligned}$$

De modo análogo, derivando $e^z = xyz$ em relação a y ,

$$\begin{aligned} e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= xz + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(e^z - xy) &= xz \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{xz}{e^z - xy}. \end{aligned}$$

■ Para deduzir as fórmulas usadas na Solução 1, basta derivar $F(x, y, z) = 0$ em relação a x e y , respectivamente, lembrando-se que $z = f(x, y)$.

EXERCÍCIO 3. Mostre que qualquer função da forma

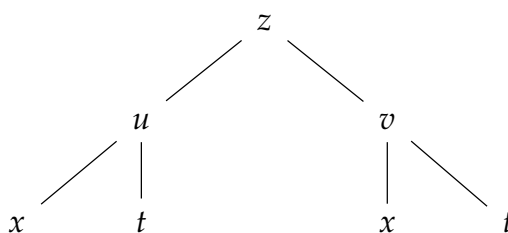
$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

[Dica: $u = x + at$, $v = x - at$.]

SOLUÇÃO: Sejam $u := x + at$ e $v := x - at$. Então, $z = f(u) + g(v)$. Logo, $\frac{\partial z}{\partial u} = f'(u)$ e $\frac{\partial z}{\partial v} = g'(v)$.



Então,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = af'(u) - ag'(v),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= a \frac{\partial}{\partial t} [f'(u) - g'(v)] \\ &= a \left(\frac{\partial f'(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial f'(u)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}} - \cancel{\frac{\partial g'(v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}} - \frac{\partial g'(v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ &= a^2 [f''(u) + g''(v)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'(u) + g'(v), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} [f'(u) + g'(v)] \\ &= \frac{\partial f'(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial f'(u)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial g'(v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial g'(v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= f''(u) + g''(v). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

DERIVADAS DIRECIONAIS E O VETOR GRADIENTE

EXERCÍCIO 4. Determine a derivada direcional de $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$ no ponto $p = (0, 0, 0)$ na direção e sentido do vetor $v = (5, 1, -2)$

SOLUÇÃO:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \\ &= (e^y + ze^x, xe^y + e^z, ye^z + e^x). \end{aligned}$$

Logo, $\nabla f(0, 0, 0) = (1, 1, 1)$. Um vetor unitário na direção de $v = (5, 1, -2)$ é

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}} \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} D_{\hat{v}} f(0, 0, 0) &= \nabla f(0, 0, 0) \cdot \hat{v} \\ &= (1, 1, 1) \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}} \right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{30}}. \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 5. Determine a taxa de variação máxima de $f(x, y) = \sin(xy)$ no ponto $p = (1, 0)$ e a direção em que isso ocorre.

SOLUÇÃO: $\nabla f(x, y) = (y \cos(xy), x \cos(xy))$. Logo, $\nabla f(1, 0) = (0, 1)$.

Então a variação máxima é dada por $|\nabla f(1, 0)| = 1$ e ocorre na direção do vetor gradiente $(0, 1)$.

EXERCÍCIO 6. Determine equações de plano tangente e reta normal a uma superfície dada no ponto especificado:

$$S = \{xyz^2 = 6\}, \quad p = (3, 2, 1).$$

SOLUÇÃO: Seja $F(x, y, z) = xyz^2$. (S é a superfície de nível de equação $F(x, y, z) = 6$). Temos

$$\nabla F(x, y, z) = (yz^2, xz^2, 2xyz),$$

daí

$$\nabla F(3, 2, 1) = (2, 3, 12).$$

Equação de $T_p S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla F(p) \cdot ((x, y, z) - p) = 0\}$:

$$\nabla F(3, 2, 1) \cdot (x - 3, y - 2, z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 3) + 3(y - 2) + 12(z - 1) = 0.$$

