Facultad de Ciencias - UNAM

Geometría Analítica I

Profesor: Claudio Nebbia

Ayudante: Fabián Elizalde

Índice

Temario

Forma de evaluación

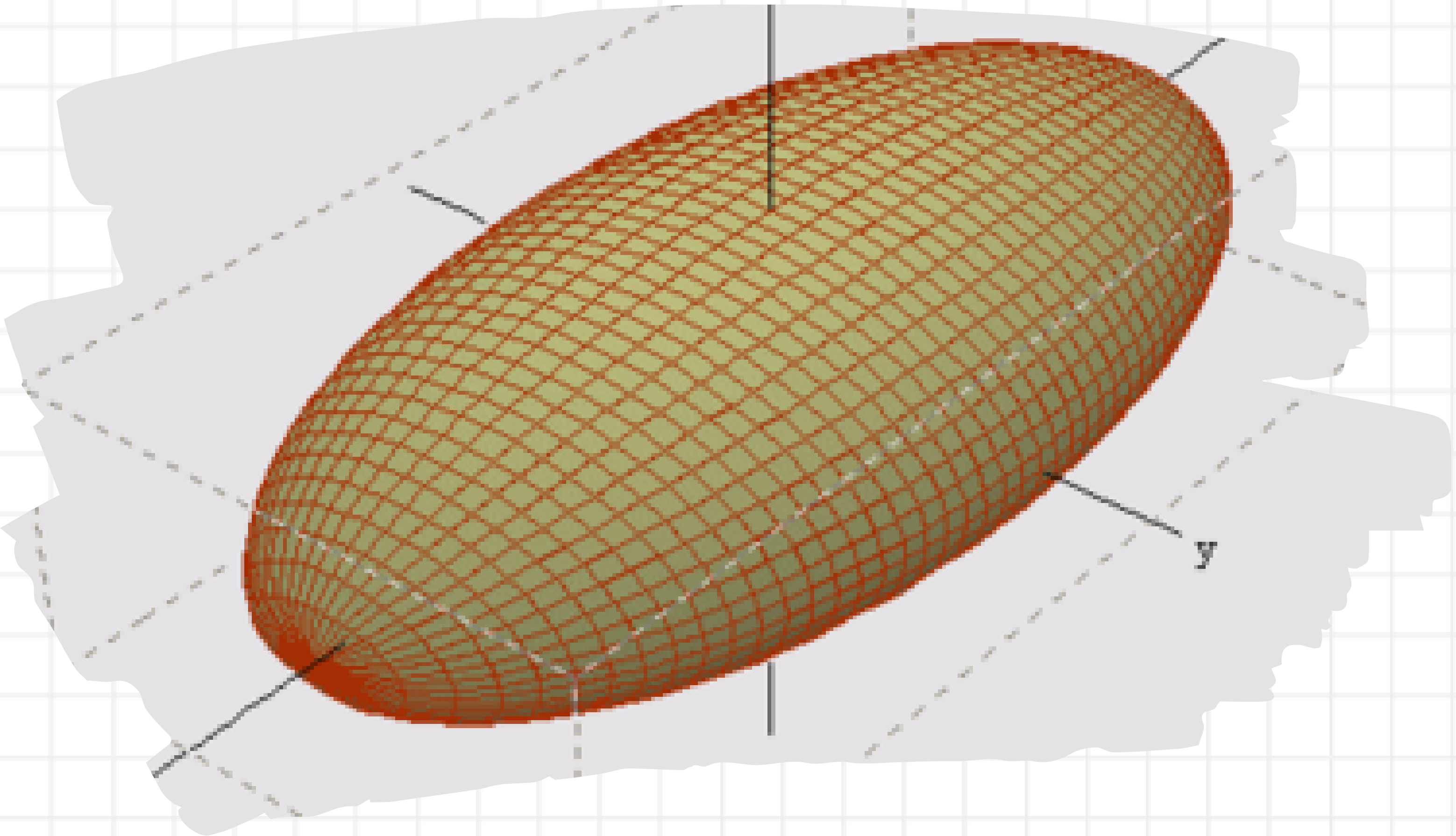
- **I** Modalidad mixta
- **II** 55% Exámenes (serán tres)
- **III** 55% Tareas (una o dos por examen)

Breve historia de la geometría analítica

- La geometría analítica surgió alrededor de 1630 gracias a Fermat y Descartes, quienes mostraron que los problemas geométricos podían resolverse mediante álgebra usando coordenadas.

