Materijali za predmet

LINEARNA ALGEBRA I ANALITIČKA GEOMETRIJA

Matematički fakultet

Zoran Rakić

Beograd, 2015. godine

GLAVA 0

UVOD

Ova glava sadrži potrebna predznanja za uspešno savladavanje gradiva koje je izloženo u nastavku ove knjige. Velika većina ovih predznanja trebalo bi da je čitaocima poznata iz srednje škole. Većina ostalog gradiva predstavlja nešto što je važno, a tome se ne pridaje toliki značaj u srednjim školama, a manji deo su neke generalizacije ili informacije o nekim objektima o kojima više detalja čitaoci mogu naći u literaturi.

1. Skupovi

0.1. U ovoj knjizi nećemo uvoditi pojam skupa formalnom definicijom niti ćemo izlaganja zasnivati na aksiomatskoj teoriji skupova, već ćemo koristiti intuitivan i operativan pristup skupu kao kolekciji datih objekata. Za one koji su skloniji formalnom i apstraktnom jeziku možemo tretirati skup kao osnovni pojam koji ne definišemo.

Uz pojam skupa javlja se i pojam elementa skupa (ili pripadanja skupu) koji takođe ne definišemo. Za dati element a skupa A, pisaćemo $a \in A$. Negaciju ovog iskaza, tj. a ne pripada (nije element) A zapisujemo $a \notin A$.

Primer. Najvažniji skupovi brojeva koji su nam poznati iz srednje škole su $\mathbb{N}$–skup prirodnih brojeva, $\mathbb{Z}$–skup celih brojeva, $\mathbb{Q}$–skup racionalnih brojeva, $\mathbb{R}$–skup realnih brojeva i $\mathbb{C}$–skup kompleksnih brojeva.

Skup koji nema elemenata nazivamo praznim skupom i obeležavamo ga sa $\emptyset$. Skup A je konačan ako ima konačan broj elemenata. Sa $\|A\|$ ili sa $\mathsf{card}\,A$ obeležavamo broj elemenata skupa A.

Kako se skupovi sastoje od elemenata skupovi se obično zadaju na dva načina:

(i1) popisivanjem svih elemenata, npr. $A = \{1, 2, 3, 7\}$,

(i2) zadavanjem zajedničkom osobinom, tj. $A = \{x \in X \mid P(x)\}$ je skup svih onih elemenata datog skupa X koji zadovoljavaju osobinu P. Tako skup svih realnih brojeva većih od 3 obeležavamo sa $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 3\}$.

Drugi način zadavanja skupova je mnogo prikladniji i uglavnom se koristi u matematici.

0.2. Podskup. Skup B je podskup skupa A, ako je svaki element skupa B ujedno i element skupa A, tj. ako iz $x \in B$ sledi da je $x \in A$. To zapisujemo kao $B \subseteq A$ ili ponekad kao $A \supseteq B$, i čitamo A je nadskup od B (ili A sadrži B). Skupovi A i B su jednaki ako sadrže iste elemente, preciznije oni su jednaki ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, i zapisujemo $A = B$. Skup B je pravi podskup skupa A ako je $B \subseteq A$ i $A \neq B$. Za pravi podskup koristimo oznaku $B \subset A$ (ili $B \subsetneqq A$). Jasno, prazan skup je jedinstven i on je podskup svakog skupa. Očigledno važe tvrdnje,

(i1) $A \subseteq A$,

(i2) $A \subseteq B$ i $B \subseteq C \implies A \subseteq C$.

Primer. Kao što znamo: $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}$, jer $\mathbb{Z} \ni 0 \notin \mathbb{N}$; $\mathbb{Q} \ni 1/2 \notin \mathbb{Z}$; $\mathbb{R} \ni \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; i $\mathbb{C} \ni i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

U većini primena skupovi sa kojima radimo su podskupovi nekog datog skupa X, koji se ponekad naziva univerzalnim skupom (ili kraće univerzumom). Skup svih podskupova datog skupa X, obeležavamo sa $\mathcal{P}(X)$ i zovemo ga partitivnim skupom skupa X.

0.3. Operacije sa skupovima. Neka je dat skup X. Na skupu svih podskupova skupa X defininisane su sledeće (prirodne) operacije,

komplement skupa $A \subseteq X$ je skup $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$.
unija skupova A i $B \subseteq X$ je skup $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A$ ili $x \in B\}$.
presek skupova A i $B \subseteq X$ je skup $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A$ i $x \in B\}$.
razlika skupova A i $B \subseteq X$ je skup $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A$ i $x \notin B\}$.

Primetimo, da je $A \cup A^c = X$ i $A \cap A^c = \emptyset$, kao i to da je $A \setminus B = A \cap B^c$. Dakle, razlika skupova nije osnovna operacije jer se može izraziti preko drugih. Za skupove A i B kažemo da su **disjunktni** ako je $A \cap B = \emptyset$. Simetrična razlika skupova A i B je skup $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

0.4. Osnovna svojstva unije i preseka. *Za proizvoljne skupove A, B, $C \subseteq X$ važe sledeća svojstva:*

(asocijativnost)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(komutativnost)	$A \cup B = B \cup A$,	$A \cap B = B \cap A$,
(distributivnost I)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,	
(distributivnost II)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,	
(neutral)	$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$,	$A \cap X = X \cap A = A$,
(idempotentnost)	$A \cup A = A$,	$A \cap A = A$,
(de Morganovi [1] zakoni)	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Dokaz. Dokazaćemo osobinu distributivnost II. Ostale osobine dokazuju se analogno. Potrebno je dokazati jednakost dva skupa, a to je ekvivalento (vidi **1.2**) sa pokazivanjem dve inkluzije: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ i $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Pokažimo prvu: neka je $x \in A \cap (B \cup C)$ tj. $x \in A$ i $x \in B \cup C$. Kako je $x \in B \cup C$, tj. $x \in B$ ili $x \in C$ i kako je $x \in A$ sledi da je $x \in A \cap B$ ili $x \in A \cap C$. Dakle, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Drugu inkluziju možemo dokazati na isti način, ali dajemo kraći dokaz u kojem smo iskoristili očiglednu osobinu inkluzije skupova.
Kako je $B \subseteq B \cup C$, odmah sledi da je $A \cap B \subseteq A \cap (B \cup C)$. Slično važi i $A \cap C \subseteq A \cap (C \cup B) = A \cap (B \cup C)$. Dakle,

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq (A \cap (B \cup C)) \cup (A \cap (B \cup C)) = (A \cap (B \cup C)). \qquad \square$$

0.5. Proširenje osnovnih skupovnih operacija. Neka je dat neki neprazni skup X i neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova skupa X tada definišemo uniju skupova iz $\mathcal{F}$ kao skup svih onih elemenata koji pripadaju barem jednom od skupova familije $\mathcal{F}$. Analogno, presek skupova iz $\mathcal{F}$ je skup koji se sastoji od onih elemenata koji pripadaju svim skupovima familije $\mathcal{F}$. Operativnija realizacija ove konstrukcije sastoji se u tome da elemente familije $\mathcal{F}$ indeksiramo elementima nekog skupa S, tj. $\mathcal{F} = \{A_\alpha \subseteq X \mid \alpha \in S\}$. Ispostavlja se da mnoga od gore pomenutih svojstava važe i za familije skupova. Preciznije, neka je data familija $\mathcal{F}$ i neki $B \subseteq X$

$$\text{(i1)}\quad \overline{\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha\in S} \overline{A_\alpha} \qquad\qquad \text{(i3)}\quad \left(\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha\right) \bigcap B = \bigcup_{\alpha\in S} \Big(A_\alpha \bigcap B\Big)$$

$$\text{(i2)}\quad \overline{\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in S} \overline{A_\alpha} \qquad\qquad \text{(i4)}\quad \left(\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha\right) \bigcup B = \bigcap_{\alpha\in S} \Big(A_\alpha \bigcup B\Big)$$

0.6. Dekartov [2] proizvod. Dekartov proizvod dva skupa A i B, je skup

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

pri čemu su uređeni parovi (a_1, b_1) i (a_2, b_2) jednaki ako i samo ako je $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$. Iz same definicije jasno je da Dekartov proizvod nije komutativan, npr. čim $A \neq B$, sledi da $A \times B \neq B \times A$. Dekartov proizvod direktno se uopštava na konačan broj faktora, tj.

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_k \in A_k\}$$

i uređene $k-$torke $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ se podudaraju ako i samo ako (=akko)[3] je $a_j = b_j$ $(j = 1, \ldots, k)$. Direktan proizvod može se generalisati na proizvoljnu familiju skupova $\mathcal{F} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$, što ćemo zapisivati kao $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$.
Ako su skupovi A i B konačni tada je i skup $A \times B$ konačan. Specijalno, ako skup A ima n elemenata a skup B m elemenata, skup $A \times B$ imaće $n \cdot m$ elemenata. Na ovoj jednostavnoj činjenici zasnivaju se osnovne tehnike prebrojavanja skupova.
Skup elemenata

$$\{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A,$$

zove se dijagonala Dekartovog proizvoda $A \times A$.

---

[1] Augustus de Morgan, 1806 – 1871, engleski matematičar i logičar.
[2] Descartes Rene, 1596–1650.
[3] U buduće ćemo frazu "ako i samo ako" kraće zapisivati "akko".

0.7. Dekartov proizvod i osnovne skupovne operacije. Za svaka tri skupa A, B, i C važi:

(i1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, (i2) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$,

(i3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, (i4) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cup D)$,

(i5) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Dokaz. Pokažimo (i1). Ova tvrdnja posledica je sledećeg niza ekvivalencija:

$$(x,y) \in (A \cup B) \times C \iff x \in A \cup B \text{ i } y \in C \iff (x \in A \text{ i } y \in C) \text{ ili } (x \in B \text{ i } y \in C)$$
$$\iff ((x,y) \in A \times C) \text{ ili } ((x,y) \in B \times C) \iff (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C).$$

Ostala tvrđenja dokazuju se analogno. □

2. Funkcije

0.8. Definicija. Neka su A i B neprazni skupovi tada je **funkcija (preslikavanje)** uređena trojka (A, B, f) čije prve dve komponente su dati skupovi A i B, a treća je 'zakon' f kojem se svakom elementu skupa A dodeljuje tačno jedan element skupa B. Obično se uređena trojka (A, B, f) poistovećuje sa f, i zapisuje kao $f : A \longrightarrow B$. Postoje razne ekvivalentne definicije pojma funkcije (koja je bez sumnje jedan od najvažnijih objekata u matematici). Tako npr. funkciju sa A u B možemo definisati kao skup $M_f \subseteq A \times B$ takav da za svaki $a \in A$ postoji jedinstven $b \in B$ takav da je uređeni par $(a, b) \in M_f$. Za element b (zbog njegove jedinstvenosti) koristi se oznaka $b = f(a)$. Skup A zove se domen funkcije f, a B njen kodomen.
Napomenimo da su funkcije (A, B, f) i (C, D, f) jednake akko je

(i1) $A = C$, (i2) $B = D$, i (i3) $f = g\,(\iff \forall\, x \in A = C,\ f(x) = g(x))$.

0.9. Injekcija. Surjekcija. Bijekcija. Za funkciju $f : A \longrightarrow B$, kažemo da je injekcija ili '1–1' ako za bilo koja dva različita elementa $x_1,\, x_2 \in A$ i njihove slike su različite, tj. $f(x_1) \neq f(x_2)$. Formalnije, ovaj uslov zapisujemo:

$$(\forall\, x_1,\, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2) \Longrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Često se u dokazima koristi obrat po kontrapoziciji[4] gornje implikacije, tj. sledeća implikacija,

$$(\exists\, x_1,\, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)\,.$$

Za funkciju $f : A \longrightarrow B$, kažemo da je surjekcija ili 'na' ako za svaki $b \in B$ postoji $x \in A$ takav da je $b = f(a)$. Formalnije,

$$(\forall\, b \in B)(\exists\, a \in A) \quad \text{takav da je} \quad b = f(a)\,.$$

Funkcija koja je istovremeno '1–1' i 'na' naziva se bijekcija.

0.10. Slika i praslika. Inverzna funkcija. Neka je data funkcija $f : A \longrightarrow B$, i neka je $X \subseteq A$ tada skup

$$f(X) = \{y \in B \mid y = f(x),\, x \in X\} = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B\,,$$

nazivamo slikom skupa X. Specijalno, ako je $X = A$ tada za $f(A)$ koristimo oznaku $\mathsf{Im}A$ i nazivamo ga slikom funkcije f. Jasno, funkcija f je 'na' akko je $\mathsf{Im}A = B$. Analogno, za $Y \subseteq B$ skup

$$f^{-1}(Y) = \{y \in A \mid f(y) \in Y\} \subseteq A\,,$$

nazivamo praslikom skupa Y.
Primetimo[5] da za neki $b \in B$ može postojati više elemenata iz A koje f preslika u b. Tada nije moguće na jedinstven način definisati funkciju $f^{-1} : B \longrightarrow A$, očiglednom formulom $f^{-1}(b) = a$, za $b = f(a)$. Da bismo mogli definisati f^{-1} potrebno je da se praslika svakog elementa iz B sastoji od tačno jednog elementa, što je ekvivalentno sa činjenicom da je funkcija f bijekcija. Ispostavlja se da je '1–1' suštinska osobina za egzistenciju inverznog preslikavanja, jer ako f nije 'na' onda možemo suziti kodomen na $\mathsf{Im}A$ i tako dobiti bijekciju $\tilde{f} : A \longrightarrow \mathsf{Im}A$.
Dakle, ako je f bijekcija onda je dobro definisano preslikavanje $f^{-1} : B \longrightarrow A$, formulom: $f^{-1}(b) = a$, za $b = f(a)$. Preslikavanje f^{-1} naziva se inverznom funkcijom od f.

---

[4] Ako su a i b iskazi tada je iskaz $a \Rightarrow b$ ekvivalentan sa $\rceil b \Rightarrow \rceil a$. $\rceil a$ je negacija od a.

[5] Iz definicije funkcije.

0.11. Kompozicija funkcija. Neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$, dve funkcije. Tada na prirodan način definišemo funkciju $g \circ f : A \longrightarrow C$ formulom $(\forall\, x \in A)$

$$(g \circ f)(x) \stackrel{def}{=} g(f(x))\,.$$

Funkcija $g \circ f$ zove se kompozicija funkcija f i g. Za kompoziciju funkcija važi svojstvo $(h \circ (g \circ f)) = (h \circ g) \circ f)$, koja se naziva asocijativnost. Preciznije, važi sledeća jednostavna teorema:

Teorema. *Kompozicija funkcija je asocijativna kad ima smisla.*

Dokaz. Dokaz ove činjenice posledica je sledećeg niza jednakosti $(\forall\, x \in A)$,

$$\underline{((h \circ g) \circ f)(x)} = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = \underline{(h \circ (g \circ f))(x)}\,,$$

što kraće zapisujemo: $\qquad ((h \circ g) \circ f) = (h \circ (g \circ f))\,.$

I dokaz je gotov □

Na svakom nepraznom skupu A definišemo funkciju $\mathsf{id}_A(x) = x$ koju nazivamo identitetom na A. Neka je $f : A \longrightarrow B$, funkcija, tada je egzistenciju inverzne funkcije f^{-1} moguće opisati preko kompozicije funkcija: ako za datu funkciju $f : A \longrightarrow B$ postoje funkcije $g : B \longrightarrow A$ i $h : B \longrightarrow A$ takve da je

$$f \circ g = \mathsf{id}_B \ \text{ i } \ h \circ f = \mathsf{id}_A \ \text{ tada je } \ h = g = f^{-1}\,.$$

Primer. Navedimo sada nekoliko važnih primera inverznih funkcija, koji su nam poznati iz ranijeg školovanja.

(i1) Za linearnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\,x + 3$ odredimo inverznu funkciju. Koristimo relaciju $f \circ f^{-1} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ i nalazimo

$$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x) = \underline{x} \ = \ (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \underline{2\,f^{-1}(x) + 3}$$
$$\Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\,x - \frac{3}{2}\,.$$

(i2) Za stepene funkcije, $f_{2n+1}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_{2n+1}(x) = x^{2\,n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ inverzne funkcije su $f_{2n+1}^{-1}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_{2n+1}(x) = \sqrt[2\,n+1]{x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(i3) Za stepene funkcije, $f_{2n}(x) : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f_{2n}(x) = x^{2\,n}$ $(n \in \mathbb{N})$ inverzne funkcije su $f_{2n}^{-1}(x) : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f_{2n}(x) = \sqrt[2n]{x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(i4) Eksponencijalna funkcija[6] $f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \mathsf{e}^x$ ima inverznu funkciju - logaritamsku funkciju $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln(x)$.

(i5) Inverzne funkcije osnovnih trigonometrijskih funkcija, $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1,1]$, $f(x) = \sin(x)$ i $g : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$, $g(x) = \cos(x)$ su $f^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ i $g^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$, $g^{-1}(x) = \arccos(x)$, redom.

(i6) Za funkcije, $f(x) : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \mathsf{tg}(x) = \sin(x)/\cos(x)$ i $g(x) : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \mathsf{ctg}(x) = \cos(x)/\sin(x)$ inverzne funkcije su $f^{-1}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$, $f^{-1}(x) = \mathsf{arctg}(x)$, i $g^{-1}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\pi)$, $g^{-1}(x) = \mathsf{arcctg}(x)$ redom.

Napomenimo da smo u primerima (i3), (i5) i (i6), morali da smanjimo domen funkcija f koje nisu '1-1' na čitavom domenu.

0.12. Neka svojstva kompozicije. Neka su $f : A \longrightarrow B$, i $g : B \longrightarrow C$, dve funkcije. Tada ako

(i1) je $g \circ f$ '1–1' onda je f '1–1',

(i2) je $g \circ f$ 'na' onda je g 'na',

(i3) su f i g '1–1' onda je $g \circ f$ '1–1',

(i4) su f i g 'na' onda je $g \circ f$ 'na',

(i5) su f i g bijekcije onda je i $g \circ f$ bijekcija.

Dokaz. (i5) je posledica (i3) i (i4). Dokažimo prvo (i2). Neka je $g \circ f$ 'na' tada za svaki $y \in C$ postoji neki $x \in A$ takav da je $(g \circ f)(x) = y$. Sada iz definicije kompozicije sledi da je $g(f(x)) = y$ i ako stavimo $z = f(x) \in B$ vidimo da je $g(z) = y$, tj. g je 'na'.

Dokažimo još (i3). Neka su f i g '1–1'. Tada za $x, y \in A$ i $x \neq y$ imamo redom,

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y) \quad \Longrightarrow \quad g(f(x)) \neq g(f(y)) \quad \Longleftrightarrow \quad (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x),$$

odakle odmah sledi da je funkcija $g \circ f$ injekcija. □

[6] Eksponencijalna funkcija je jedna od najvažnijih funkcija u matematici.

0.13. Funkcije i osnovne skupovne oparacije. Neka je $f : A \longrightarrow B$ funkcija, neka su X, $X_1 \subseteq A$ i neka su Y, $Y_1 \subseteq B$, tada

(i1) za $X \subseteq X_1 \Longrightarrow f(X) \subseteq f(X_1)$,
(i2) $f(X \cup X_1) = f(X) \cup f(X_1)$,
(i3) $f(X \cap X_1) \subseteq f(X) \cap f(X_1)$,
(i4) za $Y \subseteq Y_1 \Longrightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X_1)$,
(i5) $f^{-1}(Y \cup Y_1) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(X_1)$,
(i6) $f^{-1}(Y \cap Y_1) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y_1)$,
(i7) $f^{-1}(Y \setminus Y_1) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(Y_1)$,
(i8) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ i $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

Dokaz. Iz same definicije slike i praslike očigledno važi (i1), (i4) i (i8). (i3) sledi iz

$$x \in f(X \cap X_1) \Longrightarrow \exists y \in X \cap X_1 \text{ takav da } x = f(y) \Longrightarrow \exists y \in X \text{ i } y \in X_1$$
$$\text{takav da } x = f(y) \Longrightarrow x \in f(X) \text{ i } x \in f(X_1) \Longrightarrow x \in f(X) \cap f(X_1).$$

Obratna inkluzija ne mora da važi jer npr. za neki $x \in f(X) \cap f(X_1)$ mogu postojati $y \in X \setminus X_1$ i $y_1 \in X_1 \setminus X$ takvi da je $x = f(y) = f(y_1)$ i ne mora da postoji $z \in X \cap X_1$ takav da je $f(z) = x$.
(i5) je posledica sledećeg niza ekvivalencija

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y \cup Y_1) &\iff f(x) \in Y \cup Y_1 \iff f(x) \in Y \text{ i } f(x) \in Y_1 \iff x \in f^{-1}(Y) \text{ i } x \in f^{-1}(Y_1) \\ &\iff x \in f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y_1). \end{aligned}$$

(i2), (i6) i (i7) analogno kao (i5) □.

