Probabilidade

Curso: Estatística e Probabilidade

Prof. Neemias Martins

PUC Campinas

neemias.silva@puc-campinas.edu.br

Conjuntos

Conjuntos

Um *conjunto* é uma coleção de objetos, que são chamados de *elementos* do conjunto.

- Se x é um elemento de um conjunto A, dizemos que x pertence a A e escrevemos
$$x \in A.$$
- Se x não é um elemento de A, escrevemos
$$x \notin A.$$
- Se A não possui elementos, então ele é o *conjunto vazio*, denotado por
$$A = \varnothing.$$

Descrevendo um conjunto

- Listando seus elementos:

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Por exemplo,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

- Definindo uma propriedade P:

$$A = \{x \mid x \ \text{ satisfaz } \ P\}$$

Por exemplo,

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ 1 \leq x \leq 5\}.$$

Subconjuntos

- Se todo elemento de um conjunto A também é elemento de um conjunto B, dizemos que A é subconjunto de B (ou A está contido em B) e escrevemos

  $$A \subset B.$$

  Por exemplo,

  $$A = \{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = B.$$

- Quando dois conjuntos tem os mesmos elementos eles são iguais:

  $$A = B.$$

Operações com conjuntos

- A *interseção* entre dois conjuntos A e B é o subconjunto formado pelos elementos comuns de A e B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

- A união entre A e B é formada pelos elementos que estão em A ou B (ou ambos):

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Operações com conjuntos

- Podemos definir a interseção e a união para quantidades enumeráveis infinitas:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

Operações com conjuntos

- A diferença entre os conjuntos A e B, é dada pelos elementos que estão em A e não estão em B :

$$A \setminus B = \{x |\ x \in A \ \text{ e } \ x \notin B\}.$$

- A coleção de todos os elementos possíveis em um dado contexto é chamado de *conjunto universal*, o denotaremos por Ω. O complementar de um conjunto A é definido por

$$A^{\complement} = \Omega \setminus A.$$

Operações com conjuntos

- Dois conjuntos A e B são *disjuntos* se a interseção é vazia, i.e.

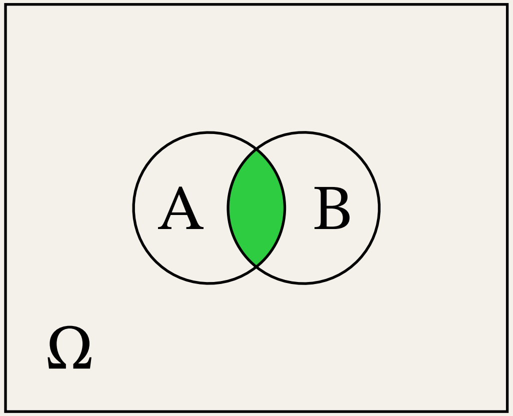
$$A \cap B = \emptyset.$$

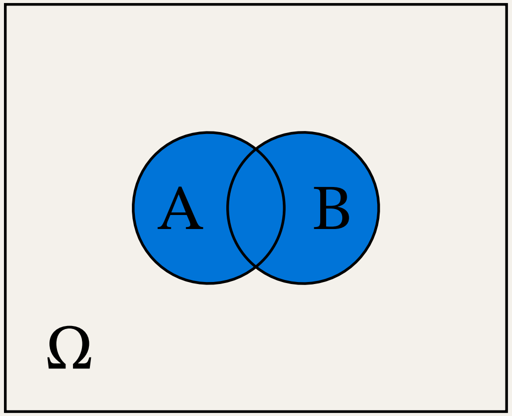
- Uma *partição* de um conjunto A, é uma coleção de subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dois a dois disjuntos de modo que

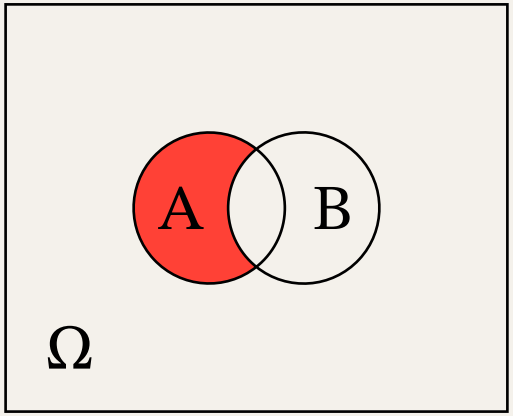
$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A.$$

- A cardinalidade de um conjunto A, denotada por $\#A$, é o número de elementos em A.