- Esto permitió clasificar las curvas por su grado: líneas rectas (grado 1), secciones cónicas (grado 2) y curvas cúbicas (grado 3), estas últimas con formas más complejas como cúspides, inflexiones y auto intersecciones.

- Newton trabajó en su clasificación y descubrió que, desde la perspectiva correcta, eran menos complicadas de lo que parecían. Un resultado clave relacionado es el teorema de Bézout, que establece que una curva de grado m se cruza con otra de grado n en m*n puntos.



Pasos hacia la geometría analítica

- La geometría analítica se basa en representar curvas mediante ecuaciones, pero este enfoque no lo desarrollaron plenamente los griegos.
- Menaechmus y Apolonio usaron ecuaciones en el estudio de las cónicas, aunque las trataban como propiedades descubiertas después de construir la curva, y su notación dificultaba una visión general.
- En la Edad Media, Oresme (s. XIV) aplicó coordenadas (inspiradas en astronomía y geografía) para representar funciones como la velocidad en el tiempo, pero sin el álgebra necesaria para avanzar.
- El progreso decisivo llegó en el siglo XVI con la resolución de ecuaciones y la mejora de la notación, lo que sentó las bases para que Fermat y Descartes fundaran la geometría analítica.

Fermat y Descartes

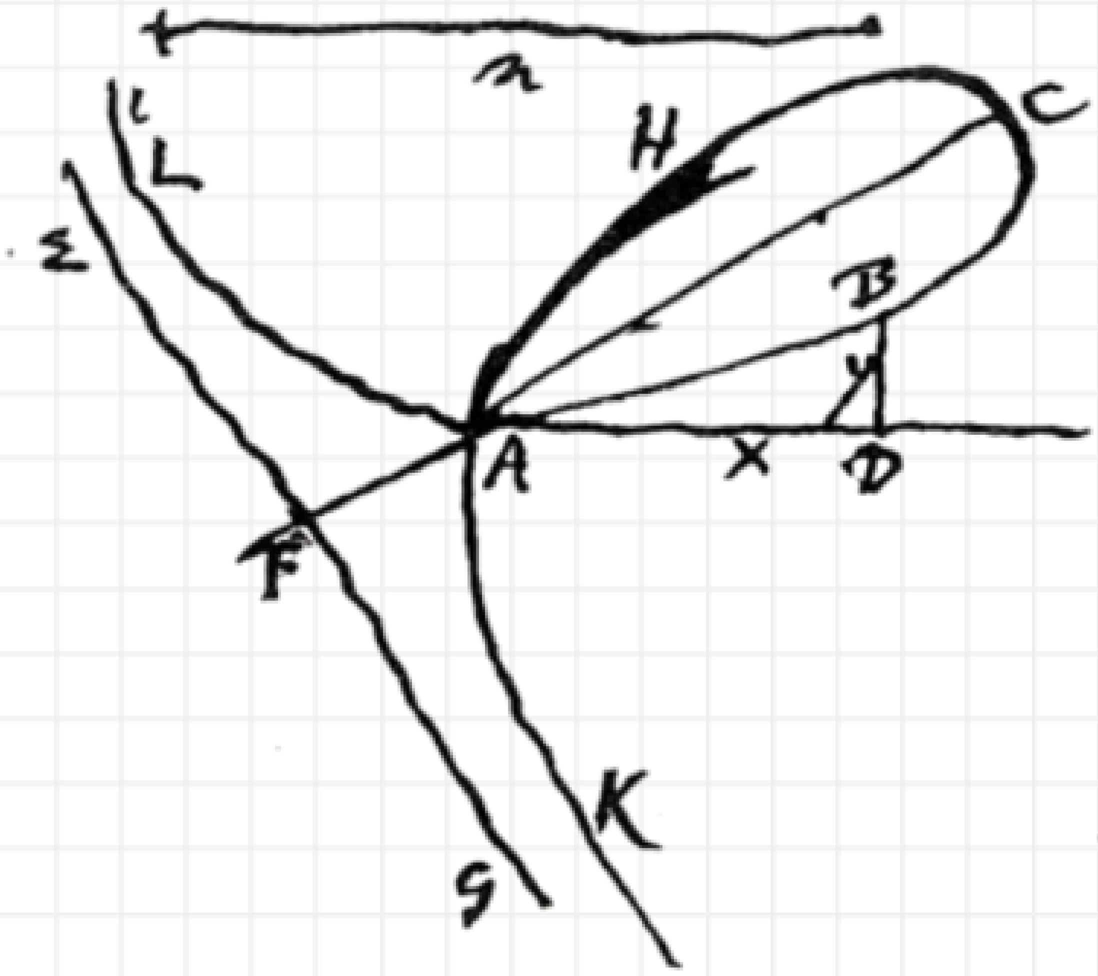
- A inicios del siglo XVII, las condiciones eran propicias para el surgimiento de la geometría analítica, lo que llevó a su descubrimiento independiente por Fermat (1629) y Descartes (1637).