3. Relacije

0.14. Relacija. n-arna relacija ρ na skupu A je svaki podskup Dekartovog proizvoda

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ primeraka skupa } A}.$$

Od svih relacija na skupu A najvažnije su **binarne relacije**, tj. podskupovi skupa $A \times A$. Za $(a, b) \in \rho$ koristi se i oznaka $a\,\rho\, b$. Kako su relacije ρ, σ na A podskupovi jasno je što znače iskazi $\rho \subseteq \sigma$, $\rho \cup \sigma$, $\rho \cap \sigma$, ρ^c.

0.15. Operacije na skupu relacija. Neka je dat skup A na njemu postoji specijalna relacija: dijagonala $\jmath_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$. Za proizvoljnu binarnu relaciju ρ na A definišemo i relaciju $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$. Takođe za binarne relacije ρ, σ na A definišemo njihov proizvod, tj. relaciju $\rho\sigma$, na sledeći način: $x(\rho\sigma)y$ akko postoji $z \in A$ takav da je $x\rho z$ i $z\sigma y$.

0.16. Svojstva relacija. Najvažnije osobine koju neka binarna relacija ρ na skupu A može imati su:

(r) refleksivnost : $(a, a) \in \rho$ za svaki $a \in A \iff \jmath_A \subseteq \rho$;
(ar) antirefleksivnost : $(a, a) \notin \rho$ za svaki $a \in A \iff \jmath_A \cap \rho = \emptyset$;
(s) simetričnost : iz $(a, b) \in \rho$ sledi $(b, a) \in \rho \iff \rho = \rho^{-1}$;
(a) antisimetričnost : iz $(a, b) \in \rho$ i $(b, a) \in \rho$ sledi $a = b \iff \rho \cap \rho^{-1} = \jmath_A$;
(t) tranzitivnost : iz $(a, b), (b, c) \in \rho$ sledi $(a, c) \in \rho \iff \rho^2 \subseteq \rho$.

0.17. Relacija ekvivalencije. Relaciju ρ na A koja je refleksivna (r), simetrična (s) i tranzitivna (t) zovemo relacijom ekvivalencije. Svaka relacija ekvivalencije na skupu A razbija taj skup na međusobno disjunktne i neprazne klase (podskupove),

(0.1) $$A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \qquad A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset \quad \text{za} \quad (\alpha \neq \beta),$$

pri čemu je I skup kojim su indeksirane klase. Dakle, $A_\alpha = [a_\alpha] = \{x \in A \mid x\rho a_\alpha\}$ je klasa svih onih elemenata iz A koji su u relaciji ρ sa elementom a_α.
Obratno, svako razbijanje (0.1) nepraznog skupa A na disjunktnu uniju nepraznih skupova definiše relaciju ekvivalencije ρ (na A) na sledeći način: $x\rho y$ akko x, y pripadaju istoj klasi.

Primer. Relacije ekvivalencije su npr.

(i1) one relacije u čijoj osnovi je neka jednakost (među nekim objektima) kao što je npr. jednakost skupova; podudarnost trouglova u ravni (dva trougla se podudaraju ako postoji translacija i rotacija u ravni kojom jedan prelazi u drugi); jednakost razlomaka $m/n = m_1/n_1 \iff m \cdot n_1 = n \cdot m_1$, i sl., (i2) 'biti paralelan' na skupu svih pravih u ravni ili prostoru;

(i3) za fiksni prirodan broj $n > 1$ na skupu $\mathbb{N}$ (ili $\mathbb{Z}$) relacija $x \rho y$ akko x i y daju isti ostatak pri delenju sa n.

0.18. Relacija parcijalnog poretka. Refleksivna, antisimetrična i tranzitivna binarna relacija ρ na skupu A zove se relacija parcijalnog poretka. Obično se relacija poretka označava sa $\leq$.
Antirefleksivna, antisimetrična i tranzitivna binarna relacija ρ na skupu A zove se relacijom strogog poretka. Obično se relacija strogog poretka označava sa $<$.

Primer. Relacije parcijalnog (strogog) poretka su npr.

(i1) $\leq$ $(<)$ na skupu realnih brojeva;

(i2) $\subseteq$ $(\subset)$ na skupu svih podskupova datog nepraznog skupa X ;

(i3) relacija deljivosti ($a \llcorner b$ a je deljiv sa b) na skupu $\mathbb{N}$.

0.19. Funkcija binarne realcije. Neka je ρ neka binarna relacija na skupu A. Tada na prirodan način definišemo funkciju

$$f_\rho : A \times A \longrightarrow \{0,1\}, \quad \text{formulom} \quad f(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{ako } (a,b) \in \rho\,, \\ 0, & \text{ako } (a,b) \notin \rho\,. \end{cases}$$

Jasno je da je zadavanje relacije ρ na skupu $\mathbb{A}$ ekvivalentno sa zadavanjem funkcije f_ρ na $A \times A$. Ako je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ konačan skup onda funkciju relacije f_ρ možemo predstaviti u obliku sledeće tablice:

$$\begin{array}{c|cccccc}
f_\rho & a_1 & a_2 & \cdots & a_k & \cdots & a_m \\
\hline
a_1 & f_\rho(a_1,a_1) & f_\rho(a_1,a_2) & \cdots & f_\rho(a_1,a_k) & \cdots & f_\rho(a_1,a_m) \\
a_2 & f_\rho(a_2,a_1) & f_\rho(a_2,a_2) & \cdots & f_\rho(a_2,a_k) & \cdots & f_\rho(a_2,a_m) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_j & f_\rho(a_j,a_1) & f_\rho(a_j,a_2) & \cdots & f_\rho(a_j,a_k) & \cdots & f_\rho(a_j,a_m) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_m & f_\rho(a_m,a_1) & f_\rho(a_m,a_2) & \cdots & f_\rho(a_m,a_k) & \cdots & f_\rho(a_m,a_m)\,.
\end{array}$$

Primetimo da se iz gornje tablice odmah mogu prepoznati neke osobine relacija. Ako je relacija ρ

- refleksivna, svi elementi glavne dijagonale su 1,
- antirefleksivna, svi elementi glavne dijagonale su 0,
- simetrična, tada je tablica simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu, tj. $f_\rho(a_k, a_j) = f_\rho(a_j, a_k)$,
- antisimetrična onda su na glavnoj dijagonali 1 i tablica je antisimetrična s obzirom na glavnu dijagonalu, tj. ako je za $k \neq j$, $f_\rho(a_k, a_j) = 0$ tada je $f_\rho(a_j, a_k) = 1$ i obratno.

4. Brojevi: celi, racionalni i realni

0.20. Prirodni brojevi. Skup $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, nazivamo skupom prirodnih brojeva. U ovom skupu dobro su definisane dve uobičajene binarne operacije ($\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$): sabiranje i množenje prirodnih brojeva, koje imaju sledeća svojstva ($\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$):

(A1) $a + (b + c) = (a + b) + c$, (A5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

(A4) $a + b = b + a$, (A8) $a \cdot b = b \cdot a$.

Primetimo da za množenje postoji istaknuti broj 1, koji ima osobinu ($\forall\, a \in \mathbb{N}$),

$$\text{(A6)} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Ako skup $\mathbb{N}$ proširimo brojem 0, dobijamo skup $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ u kojem važi analogon svojstva (A6) za operaciju sabiranja prirodnih brojeva,

$$\text{(A2)} \quad a + 0 = 0 + a = a.$$

Operacije sabiranja i množenja povezane distributivnim zakonom ($\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$):

$$\text{(A9)} \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

0.21. Matematička indukcija. Skup prirodnih brojeva može se opisati i Peanovim[7] aksiomama:

(i1) 1 je prirodan broj (tj. skup prirodnih brojeva nije prazan),

(i2) dobro je definisano preslikavanje $\xi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, formulom $\xi(n) = n + 1$,

(i3) 1 nije u slici preslikavanja ξ, tj. ne postoji prirodan x takav da je $\xi(x) = 1$,

(i4) preslikavanje ξ je '1–1',

(i5) (aksioma matematičke indukcije) za $M \subseteq \mathbb{N}$ takav da važi

(bi) $1 \in M$,

(ki) ako iz $n \in M$ sledi da je i $\xi(n) \in M$,

tada je $M = \mathbb{N}$.

Primetimo da aksioma matematičke indukcije funkcioniše na sledeći način: $1 \in M$, zbog (bi), zatim (ki) primenimo na $n = 1$ i dobijamo da je $\xi(1) = 2 \in M$, zatim (ki) primenimo na $n = 2$ i dobijamo da je $\xi(2) = 3 \in M$, itd.

Napomenimo da se provera (bi) iz gornje definicije zove baza indukcije, implikacija (ki) zove se korak indukcije, a $n \in M$ iz (ki) zove se pretpostavka indukcije koju ćemo obeležavati sa (pi). Aksiomu matematičke indukcije koristimo onda kada neku tvrdnju treba pokazati za svaki prirodan broj, a to ćemo raditi u mnogim glavama ove knjige.

Primer 1. Pokažite da za svaki prirodan broj n važi sledeća formula

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}\ . \tag{0.2}$$

Dokaz. Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid (0.2) \text{ važi za } n\}$. Tada je očigledno $1 \in M$ jer je $1 = (1\,(1+1))/2$. Pretpostavimo da je neki prirodan broj $n \in M$, tada redom imamo,

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \;=\; (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \overset{\text{(pi)}}{=} \frac{n\,(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n+1}{2}\,(n+2) = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}\,,$$

tj. i $n + 1 \in M$. Sada AMI (aksioma matematičke indukcije) implicira da je $M = \mathbb{N}$, tj. (0.2) važi za sve prirodne brojeve. $\square$

Primer 2. Dokažite da za svaki $n \in N$ i $\forall\, \beta > -1$ važi Bernoullijeva nejednakost: $(1 + \beta)^n \geq 1 + n\,\beta\,$,

Dokaz. Baza indukcije je trivijalna, jer je $(1 + \beta)^1 \geq 1 + 1 \cdot \beta$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj n, sada imamo redom

$$(1+\beta)^{n+1} = (1+\beta)\,(1+\beta)^n \overset{\text{(pi)}}{\geq} (1+\beta)\,(1+n\,\beta) = 1 + (n+1)\,\beta + n\,\beta^2 \geq 1 + (n+1)\,\beta\,. \qquad \square$$

0.22. Fibonaccijev (Fibonači) niz[8]. Niz definisan rekurzivnom formulom,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\,, \quad \text{uz} \quad a_1 = a_2 = 1\,,$$

zove se Fibonaccijev niz. Nekoliko prvih članova niza su: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, .. Pokažite da

(i1) su svaka dva uzastopne člana niza uzajamno prosta.

(i2) da je svaki četvrti član niza deljiv sa 3.

Dokaz. (i2) Baza indukcije. $n = 1$ $a_{4\cdot 1} = 3$, i jasno $3 \,\big|\, a_{4\cdot 1}$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ $3 \,\big|\, a_{4n}$, tj. $a_{4n} = 3\,\alpha$, tada imamo redom

$$a_{4(n+1)} \;=\; a_{4n+4} = a_{4n+3} + a_{4n+2} = 2\,a_{4n+2} + a_{4n+1} = 3\,a_{4n+1} + 2\,a_{4n} \overset{\text{pi}}{=} 3\,a_{4n+1} + 2 \cdot 3\,\alpha = 3\,\underbrace{(a_{4n+1} + 2\,\alpha)}_{\in\, \mathbb{N}} \implies 3 \,\big|\, a_{4(n+1)}\,. \ \square$$

0.23. Celi brojevi. U skupu prirodnih brojeva nije moguće rešiti jednačinu $x + a = b$, za proizvoljni izbor $a, b \in \mathbb{N}$ (npr. $a = 5, b = 2$) zbog toga se pitamo da li je moguće proširiti skup $\mathbb{N}_0$ tako da u tom proširenom

[7] Peano Giuseppe, 1858–1932.

[8] Fibonacci Leonardo, 1170–1240 (?), poznat i kao Leonardo iz Pise.

skupu svojstva sabiranja (A1), (A2) i (A4) ostanu sačuvana i da možemo rešiti jednačinu $x + a = b$, za svaki izbor a, b iz tog novog skupa. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan i najmanji takav skup je skup celih brojeva $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0$. Primetimo da u skupu $\mathbb{Z}$ važi i svojstvo: $\forall a \in \mathbb{Z}$ postoji jedinstveni broj $-a \in \mathbb{Z}$ takav da je,

$$\text{(A3)} \quad a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Broj $-a$ zove se suprotni element od a ili inverzni element od a s obzirom na sabiranje.
Na skupu $\mathbb{Z}$ (ali već i na $\mathbb{N}$) postoji relacija poretka $\leq$ ('biti manji ili jednak'). Ako uvedemo uobičajenu oznaku $a < b$, koja znači $a \leq b$ i $a \neq b$, vidimo da na skupu $\mathbb{Z}$ važi,

$$\text{(A10)} \quad \forall\, a \in \mathbb{Z} \qquad a \leq a,$$

$$\text{(A11)} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z} \qquad a \leq b \quad \text{i} \quad b \leq a \quad \Longrightarrow a = b,$$

$$\text{(A12)} \quad a \leq b \quad \text{i} \quad b \leq c \quad \Longrightarrow \quad a \leq c.$$

$$\text{(A13)} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z} \text{ tačna je barem jedna od relacija} \quad a \leq b \quad \text{ili} \quad b \leq a.$$

$$\text{(A14)} \quad a \leq b \quad \text{i} \quad c \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad a + c \leq b + c,$$

$$\text{(A15)} \quad a > 0 \quad \text{i} \quad b > 0 \quad \Longrightarrow \quad a \cdot b > 0.$$

Primetimo da svojstva (A10)-(A13) znači da je relacija $\leq$ relacija totalnog poretka na $\mathbb{Z}$; (A14) i (A15) znači da se relacija poretka slaže sa sabiranjem i množenjem celih brojeva.

Iz dosada evidentnih svojstava vidimo da su ona podeljena na tri dela: svojstva (A1)-(A9) [9] su algebarska svojstva, (A10)-(A13) su svojstva relacije '$\leq$' i (A14)-(A15) predstavljaju kompatibilnost relacije '$\leq$' i operacija sabiranja i množenja celih brojeva.

Napomenimo da se uređeni par $(G, \star)$ gde je G neki neprazan skup, a $\star$ binarna operacija za koju važe aksiome (A1)-(A3) zove **grupa**, a ako još važi i aksioma (A4) tada govorimo o **komutativnoj ili Abelovoj grupi**. Slično za uređenu trojku $(G, +, \cdot)$ za koju važe aksiome (A1)-(A6) i (A8)-(A9) kažemo da je **komutativni prsten sa jedinicom**.

Dakle, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je komutativni prsten sa jedinicom.

0.24. Deljivost i prosti brojevi. Pretpostavljamo da oznake $a < b$, $a \leq b$, $|a|$ imaju uobičajeno značenje. Kažemo da a deli b što zapisujemo kao $a \mid b$, ili da je b deljiv sa a akko postoji $t \in \mathbb{Z}$ takav da je $b = at$.

Prirodan broj $p > 1$ koji je deljiv samo sa 1 i sa samim sobom zove se prost broj.

Skup svih prostih brojeva $\mathcal{P}r = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ je beskonačan.

0.25. Teorema o delenju. *Za svaki $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ postoje jedinstveni brojevi $t \in \mathbb{Z}$ i $0 \leq r < n$ takvi da*

$$m = n \cdot t + r.$$

Dokaz. Egzistencija. Pretpostavimo da je $m \in \mathbb{N}$, i posmatrajmo niz

$$q_0 = m,\ q_1 = m - n,\ q_2 = q_1 - n = m - 2n,\ \dots,\ q_k = q_{k-1} - n = m - kn,\ \dots .$$

Kako je ovaj niz strogo opadajući postoji najmanji indeks t takav da je $q_{t+1} < 0$. Tada je $0 \leq r = q_t = m - tn < n$ odakle sledi tvrdnja za $m \geq 0$. Ako je $m \leq 0$ onda je $-m \geq 0$, i na osnovu upravo dokazanog imamo

$$\begin{aligned} -m = n \cdot t + r_1,\ \ 0 \leq r_1 < n \ \Longrightarrow\ m &= n \cdot (-t) - r_1 + n - n = n \cdot (-t - 1) + (n - r_1) \\ &= n \cdot (-t - 1) + r, \qquad 0 \leq r = n - r_1 < n\,. \end{aligned}$$

Jedinstvenost. Pretpostavimo da postoje dva para takvih brojeva (t_1, r_1) i (t_2, r_2), tj. $m = n \cdot t_1 + r_1 = n \cdot t_2 + r_2$. Ako ih oduzmemo odmah dobijamo

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 = n \cdot (t_1 - t_2) \ &\Longrightarrow\ | r_2 - r_1 | = n \cdot | t_2 - t_1 | \Longrightarrow n > | r_2 - r_1 | \,\big|\, n \\ &\Longrightarrow\ | r_2 - r_1 | = 0 \ \Longrightarrow\ r_2 = r_1 \ \text{ i } \ t_2 = t_1. \end{aligned}$$

Time je dokaz završen. □

0.26. Svojstva deljivosti. Iz definicije odmah sledi da za relaciju deljivosti važi:

(i1) tranzitivnost, tj. $a \mid b$ i $b \mid c \Longrightarrow a \mid c$,

[9] Primetimo da je (A7) zasada preskočeno.

(i2) $a \mid b$ i $a \mid c \implies a \mid b \pm c$,

(i3) ako $a \mid b$ onda za svako $c \in \mathbb{Z}$ važi $a \mid b \cdot c$,

(i4) ako $a \mid b_1,\, a \mid b_2, \ldots, a \mid b_k$ onda za sve $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}$ važi $a \mid b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + \cdots + b_k \cdot c_k$.

0.27. Najveći zajednički delitelj (divizor). Najveći zajednički deljitelj celih brojeva a i b, u oznaci $\mathsf{NZD}(a,b)$, je prirodan broj d koji ima sledeća svojstva

(d) $d \mid a$ i $d \mid b$ (d je zajednički delitelj),

(n) ako $d_1 \mid a$ i $d_1 \mid b \implies d_1 \mid d$ (d je najveći zajednički delitelj).

Ako je $\mathsf{NZD}(a,b) = 1$ onda kažemo da su brojevi a i b uzajamno prosti.

0.28. Namanji zajednički sadržalac. Najmanji zajednički sadržalac celih brojeva a i b, u oznaci $\mathsf{NZS}(a,b)$, je prirodan broj s koji ima sledeća svojstva

(s) $a \mid s$ i $b \mid s$ (a je zajednički sadržalac),

(n) ako $a \mid s_1$ i $b \mid s_1 \implies s \mid s_1$ (d je najmanji zajednički sadržalac).

0.29. Euklidov algoritam. Neke su $a,\, b \in \mathbb{N}$, onda iz Teoreme o deljenju imamo niz jednakosti ($a > b$)

$$\begin{array}{ll} a = b \cdot q_1 + r_1\,, & r_{k-3} = r_{k-2} \cdot q_{k-1} + r_{k-1}\,, \\ b = r_1 \cdot q_2 + r_2\,, & r_{k-2} = r_{k-1} \cdot q_k + r_k\,, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & r_k = r_{k-1} \cdot q_{k+1}\,. \end{array}$$

Tada je $\mathsf{NZD}(a,b) = r_k$.

Posledica 1. *Neke su $a,\, b \in \mathbb{N}$, neka je $NZD(a,b) = d$ i neka je $d_1 \in \mathbb{N}$ takav da $d \nmid d_1$. Tada jednačine (po x i y)*

$a \cdot x + b \cdot y = d$, *ima rešenja u* $\mathbb{Z}$.

$a \cdot x + b \cdot y = d_1$, *nema rešenja u* $\mathbb{Z}$.

Specijalno, ako su a i b uzajamno prosti onda postoje $x,\, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$a \cdot x + b \cdot y = 1\,.$$

Dokazi prethodnih teorema i njihovih posledica mogu se naći u Glavi 3, reference [5] u kojoj analogne teoreme dokazujemo za polinome ili u knjigama koje se bave deljivošću celih brojeva.