Equação da reta normal $R_p = \{p + tN_p \mid t \in \mathbb{R}\}$:

$$(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(2, 3, 12); t \in \mathbb{R},$$

escrevendo em equações simétricas:

$$\begin{aligned} \frac{x - 3}{F_x(3, 2, 1)} &= \frac{y - 2}{F_y(3, 2, 1)} = \frac{z - 1}{F_z(3, 2, 1)} \\ \Leftrightarrow \frac{x - 3}{2} &= \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 1}{12} \end{aligned}$$

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

EXERCÍCIO 7. Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função

$$f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2.$$

SOLUÇÃO:

As derivadas parciais de primeira ordem são dadas por:

$$f_x = -2 - 2x$$

$$f_y = 4 - 8y.$$

Para encontrarmos os pontos críticos, devemos resolver as equações

$$\begin{cases} -2 - 2x = 0 & (1) \\ 4 - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

Da Equação (1), temos $2x = -2 \Rightarrow x = -1$. Da Equação (2), $8y = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Então o único ponto crítico é $(-1, \frac{1}{2})$.


Agora vamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem e $D(x, y)$:

$$f_{xx} = -2 \quad f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = -8$$

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-8) - 0^2 = 16.$$

Como $D(-1, \frac{1}{2}) = 16 > 0$ e $f_{xx}(-1, \frac{1}{2}) = -2 < 0$, então pelo Teste da Segunda Derivada $f(-1, \frac{1}{2}) = 11$ é um máximo local.

EXERCÍCIOS EXTRAS

 EXERCÍCIO 8. Uma função f é dita **homogênea de grau n** se $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo t , sendo n um inteiro positivo e f tem as segundas derivadas parciais contínuas.

(a) Verifique que $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.

(b) Mostre que que, se f é homogênea de grau n , então

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y).$$

[Dica: Use a Regra da Cadeia para derivar $f(tx, ty)$ em relação a t .]

SOLUÇÃO: (a) Como f é uma função polinomial, f é contínua e possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas e

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2(ty) + 2(tx)(ty)^2 + 5(ty)^3 \\ &= t^3x^2y + 2t^3xy^2 + 5t^3y^3 \\ &= t^3(x^2y + 2xy^2 + 5y^3) \\ &= t^3f(x, y). \end{aligned}$$

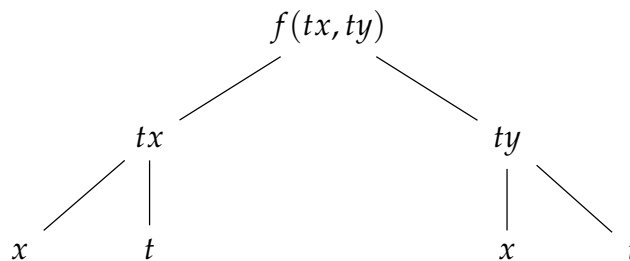
Portanto, f é homogênea de grau 3.


(b) Seja f homogênea de grau n . Diferenciando ambos os lados de $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ em relação a t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(tx, ty) &= \frac{\partial}{\partial t} [t^n f(x, y)] \Leftrightarrow \\ \frac{\partial}{\partial (tx)} f(tx, ty) \cdot \frac{\partial (tx)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial (ty)} f(tx, ty) \cdot \frac{\partial (ty)}{\partial t} &= x \frac{\partial}{\partial (tx)} f(tx, ty) + y \frac{\partial}{\partial (ty)} f(tx, ty) = n t^{n-1} f(x, y). \end{aligned}$$

Tomando $t = 1$:

$$x \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + y \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = n f(x, y).$$



 EXERCÍCIO 9. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = ye^{-x}$ no ponto $p = (0, 4)$ no sentido do ângulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

SOLUÇÃO: $f(x, y) = ye^{-x} \Rightarrow f_x(x, y) = -ye^{-x}$ e $f_y = e^{-x}$. Se u é um vetor unitário na direção do ângulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$, i.e. $u = (\cos \theta, \sin \theta)$, então

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta,$$

logo,

$$\begin{aligned} D_u f(0, 4) &= f_x(0, 4) \cos \frac{2\pi}{3} + f_y(0, 4) \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= -4\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$