Unit-2 class-6

1. Find $L^{-1}\left[\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right]$

Ans : $f(t)=\frac{1}{2}e^{t}-e^{2t}+\frac{5}{2}e^{3t}$

$$L^{-1}\left[\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{2s^2-6s+5}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-3}\right]$$

$$\frac{A(s-2)(s-3)+B(s-1)(s-3)+C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

$$=\frac{A(s^2-5s+6)+B(s^2-4s+3)+C(s^2-3s+2)}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

$A+B+C=2$

$-5A-4B-3C=-6$

$6A+3B+2C=5$

$A=\frac{1}{2},\ B=-1,\ C=\frac{5}{2}$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{2(s-1)}-\frac{1}{s-2}+\frac{5}{2(s-3)}\right]$$

$$=\frac{e^{t}}{2}-e^{2t}+\frac{5}{2}e^{3t}$$

2. Find $L^{-1}\left[\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}\right]$

Ans : $f(t)=-\cos t+e^{t}+te^{t}$

$$L^{-1}\left[\frac{2s^2}{(s^2+1)(s-1)^2}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{C}{(s-1)^2}+\frac{D}{s-1}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{(As+B)(s-1)^2+C(s^2+1)+D(s^2+1)(s-1)}{(s^2+1)(s-1)^2}\right]$$

$$\Rightarrow (As+B)(s^2-2s+1)+Cs^2+C+D(s^3+s-s^2-1)=2s^2$$

$$As^3-2As^2+As+Bs^2-2Bs+B+Cs^2+C+Ds^3+Ds-Ds^2-D=2s^2$$

$A+D=0$, $-2A+B+C-D=2$, $A-2B+D=0$, $B+C-D=0$ $\Rightarrow$ $A=-1$, $B=0$, $C=1$, $D=1$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{-s}{s^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-1}\right]$$

$$=-\cos t+L^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{s-1}\right)\right]+e^{t}$$

$$=-\cos t+te^{t}+e^{t}$$

3. Find $L^{-1}\left[\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right]$

Ans : $f(t)=e^{t}+e^{-t}\left\{\frac{3}{2}\sin 2t-\cos 2t\right\}$

$$L^{-1}\left[\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+5}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{A(s^2+2s+5)+Bs^2+Cs-Bs-C}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right]$$

$A+B=0$, $2A-B+C=5$, $5A-C=3$ $\Rightarrow$ $A=1$, $B=-1$, $C=2$

$$=L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}+\frac{2-s}{s^2+2s+5}\right]$$

$$=e^{t}+\frac{2-s}{(s+1)^2+2^2}$$

$$=e^{t}-\frac{(s+1)}{(s+1)^2+4}+\frac{3}{(s+1)^2+4}$$

$$=e^{t}-e^{-t}\cos 2t+\frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t$$

$$=e^{t}+e^{-t}\left(\frac{3}{2}\sin 2t-\cos 2t\right)$$

4. Find $L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s^2+4s+8)^2}\right]$

Ans : $f(t)=\frac{1}{2}te^{-2t}\sin 2t$

$$L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s^2+4s+8)^2}\right]$$

$$F(s)=\frac{s+2}{(s^2+4s+8)^2}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+8}\right)=\frac{-2s-4}{(s^2+4s+8)^2}\Rightarrow \frac{-1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+8}\right)=\frac{s+2}{(s^2+4s+8)^2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{-1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+8}\right)\right]=\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{-d}{ds}\left(\frac{2}{(s+2)^2+4}\right)\times\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{t}{2}\left(e^{-2t}\sin 2t\right)\times\frac{1}{2}$$

5. Find $L^{-1}\left[\frac{s}{s^4+4a^4}\right]$

Ans : $f(t)=\frac{\sin at\sinh at}{2a^2}$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^4+4a^4+4a^2s^2-4a^2s^2}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+2a^2)^2-(2as)^2}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+2a^2+2as)(s^2+2a^2-2as)}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{4as}{4a(s^2+2a^2-2as)(s^2+2a^2+2as)}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{1}{4a}\left[\frac{s^2+2a^2+2as-s^2-2a^2+2as}{(s^2+2a^2-2as)(s^2+2a^2+2as)}\right]\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{4a}\left[\frac{1}{s^2+2a^2-2as}-\frac{1}{s^2+2a^2+2as}\right]\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{1}{4a^2}\left[\frac{a}{(s-a)^2+a^2}-\frac{a}{(s+a)^2+a^2}\right]\right]$$

$$=\frac{\sin at}{4a^2}\left[e^{at}-e^{-at}\right]$$

$$=\frac{\sin at\ \sinh at}{2a^2}$$