Posledica 2. *Neke su a i b uzajamno prosti brojevi. Ako $a \mid b \cdot c$ tada $a \mid c$. Specijalno, ako prost broj deli proizvod celih brojeva tada on mora deliti barem jedan od njih.*

0.30. Relacija kongruencije. U poglavlju o relacijama spomenuli smo kao primer relacije ekvivalencije (i2), o kojoj ćemo sada nešto više reći. Za dati $2 \leq n \in \mathbb{N}$ i za $a,\, b \in \mathbb{Z}$ kažemo da je a kongruentno b po modulu n i pišemo

$$a \equiv b\,(\mathsf{mod}\ n) \iff \exists\, t \in \mathbb{Z} \qquad \text{takav da je } a - b = n \cdot t,$$

tj. a i b daju isti ostatak pri delenju sa n.

Teorema. *Relacija kongruencije po modulu $n > 1$ je relacija ekvivalencije na $\mathbb{Z}$. Ova relacija razbija skup $\mathbb{Z}$ na sledeće klase*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= [0]_n \cup [1]_n \cup \cdots \cup [n-1]_n, \qquad \text{gde je} \\ [k]_n &= \{k, k-n, k+n, k-2n, k+2n, \ldots, k-jn, k+jn, \ldots\}\,. \end{aligned}$$

Dokaz. Refleksivnost. $a \equiv a\,(\mathsf{mod}\ n)$ jer za $t = 0$ važi $a - a = 0 \cdot n$.

Simetričnost. Ako je $a \equiv b\,(\mathsf{mod}\ n) \Longrightarrow \exists\, t \in \mathbb{Z}$ takav da je $a - b = n \cdot t$, odakle je $b - a = n \cdot (-t)$, tj. $b \equiv a\,(\mathsf{mod}\ n)$.

Tranzitivnost. Ako je $a \equiv b\,(\mathsf{mod}\ n)$ i $b \equiv c\,(\mathsf{mod}\ n) \Longrightarrow \exists\, t_1,\, t_2 \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a - b = n \cdot t_1$, i $b - c = n \cdot t_2$, odakle je

$$\begin{aligned} a - c &= (a-b) + (b-c) = n \cdot t_1 + n \cdot t_2 = n \cdot (t_1 + t_2) = n \cdot t, \\ & \text{gde je} \quad t = t_1 + t_2 \in \mathbb{Z} \implies a \equiv c\,(\mathsf{mod}\ n). \end{aligned}$$

Preostale tvrdnje posledica su činjenice da svaka relacija ekvivalencija razbija skup na disjunktne unije nepraznih podskupova. □

0.31. Teorema (Osnovni stav aritmetike). *Za svaki prirodni broj a jedinstveno su određeni prosti brojevi $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ i prirodni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ takvi da je*

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} .$$

Dokaz. Egzistencija. Ako je a prost broj onda je dokaz gotov. Ako nije onda postoji najmanji prost broj q_1 takav da $q_1 \mid a \Longleftrightarrow a = q_1 \cdot a_1$ i $a > a_1$ jer je $q_1 \geq 2$. Sada analogno razmatranje primenimo na a_1. Dakle, ako je a_1 prost broj dokaz je gotov jer je $a = q_1 \cdot a_1$, ako a_1 nije prost onda postoji minimalni prost broj $q_2 \geq q_1$ (jer u suprotnom q_1 ne bi bio minimalan koji deli a) takav da $q_2 \mid a_1 \Longleftrightarrow a_1 = q_2 \cdot a_2$ i $a_1 > a_2$ jer je $q_2 \geq 2$, itd. Tako dolazimo do niza prirodnih brojeva $a = a_0 > a_1 > a_2 \cdots > a_k > 1$ i algoritam staje kada je a_k prost. To se mora desiti jer između a i 1 ima konačno mnogo prostih brojeva. Ako sada među prostim brojevima $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_k \leq a_k$ skupimo iste dobijamo traženu dekompoziciju.

Jedinstvenost. Pretpostavimo da imamo dva predstavljanja broj a kao proizvoda prostih brojeva, tj.

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m},$$

takvi da je $p_1 < p_2 \cdots < p_n$ i $q_1 < q_2 \cdots < q_m$. Sada pretpostavimo da postoji najmanji indeks i takav da je

$$\begin{aligned} &p_1 = q_1,\ \alpha_1 = \beta_1;\ \ p_2 = q_2,\ \alpha_2 = \beta_2;\ \ldots\ p_{i-1} = q_{i-1},\ \alpha_{i-1} = \beta_{i-1};\ \text{i} \\ &p_i \neq q_i \ \text{ ili } \ p_i = q_i, \ \text{ ali } \ \alpha_i \neq \beta_i . \end{aligned}$$

jer je u suprotnom dokaz gotov. Pretpostavimo da je npr. $p_i < q_i$ onda je i $p_i < q_j$ $(j = i, \ldots, m)$, sada imamo sa jedne strane $p_i \mid a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ a sa druge $p_i \nmid a = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}$ što je nemoguće. Slično dobijamo i u slučaju da je $p_i > q_i$. Neka je sada $p_i = q_i$ ali je npr. $\alpha_i > \beta_i$ odakle

$$a = p_i^{\alpha_i} \cdot a_1 \implies p_i^{\alpha_i} \mid a \ \text{ i } \ p_i \nmid a_1 \qquad a = p_i^{\beta_i} \cdot a_2 \implies p_i^{\beta_i} \mid a \ \text{ i } \ p_i \nmid a_2,$$

tj. sa jedne strane $p_i^{\alpha_i} \mid a$ a sa druge strane $p_i^{\alpha_i} \nmid a$, što je nemoguće. □

0.32. Racionalni brojevi. Kako u skupu celih brojeva jednačina $a \cdot x = b$, nema rešenja za proizvoljne $a, b \in \mathbb{Z}$ (npr. $a = 2$, $b = 1$), postavlja se slično pitanje kao i kod sabiranja u skupu prirodnih brojeva (**1.23**), tj. da li je moguće proširiti skup $\mathbb{Z}$ tako da u tom proširenom skupu svojstva (A1)-(A6) i (A8)-(A15) ostanu sačuvana i da možemo rešiti jednačinu $a \cdot x = b$, za svaki izbor $a \neq 0$[10],b iz tog novog skupa. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan i najmanji takav skup je skup racionalni brojeva $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Primetimo da u skupu $\mathbb{Q}$ važi i svojstvo: za $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, postoji jedinstveni broj $1/a = a^{-1} \in \mathbb{Q}$ takav da je,

$$\text{(A7)} \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Broj a^{-1} zove se inverzni element od a s obzirom na množenje.
Skup racionalnih brojeva ima jednu osnovnu osobinu (koja ga izdvaja od ostalih skupova), a ta je da su **rezultati svih fizičkih merenja racionalni brojevi**. Uređena trojka $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je polje, tj. algebarska struktura za koju važe aksiome

- (i1) $(\mathbb{Q}, +)$ je Abelova grupa.
- (i2) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa.
- (i3) važi distributivnost $(\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q})$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Štaviše $\mathbb{Q}$ je najmanje polje koje ima beskonačno mnogo elemenata.

0.33. Skup realnih brojeva. Sada nastavljamo na sličan način, tj. pokušavamo da rešimo u skupu racionalnih brojeva jednačinu $x^2 = 2$. Sledeća teorema pokazuje da rešenje te jednačin ne postoji u skupu $\mathbb{Q}$.

Teorema. $\sqrt{2}$ *nije racionalan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Tada on dozvoljava zapis u vidu $\sqrt{2} = p/q$, gde je $NZD(p, q) = 1$ (tj. razlomak p/q smo maksimalno skratili). Ovu relaciju prepišemo u ekvivalentnom vidu kao $2q^2 = p^2$, odakle sledi da $p = 2\,l$ jer je leva strana poslednje jednakosti parna, tako da p mora biti paran. Sada imamo

$$2q^2 = (2\,l)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad q^2 = 2\,l^2.$$

Odavde sledi da $2 \mid q$, tj. $NZD(p, q) \geq 2$ što je nemoguće. □

Posmatrajmo sada skupove $A = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 < 2\}$ i $B = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 > 2\}$. Očigledno je da su A, B neprazni skupovi. Primetimo da su npr. $1, 1.4, 1.41, .. \in A$ i postoji racionalni broje M (npr. $2, 3, 4, ...$) takvi da $\forall\, q \in A$ važi da je $q \leq M$. Brojeve M sa ovakvim svojstvom zovemo majorantama (gornjim granicama) skupa M. Od svih gornjih granica od posebnog je interesa najmanja gornja granica koja se zove **supremum skupa** A i obeležava se sa $\sup A$. Analogno, skup B nema majorantu, ali zato ima minorantu $m \in \mathbb{Q}$ (npr. $0, 1/2, 1, 1.2, ...$), tj. broj

[10] jer ako je $a = 0$ i b proizvoljan ceo broj različit od 0 onda jednačina $a \cdot x = b$ očigledno nema rešenja.

takav da $\forall q \in B$ važi da je $q \geq m$. Od svih minoranti od posebnog je interesa najveća koja se zove **infimum** skupa B i koja se obeležava sa $\inf B$.

Iz prethodne teoreme sledi da je $\sup A = \inf B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, tj. npr. skup A nema supremuma u $\mathbb{Q}$, tj. u nekom smislu je šupalj. Tako se opet nameće pitanje da li je moguće skup $\mathbb{Q}$ proširiti tako da da sva svojstva (A1)-(A15) ostanu sačuvana i u tom proširenju, ali da važi da svaki podskup A tog proširenja koji je odozgo ograničen ima supremum u tom proširenju. Odgovor i na ovo pitanje je pozitivan, najmanji takav skup je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Dakle, skup realnih brojeva je skup u kojem važe svojstva (A1)-(A15), ali još važi i,

(A16) Svaki neprazan i odozgo ograničen skup $A \subset \mathbb{R}$ ima supremum u skupu $\mathbb{R}$.

Važi sledeća teorema,

Teorema. *Skup $\mathbb{R}$ jedinstveno je određen aksiomama (A1)-(A16) (do na izomorfizam).*

Dakle, za polje $\mathbb{Q}$ važe sve aksiome kao i za $\mathbb{R}$ osim aksiome (A16). Napomenimo da je proširenje sa $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ znatno komplikovanije od prethodnih proširenja, sa $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Z}$ i sa $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Q}$. Skup $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zove se skup iracionalnih brojeva. Napomenimo da je skup $\mathbb{Q}$ gust u skupu $\mathbb{R}$ u sledećem smislu:

Teorema. *Za bilo koja dva realna broja $r_1 < r_2$ postoji racionalni broj q takav da je $r_1 < q < r_2$.*

0.34. Algebarski brojevi. Izraz $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, zove se polinom $n-$tog stepena (ako je $a_n \neq 0$) nad poljem $\mathbb{Q}$ ako su svi koeficijenti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ racionalni brojevi. Skup $\mathcal{N}_f = \{x_0 \mid f(x_0) = 0\}$ zove se skup svih nula polinoma f. Skup $\mathcal{N}_f$ ne mora biti podskup od $\mathbb{R}$.

Za broj $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je algebarski nad $\mathbb{Q}$ ako postoji polinom f sa racionalnim koeficijentima (za skup svih polinoma sa racionalnim koeficijentima koristimo oznaku $\mathbb{Q}[x]$) takav da je $f(a) = 0$. Skup svih algebarskih brojeva nad $\mathbb{Q}$ obeležavamo sa $\mathbb{A}$. Jasno je da je $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$. Realni brojevi iz skupa $\mathcal{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, tj. koji nisu algebarski nazivaju se transcedentnim brojevima, takvi su npr. $\pi, e, \sqrt{\pi}, ...$

0.35. Decimalni zapis realnog broja. Kao što znamo iz svakodnevnog iskustva u praksi koristimo dekadski brojni sistem, tj. sve brojeve predstavljamo pomoću cifara $0, 1, 2, \ldots, 9$. Tako npr. oznaka 12345 predstavlja prirodni broj

$$12345 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 \,,$$

ili u opštem obliku svaki celi broj [11] može se predstaviti u obliku polinoma ($x = 10$) na sledeći način:

$$M = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0, \quad a_n \neq 0.$$

Postoje i drugi brojevni sistemi, a veoma su popularni oni koji se koriste u računarstvu čije su osnove $2, 8$ ili 16.

Primetimo da proizvoljne razlomke (npr. $1/2$) ne možemo predstaviti kao polinome sa osnovom 10 (ili bilo kojom drugom). Ovaj problem se prevazilazi tako da dozvoljavamo i negativne stepene broja 10 i tamo gde počinju negativni stepeni uvodimo decimalni zarez. Tako je npr.,

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} \,, \tag{0.3}$$

ali se ispostavlja, kao što pokazuje sledeći primer,

$$\frac{1}{3} = 0,3333\cdots = 0,\dot{3} = 0 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + \cdots = \sum_{n=-1}^{-\infty} 3 \cdot 10^n \,, \tag{0.4}$$

da moramo dozvoliti da se iza decimalnog zareza pojavljuje beskonačno mnogo članova [12].

Postavlja se prirodno pitanje kako iz decimalnog zapisa realnog broja prepoznati da je on racionalan. Primeri (0.3) i (0.4) su tipični tj. broj je racionalan ako i samo ako je njegov decimalni zapis konačan (tj. sve cifre nakon nekog mesta su 0, npr. u slučaju broja $1/2$, cifre $a_{-2} = a_{-3} = \cdots$ su jednake 0) ili nakon nekog mesta postoji konačan niz cifara koji se ponavlja (primer je broj $1/3$, kod kojeg je $3 = a_{-1} = a_{-2} = \cdots$).

Primer. Predstaviti broj $17/7$ u decimalnom obliku.

$$17/7 = 2,\underbrace{428571}\underbrace{428571}\ldots$$

[11] Ako je broj negativan dodamo $-$ ispred broja.

[12] Pitanjima suma sa beskonačno mnogo članova bavićemo se u 2. glavi Nizovi.

Iz gore rečenog sledi da decimalni zapisi iracionalnih brojeva nisu konačni i ne postoji konačan niz cifara koji se ponavlja. Drugim rečima cifre u decimalnom zapisu iracionalnog broja ređaju se bez nekog reda, npr. prvih 50 cifara u decimalnim zapisima brojeva π i $\sqrt{2}$ su:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937\,51$$
$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420969807856967187537\,69\,.$$

0.36. Brojnost (Kardinalni broj) skupa. Za svaki prirodan broj n obeležimo sa $\mathcal{S}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ skup prvih n prirodnih brojeva. Kažemo da je skup A konačan ako postoji bijekcija sa nekog od skupova $\mathcal{S}_n$ u A. Npr. ako je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{55}\}$ onda je A u bijekciji sa skupom $\mathcal{S}_{55}$ i jedna od bijekcija je npr. $f(i) = a_i, i = 1, 2, \ldots, 55$ [13].

Niz u skupu B je svako preslikavanje sa skupa $\mathbb{N}$ u B. Elemente niza obeležavamo sa $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \ldots a_n = f(n), \ldots$ Kažemo da je skup B prebrojiv ako se njegovi elementi mogu poređati u niz, tj. ako postoji bijekcija f sa $\mathbb{N}$ u B. Ovo znači da skup B ima 'isti broj' elemenata kao i skup $\mathbb{N}$.

Tako su npr, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ prebrojivi [14] skupovi. Postavlja se pitanje kako npr. sve cele brojeve poređati u niz. Jedno rešenje je:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots, \quad \text{što možemo zapisati i formulom}$$
$$f(0) = 0, \quad f(2k) = k \quad \text{i} \quad f(2k+1) = -k, \; k \in \mathbb{N}.$$

Za skup $\mathbb{Q}$ dokaz je komplikovaniji. Dakle, iako skupovi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ imaju beskonačno mnogo elemenata i važi $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}$ [15] oni su prebrojivi i u tom smislu imaju isti kardinalni broj. Ipak, skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ ima bitno više elemenata od prebrojivih skupova, kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema. *Skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv.*

Dokaz. Pretpostavimo da je skup $\mathbb{R}$ prebrojiv. Tada je prebrojivi svaki njegov podskup, pa specijalno i interval $[0, 1]$. Svaki element iz intervala $[0, 1]$ možemo predstaviti u dekadskom obliku. Dakle, postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, takva da je

$$f(1) = a_1 = \overline{0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots a_n^1 \ldots}$$
$$f(2) = a_2 = \overline{0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots a_n^2 \ldots}$$
$$f(3) = a_3 = \overline{0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 \ldots a_n^3 \ldots}$$
$$f(4) = a_4 = \overline{0, a_1^4 a_2^4 a_3^4 \ldots a_n^4 \ldots}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sada posmatrajmo sledeći realni broj,

$$b = \overline{0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots}$$

gde smo izabrali cifre $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ tako da je $b_1 \neq a_1^1$, $b_2 \neq a_2^2$, $b_3 \neq a_3^3$,... $b_n \neq a_n^n$, ... Odavde sledi da broj b nije u slici funkcije f jer $b \neq f(j) = a_j$ za svaki $j \in \mathbb{N}$ (jer se broj b razlikuje barem u j.-toj cifri od broja a_j. Dakle, naša pretpostavka da je $\mathbb{R}$ prebrojiv dovela nas je u kontradikciju, jer upravo opisana procedura [16] pokazuje da ne postoji surjekcija sa $\mathbb{N}$ u interval $[0, 1]$. $\square$

Napomena. Rezimirajmo, kardinalni broj (brojnost) skupa:

- $\mathcal{S}_n$ je n (broj njegovih elemenata),
- $\mathbb{N}$ je $\aleph_0$ (alef 0) (prebrojiv),
- $\mathbb{R}$ je c (kontinum).

Iz gore rečenoga možemo da zaključimo da se pojam jednakobrojnosti konačnih skupova na prirodan (tj. najjednostavniji) način generališe i na skupove koji imaju beskonačno mnogo elemenata sledećom definicijom: skupovi A i B su istobrojni ili kažemo da imaju isti kardinalni broj ako postoji barem jedna bijekcija sa A na B.

---

[13] Odredite broj bijekcija sa $\mathcal{S}_n$ u A.

[14] Prebrojiv je i skup algebarskih brojeva.

[15] Primetimo da ne postoji bijekcija sa pravog podskupa konačnog skupa na taj isti skup.

[16] Koja se inače zove Kantorov (Cantor) dijagonalni postupak.

5. Kompleksni brojevi

0.37. Skup kompleksnih brojeva. Nastavljajući u istom duhu, pokušavamo da rešimo jednačinu $x^2 = -1$ u skupu $\mathbb{R}$. Lako se možemo ubediti (koristeći aksiome (A1)-(A16) da ta jednačina nema rešenja u skupu $\mathbb{R}$. Ako rešenje te jednačine obeležimo sa $i = \sqrt{-1}$, i nazovemo ga imaginarna jedinica, možemo posmatrati skup

$$\mathbb{C} = \{z = a + i\,b \mid a,\, b \in \mathbb{R}\} \supsetneqq \mathbb{R}\,.$$

Skup $\mathbb{C}$ zove se skup kompleksnih brojeva. Realne brojeve $a = \Re(a + i\,b)$ i $b = \Im(a + i\,b)$ nazivamo redom realnim i imaginarnim delom kompleksnog broja $z = a + i\,b$.

Na skupu $\mathbb{C}$ definisane su binarne operacije sabiranja i množenja, koje su proširenja odgovarajućih operacija sa skupa realnih brojeva, formulama

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i\,b_1) + (a_2 + i\,b_2) = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)\,, \tag{0.5}$$

$$z_1\,z_2 = (a_1 + i\,b_1)\cdot(a_2 + i\,b_2) = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1). \tag{0.6}$$

Ispostavlja se da ovako definisane operacije sabiranja i množenja kompleksnih brojeva imaju iste osobine kao kod realnih brojeva (A1)-(A9). To zapravo znači da je skup $\mathbb{C}$ polje s obzirom na operacije (0.5) i (0.6). Može se pokazati da na skupu $\mathbb{C}$ ne postoji relacija parcijalnog poretka $'\leq'$ koja bi bila proširenje relacije poretka na $\mathbb{R}$, i koja bi se slagala sa operacijama sabiranja i množenja kompleksnih brojeva.