- Ambos iniciaron resolviendo el mismo problema clásico de Apolonio y hallaron que las ecuaciones de segundo grado representan secciones cónicas.

- Fermat fue más sistemático, pero dejó su trabajo en estado inicial. Descartes exploró curvas de mayor grado y comprendió el potencial del álgebra en geometría, aunque escribió La Géométrie más como exhibición que como explicación, omitiendo pruebas y detalles. Irónicamente, se equivocó al afirmar que no era posible calcular la longitud de curvas, algo que pocos años después se resolvió y que el cálculo generalizó.

Curvas algebráicas

- En La Géométrie (1637), Descartes definió las curvas algebraicas como aquellas cuyos puntos cumplen una sola ecuación, restringiendo así el concepto griego de curva y excluyendo las trascendentales, a las que llamó “mecánicas”.
- Clasificó las curvas por su grado: líneas rectas (grado 1), secciones cónicas (grado 2) y cúbicas (grado 3), donde surgen fenómenos como inflexiones, auto intersecciones y cúspides.
- Un ejemplo clásico es el folium de Descartes, cuya forma completa fue descrita por Huygens en 1692, corrigiendo errores derivados del uso de coordenadas negativas.



Clasificación de Newton de las cúbicas

- Antes de la geometría analítica, las líneas rectas y las cónicas estaban bien comprendidas y se consideraban cerradas a nuevos aportes, por lo que el primer gran campo de estudio fue el de las curvas cúbicas.
- Newton inició su clasificación en 1667, transformando la ecuación general cúbica y agrupando las curvas según las raíces, identificando 72 especies (aunque pasó por alto 6).
- Stirling completó parte del trabajo en 1717. Aunque su clasificación carecía de un principio unificador (algo que más tarde se derivaría de su idea sobre la "génesis de curvas por sombras"), sentó las bases para entender la variedad de formas cúbicas, incluyendo aquellas con cúspides como la de y=x^3.