Diagrama de Venn







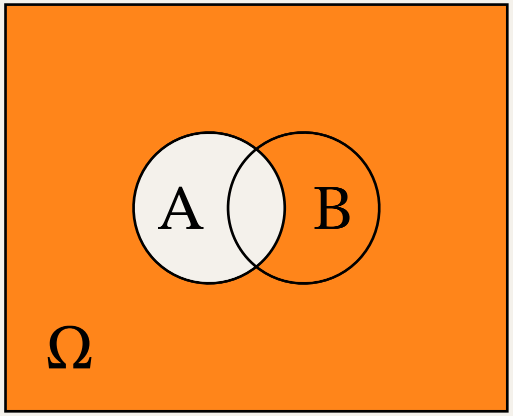
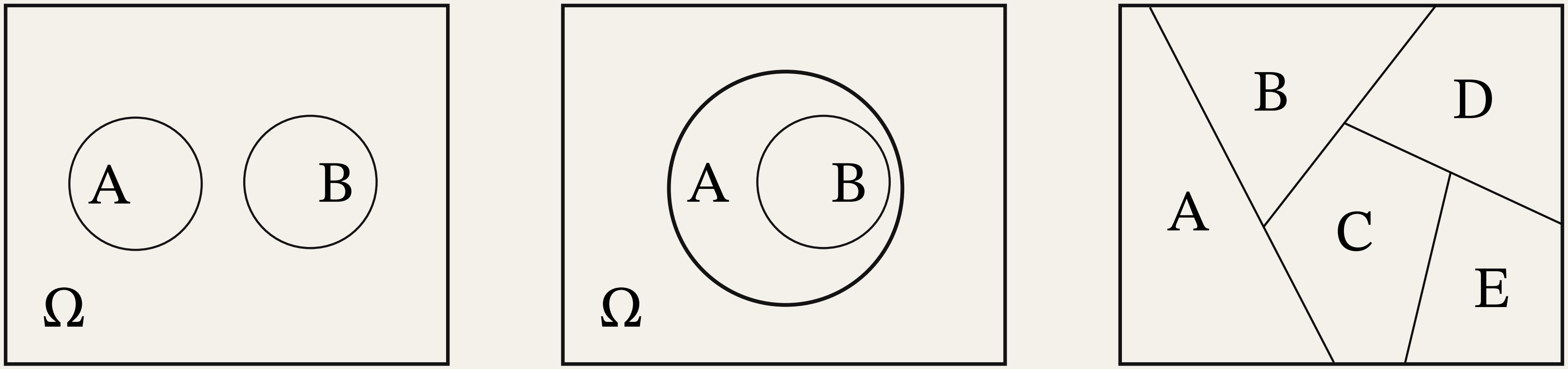


Diagrama de Venn



Probabilidade

Espaço amostral

- Um *experimento aleatório* é um processo de coleta de dados em que os resultados possíveis são conhecidos, mas não se sabe qual deles ocorrerá.
- O *espaço amostral* é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Ou seja, é o conjunto universal Ω associado ao experimento.
- Um *evento* é um subconjunto do espaço amostral Ω.

Exemplos

- No lançamento de uma moeda, o espaço amostral é

$$\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$$

- Tempo de reação de um medicamento. O espaço amostral é:

$$\Omega = \{t \mid t \geq 0\}.$$

Exemplos

Lança-se um dado e observa-se a face que cai virada para cima.

- O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Exemplos de eventos:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$A = \text{" o número observado é par"}$$

$$B = \{1, 2\}$$

$$B = \text{" o número observado é menor do que" } 3$$

$$C = \{5\}$$

$$C = \text{" o número observado é" } 5.$$

Eventos

- $A \cup B$ é o evento "A ocorre ou B ocorre"
- $A \cap B$ é o evento "A ocorre e B ocorre"
- $A^\complement$ é o evento "A não ocorre."