0.38. Geometrijska interpretacija. Primetimo da su dva kompleksna broja jednaka akko imaju jednake realne i imaginarne delove, što je posledica sledećeg niza implikacija:

$$\begin{aligned} &z_1 = a_1 + i\,b_1 = z_2 = a_2 + i\,b_2 \Longrightarrow a_1 - a_2 = i\,(b_2 - b_1) \qquad \text{kvadriranjem} \\ &\Longrightarrow (a_1 - a_2)^2 = i^2\,(b_2 - b_1)^2 = -(b_2 - b_1) \Longrightarrow a_1 - a_2 = (b_2 - b_1) = 0\,. \end{aligned}$$

Ova činjenica nam omogućuje da skup $\mathbb{C}$ identifikujemo sa $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ na sledeći način (Slika 1):

$$z = a + i\,b \quad \longmapsto \quad z = (a, b)$$

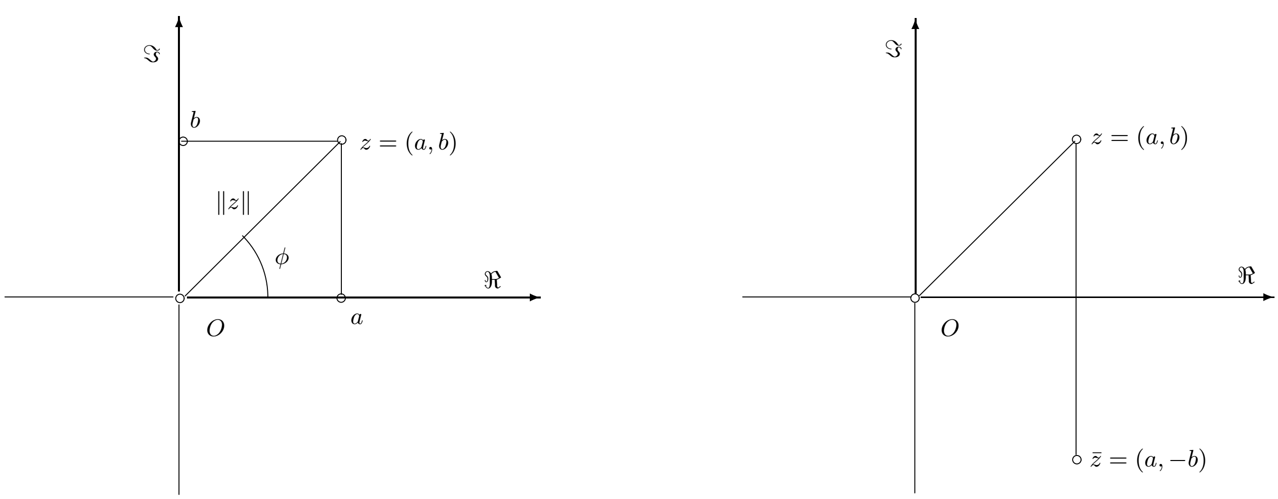
i onda formule (0.5) i (0.6) odmah prepisujemo kao

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)\,, \tag{0.7}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2) = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2, a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\,. \tag{0.8}$$

Primetimo da broju i odgovara uređeni par $(0, 1)$.

Ravan $\mathbb{R}^2$ u kojoj predstavljamo kompleksne brojeve zove se Gausova ravan, ose odgovarajućeg koordinatnog sistema Gausove ravni nazivaju se realna i imaginarna osa (Slika 1).



Dekartov i polarni oblik kompleksnog broja

Konjugovanje

X

Slika 1. Gausova ravan

0.39. Konjugovanje. Preslikavanje $^{-} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definisano formulom

$$\mathbb{C} \ni z = a + i\,b \quad \longrightarrow \quad \overline{z} = a - i\,b \in \mathbb{C}\,,$$

zove se konjugovanje kompleksnih brojeva. Geometrijski konjugovanje predstavlja osnu simetriju s obzirom na realnu osu u Gausovoj ravni, Slika 1. Konjugovanje kompleksnih brojeva slaže se sa operacijama sabiranja i množenja kompleksnih kao što pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija. *Za bilo koje kompleksne brojeve z_1, z_2 važi:*

(i1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,.$

(i2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,.$

(i3) $z_1 \cdot \overline{z_1} = \Re(z_1)^2 + \Im(z_1)^2 = \|z_1\|^2.$

Dokaz. Neka je $z_1 = a + i\,b$ i $z_2 = c + i\,d$, tada imamo,

(i1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+c) + i\,(b+d)} = (a+c) - i\,(b+d) = (a - i\,b) + (c - i\,d) = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$

(i2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + i\,b)\cdot(c + i\,d)} = \overline{(a\,c - b\,d) + i\,(a\,d + b\,c)} = (a\,c - b\,d) - i\,(a\,d + b\,c)$
$= (a - i\,b)(c - i\,d) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$

(i3) $z_1 \cdot \overline{z_1} = (a + i\,b)(a - i\,b) = \Re(z_1)^2 + \Im(z_1)^2 = \|z_1\|^2\,.$ □

Broj $\|z_1\|$ zove se modul (moduo) kompleksnog broja z_1 i predstavlja u Gausovoj ravni rastojanje broja z_1 od koordinatnog početka.

0.40. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja. Izraz $z = a + i\,b$ zove se Dekartov oblik kompleksnog broja. Formule (0.5) i (0.7) pokazuju da je Dekartov oblik kompleksnog broja pogodan za sabiranje, dok je formula za množenje kompleksnih brojeva (0.6) (ili (0.8)) mnogo komplikovanija. Dekartov oblik možemo prepisati na sledeći način,

$$z = a + i\,b = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\,. \tag{0.9}$$

Primetimo da je

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1\,,$$

odakle sledi da postoji ugao ϕ $(\,0 \le \phi \le 2\,\pi\,)$ takav da je

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{i} \quad \sin\phi \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

tako da formula (0.9) prima sledeći oblik,

$$z = a + i\,b = \|z\|(\cos\phi + i\,\sin\phi)\,, \tag{0.10}$$

koji se zove trigonometrijski ili polarni oblik kompleksnog broja.
Ugao ϕ zove se argument kompleksnog broja z i pišemo $\phi = \arg(z)$.

Geometrijska interpretacija trigonometrijskog broja vidi se u Gausovoj ravni ako vrh broja $z = a + i\,b$ ortogonalno projektujemo na koordinatne ose, dobijamo da je $\Re(z) = \|z\|\,\cos\phi$ i $\Im(z) = \|z\|\,\sin\phi$, Slika 1. Kako smo skup $\mathbb{C}$ identifikovali sa $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tada trigonometrijski oblik kompleksnog broja omogućava da u ravni $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ uvedemo koordinatni sistem čije su koordinate r-rastojanje tačke M od koordinatnog početka i ϕ ugao koji zaklapa polupravа OM (O je koordinatni početak) sa pozitivnim delom ose x. Ovaj koordinatni sistem zove se polarni koordinatni sistem u ravni.

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja pogodniji za množenje kompleksnih brojeva od Dekartovog kao što pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija. *Neka su $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\,\sin\phi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\,\sin\phi_2)$ dva proizvoljna kompleksna broja tada važi formula*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\,r_2\,(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\,\sin(\phi_1 + \phi_2))\,. \tag{0.11}$$

Iz ove formule vidimo da se kompleksni brojevi množe tako što se moduli pomnože, a argumenti saberu.

Dokaz.
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)\, r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = r_1 r_2\left((\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2)\right. \\ &\quad \left. + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2)\right) = r_1 r_2\left((\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\right). \end{aligned}$$ □

Posledice. *Za $0 \neq z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$ važe sledeće formule:*

(i1) $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$,

(i2) $z^{-n} = r^{-n}(\cos(n\phi) - i\sin(n\phi))$,

(i3) *ako je $r = \|z\| = 1$ onda važe i poznate Moavrove formule:*
$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi),$$
$$(\cos\phi - i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) - i\sin(n\phi).$$

Dokaz. (i1) sledi lako indukcijom iz Propozicije za $z = z_1 = z_2$.

(i2) Primetimo da je,
$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\phi + i\sin\phi)} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos\phi + i\sin\phi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos\phi + i\sin\phi}\cdot\frac{\cos\phi - i\sin\phi}{\cos\phi - i\sin\phi} \\ &= r^{-1}(\cos\phi - i\sin\phi), \end{aligned}$$
i primena formule (i1) na broj $z^{-n} = (z^{-1})^n$ uz korišćenje činjenice da je sinus neparna, a kosinus parna funkcija daje traženu formulu.

(i3) Moavrove formule su sada direktna posledica formula (i1) i (i2) za $\|z\| = 1$. □

Napomenimo da se kompleksni brojevi mogu predstaviti i u Eulerovom obliku, tj. važi
$$z = a + i\,b = r(\cos\phi + i\sin\phi) = r\,e^{i\phi}.$$

0.41. n-ti koren iz kompleksnog broja. Neka je $z \in \mathbb{C}$, i
$$\omega^n = z = a + i\,b = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$
Tada ω nazivamo n-tim korenom iz kompleksnog broja z. Kako je ω kompleksan broj možemo ga predstaviti u obliku $\omega = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, a zatim primena Posledice (i1) iz prethodne tačke daje,
$$\omega^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = r(\cos\phi + i\sin\phi) \qquad \text{odakle je}$$
$$\rho^n = r, \quad n\alpha = \phi + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{tj.} \qquad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \alpha_k = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\,, k \in \mathbb{Z}\,.$$
Zbog toga što je osnovni period funkcija sin i cos jednak 2π, iz prethodnog izraza za α_k sledi da je $\sin\alpha_0 = \sin\alpha_n = \cdots = \sin\alpha_{pn}$ za svaki $p \in \mathbb{Z}$, ili opštije $\sin\alpha_k = \sin\alpha_{n+k} = \cdots = \sin\alpha_{pn+k}$ za svaki $p \in \mathbb{Z}$ i $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Analogne formule važe i za funkciju kosinus. Odakle, onda sledi da svaki kompleksan broj $z \neq 0$ ima tačno n različitih $n-$tih korena. Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. *Neka je $0 \neq z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \in \mathbb{C}$. Tada postoji tačno n kompleksnih brojeva $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{n-1}$ takvih da je $\omega_k^n = z$ za $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, i pri tome važi*
$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right).$$

Primer. Odredite sve pete korene iz broja $z = 3 - i\,4$.

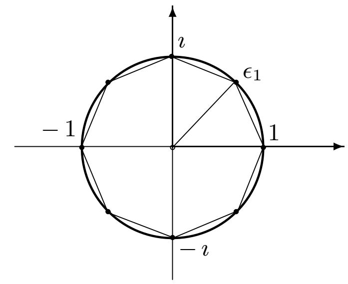
Na osnovu prethodne teoreme prvo imamo da je $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, tako da je
$$z = 5\left(\frac{3}{5} - i\,\frac{4}{5}\right) \implies \cos\alpha = \frac{3}{5}\,,\ \sin\alpha = -\frac{4}{5} \implies \alpha = -\arcsin\frac{4}{5}\,.$$
Sada na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da su peti koreni iz $3 - i\,4$:
$$\omega_0 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\alpha}{5} + i\sin\frac{\alpha}{5}\right),\ \omega_1 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi}{5} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi}{5}\right),\ \omega_2 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\alpha + 4\pi}{5} + i\sin\frac{\alpha + 4\pi}{5}\right),$$
$$\omega_3 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\alpha + 6\pi}{5} + i\sin\frac{\alpha + 6\pi}{5}\right), \omega_4 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\alpha + 8\pi}{5} + i\sin\frac{\alpha + 8\pi}{5}\right),$$

0.42. Sfera (krug) $\mathbb{S}^1$ i n−ti koreni iz jedinice. Neka je $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ jedinični krug u $\mathbb{R}^2$. Kako je očigledno skup $\mathbb{S}^1$ zatvoren za množenje kompleksnih brojeva (proizvod dva kompleksna broja modula 1 je opet kompleksni broj modula 1) i sadrži broj 1, kako su asocijativnost i komutativnost nasledne osobine (prenose se sa skupa na svaki njegov podskup) i kako je inverz kompleksnog broja modula 1 isti takav broj (vidi **1.41** Posledica (i2)), sledi da je $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ podgrupa grupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Skup K_n je skup $n-$tih korena iz jedinice i važi, $K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, k = 0, 1, ..., n-1\}$. Na analogan način kao i za krug može se proveriti da je K_n grupa s obzirom na množenje kompleksnih brojeva. Nije teško videti da grupa K_n ima svoju realizaciju kao grupa rotacija ravni koja ostavlja fiksnim pravilni $n-$ugao. Dakle,

$$K_n = \{\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} \quad \text{gde je} \quad \varepsilon_k = \cos\phi_n + i\,\sin\phi_n,\ \phi_n = \frac{2\pi}{n}\,.$$

Sada iz formule za množenje kompleksnih brojeva imamo sledeću propoziciju.



X

Slika 2. $n-$ti koreni iz 1 $(n = 8)$

Propozicija. *U grupi $n-$tih korena iz jedinice K_n važe identiteti:*

(i1) $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, za sve $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

(i2) $\varepsilon_{n-k} = \overline{\varepsilon_k}$.

6. Elementi kombinatorike

0.42. Varijacije. Permutacije. Kombinacije. Neka je dat neki konačan skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Posmatrajmo skup

$$\mathsf{Var}_k(A) = \{(b_1, b_2, \ldots, b_k) \subseteq A^k \mid b_i \neq b_j \text{ za } i \neq j\}.$$

Elementi skupa $\mathsf{Var}_k(A)$ zovu se varijacije bez ponavljanja (ili kraće varijacije), $k-$tog reda skupa A.

Teorema. *Broj elemenata skupa $\mathsf{Var}_k(A)$, jednak broju injekcija sa skupa $S_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ na skup A.*

Dokaz. Neka je $f : S_k \longrightarrow A$ '1–1', tada za izbor $f(1) = b_1$ imamo n mogućnosti. Sada kada smo izabrali $f(1) = b_1 \in A$, za izbor $f(2) = b_2$ imamo $n - 1 = \mathsf{card}\,(S_k \setminus \{f(1)\})$ mogućnost, itd., tako da za izbor $f(k) = b_k$ preostaje $n - k + 1 = \mathsf{card}\,(S_k \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(k-1)\})$ mogućnost. Kako su izbori za $f(1), f(2), \ldots, f(k)$ nezavisni, broj svih injekcija sa S_k na A (odnosno $\mathsf{card}\,\mathsf{Var}_k(A)$) je $V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$. □

U slučaju $k = n$ broj varijacije reda n na skupu od n elemenata jednak je broju bijekcija (= injekcija jer je A konačan) sa A na A. Kako se bijekcije nazivaju i permutacijama [17] i kako možemo izabrati $A = S_n$, vidimo da je broj svih permutacija (bijekcija) skupa od n elemenata P_n jednak

$$P_n = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!\,.$$

Po definiciji se uzima da je $0! = 1$.

Drugi sličan problem je problem određivanja broja svih $k-$članih podskupova skupa A (koji ima n elemenata), tj.

$$\mathsf{C}_k = \{B \subseteq A \mid \mathsf{card}\, B = k\}.$$

Svaki $k-$člani podskup od A zove se kombinacija $k-$tog reda skupa A. Da bismo odredili $\mathsf{card}\,(\mathsf{C}_k)$ potrebno je primetiti da svih $k!$ permutacija skupa $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ (uređenih $k-$torki) definišu isti skup B, tako da je taj broj C_k^n jednak

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Broj $\binom{n}{k}$ zove se binomni koeficijent.

[17] U slučaju da je A konačan skup.

0.43. Binomni koeficijenti. Neka od osnovnih svojstava binomnih koeficijenata su $(0 \le k \le n)$

$$\text{(i1)}\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,, \qquad \text{(i2)}\quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}\,, \qquad \text{(i3)}\quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}\,.$$

Dokaz. (i1) i (i2) direktno iz definicije binomnih koeficijenata.
(i3) sledi iz

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} + \frac{n\,!}{(k-1)\,!\,(n-k+1)\,!} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k+1)\,!} \\ &\times (n-k+1+k) = \frac{n\,!(n+1)}{k\,!\,(n-k+1)\,!} = \frac{(n+1)\,!}{k\,!\,(n-k+1)\,!} = \binom{n+1}{k}\,.\end{aligned}$$ □

Upravo dokazana formula (i3) poznata je kao i Pascalova[18] jednakost za binomne koeficijente.

0.44. Teorema (Binomna formula). Neka su $a,\, b \in \mathbb{R}$ proizvoljni realni brojevi, i n proizvoljan prirodan broj tada važi sledeća formula[19],

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b^1 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1\, b^{n-1} + b^n\,.$$

Dokaz: Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ formula je tačna jer je $(a+b)^1 = a^1 + b^1$.
Pretpostavimo da je binomna formula tačna za neki $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\,(a+b)^n \overset{\text{(pi)}}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k \\ &+ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)}\, b^k \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{=\binom{n+1}{k}\ (\text{vidi } \mathbf{1.43}\ \text{(i3)})} a^{n-k+1}\, b^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k}\, b^k\,,\end{aligned}$$

dakle, formula je tada tačna i za $n+1$. □

0.45. Neke posledice binomne formule. Ako u binomnu formulu prvo uvrstimo $a = b = 1$, a zatim $a = 1,\ b = -1$, dobijamo sledeća dva identiteta

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 1^{n-k}\, 1^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,, \\ (1-1)^n &= 0^n = 0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 1^{n-k}\,(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\,.\end{aligned}$$

Posledica. Kako je $\binom{n}{k}$ jednak broju $k-$članih podskupova skupa A koji ima n elemenata, vidimo da je ukupan broj svih podskupova skupa A, tj. broj elemenata partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$ jednak $\mathsf{card}\,\mathcal{P}(A) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

7. Zadaci

0.46. Neka su dati skupovi

(a) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{0,1,2,3,4\}$, i $C = \{-1,0,1,2,3\}$.
(b) $A = [0,2)$, $B = (1,3] \cup \{5\}$ i $C = [0,1] \cup (2,4)$.

[18] Blaise Pascal, 1623 – 1662, francuski matematičar.
[19] Poznata kao binomna formula.

Odredite skupove

(i1) $A \cup B$, $A \cup C$, (i2) $A \cap B$, $B \cap C$, (i3) $X = A \cup B \cup C$, A^c u X,

(i4) $A \setminus B$, $B \setminus A$, (i5) $A \setminus C$, $B \setminus C$, (i6) $X \setminus B$, $X \setminus C$,

(i7) $A \triangle B$, $A \triangle C$, (i8) $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, (i9) $\mathcal{P}(A \cup B)$, $\mathcal{P}(A \cap B)$.

0.47. Pokažite da je $A \cup B = A$ ako i samo ako $B \subseteq A$.

0.48. Dokažite preostale jednakosti iz **1.4**.

0.49. Dokažite sve jednakosti iz **1.5**.

0.50. Neka su A i B proizvoljna dva skupa. Pokažite da je

(i1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, (i2) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Dokaz: Pokažimo (i1). Dokaz je posledica sledećeg niza ekvivalencija,

$$X \in \mathcal{P}(A \cap B) \iff X \subseteq A \cap B \iff X \subseteq A \text{ i } X \subseteq B \iff X \in \mathcal{P}(A) \text{ i } \mathcal{P}(B) \iff X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \qquad \square$$

0.51. Dokažite (i2)-(i5) iz **1.7**.

0.52. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Pokažite da važi,

(i1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$, (i2) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

(i3) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

0.53. Neka su A i B konačni skupovi i neka je $f : A \longrightarrow B$ neka funkcija. Pokažite da su ekvivalentni sledeći iskazi:

(i1) f je '1–1', (i2) f je 'na'. (i3) f je bijekcija.

0.54. Neka su date binarne relacije ρ, σ i τ na A. Pokažite da važi

(i1) $(\rho\sigma)^{-1} = \rho^{-1}\sigma^{-1}$, (i2) $(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$,

(i3) $\rho(\sigma \cup \tau) = \rho\sigma \cup \rho\tau$, (i4) $\rho(\sigma \cap \tau) \subseteq \rho\sigma \cap \rho\tau$.

0.54. Neka su ρ i σ dve binarne relacije na skupu A. Dokažite

(i1) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$, (i2) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$,

(i3) $(\rho \setminus \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \setminus \sigma^{-1}$, (i4) $(\rho^c)^{-1} = (\rho^{-1})^c$.

0.55. Neka skupovi A i B imaju konačan broj elemenata. Pokažite

(i1) da važi formula, $\mathsf{card}(A \cup B) = \mathsf{card}\, A + \mathsf{card}\, B - \mathsf{card}(A \cap B)$.

(i2) da je $\mathsf{card}\,\mathcal{P}(A) = 2^{\mathsf{card}\, A}$, gde je $\mathcal{P}(A)$ (partitivni skup od A) skup svih podskupova skupa A.

0.56. Dokažite da je

$$\text{(i1)} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k}\,,\,1\right] = (0,1]\,, \qquad \text{(i2)} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} \left[\frac{k-1}{k}\,,\,1\right] = \{1\}\,.$$

0.57. Neka su A i B konačni skupovi i neka je $\|A\| = n$ i $\|B\| = m$. Koliko ima funkcija sa A u B? Koliko je među njima injekcija, surjekcija i bijekcija.