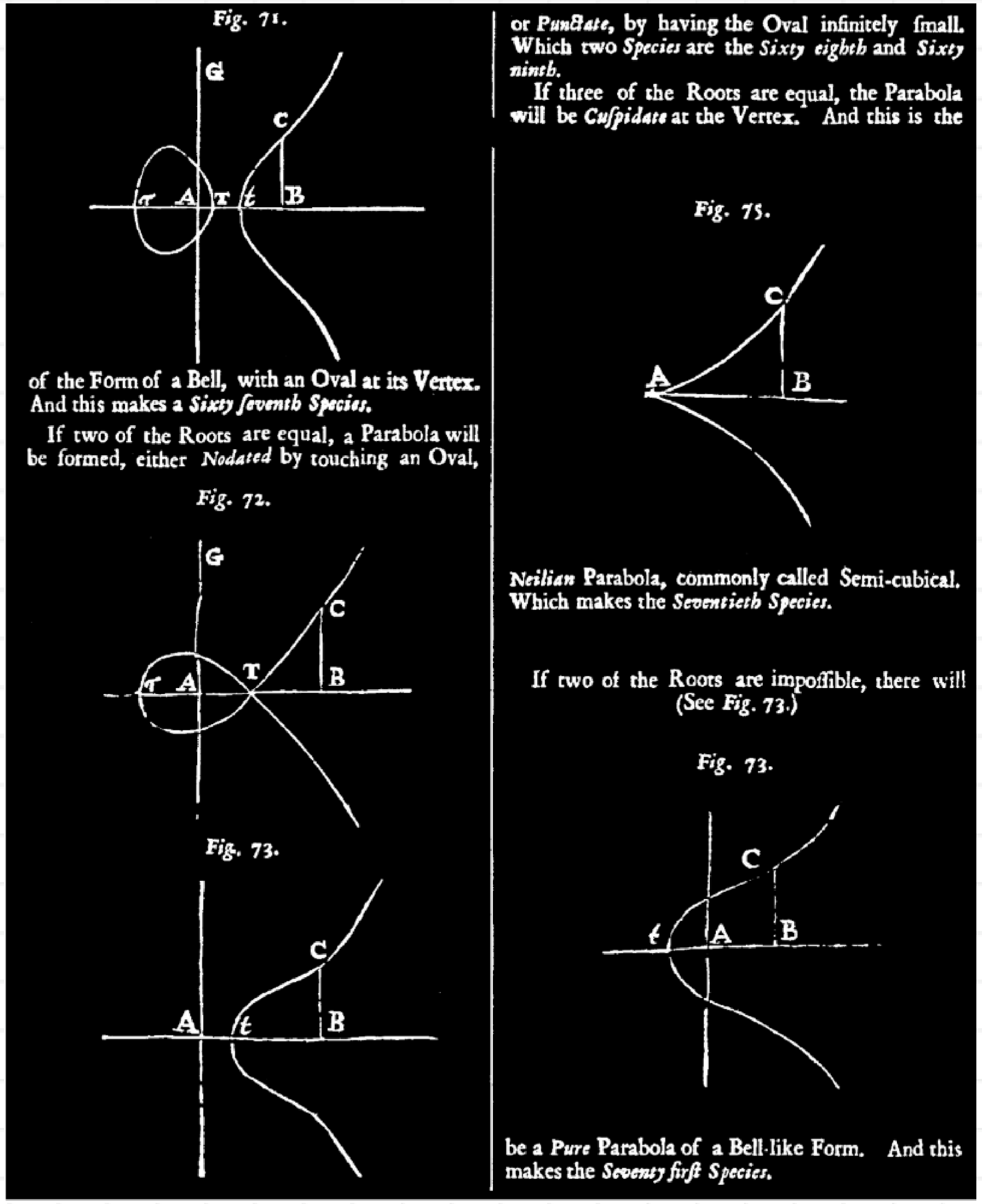


Fig. 71.

of the Form of a Bell, with an Oval at its Vertex. And this makes a *Sixty ſeventh Species.*

If two of the Roots are equal, a Parabola will be formed, either *Nodated* by touching an Oval,

Fig. 72.

Fig. 73.

or *Punctate*, by having the Oval infinitely ſmall. Which two *Species* are the *Sixty eighth* and *Sixty ninth.*

If three of the Roots are equal, the Parabola will be *Cuſpidate* at the Vertex. And this is the

Fig. 75.

Neilian Parabola, commonly called Semi-cubical. Which makes the *Seventieth Species.*

If two of the Roots are impoſſible, there will (See *Fig.* 73.)

Fig. 73.

