1. Find $L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right]$

Ans : $f(t) = \frac{t \sin at}{2a}$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right]$$

So, $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right) = \frac{-2s}{(s^2+a^2)^2}$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right) = \frac{s}{(s^2+a^2)^2}$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{1}{2} L^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times t \times \frac{\sin at}{a}$$

2. Find $L^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right]$

Ans : $f(t) = \frac{\sin at + at \cos at}{2a}$

$$L^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right]$$

So, $\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{s^2+a^2 - s(2s)}{(s^2+a^2)^2}$

$$= \frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{s^2}{(s^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{s^2+a^2-a^2+s^2}{(s^2+a^2)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s^2+a^2}{(s^2+a^2)^2} - \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2+a^2} - \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2} - \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin at}{a} + t \cos at\right)$$

$$= \frac{\sin at + at \cos at}{2a}$$

3. Find $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}\right]$

Ans : $f(t) = \frac{1}{a^2}\left(t - \frac{\sin at}{a}\right)$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{a^2}{s^2(s^2+a^2)}\right)\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{s^2+a^2-s^2}{s^2(s^2+a^2)}\right)\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+a^2}\right)\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{a^2 s^2} - \frac{a}{a^3(s^2+a^2)}\right]$$

$$= \frac{t}{a^2} - \frac{\sin at}{a^3}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(t - \frac{\sin at}{a}\right)$$

4. Find $L^{-1}\left[\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right]$

Ans : $f(t) = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1$

$$= \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{Ds+E}{s^2+1}$$

$$= \frac{As^2 + A + Bs^3 + Bs + Cs^4 + Cs^2 + Ds^4 + Es^3}{s^3(s^2+1)}$$

$\Rightarrow$ $A = 1$, $A + C = 0$, $B + E = 0$, $C + D = 0$, $B = 0$

$A = 1$, $C = -1$, $B = 0$, $E = 0$, $D = 1$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$= \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t$$

5. Find $L^{-1}\left[\frac{5-3e^{-3s}-2e^{-7s}}{s}\right]$

Ans : $f(t) = \begin{cases} 5, & 0 < t \leq 3 \\ 2, & 3 < t \leq 7 \\ 0, & t > 7 \end{cases}$

$$L^{-1}\left[\frac{5}{s} - \frac{3e^{-3s}}{s} - \frac{2e^{-7s}}{s}\right]$$

$$= 5 - 3u(t-3)\, L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 2u(t-7)\, L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$= 5 - 3u(t-3) - 2u(t-7)$$

$$= 5 + (2-5)\, u(t-3) + (0-2)\, u(t-7)$$

$$= \begin{cases} 5 & 0 < t < 3 \\ 2 & 3 < t < 7 \\ 0 & t > 7 \end{cases}$$