0.58. Neka je skup A konačan, tj. $\|A\| = m$. Koliko ima relacija na skupu A? Koliko je među njima refleksivnih, antirefleksivnih, simetričnih i antisimetričnih relacija?

Rešenje: Prema **1.19** svakoj relaciji na A odgovara tačno jedna tablica tipa $m \times m$, funkcije te relacije. Dakle, u tablici ima ukupno m^2 mesta, a na svakom može biti ili 1 ili 0. Prema tome, ukupan broj relacija je 2^{m^2}.

Da bi relacija ρ na A bila refleksivna u tablici njene funkcije (vidi **1.19**) na dijagonali moraju biti sve 1, a na sva preosta mesta nema nikakvih uslova. Dakle, ukupan broj svih takvih relacija je $2^{m\,(m-1)}$.

Analogno, kao i za refleksivne relacije njihov broj je $2^{m\,(m-1)}$.

Primetimo da uslov simetričnosti neke relacije ρ implicira da proizvoljno možemo izabrati vrednosti u $f_\rho(a_1,a_1)$, $f_\rho(a_2,a_1)$, $f_\rho(a_2,a_2)$, $\ldots$, $f_\rho(a_m,a_1), \ldots, f_\rho(a_m,a_m)$, i preostale vrednosti od $f_\rho(a_i,a_j)\,(i<j)$, su potpuno određene. Kako je broj uređenih parova (i,j) takvih da $i \geq j$, $i,j = 1,\ldots,m$ jednak $1 + 2 + \cdots + m = m\,(m+1)/2$, broj traženih relacija je $2^{\frac{m\,(m+1)}{2}}$.

Za antisimetrične relacije analogno kao i za simetrične samo primetimo da je kod antisimetričnih relacija i dijagonala fiksirana, tako da je njihov ukupan broj $2^{\frac{m\,(m-1)}{2}}$. $\diamondsuit$

0.59. Dokažite da je skup $\mathcal{P}r$ svih prostih brojeva beskonačan.

Dokaz: Pretpostavimo da $\mathcal{P}r = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ konačan i da ima tačno k elemenata. Posmatrajmo broj $\Pi = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1$, očigledno ovaj broj nije deljiv niti sa jednim prostim brojem p_i jer pri delenju sa svakim od njih daje ostatak 1. Prema definiciji ovaj broj deljiv je samo sa 1 i sa samim sobom, tj. on je prost što je kontradikcija sa pretpostavkom da su svi prosti brojevi elementi skupa $\mathcal{P}r = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. $\square$

0.60. Nađite Euklidovim algoritmom $\mathsf{NZD}(a, b)$ ako su

(i1) $a = 125, b = 75$, (i2) $a = 12600, b = 23760$,

(i3) $a = 5246, b = 982$, (i4) $a = 2250, b = 2700$.

0.61. Dokažite da je $\mathsf{NZD}(a, b) \cdot \mathsf{NZS}(a, b) = a \cdot b$.

0.62. Neka je $a = p_{i_1}^{\alpha_1} \cdot p_{i_2}^{\alpha_2} \cdots p_{i_n}^{\alpha_n}$ i $b = q_{j_1}^{\beta_1} \cdot q_{j_2}^{\beta_2} \cdots q_{j_m}^{\beta_m}$. Odredite $\mathsf{NZS}(a, b)$ i $\mathsf{NZD}(a, b)$.

Rešenje: Ako sa $\mathcal{P}(a) = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}\}$ i $\mathcal{P}(b) = \{p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_m}\}$ obeležimo skupove prostih brojeva koji učestvuju u rastavima brojeva a i b redom.
Ako je $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} = \mathcal{P}(a) \cap \mathcal{P}(b)$ tada je $\mathsf{NZD}(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k}$ pri čemu je $p_i = p_{i_s} = p_{j_r}$ i $\gamma_t = \mathsf{min}(\alpha_{i_s}, \beta_{j_r})$.
Slično, ako je $\{p_1, p_2, \ldots, p_l\} = \mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b)$ tada je $\mathsf{NZS}(a, b) = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdots p_l^{\delta_l}$ gde je $p_i = p_{i_s}$ ili $p_i = p_{j_r}$ i $\delta_t = \mathsf{max}(\alpha_{i_s}, \beta_{j_r})$. $\diamondsuit$

0.62. Neka je $M \subseteq \mathbb{N}$ i neka ima sledeća svojstva

(i1) $n_0 \in M$, (i2) $n \in M \implies n + 1 \in M$,

tada $M \supseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$.

Dokaz: Neka je $\overline{M} = \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$, tada iz Peanovih aksioma sledi da je $\overline{M} \cup M = \mathbb{N}$, tj. $M \supseteq \mathbb{N} \setminus \overline{M}$. $\square$

0.63. Neka je $M \subseteq \mathbb{N}$ i neka važi

(i1) $1 \in M$, (i2) $m \in M,\ \forall\, m \leq n \implies n + 1 \in M$,

tada je $M = \mathbb{N}$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathbb{N} \setminus M \neq \emptyset$. Izaberimo minimalni element $n_0 \in \mathbb{N} \setminus M$ (takav uvek postoji jer je $\mathbb{N}$ dobro uređen, pa svaki njegov neprazan podskup ima minimalni element). Zbog (i1) $n_0 \neq 1$, i primena svojstva (i2) za $m = n_0 - 1$ impliciraju $n_0 \in M$ što je nemoguće. Dobijena kontradikcija pokazuje da je pogrešna polazna pretpostavka $\mathbb{N} \setminus M \neq \emptyset$, dakle $M = \mathbb{N}$. $\square$

0.64. Neka je $M \subseteq \mathbb{N}$ i neka ima sledeća svojstva

(i1) $1 \in M,\ 2 \in M$, (i2) $n, n - 1 \in M \implies n + 1 \in M$,

tada $M = \mathbb{N}$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathbb{N} \setminus M \neq \emptyset$, tada postoji minimalni element $n_0 \in \mathbb{N} \setminus M$. Zbog (i1) $n_0 \neq 1$, i $n_0 \neq 2$, ako je n_0 onda su zbog minimalnosti od n_0 brojevi $n_0 - 1$ i $n_0 - 2 \in M$ i primena svojstva (i2) implicira $n_0 \in M$ što je kontradikcija sa polaznom pretpostavkom. Dakle, $M = \mathbb{N}$. $\square$

0.65. Dokažite da za svaki prirodan broj n važe sledeće jednakosti:

(i1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2\,n+1)$, (i2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\, n^2\,(n+1)^2$,

(i3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}$, (i4) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, k^2 = (-1)^{n-1}\, \frac{n\,(n+1)}{2}$,

(i5) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\,k-1)\,(2\,k+1)} = \frac{n}{2\,n+1}$, (i6) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(n-k+1) = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(n+2)$,

(i7) za $1 \neq x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, (i8) $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{\text{n dvojki pod korenima}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Dokaz: (i1) Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1/6\, n\,(n+1)\,(2\,n+1)\}$.

(bi) $1^2 = 1 = \frac{1}{6}\, 1\,(1+1)\,(2 \cdot 1 + 1) \implies 1 \in M$.

(ki) Neka je neki $n \in M$ tada imamo redom,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{(\text{pi})}{=} \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2\,n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}\,(n+1)(n\,(2\,n+1) + 6\,(n+1)) = \frac{1}{6}\,(n+1)(2\,n^2 + 7\,n + 6) \\ &= \frac{1}{6}\,(n+1)\,(n+2)\,(2\,n+3) = \frac{1}{6}\,(n+1)\,((n+1)+1)\,(2\,(n+1)+1)\,,\end{aligned}$$

tj. $n+1 \in M$.

(i2) Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1/4\, n^2\,(n+1)^2\}$.

(bi) $1^3 = 1 = \dfrac{1}{4}\, 1^2\,(1+1)^2 \implies 1 \in M$.

(ki) Neka je neki $n \in M$ tada imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{(\text{pi})}{=} \frac{1}{4}\, n^2\,(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\,(n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{1}{4}\,(n+1)^2((n+1)+1)^2\end{aligned}$$

tj. $n+1 \in M$. (i3) Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^{n} 1/(k\,(k+1)) = n/(n+1)\}$.

(bi) za $n = 1$ očigledno se leva i desna strana jednakosti podudaraju, tako da je $1 \in M$.

(ki) Neka je neki $n \in M$ tada imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\,(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} \overset{\text{pi}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} \\ &= \frac{n\,(n+2)+1}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)} = \frac{n+1}{((n+1)+1)}\,,\end{aligned}$$

tj. $n+1 \in M$.

(i4), (i5) i (i7) analogno prethodnim zadacima (i1), (i2) i (i3). Za (i6) iskoristi formulu $\sum_{k=1} k = 1/2\, n\,(n+1)$ i (i1).

(i8) Baza indukcije. Za $n = 1$ imamo $\sqrt{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{1+1}} = 2\cos\dfrac{\pi}{4}$, što je tačno.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je gornja formula tačna za neki prirodan broj n, tada je

$$\begin{aligned}&\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{\text{n+1 dvojka pod korenima}} = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\text{n dvojki pod korenima}}} \overset{\text{pi}}{=} \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{(n+1)+1}}\,,\end{aligned}$$

jer je $1 + \cos(2\,\alpha) = \cos^2\alpha$. Dakle, formula je tačna i za $n+1$ i onda AMI implicira da je formula tačna za sve prirodne brojeve. ♢

0.66. Pokažite da za $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ broj 2^{2^n} u dekadskom sistemu završava cifrom 6.

Dokaz: Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{2^n}\text{završava brojem } 6\}$. $2 \in M$ jer je $2^{2^2} = 16$. Pretpostavimo da je neki $n > 1$ element iz M, tj. $2^{2^n} = 10 \cdot x + 6, (\, x \in \mathbb{N})$. Sada imamo,

$$2^{2^{n+1}} = 2^{2\cdot 2^n} = \left(2^{2^n}\right)^2 = (10\cdot x + 6)^2 = 100\cdot x^2 + 2\cdot 6\cdot 10\cdot x + 36 = 10\cdot y + 6\,,$$

pri čemu je $y = 10\cdot x^2 + 12\,x + 3$. Time je proveden korak indukcije i dokaz je gotov. □

0.67. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj nastao dopisivanjem dekadskih zapisa brojeva 2^n i 5^n ima $n+1$ cifru.

Dokaz: Za $n = 1$ radi se o broju 25 koji očigledno ima 2 cifre. Pretpostavimo sada da je tvrdnja istinita za neki $n \in \mathbb{N}$ i neka broj 2^n ima k cifara, a broj 5^n ima m cifara $(k+m = n+1)$. Tada imamo dve mogućnosti

$$\text{(i1)}\quad 10^{k-1} < 2^n < 5\cdot 10^{k-1} \qquad \text{i} \qquad \text{(i2)}\quad 5\cdot 10^{k-1} < 2^n < 10^k\,.$$

Potrebno je pokazati da broj nastao dopisivanjem brojeva 2^{n+1} i 5^{n+1} ima tačno $n+2 = k+m+1$ cifru.

(i1) $2^{n+1} < 10^k$ i broj 2^{n+1} ima k cifara. S druge strane je $2^n \cdot 5^n < 5^{n+1}\cdot 10^{k-1}$, odakle sledi da je $10^{n-k+1} < 5^{n+1}$, tj. broj 5^{n+1} ima barem $n+2-k$ cifri. Više ih ne može imati zbog $5^n < 10^{n-k+1} \implies 5^{n+1} < 5\cdot 10^{n-k+1} < 10^{n-k+2}$. Tako da u ovom slučaju tvrdnja važi.

(i2) $5\cdot 10^{k-1} < 2^n < 10^k$, odake sledi da je $10^k < 2^{n+1}$ i broj 2^{n+1} ima $k+1$ cifru. Iz druge nejednakosti sledi $5^{n+1}\cdot 10^{k-1} < 10^n$, odakle je $5^{n+1} < 10^{n-k+1}$ tako da brojevi 5^n i 5^{n+1} imaju isti broj cifara $m = n-k+1$. Dakle, ukupan broj cifara broja nastalog dopisivanjem brojeva 2^{n+1} i 5^{n+1}, i u ovom slučaju, je $n+2 = k+m+1$.

0.68. Dokažite da za svaki prirodan broj n važe sledeće nejednakosti:

(i1) $\| \sin nx \| \leq n \ \| \sin x \|$, (i2) za $\forall \beta \leq -3$ važi $(1+\beta)^{2n-1} \leq 1 + (2n-1)\beta$,

(i3) $(2n)! < \dfrac{(2n+2)^{2n+1}}{2n+1}$, (i4) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Dokaz: (i2) Baza indukcije. Za $n=1$ imamo, $(1+\beta)^{2\cdot 1-1} = 1+\beta \leq 1+\beta = 1+(2\cdot 1-1)\beta$.
Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj n, sada imamo

$$\begin{aligned}(1+\beta)^{2n+1} &= (1+\beta)^2(1+\beta)^{2n} \overset{(\mathrm{pi})}{\leq} (1+\beta)^2(1+(2n-1)\beta) = 1+(2n+1)\beta \\ &\quad + 2(2n-1)\beta^2+\beta^2+(2n-1)\beta^3 \leq 1+(2n+1)\beta,\end{aligned}$$

jer je $2(2n-1)\beta^2+\beta^2+(2n-1)\beta^3 \leq 0$, za $x \leq -3$. Pokažimo sada ovu nejednakost. Ako je $\beta = 0$ onda nejednakost važi. Ako $\beta \neq 0$ tada je ova nejednakost ekvivalentna sa $(2n-1)\beta+4n-1 \leq 0$ ili $\beta \leq (1-4n)/(2n-1)$. Poslednja nejednakost posledica je sledećeg niza ekviivalencija $(\forall n \in \mathbb{N})$,

$$2n-2 \geq 0 \iff 4n-1 \leq 6n-3 \iff \frac{4n-1}{2n-1} \leq 3 \iff \beta \leq -3 \leq \frac{4n-1}{2n-1}.$$

(i4) Baza indukcije. Za $n=1$ imamo $1/2 \leq 1/\sqrt{3\cdot 1+1}$, što je tačno.
Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj n, pa imamo redom

$$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k+1} = \frac{2n+1}{2n+3}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k+1} \overset{(\mathrm{pi})}{\leq} \frac{2n+1}{2n+3}\,\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}},$$

jer je poslednja nejednakost ekvivalentna (koren je monotona funkcija pa možemo da kvadriramo poslednju nejednakost) sa

$$\begin{aligned}&(4n^2+4n+1)(3n+4) \leq (4n^2+8n+4)(3n+1) \iff \\ &12n^3+28n^2+19n+4 \leq 12n^3+28n^2+20n+4 \iff n>0.\end{aligned}$$

0.69. Dokažite da za svaki prirodan broj n važi:

(i1) $\dfrac{n}{6}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n^3}{3} \in \mathbb{N}$, (i2) $6 \mid n(n+1)(4n+5)$,

(i3) $9 \mid n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$, (i4) $30 \mid n^5+5n^3-6n$,

(i5) $3 \mid 5^n+2^{n+1}$, (i6) $64 \mid 3^{2n+3}+40n-27$,

(i7) $9 \mid 3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4$, , (i8) $17 \mid 3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$.

Dokaz: (i1) Baza indukcije. Za $n=1$ imamo $1/6+1/3+1/2=1 \in \mathbb{N}$.
Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ je $n/6+n^2/2+n^3/3 = \alpha \in \mathbb{N}$, sada imamo,

$$\frac{n+1}{6}+\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{(n+1)^3}{3} = \alpha+\frac{1}{6}+n+\frac{1}{2}+n^2+n+\frac{1}{3} \in \mathbb{N}.$$

(i2) Definišemo polinom $f(x) = x(x+1)(4x+5)$. Sada je tvrdnja ekvivalentna sa $6 \mid f(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Baza indukcije. Za $n=1$ imamo $f(1) = 1\cdot(1+1)\cdot(4\cdot 1+5) = 18$ i $6 \mid 18$.
Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$, $n \mid f(n)$, tj. $f(n) = 6\alpha$ za neki $\alpha \in \mathbb{N}$. sada imamo,

$$\begin{aligned}f(n+1) &= (n+1)(n+2)(4n+9) = n(n+1)(4n+9)+2(n+1)(4n+9) \\ &= n(n+1)(4n+5)+4n(n+1)+2(n+1)(4n+9) = f(n)+4n(n+1) \\ &\quad + 2(n+1)(4n+9) \overset{\mathrm{pi}}{=} 6\alpha+2(n+1)(6n+9) = 6\alpha+6(n+1)(2n+3) \\ &= 6\underbrace{(\alpha+(n+1)(2n+3))}_{\in\,\mathbb{N}} \implies 6 \mid f(n+1).\end{aligned}$$

Korak indukcije u (i3) i (i4) sličan je istom od (i1), a korak indukcije u (i5)-(i7) sličan je koraku indukcije od (i8), tvrdnju koju ćemo sada dokazati.

(i8) Definišemo funkciju $f(x) = 3\cdot 5^{2x+1}+2^{3x+1}$. Sada je naša tvrdnja ekvivalentna sa $17 \mid f(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Baza indukcije. Za $n=1$ imamo $f(1) = 3\cdot 5^{21+1}+2^{31+1} = 3\cdot 125+16 = 391 = 17\cdot 23$ i $17 \mid f(1)$.
Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$, $n \mid f(n)$, tj. $f(n) = 17\alpha$ za neki $\alpha \in \mathbb{N}$. sada imamo,

$$\begin{aligned}f(n+1) &= (3\cdot 5^{2n+3}+2^{3x+4} = 75\cdot 5^{2n+1}+8\cdot 2^{3n+1} = 8(3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}) \\ &\quad + 51\cdot 5^{2n+1} \overset{\mathrm{pi}}{=} 8\cdot 17\cdot\alpha+17\cdot 5^{2n+1} = 17\underbrace{(8\alpha+3\cdot 5^{2n+1})}_{\in\,\mathbb{N}} \implies 17 \mid f(n+1).\end{aligned}$$

0.70. Dokažite da

(i1) $\forall\, n \geq 5,$ važi $2^n > n^2$, (i2) $\forall\, n \geq 10,$ važi $2^n > n^3$,

(i3) $\forall\, n \geq 2,$ važi $\dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2\,n)\,!}{(n\,!)^2}$,

(i4) $\forall\, a,\, b \in \mathbb{R}^+,\ a \neq b,$ i $n \geq 2,$ važi $(a+b)^n < 2^n\, \dfrac{a^n + b^n}{2}$.

(i1) Baza indukcije. Za $n = 5$ imamo $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $4 < n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$. sada imamo,

$$(n+1)^2 = n^2 + 2\,n + 1 \overset{\text{pi}}{<} 2^n + 2\,n + 1 \leq 2^{n+1},$$

jer je $2\,n + 1 \leq 2^n$, za svaki $n \geq 3$, što ćemo pokazati takođe indukcijom. Za $n = 3$ tvrdnja važi jer je $2 \cdot 3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$. Sada pretpostavimo da je ova nejednakost tačna za neki $3 \leq n \in \mathbb{N}$ i imamo

$$2\,(n+1) + 1 = (2\,n+1) + 2 \overset{\text{pi}}{<} 2^n + 2 < 2^n + 2^2 = 2^{n+1}.$$

Dakle, time je pokazano da za $3 \leq n \in \mathbb{N}$ je $2\,n + 1 < 2^n$, a samim tim je dokazana naša tvrdnja.

(i2) analogno kao (i1).

(i4) Baza indukcije. Neka su $a,\, b \in \mathbb{R}^+,\ a \neq b$, tada za $n = 2$ imamo

$$0 < (a-b)^2 \iff (a+b)^2 < 2\,(a^2 + b^2) = 2^2\, \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za $2 \leq n \in \mathbb{N}$ i sve $a,\, b \in \mathbb{R}^+,\ a \neq b$. Sada redom nalazimo,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\,(a+b)^n \overset{jer\ a+b>0}{<} (a+b)\,2^{n-1}\,(a^n + b^n) \leq 2^n\,(a^{n+1} + b^{n+1}).$$

Poslednja nejednakost je tačna jer je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} (a+b)(a^n + b^n) \leq 2\,(a^n + b^n) &\iff a^{n+1} - a^n\,b + b^{n+1} - a\,b^n \geq 0 \\ &\iff (a-b)\,(a^n - b^n) > 0\,, \end{aligned}$$

što je tačno jer je stepena funkcija monotona.