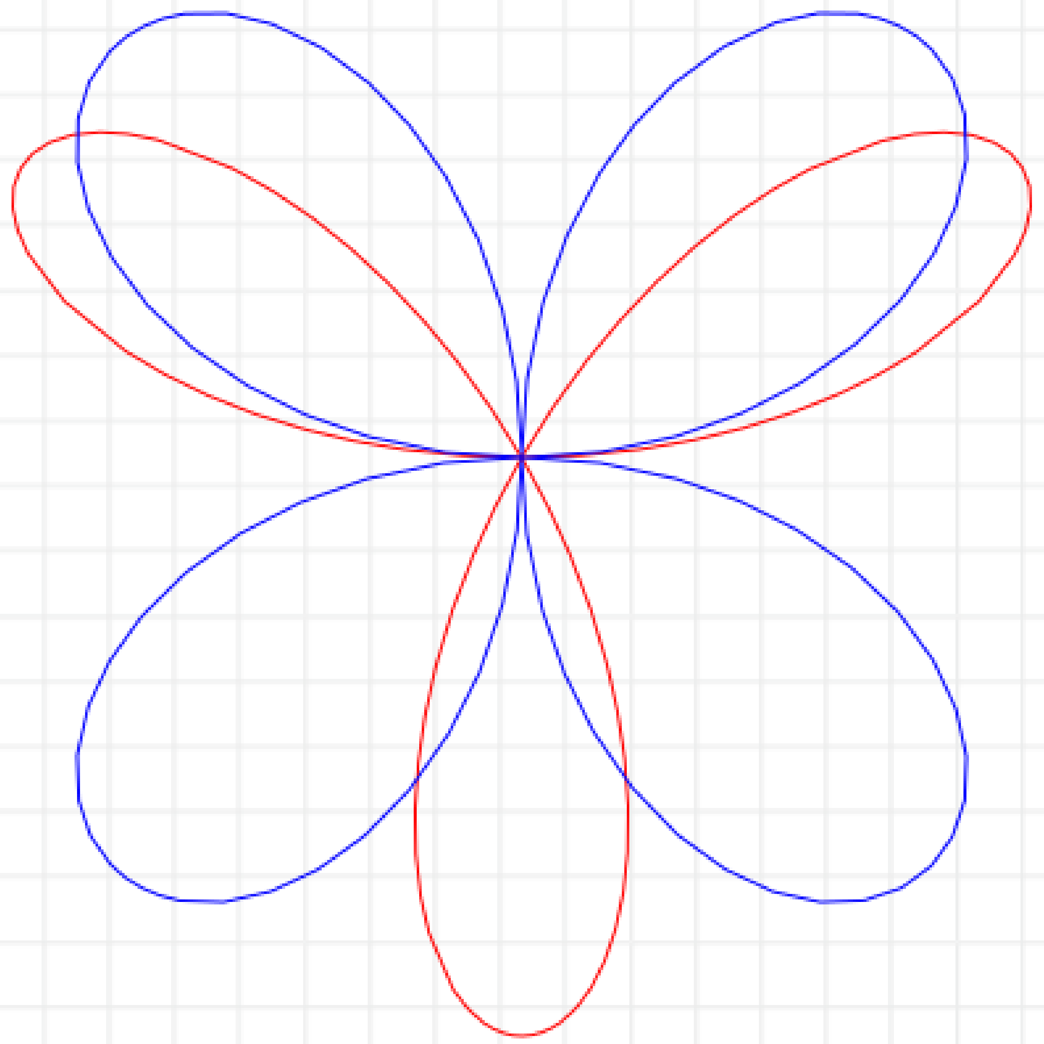
be a *Pure* Parabola of a Bell-like Form. And this makes the *Seventy firſt Species.*

Construcción de ecuaciones, teorema de Bezout

- La Geometría de Descartes (1637) incluyó el método de "construcción de ecuaciones", usando la intersección de curvas para resolver ecuaciones de grados superiores.

- Basado en ideas ya presentes en Menaechmus, Descartes halló procedimientos para ecuaciones de tercer y cuarto grado con parábola y círculo, y para quinto y sexto grado con una "parábola cartesiana". Aunque se pensó que el método podía extenderse indefinidamente, su desarrollo decayó hacia 1750.

- De este campo surgió el teorema de Bézout, que establece que dos curvas de grados m y n se intersectan en mn puntos (incluyendo imaginarios y "puntos en el infinito"), idea cuya demostración completa solo fue posible en el siglo XIX con la unión de la geometría proyectiva y la analítica.



La aritmetización de la geometría

- Aunque Descartes y sus contemporáneos rechazaban basar la geometría en números, John Wallis (1650s) fue pionero en "aritmetizar" la geometría, aplicando álgebra a las secciones cónicas y a los libros de Euclides. Su enfoque fue criticado y no ganó aceptación hasta Lagrange (1773) y los textos de Monge y Lacroix hacia 1800.

- Con el tiempo, la geometría avanzada se independizó como geometría diferencial y algebraica, dejando a la geometría analítica como disciplina básica.

- Hilbert (1899) llevó la aritmetización a su extremo, construyendo la geometría euclidiana a partir de los números reales y demostrando todos sus axiomas como proposiciones algebraicas, buscando así un fundamento lógico sólido para la disciplina.

Bibliografía

01 Bracho, J. Geometría Analítica. Notas.

02 Efimov, N. Geometría Superior. Moscú: MIR 1984

03 Preston, G. C., & Lovaglia, A. R. (1971). Modern analytic geometry. New York, NY: Harper & Row.

04 Ramírez Galarza, A., Geometría Analítica: Una Introducción a la Geometría. México: Las Prensas de Ciencias, 2004.

Gracias!