Exemplos

No exemplo anterior,

$$A = \{2, 4, 6\}$$
$$B = \{1, 2\}$$
$$C = \{5\}$$

$$A^{\complement} = \{1, 3, 5\}$$
$$A \cap B = \{2\}$$
$$B \cup C = \{1, 2, 5\}$$

Eventos excludentes

Dois eventos A e B são ditos *mutuamente excludentes* se não podem ocorrer simultaneamente, ou seja, se

$$A \cap B = \varnothing.$$

Observação: A e $A^{\complement}$ são sempre mutuamente excludentes.

Probabilidade

Uma *probabilidade* é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ de modo que:

a) Para todo evento A, tem-se $0 \leq P(A) \leq 1$;

b) $P(\Omega) = 1$;

c) Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemplo

Considere um dado honesto, em que todas as faces têm a mesma chance de ocorrer, então

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}).$$

Se $A = \{2, 4, 6\}$, então

$$\begin{aligned} P(A) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) &= P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2} = 50\% \end{aligned}$$

Exemplo

Se $B = \{1, 2, 3\},\ C = \{5\}$ então

$$\begin{aligned}
P(B \cup C) &= P(B) + P(C) \\
&= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \\
&= \frac{4}{6} \\
&= \frac{2}{3} = 66.67\%
\end{aligned}$$

Propriedades

- Lei do complemento:

$$P\left(A^{\complement}\right) = 1 - P(A).$$

  Ou seja, a probabilidade de um evento acontecer mais a probabilidade de ele não acontecer é 100%:

$$P(A) + P\left(A^{\complement}\right) = 1.$$

- Probabilidade de um evento impossível: Se $A = \varnothing$, então

$$P(A) = 0.$$

  A recíproca é falsa: $P(A) = 0 \nRightarrow A = \varnothing$.

Exemplo

Exemplo: Se $B = \{1, 2, 3\},\ C = \{5\}$, então

$$P(B \cap C) = P(\varnothing) = 0 = 0\%.$$

Ou seja, a probabilidade de em um lançamento obtermos um número menor do que 4 que seja igual a 5 é zero.

Exemplo

Suponha que um dado seja viciado: ele tenha três faces iguais a 2, por exemplo, e as outras faces sejam 4,5,6.

Então

$$P(2) = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$P(1) = P(3) = 0$$

$$P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6} = 16.67\%.$$

Propriedades

- Lei da adição:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

  A probabilidade de A ou B acontecer é a probabilidade de A acontecer, mais a probabilidade de B acontecer, menos a probabilidade de A e B ocorrerem.

Exemplo

Se $A = \{2, 4, 6\},\ B = \{1, 6\}$, então

$$A \cap B = \{6\} \text{ e } A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 66.67\% \end{aligned}$$

Modelo equiprobabilístico

Um *modelo equiprobabilístico* num espaço amostral Ω com n elementos associa a cada evento simples a probabilidade $\frac{1}{n}$. Se o modelo é equiprobabilístico, então a probabilidade de um evento A é simplesmente

$$P(A) = \frac{\text{quantidade de casos favoráveis}}{\text{quantidade de casos possíveis}} = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Observação

Não se pode utilizar a fórmula anterior para modelos não equiprobabilísticos. Por exemplo, se o espaço amostral é

$$\Omega = \{\text{o São Paulo ser campeão, o São Paulo não ser campeão}\}$$

não necessariamente o São Paulo tem 50% de chances de ser campeão.

Exercícios

Exercícios

1. Defina espaços amostrais razoáveis os experimentos a seguir.

a) Jogue uma moeda três vezes e anote a sequencia de caras (K) e coroas (C).

b) Jogue dois dados e anote a diferença de suas faces.

c) Jogue um dado até que o número 2 apareça e anote quantas vezes ele foi jogado.

d) Jogue uma moeda 100 vezes e anote quantas caras foram obtidas.

e) Anote o nome do próximo time campeão da Champions League.