0.71. Za $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ definišemo niz

$$a_1 = \frac{1}{2}\,(\alpha + \beta), \quad a_2 = \frac{1}{2}\,(\beta + a_1), \quad \text{za } n > 2 \quad a_n = \frac{1}{2}\,(a_{n-1} + a_{n-2}).$$

Pokažite da za svaki prirodan broj važi formula

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\alpha + \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\beta.$$

Dokaz: Baza indukcije. Kako rekurentna formula uključuje dva susedna člana niza bazu je potrebno proveriti za $n = 1$ i $n = 2$.

$$\begin{aligned} n = 1 &\implies \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^1\right)\alpha + \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1\right)\beta = \frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\,\alpha + \frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\,\beta = a_1\,, \\ n = 2 &\implies \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)\alpha + \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)\beta = \frac{1}{3}\,\frac{3}{4}\,\alpha + \frac{1}{3}\,\frac{9}{4}\,\beta = \frac{1}{4}\,\alpha + \frac{3}{4}\,\beta = a_2\,. \end{aligned}$$

Korak indukcije. Pretpostavimo da je data formula tačna za dva susedna prirodan broja $n-1$ i n, sada imamo redom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\,(a_{n-1} + a_n) \overset{\text{(pi)}}{=} \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}\,(1 - (-1)^{n-1})\,\alpha + \frac{1}{3}\,(1 - (-1)^n)\,\alpha + \frac{1}{3}\,\big(2 + (-1)^{n-1}\big)\,\beta \\ &\quad + \frac{1}{3}\,(2 + (-1)^n)\,\beta)\Big] = \frac{1}{3}\,\alpha\Big(1 - \frac{1}{2}\,\Big(\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big)\Big) + \frac{1}{3}\,\beta\Big(2 + \frac{1}{2} \\ &\quad \times \Big(\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big)\Big) = \frac{1}{3}\,\Big(1 - (-1)^{n+1}\Big)\,\alpha + \frac{1}{3}\,\Big(2 + (-1)^{n+1}\Big)\,\beta \\ &\text{jer je} \quad \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\,\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\,\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}. \end{aligned}$$

0.72. Pokažite da važe sledeći identiteti,

(i1) $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\dbinom{n}{k} = 2^{n-1}\,n$, (i2) $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k k\,\dbinom{n}{k} = 0$,

(i3) $\forall\, n, m \in \mathbb{N},\ m > n,\quad \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\,\dbinom{m}{k} = \dbinom{m-1}{n}$,

(i4) $\forall\, n, k, m \in \mathbb{N},\ k,\, m \leq n,\quad \sum\limits_{j=0}^{k} \dbinom{n-m}{j}\,\dbinom{m}{k-j} = \dbinom{n}{k}$.

Uopštite (i1) i (i2) povećavajući stepen od k u sumama.

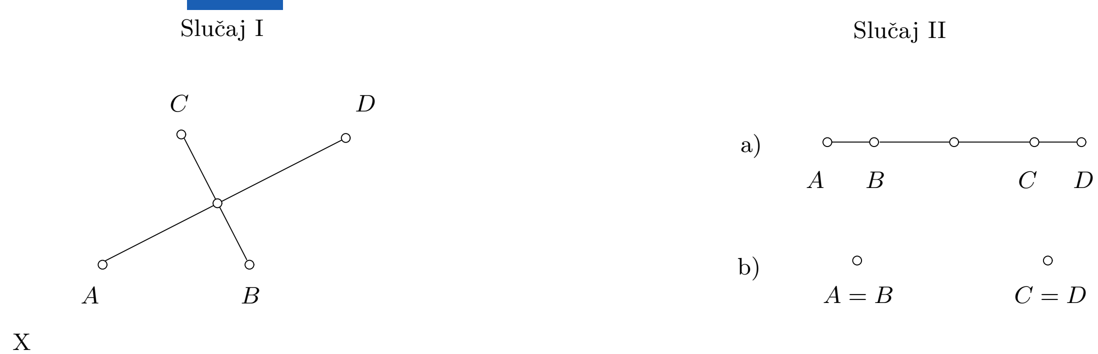
UVOD: KLASIČNA ALGEBRA VEKTORA I ANALITIČKA GEOMETRIJA PRAVIH I RAVNI

1. Definicija vektora – istorijski uvod

1.1. Malo istorije. Geometrija koja se uči u osnovnoj i srednjoj školi zasnovana je na pretpostavci da je prostor $\mathbb{E}$ u kome živimo dobro aproksimiran euklidskim prostorom, ili preciznije pretpostavljamo da je opisan aksiomama koje je ponudio D. Hilbert, krajem 19. i početkom 20. veka prilagođavajući Euklidovu aksiomatiku datu u "Elementima", savremenom matematčkom jeziku.

Pojam vektora u euklidskoj geometriji nije sasvim jednostavan jer ga uvodimo kao klasu ekvivalencije na skupu svih usmerenih duži (*usmerena duž* je duž kod koje razlikujemo početnu i krajnju tačku). Preciznije, prvo imamo sledeću definiciju.

1.2. Definicija. *Kažemo da su uređeni parovi tačaka prostora $\mathbb{E}$, (A, B) i (C, D)* **ekvivalentni** *ako duži AD i BC imaju zajedničko središte (Slika 1). To zapisujemo ovako $(A, B) \sim (C, D)$.*



Slika 1. Uvođenje vektora

Kako je svaka usmerena duž određena svojom početnom tačkom A, i krajnjom tačkom B, možemo je identifikovati sa uređenim parom tačaka $(A, B) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$. Za usmerenu duž (A, B) koristimo uobičajenu oznaku $\overrightarrow{AB}$ i pri tome tačku A zovemo početkom, a tačku B krajem usmerene duži $\overrightarrow{AB}$.

Primedba. Poznato je da je četvorougao $ABCD$ paralelogram[1] ako i samo se duži AC i BD polove. Koristeći ovu činjenicu vidimo (vidi Sliku 1) da postoje dva tipa ekvivalentnih usmerenih duži (A, B) i (C, D): četvorougao $ABDC$ je paralelogram (nedegenerisani slučaj), tačke $ABDC$ pripadaju istoj pravoj (degenerisani slučaj) i zadovoljavaju uslov da se duži AD i BC polove. Odavde vidimo da je ova definicija relacije ekvivalencije u suštini ravanska (nedegenerisani slučaj), pa je stoga dobra i u prostoru, ali na svu sreću (degenerisani) slučaj pokazuje da je ona dobra i u slučaju prave.

1.3. Relacija ekvivalencije. Budući da je relacija ekvivalentnosti na skupu svih usmerenih duži (što je sugerisano "slučajno" i njenim imenom) jedna relacija ekvivalencije ona mora biti i tranzitivna. Za dokaz tranzitivnosti potrebna nam je sledeća:

Lema. *Neka su $ABDC$ i $CDFE$ paralelogrami. Ako tačke A, B, E i F nisu kolinearne tada je četvorougao $ABFE$ paralelogram.*

[1] U označavanju temena poligona koristimo konvenciju da temena poligona obeležavamo u pozitivnom smeru tj. u smeru suprotnom od kretanja kazaljki na satovima starijim od 50 godina. Ovaj vremenski uslov je neophodan jer su se u zadnje vreme pojavili satovi čije se kazaljke kreću u suprotnom smeru od satova iz starih dobrih vremena.

Dokaz ove Leme izostavljamo, on se može naći u [BBRL].

Osnovna osobina relacije $\sim$ data je u sledećoj teoremi.

Teorema. Uvedena relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu svih usmerenih duži prostora $\mathbb{E}$.

Dokaz: Potrebno je pokazati da relacija $\sim$ ima osobine refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti. Refleksivnost i simetričnost relacije $\sim$ su očigledne iz definicije. Tako npr. simetričnost sledi iz: $(A,B) \sim (C,D)$ onda se duži AD i BC polove, pa se onda polove i duži CB i DA što pokazuje da je i $(C,D) \sim (A,B)$. Neka je sada $(A,B) \sim (C,D)$ i $(C,D) \sim (E,F)$. Lako se proveri da je tada i $(A,B) \sim (E,F)$ u svim slučajevima, osim ako su $ABDC$ i $CDFE$ paralelogrami i ako tačke A, B, F i E nisu kolinearne, ali i u tom slučaju dokaz sledi iz prethodne leme. □

1.4. Vektor. Osnovna osobina svake relacije ekvivalencije je da razbija skup na kojem je definisana na međusobno disjunktne klase ekvivalencije, tj. na podskupove čija je unija čitav skup i čiji preseci po parovima su prazni. Primenjujući ovu činjenicu na naš skup, $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$, dobijamo sledeću definiciju.

Definicija. *Svaka od klasa ekvivalencija na koje je skup uređenih parova tačaka (usmerenih duži)* $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ *razbijen relacijom* $\sim$ *zove se* **vektor**.

Prema tome, vektor je skup $[(A,B)] = \{(X,Y) \mid (X,Y) \sim (A,B)\}$, definisan svojim predstavnikom usmerenom duži (A,B). S obzirom da je gornja oznaka glomazna koristimo oznaku $[(A,B)] = \mathbf{AB}$, da bismo naglasili razliku između usmerenih duži i vektora. Takođe, vektore ćemo obeležavati malim latiničnim slovima $x, y, a, b, \ldots$.

Dakle, jasno je da skup svih vektora $V = \mathbb{E} \times \mathbb{E}/\sim = \{\mathbf{AB} \mid (A,B) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}\}$. Kada budemo želeli da naglasimo da smo skup vektora dobili relacijom $\sim$ tako što smo za skup $\mathbb{E}$ uzeli pravu $(\mathbb{E}^1)$, ravan $(\mathbb{E}^2)$ ili prostor $(\mathbb{E}^3)$ onda ćemo koristiti redom oznake V^1, V^2 ili V^3.

1.5. Određenost vektora. Meru duži XY, drugim rečima rastojanje između tačaka X i Y, nazivamo **dužinom**, **intenzitetom** ili **modulom** vektora $\mathbf{XY}$ i obeležavamo je sa $\|\mathbf{XY}\|$. Za rastojanje dve tačke A i B koristimo i oznaku $d(A,B)$. Jasno je da svi predstavnici datog vektora imaju istu dužinu, kao i to da usmerene duži koje nemaju istu dužinu ne mogu biti u istoj klasi.

Ako je prava p određena tačkama X i Y $(X \neq Y)$ ili je paralelna pravoj XY zvaćemo je **pravcem** vektora $\mathbf{XY}$. Primetimo da svi predstavnici datog vektora imaju isti pravac, kao i to da usmerene duži koje nemaju isti pravac ne mogu biti u istoj klasi.

Vektore koji imaju isti pravac nazivamo **kolinearnim**, a one kojima su pravci paralelni nekoj ravni π, **koplanarnim**. Smatraćemo da je nula vektor kolinearan (ili koplanaran) sa svakim skupom kolinearnih (ili koplanarnih) vektora.

Pod **orijentacijom (ili smerom)** vektora $\mathbf{XY}$ podrazumevamo smer prave p[2] određen početkom i krajem predstavnika $\overrightarrow{XY}$ na pravoj p. Primetimo da smer vektora ne zavisi od izbora predstavnika $\overrightarrow{XY}$, kao i to da usmerene duži koje nemaju istu orijentaciju ne mogu biti u istoj klasi.

Vektor čiji je predstavnik usmerena duž $\overrightarrow{XX}$, kojoj se početak i kraj poklapaju, nazivamo **nula vektorom** i obeležavamo ga sa 0. Jasno je da vektor ima dužinu 0 ako i samo ako je on nula vektor. Nula vektor nema ni pravac ni smer. Za vektor $\mathbf{YX}$ kažemo da je **suprotnosmeran** vektoru $\mathbf{XY}$.

Lako se vidi da je **svaki vektor jednoznačno određen sa svoje tri osobine intenzitetom, pravcem i smerom.**

2. Linearne operacije na skupu vektora

1.6. Homogenost prostora. U skup vektora (na nekoj pravoj, u nekoj ravni ili u prostoru), želimo da udahnemo malo 'života' tako što ćemo uvesti dve osnovne, **linearne algebarske operacije**, i tako dobiti jednu od najvažnijih algebarskih struktura na prostoru svih vektora. To su operacija sabiranja vektora i operacija množenja vektora brojem.

Budući da je definicija vektora relativno komplikovana jer se radi o klasama ekvivalencije postoje dva načina definicije operacija na skupu vektora. Prvi način sastoji se u tome da se operacija definiše na predstavnicima vektora (usmerenim dužima), a zatim se pokaže da taj izbor ne zavisi od izbora predstavnika vektora. Drugi način sastoji u tome da se rezultat operacije definiše u terminima intenziteta, pravca i smera polaznih vektora.

[2] Za dva nenula vektora istog pravca određena svojim predstavnicima $\overrightarrow{XY}$ i $\overrightarrow{XZ}$ kažemo da su istog ili suprotnog smera ako su tačke Y i Z sa iste odnosno sa suprotne strane tačke X.

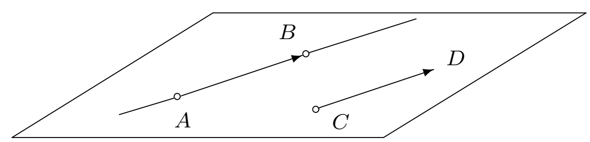
Ako je rezultat operacije vektor onda je potrebno i dovoljno, u ovom drugom načinu, definisati njegov intenzitet, pravac i smer.

Prvo dokažimo sledeću veoma važnu činjenicu kojom ćemo pokazati da je sabiranje vektora dobro definisano.

Teorema. *Ako je A proizvoljna tačka skupa $\mathbb{E}$, za svaki vektor $a \in V$ postoji jedinstvena tačka $B \in \mathbb{E}$ takva da je $a = \mathbf{AB}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a \neq 0$, jer u suprotnom stavimo $B = A$ i dokaz je gotov. Neka je a dat svojim predstavnikom $\overrightarrow{CD}$, tj. $a = \mathbf{CD}$. Ako tačka A pripada pravoj određenoj sa CD onda na toj istoj pravoj postoji tačno jedna tačka B takva da su rastojanja $d(A, B)$ i $d(C, D)$ jednaka i da se duži AD i BC polove. U slučaju da tačka A ne pripada pravoj CD (Slika 2) prvo zaključujemo da postoji (prema 5.-om Euklidovom postulatu) tačno jedna prava koja sadrži tačku A i paralelna je sa pravom CD, a zatim da je na toj pravoj jedinstveno određena tačka B koja je teme paralelograma $ABDC$. Tako da je $(C, D) \sim (A, B)$, što zapravo znači da je $a = \mathbf{CD} = \mathbf{AB}$. □

X



Slika 2.

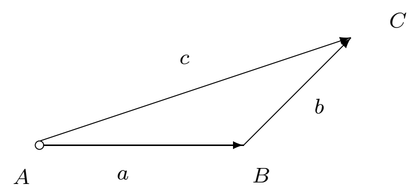
Primedba. *Primetimo da upravo dokazana teorema tvrdi da svaki vektor $a \in V$ u svakoj tački $A \in \mathbb{E}$ ima tačno jednog predstavnika kojem je tačka A početak, drugim rečima da je prostor homogen jer su sve tačke ravnopravne.*

1.7. Sabiranje vektora. Teorema iz prethodne tačke pokazuje da sledeća definicija sabiranja vektora ima smisla.

Definicija. Neka je A proizvoljna tačka iz $\mathbb{E}$ i $a, b \in V$, i neka su vektori a i b dati svojim predstavnicima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ onda pod **zbirom vektora** (Slika 3) a i b zovemo vektor c čiji predstavnik je usmerena duž $\overrightarrow{AC}$.

Pokažimo da je definicija sabiranja vektora korektna, tj. da ne zavisi od izbora predstavnika.

Propozicija. Zbir *dva vektora ne zavisi od izbora njihovih predstavnika.*



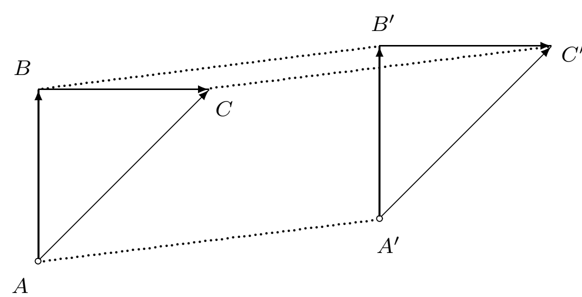
X

Slika 3. Sabiranje vektora

Dokaz. Neka su a i $b \in V$ dati redom svojim predstavnicima $a = \mathbf{AB} = \mathbf{A'B'}$ i $b = \mathbf{BC} = \mathbf{B'C'}$. Tada su četvorouglovi $ABB'A'$ i $BCC'B'$ paralelogrami (Slika 4) (ili degenerisani paralelogrami), te su duži AA' i CC' podudarne i paralelne. Stoga je $ACC'A'$ paralelogram, odnosno parovi (A, C) i (A', C') određuju isti vektor, što je i trebalo proveriti. □

Ako je $c = \mathbf{AC}$, zbir vektora $a = \mathbf{AB}$ i $b = \mathbf{BC}$ pisaćemo

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}.$$

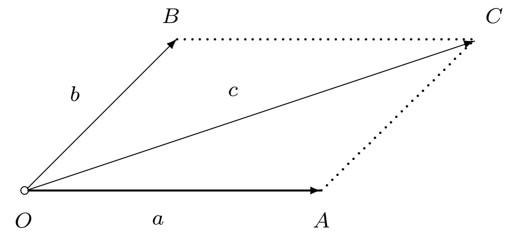


X

Slika 4. Nezavisnost sabiranja vektora od predstavnika

Primedba. Gornja definicija sabiranja vektora zove se *sabiranje vektora po zakonu trougla.* Sabiranje vektora ponekad se definiše na sledeći način (Slika 5): neka je $O \in \mathbb{E}$ proizvoljna tačka i neka su a i b proizvoljni vektori iz $\mathbb{E}$ čiji su predstavnici usmerene duži $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$. Zbirom vektora a i b zovemo vektor c koji je određen svojim predstavnikom $\overrightarrow{OC}$, pri čemu je C jedinstvena tačka u $\mathbb{E}$, takva da je četvorougao $OACB$ paralelogram. Ovaj način sabiranja vektora zove se *sabiranje vektora po zakonu paralelograma.*

X



Slika 5. Zakon paralelograma

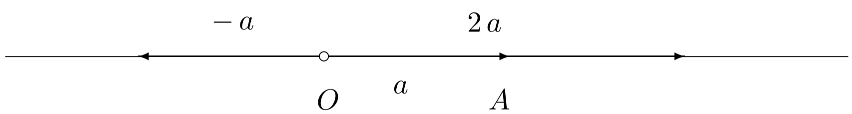
Definicije sabiranja vektora po zakonu trougla i paralelograma su ekvivalentne.

1.8. Množenje vektora sa skalarom. Operacijom **množenja vektora skalarom (realnim brojem)** bilo kojem skalaru $\alpha \in \mathbb{R}$ i bilo kojem vektoru $a \in V$ dodeljujemo jedinstveni vektor $b \in V$ koji zadovoljava sledeća tri uslova[3] (Slika 6):

(i) Intenzitet vektora b jednak je proizvodu apsolutne vrednosti broja α i intenziteta vektora a, tj. $\|b\| = |\alpha| \cdot \|a\|$.

(p) Ako ni jedan od vektora a i b nije nula vektor onda oni imaju isti pravac.

(s) Vektor $b\,(\neq 0)$ je istosmeran ili suprotnosmeran vektoru $a\,(\neq 0)$ u zavisnosti od toga da li je $\alpha > 0$ ili $\alpha < 0$.



X

Slika 6. Množenje vektora skalarom

Vektor b nazivamo **proizvodom broja (skalara)** α **i vektora** a, i obeležavamo ga sa: $\alpha\, a$. Primetimo da je $-\,\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, što nam omogućuje da proizvod broja -1 i vektora a (Slika 6) obeležavamo sa $-\,a$ i pišemo

$$(-1)\,a = -\,a.$$

Zbir vektora a i $-\,b$ obeležavaćemo sa $a - b$ i pisaćemo

$$a + (-\,b) = a - b.$$

Izraz $a - b$ zvaćemo **razlikom** vektora a i b.

1.9. Osnovna svojstva sabiranja vektora i množenja vektora sa skalarom. U sledećoj teoremi ističemo osnovna svojstva kojima se odlikuju uvedene linearne operacije definisane na skupu vektora.

