

#3 - AULA DE EXERCÍCIOS

NEEMIAS MARTINS

1. Seja $z = x^2 + xy^3$ com $x = uv^2 + w^3$ e $y = u + ve^w$. Determine $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2, v = 1, w = 0$.

Pela Regra da Cadeia, temos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = (2x + y^3)v^2 + 3xy^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = (2x + y^3)2uv + 3xy^2e^w$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} = (2x + y^3)3w^2 + 3xy^2ve^w.$$

Quando $u = 2, v = 1, w = 0$, temos

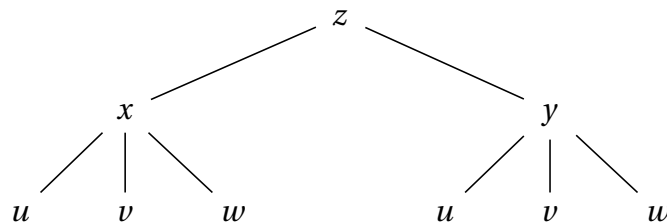
$$x = 2, y = 3,$$

logo

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 31 \cdot 1 + 54 \cdot 1 = 85,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 31 \cdot 4 + 54 \cdot 1 = 178$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = 31 \cdot 0 + 54 \cdot 1 = 54.$$



2. Suponha que a equação $e^z = xyz$ determine $z = f(x, y)$ como função de x e y . Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Seja $F(x, y, z) = e^z - xyz = 0$. Então, pela derivação implícita, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

3. Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

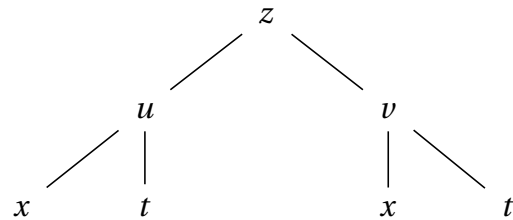
[Dica: $u = x + at$, $v = x - at$.]

Sejam $u := x + at$ e $v := x - at$. Então, $z = f(u) + g(v)$. Logo, $\frac{\partial z}{\partial u} = f'(u)$ e $\frac{\partial z}{\partial v} = g'(v)$.

Então,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = af'(u) - ag'(v),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= a \frac{\partial}{\partial t} [f'(u) - g'(v)] \\ &= a \left(\frac{df'(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{dg'(v)}{dv} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ &= a^2 [f''(u) + g''(v)], \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'(u) + g'(v), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} [f'(u) + g'(v)] = \frac{df'(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dg'(v)}{dv} \frac{\partial v}{\partial x} = f''(u) + g''(v). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

4. Uma função f é dita **homogênea de grau n** se $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo t , sendo n um inteiro positivo e f tem as segundas derivadas parciais contínuas.

(a) Verifique que $f(x, y) = x^2 y + 2x y^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.

(b) Mostre que se f é homogênea de grau n , então

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y).$$

[Dica: Use a Regra da Cadeia para derivar $f(tx, ty)$ em relação a t .]

(a) Como f é uma função polinomial, f é contínua e possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas e

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2(ty) + 2(tx)(ty)^2 + 5(ty)^3 \\ &= t^3 x^2 y + 2t^3 x y^2 + 5t^3 y^3 \\ &= t^3 (x^2 y + 2x y^2 + 5y^3) \\ &= t^3 f(x, y). \end{aligned}$$

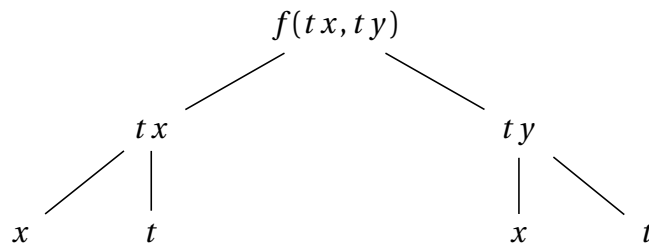
Portanto, f é homogênea de grau 3.

(b) Seja f homogênea de grau n . Diferenciando ambos os lados de $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ em relação a t :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f(tx, ty) &= \frac{\partial}{\partial t} [t^n f(x, y)] \Leftrightarrow \\ \frac{\partial}{\partial (tx)} f(tx, ty) \cdot \frac{\partial (tx)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial (ty)} f(tx, ty) \cdot \frac{\partial (ty)}{\partial t} &= x \frac{\partial}{\partial (tx)} f(tx, ty) + y \frac{\partial}{\partial (ty)} f(tx, ty) = n t^{n-1} f(x, y).\end{aligned}$$

Tomando $t = 1$:

$$x \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + y \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = n f(x, y).$$



5. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = ye^{-x}$ no ponto $p = (0, 4)$ no sentido do ângulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

$f(x, y) = ye^{-x} \Rightarrow f_x(x, y) = -ye^{-x}$ e $f_y = e^{-x}$. Se u é um vetor unitário na direção do ângulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$, i.e. $u = (\cos \theta, \sin \theta)$, então

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta,$$

logo,

$$\begin{aligned}D_u f(0, 4) &= f_x(0, 4) \cos \frac{2\pi}{3} + f_y(0, 4) \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= -4\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

6. Determine a derivada direcional de $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$ no ponto $p = (0, 0, 0)$ na direção e sentido do vetor $v = (5, 1, -2)$

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \\ &= (e^y + ze^x, xe^y + e^z, ye^z + e^x).\end{aligned}$$

Logo, $\nabla f(0, 0, 0) = (1, 1, 1)$. Um vetor unitário na direção de $v = (5, 1, -2)$ é

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}} \right).$$

Então,

$$\begin{aligned}D_{\hat{v}} f(0, 0, 0) &= \nabla f(0, 0, 0) \cdot \hat{v} \\ &= (1, 1, 1) \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}} \right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{30}}.\end{aligned}$$

7. Determine a taxa de variação máxima de $f(x, y) = \sin(xy)$ no ponto $p = (1, 0)$ e a direção em que isso ocorre.

$\nabla f(x, y) = (y \cos(xy), x \cos(xy))$. Logo, $\nabla f(1, 0) = (0, 1)$.

Então a variação máxima é dada por $|\nabla f(1, 0)| = 1$ e ocorre na direção do vetor gradiente $(0, 1)$.

8. Determine equações de plano tangente e reta normal a uma superfície dada no ponto especificado:

$$S = \{xyz^2 = 6\}, \quad p = (3, 2, 1).$$

Seja $F(x, y, z) = xyz^2$. (S é a superfície de nível de equação $F(x, y, z) = 6$). Temos

$$\nabla F(x, y, z) = (yz^2, xz^2, 2xyz),$$

daí

$$\nabla F(3, 2, 1) = (2, 3, 12).$$

Equação de $T_p S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla F(p) \cdot ((x, y, z) - p) = 0\}$:

$$\nabla F(3, 2, 1) \cdot (x - 3, y - 2, z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 3) + 3(y - 2) + 12(z - 1) = 0.$$

Equação da reta normal $R_p = \{p + tN_p \mid t \in \mathbb{R}\}$:

$$(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(2, 3, 12); t \in \mathbb{R},$$

escrevendo em equações simétricas:

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{F_x(3,2,1)} &= \frac{y-2}{F_y(3,2,1)} = \frac{z-1}{F_z(3,2,1)} \\ \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} &= \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{12} \end{aligned}$$