Solução

a) $\Omega = \{KKK, KKC, KCK, KCC, CKK, CKC, CCK, CCC, \}$

b) $\Omega = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\} = \mathbb{N}^*$

d) $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 100\}$

e) $\Omega = \{\text{Arsenal, PSG, Barcelona, Internazionale}\}$.

Observação: Num cenário de dados justos e lançamentos independentes, apenas o item (a) corresponde a um modelo equiprovável.

Exercícios

2.

a) Suponha que $P(A) = 0.7$ e $P(B) = 0.2$ com A e B mutuamente excludentes. Calcule $P(A \cup B)$.

b) Suponha que $P(A) = 0.7,\ P(B) = 0.5$. Entre que valores está compreendido $P(A \cap B)$?

Solução

a) Como $A \cap B = \emptyset$, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.7 + 0.2 = 0.9.$$

b) Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e $P(A \cup B) \leq 1$, então

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(A \cap B) &\leq 1 \\ 0.7 + 0.5 - P(A \cap B) &\leq 1 \\ 1.2 - 1 &\leq P(A \cap B) \\ 0.2 &\leq P(A \cap B). \end{aligned}$$

Uma vez que $A \cap B \subset B$, então $P(A \cap B) \leq P(B)$. Portanto,

$$0.2 \leq P(A \cap B) \leq 0.5.$$

Exercícios

3. Uma pesquisa apontou que 30% dos funcionários que pediram demissão de uma empresa, saíram por insatisfação salarial; 22% por insatisfação com a política de promoções da empresa e 10% com ambas as queixas.

Considere A o evento em que o funcionário sai da empresa por insatisfação salarial e B o evento em que o funcionário sai por insatisfação com a política de promoções. Calcule a probabilidade de um funcionário sair dessa empresa por insatisfação salarial ou por insatisfação com a política de promoções da empresa.

Solução

$P(A) = 30\%$

$P(B) = 22\%$

$P(A \cap B) = 10\%$

$\Rightarrow P(A \cup B) = 30 + 22 - 10 = 42\%.$

Exercícios

4. Lança-se uma moeda justa três vezes e anota-se a sequência de Caras (K) e Coroas (C) resultante. Considere os eventos:

- A : "os dois primeiros resultados são iguais"
- B : "o primeiro lançamento é uma coroa"
- D : "pelo menos um lançamento é uma coroa".

a) Escreva A, B, C como subconjuntos de Ω e calcule suas probabilidades.

b) Interprete os seguintes eventos em linguagem comum e calcule as suas probabilidades: $A^{\complement}, A \cap B, A \cap D, A \cup B,$

Solução

a)

$$\Omega = \{KKK, KKC, KCK, KCC, CKK, CKC, CCK, CCC\}$$

$$A = \{KKK, KKC, CCK, CCC\}$$

$$B = \{CKK, CKC, CCK, CCC\},$$

$$D = \{KKC, KCK, KCC, CKK, CKC, CCK, CCC\} = \Omega \setminus \{KKK\}.$$

Solução

b) $A^{\complement}$ = “Os dois primeiros resultados são distintos”

$A \cap B$ = “Os dois primeiros resultados são iguais
e o primeiro lançamento é coroa”
“Os dois primeiros resultados são coroa”

$A \cap D$ = “Os dois primeiros resultados são iguais
e pelo menos um lançamento é coroa”

$A \cup B$ = “Os dois primeiros resultados são iguais
ou o primeiro lançamento é coroa”

Exercícios

5. Dois dados são lançados - um vermelho e um azul. Escreva um espaço amostral para este experimento, e calcule a probabilidade de a soma dos dois dados ser 8. O problema se altera se os dados forem da mesma cor?

Solução

Representaremos cada lançamento dos dois dados por um par ordenado (x, y) em que x representa o número correspondente ao dado vermelho e y representa o número correspondente ao dado azul.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x, y) : 1 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 6, \text{ e } x, y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\} \\ A &= \text{A soma de } x \text{ e } y \text{ é } 8 \\ &= \{(x, y) \in \Omega : x + y = 8\} \\ &= \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\} \\ &\Rightarrow P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{5}{36}.\end{aligned}$$

A probabilidade não se altera se os dados forem da mesma cor.

Bons estudos!