Teorema. *Ako su a, b i c proizvoljni vektori i α i β realni brojevi, tada je:*

(S1) $a + (b + c) = (a + b) + c\,,$	(M1) $\alpha\,(a + b) = \alpha\, a + \alpha\, b\,,$
(S2) $a + 0 = 0 + a = a\,,$	(M2) $\alpha\,(\beta\, a) = (\alpha\,\beta)\, a\,,$
(S3) $a + (-\,a) = (-\,a) + a = 0\,,$	(M3) $(\alpha + \beta)\, a = \alpha\, a + \beta\, a\,,$
(S4) $a + b = b + a\,,$	(M4) $1 \cdot a = a.$

Dokaz. U dokazima osobina (S1)-(S4) i (M1) koristimo 1.6 Teorema i 1.7 Propozicija.

(S1) Neka su A, B, C i D četiri tačke takve da je $a = \mathbf{AB}$, $b = \mathbf{BC}$ i $c = \mathbf{CD}$. Tada je

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= \mathbf{AB} + (\mathbf{BC} + \mathbf{CD}) = \mathbf{AB} + \mathbf{BD} \\ &= \mathbf{AD} = \mathbf{AC} + \mathbf{CD} = (\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) + \mathbf{CD} = (a + b) + c. \end{aligned}$$

[3] Drugim rečima, množenje vektora sa skalarom je preslikavanje, $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, pri čemu $\cdot$ izostavljamo iz oznaka, tj. pišemo $\alpha\, a$ umesto $\alpha \cdot a$.

(S2) Ako su tačke A i B takve da je $\mathbf{AB} = a$, biće

$$a + 0 = \mathbf{AB} + \mathbf{BB} = \mathbf{AB} = a, \quad \text{i} \quad 0 + a = \mathbf{AA} + \mathbf{AB} = \mathbf{AB} = a.$$

(S3) Ako su tačke A i B takve da je $\mathbf{AB} = a$, biće

$$a + (-\,a) = \mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{AA} = 0 = \mathbf{BB} = \mathbf{BA} + \mathbf{AB} = (-\,a) + a.$$

Zbog ove osobine vektore a i $-\,a$ zovemo **suprotnim vektorima** .

(S4) Neka su O, A i B tri tačke takve da je $\mathcal{O}\mathbf{A} = a$ i $\mathcal{O}\mathbf{B} = b$, i neka je C tačka takva da je četvorougao $OACB$ paralelogram. Tada je

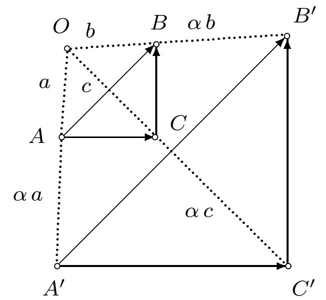
$$a + b = \mathcal{O}\mathbf{A} + \mathbf{AC} = \mathcal{O}\mathbf{C} = \mathcal{O}\mathbf{B} + \mathbf{BC} = b + a.$$

(M1) Ako je $\alpha = 0$ tvrđenje se dokazuje neposrednom proverom. Razmotrimo slučaj kada je $\alpha \neq 0$. Neka su O i A dve proizvoljne tačke i neka su tačke B i C takve da je $\mathbf{AB} = a$ i $\mathbf{BC} = b$. Ako su A', B' i C' tačke (Slika 7) takve da je $\mathcal{O}\mathbf{A}' = \alpha\,\mathcal{O}\mathbf{A}$, $\mathcal{O}\mathbf{B}' = \alpha\,\mathcal{O}\mathbf{B}$ i $\mathcal{O}\mathbf{C}' = \alpha\,\mathcal{O}\mathbf{C}$, tada je:

$$\mathbf{A'B'} = \alpha\,\mathbf{AB}, \quad \mathbf{B'C'} = \alpha\,\mathbf{BC}, \quad \text{i} \quad \mathbf{A'C'} = \alpha\,\mathbf{BC},$$

jer se u homotetiji sa središtem O i koeficijentom α, trougao ABC preslikava u trougao $A'B'C'$. Stoga je

$$\alpha\,(a + b) = \alpha\,(\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) = \alpha\,\mathbf{AC} = \mathbf{A'C'} = \mathbf{A'B'} + \mathbf{B'C'} = \alpha\,\mathbf{AB} + \alpha\,\mathbf{BC} = \alpha\,a + \alpha\,b.$$



X

Slika 7.

(M2) Tvrđenje se dokazuje neposrednom proverom ako je a nula vektor ili je neki od brojeva α ili β jednak nuli. Stoga pretpostavimo da je $a \neq 0\,, \alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$. Jasno je da vektori $\alpha\,(\beta\,a)$ i $(\alpha\,\beta)\,a$ imaju isti pravac, zato pokažimo da imaju isti smer i jednake intenzitete.

Prvo od tih svojstava se dokazuje neposredno jer, ako brojevi α i β imaju isti znak, pomenuti vektori su istosmerni sa a, a ako α i β imaju suprotan znak, pomenuti vektori su suprotnosmerni sa a.
Drugo svojstvo sledi iz relacija:

$$\|\alpha\,(\beta\,a)\| = |\alpha| \cdot \|\beta\,a\| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot \|a\|, \qquad \|(\alpha\,\beta)\,a\| = |\alpha\,\beta| \cdot \|a\| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot \|a\|.$$

Dakle,

$$\alpha\,(\beta\,a) = (\alpha\,\beta)\,a.$$

(M3) Ako je $a = 0$ ili ako je $\alpha + \beta = 0$ tvrđenje je očigledno. Stoga pretpostavimo da je $a \neq 0$ i $\alpha + \beta \neq 0$. Tada vektori $(\alpha + \beta)\,a$ i $\alpha\,a + \beta\,a$ imaju isti pravac, a ako je zbir $\alpha + \beta$ pozitivan, onda su pomenuti vektori istosmerni sa a. Tada je

$$\|(\alpha + \beta)\,a\| = |\alpha + \beta|\,\|a\| = \alpha\,\|a\| + \beta\,\|a\|.$$

Posmatrajmo sada posebno slučajeve kada su skalari α i β pozitivni i kada su suprotnih znakova. U oba slučaja je

$$\|\alpha\,a + \beta\,a\| = \alpha\,\|a\| + \beta\,\|a\|$$

pa je tada

$$(\alpha + \beta)\,a = \alpha\,a + \beta\,a.$$

Ako je zbir $\alpha + \beta$ negativan, taj isti zbir sa suprotnim znakom biće pozitivan. Tada je, na osnovu prethodnog,

$$(-\alpha - \beta)\,a = -\,\alpha\,a - \beta\,a.$$

Množenjem obeju strana ove jednakosti sa $-\,1$ nalazimo, uz korištenje osobine (M2), da je

$$(\alpha + \beta)\,a = \alpha\,a + \beta\,a.$$

(M4) Sledi direktno iz definicije. □

Primedba. Svojstva iz prethodne teoreme veoma su opšta, tako da su poslužila za definiciju veoma važnih matematičkih objekata:

(G) Uređeni par $(G, *)$ koji se sastoji iz nepraznog skupa G i binarne operacije $* : G \times G \longrightarrow G$, za koju važe svojstva (S1) – (S3) naziva se **grupa**, a ako još zadovoljava i (S4) onda se naziva komutativna ili Abelova grupa.[4]

(P) Uređena trojka $\mathbb{F} \equiv (\mathbb{F}, +, \cdot)$ takva da:
 (s) $(\mathbb{F}, +)$ je Abelova grupa,
 (m) $(\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa,
 (d) važi *distributivnost*, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, za sve $a, b, c \in \mathbb{F}$.
 naziva se **polje**.

(VP) Uređena četvorka $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ takva da:
 (s) $(V, +)$ je Abelova grupa,
 (m) za preslikavanje[5], $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, važe svojstva (M1) – (M4),

[4] Abel, Niels Henrik, 1802 – 1829, norveški matematičar.
[5] množenje vektora sa skalarima

naziva se **realni vektorski prostor**.

3. Linearna nezavisnost vektora. Baza i dimenzija.

1.10. Linearna nezavisnost. S obzirom na asocijativnost i komutativnost sabiranja vektora u vektorskom prostoru V, dobro je definisan sledeći vektor

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m, \tag{1.1}$$

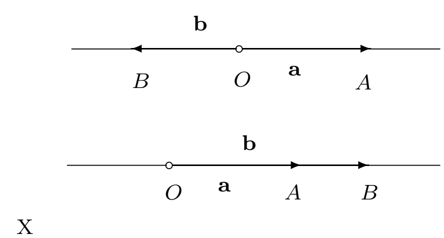
gde su $a_1, a_2, \ldots, a_m$, nenula vektori a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ realni brojevi. Vektor a nazivamo **linearnom kombinacijom vektora** $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Skup nenula vektora, $W = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subseteq V$, nazivamo **linearno zavisnim** ako postoje brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da je

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m = 0, \tag{1.2}$$

a **linearno nezavisnim** ako takvi brojevi ne postoje. Iz definicije neposredno sledi da su vektori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ linearno zavisni ako i samo ako je neki od njih linearna kombinacija preostalih. " Maksimalan broj "[6] linearno nezavisnih vektora nekog vektorskog prostora naziva se njegovom **dimenzijom**, i za te vektore se kaže da čine **bazu** tog vektorskog prostora. Za vektorski prostor kažemo da je konačnodimenzion ako ima barem jednu bazu koja ima konačan broj elemenata.

Teorema. *Nenula vektori a i b su linearno zavisni ako i samo ako su kolinearni.*

Dokaz. Pretpostavimo, najpre, da su a i b kolinearni vektori. Oni tada mogu biti ili istosmerni ili suprotnosmerni (vidi Sliku 8). Neka je, u prvom slučaju, $\alpha = \|b\| : \|a\|$, a u drugom neka je $\alpha = -\|b\| : \|a\|$. Tada je $b = \alpha\, a$. Obratno, ako je $b = \alpha\, a$, iz definicije množenja vektora brojem sledi da su vektori a i b kolinearni. □



Slika 8.

Posledica. *Neka je $\mathbb{E}$ prava i neka je e_1 neki nenula vektor u V^1, tada je za proizvoljni vektor $x \in V^1$ jedinstveno određen skalar x_1 takav da je $x = x_1 e_1$.*

Primedba. Dakle, iz prethodne posledice i definicije baze vektorskog prostora vidimo da je vektorski prostor V^1 jednodimenzion i da se svaka baza sastoji od jednog nenula vektora.

1.11. Baze vektorskih prostora V^2 i V^3. U ravni situacija je nešto složenija što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 1. *Ako je $\mathbb{E}$ ravan onda u vektorskom prostoru V^2 postoje dva linearno nezavisna vektora. Svaka tri vektora iz V^2 su linearno zavisna.*

Dokaz. Kako u ravni postoje tri nekolinearne tačke O, A, B vektori $\mathcal{O}\mathbf{A}$ i $\mathcal{O}\mathbf{B}$ su nekolinearni pa, prema tome, i linearno nezavisni. Time je dokazan prvi deo teoreme.

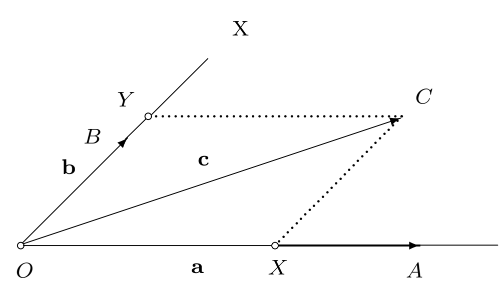
Dokažimo i drugi. U tom cilju pretpostavimo, najpre, da su dva od triju vektora a, b, c neke ravni, kolinearni. Ako su to vektori a i b tada su oni i linearno zavisni pa postoje brojevi α i β od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da je

$$\alpha\, a + \beta\, b = 0, \quad \text{tako da je tada i} \quad \alpha\, a + \beta\, b + 0\, c = 0,$$

pa su i vektori a, b, c linearno zavisni.
Pretpostavimo da nijedan par vektora iz skupa $\{a, b, c\}$ nije kolinearan. Obeležimo sa O proizvoljnu tačku ravni, sa A, B, C tačke te ravni takve da je $\mathcal{O}\mathbf{A} = a$, $\mathcal{O}\mathbf{B} = b$ i $\mathcal{O}\mathbf{C} = c$ (što možemo zbog 1.6 Teorema i sa X i Y tačke pravih OA i OB takve da je četvorougao $OXCY$ paralelogram (Slika 9). Budući da su vektori $\mathcal{O}\mathbf{X}$ i $\mathcal{O}\mathbf{Y}$ kolinearni, redom, sa vektorima $\mathcal{O}\mathbf{A}$ i $\mathcal{O}\mathbf{B}$, na osnovu 1.10 Teorema postoje brojevi α i β takvi da je $\mathcal{O}\mathbf{X} = \alpha\, a$ i $\mathcal{O}\mathbf{Y} = \beta\, b$. Otuda je

$$c = \mathcal{O}\mathbf{C} = \mathcal{O}\mathbf{X} + \mathcal{O}\mathbf{Y} = \alpha\, a + \beta\, b,$$

pa su vektori a, b, c linearno zavisni. □



Slika 9. Razlaganje vektora u ravni

Posledica 1. *Neka je $\mathbb{E}$ ravan i neka su $e_1, e_2 \in V^2$ dva linearno nezavisna vektora. Za svaki vektor $x \in V^2$ jedinstveno su određeni skalari x_1 i x_2 takvi da je $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$.*

[6] Odnosi se samo na slučaj kada je taj maksimalan broj konačan. Više detalja o pojmu baze biće dato u narednoj glavi.

Primetimo da Posledica 1 zapravo tvrdi da je V^2 dvodimenzion vektorski prostor i da se svaka njegova baza sastoji od dva linearno nezavisna vektora.

Razmotrimo dalje, linearnu zavisnost i linearnu nezavisnost vektora u prostoru.

Lema. *Vektori a, b, c su linearno zavisni ako i samo ako su koplanarni.*

Dokaz. Iz prethodne teoreme neposredno sledi da su koplanarni vektori a, b i c međusobno linearno zavisni.

Obrnuto, ako su a, b i c linearno zavisni vektori tada je jedan od njih linearna kombinacija ostalih, recimo $c = \mu\, a + \nu\, b$ (Slika 9). Budući da je c jednak zbiru dvaju vektora kolinearnih vektorima a i b, vektori a, b i c su koplanarni. □

Teorema 2. *Ako je $\mathbb{E}$ prostor onda u V^3 postoje tri međusobno linearno nezavisna vektora. Svaka četiri vektora iz V^3 su linearno zavisna.*

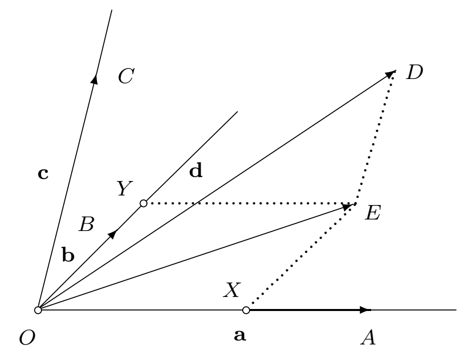
Dokaz. Budući da u prostoru postoje četiri nekoplanarne tačke O, A, B, C vektori $\mathcal{O}\mathbf{A}$, $\mathcal{O}\mathbf{B}$ i $\mathcal{O}\mathbf{C}$ su takođe nekoplanarni pa, dakle, i linearno nezavisni. Time je dokazan prvi deo teoreme.

Da bismo dokazali drugi deo teoreme pretpostavimo da su a, b, c, d četiri vektora prostora. Ako bi bilo koja tri od njih bili koplanarna, tvrđenje bi sledilo slično kao u dokazu Teoreme 1 (kada smo posmatrali slučaj kada su dva od triju vektora a, b i c neke ravni bila kolinearna). Pretpostavimo, stoga, da su vektori a, b, c linearno nezavisni. Obeležimo sa O proizvoljnu tačku prostora i sa A, B, C, D tačke tog prostora takve da je $\mathcal{O}\mathbf{A} = a$, $\mathcal{O}\mathbf{B} = b$, $\mathcal{O}\mathbf{C} = c$, $\mathcal{O}\mathbf{D} = d$ (Slika 10). Budući da su vektori a, b, c linearno nezavisni tačke O, A, B, C su nekoplanarne. Obeležimo sa E tačku ravni OAB takvu da je $OC \parallel ED$. Tada, na osnovu Teoreme 1, postoje realni brojevi α i β takvi da je $\mathcal{O}\mathbf{E} = \alpha\, a + \beta\, b$, a na osnovu 1.10 Teorema postoji realan broj γ takav da je $\mathbf{ED} = \gamma\, c$. Stoga je

$$d = \mathcal{O}\mathbf{D} = \mathcal{O}\mathbf{E} + \mathbf{ED} = \mathcal{O}\mathbf{X} + \mathcal{O}\mathbf{Y} + \mathbf{ED} = \alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c.$$

X

Time je teorema dokazana. □



Slika 10. Razlaganje vektora u prostoru

Posledica 2. *Neka je $\mathbb{E}$ prostor i neka su $e_1, e_2, e_3 \in V^3$, tri linearno nezavisna vektora. Tada su za svaki vektor $x \in V^3$ jedinstveno određeni skalari x_1, x_2 i x_3 takvi da je $x = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3$.*

Primedba. Analogno 1.10 Posledica i Posledica 1, Posledica 2 tvrdi da je vektorski prostor V^3 trodimenzion i da se svaka njegova baza sastoji od tri linearno nezavisna vektora. Prema tome, u upravo pomenutim Posledicama pokazano je da vektorski prostori V^1, V^2 i V^3, koji su određeni relacijom ekvivalentnosti $\sim$ redom na pravoj, ravni i prostoru, imaju baze koje redom imaju jedan, dva i tri elementa. Zbog toga se za pravu koristi oznaka $\mathbb{E}^1$, za ravan $\mathbb{E}^2$ i za prostor $\mathbb{E}^3$.

Kao što je već ranije napomenuto čitava teorija vektorskih prostora razvila se generalizacijom vektorskih prostora V^1, V^2 i V^3. Ispostavlja se da važe i generalizacije pomenutih posledica, tj. svaki vektorski prostor V ima bazu i svake dve baze vektorskog prostora V su "jednakobrojne" [7]. Ovim pitanjima bavimo se u narednoj glavi.

1.12. Koordinate vektora i tačke. Koristeći sada rezultate Posledica iz prethodne dve tačke dolazimo do definicije veoma važnog pojma koordinata vektora.

Definicija. *Neka je $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$, $m = 1, 2, 3$, baza vektorskog prostora V^m i ako je $x \in V^m$ tada postoje jedinstveni realni brojevi (skalari), $x_1, \ldots, x_m$ takvi da je*

$$x = x_1\, e_1 + \cdots + x_m\, e_m. \tag{1.3}$$

Realni brojevi $x_1, \ldots, x_m$ zovu se **koordinate vektora** *x u bazi $\mathcal{B}$.*

Budući da je u bazi bitan poredak vektora, tj. koordinate vektora x zavise o redosledu elemenata u bazi, koordinate zapisujemo kao uređene $m-$torke tj. koordinate vektora x zapisujemo kao $(x_1, \ldots, x_m)$. Iz istog razloga i baze zapisujemo kao uređene $m-$torke. Primetimo da kada izaberemo bazu $\mathcal{B}$ dobro je definisano preslikavanje $\kappa_{\mathcal{B}} : V^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, formulom $\kappa_{\mathcal{B}}(x) = (x_1, \ldots, x_m)$. Preslikavanje $\kappa_{\mathcal{B}}$ zove se **koordinatizacija** ili **koordinatno preslikavanje** i ono zavisi od unapred odabrane baze. Nije teško videti da je preslikavanje $\kappa_{\mathcal{B}}$ bijekcija.

Sledeća teorema daje osnovne osobine svake koordinatizacije.

[7] Dve baze $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ vektorskog prostora V su jednakobrojne ako postoji barem jedna bijekcija sa $\mathcal{B}_1$ u $\mathcal{B}_2$.

Teorema. *Neka je $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m), (m = 1, 2, 3)$, baza vektorskog prostora V^m. Tada važi:*

(i1) *Dva vektora su jednaka ako i samo ako su jednake njihove koordinate u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.*

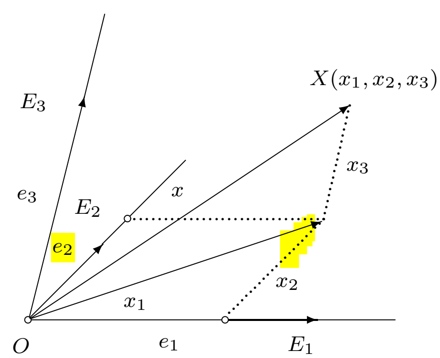
(i2) *Svaka koordinata sume dvaju vektora jednaka je sumi odgovarajućih koordinata vektora sabiraka.*

(i3) *Svaka koordinata proizvoda broja i vektora jednaka je proizvodu tog broja i odgovarajuće koordinate vektora.*

Dokaz. (i1) Posledica je jedinstvenosti koordinata vektora u bazi.
(i2) i (i3) posledice su svojstava (S1), (S4) i (M1) – (M3) iz 1.9 Teorema. Dokažimo npr. (i2): neka su $x = \sum_{i=1}^m x_i\, e_i$ i $y = \sum_{i=1}^m y_i\, e_i$, onda imamo redom:

$$x + y = \sum_{i=1}^m x_i\, e_i + \sum_{i=1}^m y_i\, e_i = \sum_{i=1}^m (x_i + y_i)\, e_i. \qquad \square$$

Pozabavimo se sada pitanjem koordinatnog opisivanja položaja tačaka. Neka je O zadata tačka na pravoj, u ravni ili u prostoru. Tada svakoj tački X te prave, ravni ili prostora (Slika 11) može biti pridružen jedinstven vektor $x = \mathcal{O}\mathbf{X}$ koji nazivamo **vektorom položaja ili radijus vektorom** tačke X. Tačka je, na osnovu prethodnog, jednoznačno određena svojim vektorom položaja x u odnosu na zadatu tačku O. Drugim rečima, ako je zadata tačka O, postoji uzajamno jednoznačna korespondencija među vektorima prostora V^1, V^2, V^3 i tačkama, redom, neke prave, ravni i prostora. Koordinate vektora x u odnosu na zadatu bazu vektorskog prostora V^1, V^2 ili V^3 zvaćemo i **koordinatama** tačke X u odnosu na tačku O i vektore baze. Skup koji se sastoji iz tačke O i vektora baze (e_1), (e_1, e_2) ili (e_1, e_2, e_3) zvaćemo i **koordinatnim sistemom** i obeležavaćemo ga sa (O, e_1), (O, e_1, e_2) i (O, e_1, e_2, e_3) ili kraće sa $O\, e_1$, $O\, e_1\, e_2$ i $O\, e_1\, e_2\, e_3$ u zavisnosti od toga da li smo na pravoj, ravni ili prostoru. Ako sa x_1, x_2 i x_3 obeležimo ose određene vektorima e_1, e_2 i e_3 i tačkom O, koordinatni sistem obeležavamo i sa Ox_1, Ox_1x_2 ili $Ox_1x_2x_3$. Tačku O nazivamo **koordinatnim početkom**, a ose x_1, x_2, x_3 **koordinatnim osama**. Ako su x_1, ili x_1 i x_2, ili x_1 i x_2 i x_3 koordinate tačke X u zadatom koordinatnom sistemu neke prave, ravni ili prostora, tu tačku ćemo obeležavati i sa $X(x_1)$, ili $X(x_1, x_2)$, ili $X(x_1, x_2, x_3)$, ili jednostavno sa (x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), bez bojazni da može da dođe do zabune budući da na isti način obeležavamo i vektore.



X

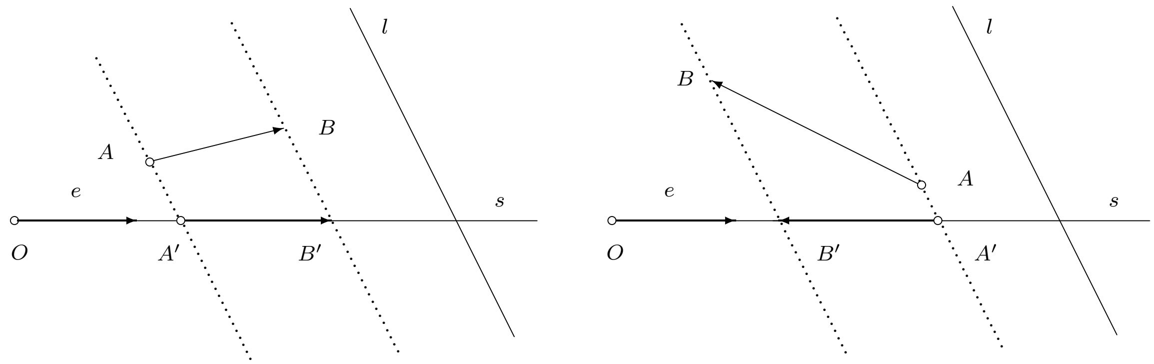
Slika 11. Koordinate tačke

Ako su vektori baze jedinični i međusobno upravni tu bazu ćemo zvati ortonormiranom, a odgovarajući koordinatni sistem ćemo zvati **Dekartovim pravouglim koordinatnim sistemom**. Iz geometrijskih razloga, jasno je da takav koordinatni sistem postoji.

4. Projektovanje i skalarni proizvod

1.13. Paralelno projektovanje. Iz definicije smera vektora sledi da na pravoj postoje dva usmerenja, jer ako uzmemo dve različite tačke te prave A i B, tada usmerenja fiksiramo izborom vektora $\mathbf{AB}$ ili vektora $\mathbf{BA}$. Pod osom podrazumevamo pravu na kojoj je zadato usmerenje. Drugim rečima osa je prava sa vektorom ose $e = \mathbf{AB}$, gde su A, B dve različite tačke te prave. Kako je za definiciju usmerenja prave bitan samo smer nenula vektora e, obično uzimamo da je intenzitet vektora ose e jednak 1.

Neka su u ravni zadati vektor $\mathbf{AB}$, osa s i prava l koja nije paralelna osi. **Paralelnom vektor – projekcijom** vektora $\mathbf{AB}$ na osu s u odnosu na pravu l nazivamo



X

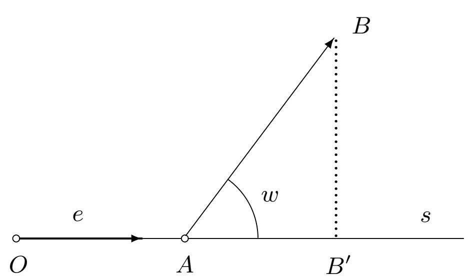
Slika 12. Paralelna vektor i skalar – projekcija

vektor $\mathbf{A'B'}$ čija temena su tačke A' i B' u kojima prave kroz tačke A i B paralelne pravoj l seku s. Broj čija je apsolutna vrednost $\|\mathbf{A'B'}\|$, a znak pozitivan ili negativan u zavisnosti od toga da li je $\mathbf{A'B'}$ istosmeran ili suprotnosmeran sa s, nazivamo paralelnom skalar – projekcijom vektora $\mathbf{AB}$ na osu s u odnosu na pravu l i obeležavamo je sa $\mathbf{pr}_s^l\mathbf{AB}$. (Slika 12).
Ako je e jedinični vektor ose s, tada je $\mathbf{A'B'} = (\mathbf{pr}_s^l\mathbf{AB})\,e$. Ponekad ćemo koristi i oznaku $\mathbf{pr}_e^l\mathbf{AB} = \mathbf{pr}_s^l\mathbf{AB}$.

U zavisnosti od toga da li je prava l normalna na osu s ili nije, razlikujemo ortogonalne i kose vektor i skalar – projekcije. U obeležavanju ortogonalne skalar – projekcije nećemo isticati pravu l, tj. pisaćemo $\mathbf{pr}_s\mathbf{AB}$.

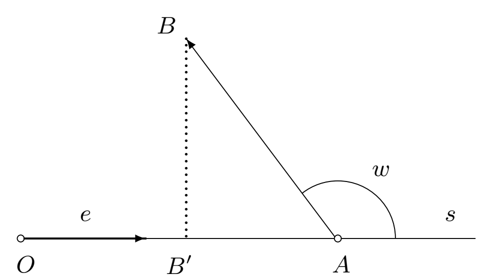
U potpunoj analogiji sa pojmovima vektor i skalar – projekcije vektora $\mathbf{AB}$ na osu s u odnosu na pravu l u nekoj ravni, mogu se uvesti pojmovi vektor i skalar – projekcije vektora $\mathbf{AB}$ na osu s u odnosu na zadatu ravan l u prostoru, pri čemu ravan l nije paralelna osi. Tada paralelnu skalar – projekciju obeležavamo sa $\mathbf{pr}_s^l\mathbf{AB}$, a paralelnu vektor – projekciju sa $(\mathbf{pr}_s^l\mathbf{AB})\,e$, pri čemu je e, opet, jedinični vektor ose s. Ako je l ravan upravna na s, paralelnu skalar – projekciju ćemo zvati ortogonalnom i jednostavno je obeležavati sa $\mathbf{pr}_s\mathbf{AB}$.

1.14. Osnovna svojstva projektovanja. Dokažimo sada nekoliko jednostavnih teorema u vezi sa ortogonalnom skalar – projekcijom. No, pre nego što to učinimo napomenimo da uglom koji zahvataju vektori $\mathcal{O}\mathbf{A}$ i $\mathcal{O}\mathbf{B}$ nazivamo ugao AOB, a uglom koji neki vektor zahvata sa osom nazivamo ugao koji zahvataju taj vektor i jedinični vektor ose.



X

Slika 13.



X

Slika 14.

Teorema 1. *Ako vektor* $\mathbf{AB}$ *ravni ili prostora sa osom* s *gradi ugao* w*, tada je*

(1.4) $$\mathbf{pr}_s\mathbf{AB} = \|\mathbf{AB}\|\cos w.$$

Dokaz. Ako je $AB \parallel s$ ili $AB \perp s$ tvrđenje je trivijalno. Razmotrimo slučaj kada je ugao w tup, (Slika 14). U tom cilju obeležimo sa A proizvoljnu tačku ose s i sa B' podnožje normale iz tačke B na osu s. Ugao kod temena A trougla ABB' jednak je uglu $\pi - w$,

i vektor $\mathbf{AB'}$ je suprotnosmeran osi s, pa je $\mathbf{pr}_s\mathbf{AB} = -\|\mathbf{AB'}\| = -\|\mathbf{AB}\|\cos(\pi - w) = \|\mathbf{AB}\|\cos w$. □

Teorema 2. *Za svaka dva vektora* **AB** *i* **BC** *ravni, svaku osu s te ravni i svaku pravu l koja nije paralelna osi s, važi relacija*

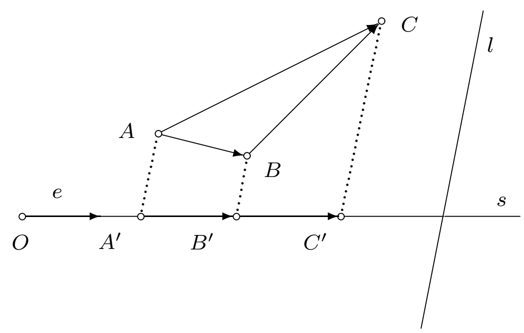
$$(1.5)\qquad \mathbf{pr}_s^l\,(\mathbf{AB}+\mathbf{BC}) = \mathbf{pr}_s^l\,\mathbf{AB} + \mathbf{pr}_s^l\,\mathbf{BC}.$$

Dokaz. Ako sa A', B', C' obeležimo presečne tačke pravih kroz A, B, C paralelnih pravoj l, sa osom s (Slika 15) i sa e jedinični vektor ose s, biće

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{pr}_s^l\,(\mathbf{AB}+\mathbf{BC})\big)\,e &= (\mathbf{pr}_s^l\,\mathbf{AC})\,e = \mathbf{A'C'} = \mathbf{A'B'} + \mathbf{B'C'}\\ &= (\mathbf{pr}_s^l\,A\mathbf{B} + \mathbf{pr}_s^l\,\mathbf{BC})\,e,\end{aligned}$$

odakle sledi tvrđenje teoreme. □

Primedba. Primetimo da u dokazu prethodne teoreme ne bi bilo nikakvih promena ako bismo pretpostavili da su **AB** i **BC** vektori u prostoru i da je u pitanju paralelna skalar – projekcija u odnosu na ravan.



Slika 15. Projektovanje zbira vektora

Budući da dokaz sledeće teoreme neposredno sledi iz poznate Talesove teoreme, nećemo ga izvoditi. Samo ćemo napomenuti da ista teorema važi i ako je **AB** vektor u prostoru, a zadata je paralelna skalar – projekcija u odnosu na ravan.

Teorema 3 (Tales[8]). *Za svaki vektor* **AB** *ravni, svaku osu s, svaku pravu l koja joj nije paralelna i svaki realan broj α važi relacija*

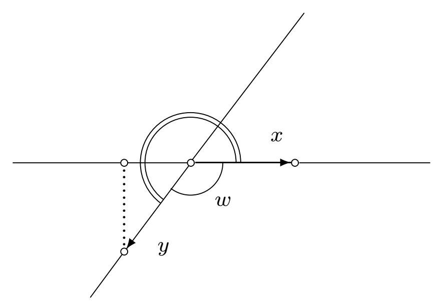
$$(1.6)\qquad \mathbf{pr}_s^l(\alpha\,\mathbf{AB}) = \alpha\,\mathbf{pr}_s^l\mathbf{AB}.$$

1.15. Skalarni proizvod. Definicija. Skalarno množenje definišemo koristeći činjenicu da je za svaki vektor dobro definisan intenzitet (dužina), i da su za sve vektore osim nula vektora dobro definisani pravac i smer. Preciznije, pod **uglom** između nenula vektora x i y podrazumevamo manji od dva ugla koja grade pozitivni delovi osa određenih tim vektorima, vidi Sliku 16. Prema tome ugao između dva vektora pripada segmentu $[0, \pi]$.

Definicija. Skalarnim ili **unutrašnjim** proizvodom vektora nazivamo binarnu operaciju $\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, kojom bilo kojim vektorima x i y dodeljujemo broj

$$(1.7)\qquad x \cdot y = \|x\|\,\|y\| \cos w,$$

gde je w ugao između vektora x i y (Slika 16).



Slika 16. Skalarni proizvod

Za skalarni proizvod se koriste i druge oznake: $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$. Vektorski prostor V snabdeven skalarnim proizvodom označavaćemo sa V_e. Iz definicije neposredno sledi da je skalarni proizvod vektora x i y jednak nuli ako i samo ako važi najmanje jedna od relacija (i1) $x = 0$, (i2) $y = 0$, (i3) $w = \pi/2$. Relacije (i2) i (i2) su trivijalne, tako da je interesantnija relacija (i3). Za dva nenula vektora kažemo da su **ortogonalni** ako je ugao koji oni grade $\pi/2$. Dakle, $x \cdot y = 0$ je potreban i dovoljan uslov ortogonalnosti dvaju nenula vektora x i y.

1.16. Osnovna svojstva skalarnog množenja. Kako je

$$(1.8)\qquad \|x\|\,\cos w = \mathbf{pr}_y\,x \quad \text{i} \quad \|y\|\,\cos w = \mathbf{pr}_x\,y,$$

možemo pisati i

$$(1.9)\qquad x \cdot y = \|x\|\,\mathbf{pr}_x\,y = \|y\|\,\mathbf{pr}_y\,x.$$

Osnovna svojstva skalarnog noženja sadržaa su u sledećoj teoremi.

[8] $\tau\alpha\lambda\epsilon\sigma$, Tales iz Mileta, 624 – 546 (?), grčki matematičar.

Teorema. *Ako su $x, y, z \in V^3$ proizvoljni vektori i α neki realan broj tada je*

$$
\text{(1.10)} \qquad \begin{array}{ll}
\text{(E1)}\ \ x\cdot y = y\cdot x\,, & \text{(E4)}\ \ x\cdot x \geq 0\,, \\
\text{(E2)}\ \ x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z\,, & \text{(E5)}\ \ x\cdot x = 0,\ \text{ako i samo je } x = . \\
\text{(E3)}\ \ (\alpha\, x)\cdot y = \alpha\,(x\cdot y)\,, &
\end{array}
$$

Dokaz. Svojstva (E1), (E4) i (E5) slede neposredno iz definicije skalarnog proizvoda.
(E2) Ako je $x = 0$ tvrđenje se dokazuje neposrednom proverom. Pretpostavimo, stoga, da je $x \neq 0$. Tada je

$$x\cdot(y+z) = \|x\|\,\mathbf{pr}_x\,(y+z) = \|x\|\,(\mathbf{pr}_x\,y + \mathbf{pr}_x\,z) = \|x\|\,\mathbf{pr}_x\,y + \|x\|\,\mathbf{pr}_x\,z = x\cdot y + x\cdot z.$$

(E3) Ako je $y = 0$ tvrđenje se dokazuje neposredno. Pretpostavimo, stoga, da je $y \neq 0$. Tada je

$$(\alpha\,x)\cdot y = \|y\|\,\mathbf{pr}_y\,(\alpha\,x) = \alpha\,\|y\|\,\mathbf{pr}_y\,x = \alpha\,(x\cdot y). \qquad \square$$

Svaki vektorski prostor V_e u koji je uvedena operacija $\cdot$ sa osobinama (E1) – (E5) naziva se **euklidskim**[9] **vektorskim prostorom** .

Navedimo sada tvrđenje koje ćemo kasnije koristiti.

Lema. *Vektori x i y su jednaki ako i samo ako za svaki vektor u važi* $\quad x\cdot u = y\cdot u$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da iz $(x-y)\cdot u = 0$, za svaki vektor u sledi da je $x = y$ (jedini vektor normalan na sve vektore je nula vektor). To postaje očigledno kada izaberemo $u = x - y$, i tada je $(x-y)\cdot(x-y) = \|x-y\|^2 = 0$. $\square$

1.17. Skalarni proizvod u koordinatima. Razmotrimo sada osobine skalarnog proizvoda dvaju vektora u funkciji njihovih koordinata. U tom cilju izaberimo[10] najpre međusobno normalne jedinične vektore (e_1, e_2, e_3) za bazu prostora V_e^3. Tada su skalarni proizvodi vektora e_1, e_2, e_3 zadati sledećom tabelom:

$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	1	0	0
e_2	0	1	0
e_3	0	0	1

.

Uvodeći simbol δ_{ij} na sledeći način

$$\text{(1.11)} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

nalazimo da je

$$\text{(1.12)} \qquad \begin{array}{l} e_i\cdot e_j = \delta_{ij}, \\ i, j = 1, 2, 3. \end{array}$$

Napomenimo da je upravo uvedeni simbol δ_{ij} poznat kao **Kronekerov δ_{ij} simbol**[11] ili kraće **Kronekerov δ**.

Pre no što pristupimo ispitivanju osobina skalarnog proizvoda dvaju vektora u funkciji njihovih koordinata dogovorimo se da, radi još veće jednostavnosti, izraz

$$x_1\,e_1 + x_2\,e_2 + x_3\,e_3 = \sum_{k=1}^{3} x_k\,e_k,$$

ubuduće pišemo bez simbola $\sum$, dakle, kratko

$$x_k\,e_k,$$

bez bojazni da to može da izazove bilo kakvu zabunu. Nadalje, kad god se neki indeks (u prethodnom slučaju k) pojavljuje dvaput u istom izrazu uvek ćemo podrazumevati sumiranje po tom indeksu, ako nije naglašeno suprotno. Ovo pravilo se naziva **Ajnštajnovim pravilom**[12] (ili **konvencijom**) o sabiranju.
Ako su

$$x = x_1\,e_1 + x_2\,e_2 + x_3\,e_3 = x_i\,e_i, \qquad y = y_1\,e_1 + y_2\,e_2 + y_3\,e_3 = y_j\,e_j,$$

dva proizvoljna vektora prostora V_e^3, biće, na osnovu 1.16 Teoreme,

$$\text{(1.13)} \qquad x\cdot y = (x_i\,e_i)\cdot(y_j\,e_j) = x_i\,y_j\,(e_i\cdot e_j).$$

Suma na desnoj strani sastoji se od 9 članova jer indeksi i i j uzimaju nezavisno jedan od drugog vrednosti 1,2,3. No imajući u vidu da je $e_i\cdot e_j = \delta_{ij}$, samo tri člana su različita od nule[13] (kada je $i = j$) i zato je

$$\text{(1.14)} \qquad x\cdot y = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3,$$

---

[9] $E\upsilon\kappa\lambda\epsilon\delta\eta\zeta$, Euclid 330 – 275, grčki matematičar.
[10] Postojanje takve baze sledi iz geometrijskih razloga, a uskoro ćemo ga i dokazati.
[11] Kronecker Leopold, 1823 – 1891, nemački matematičar.
[12] Einstein Albert, 1879 – 1955, po mnogima najpoznatiji naučnik 20. veka.
[13] Za proizvoljnu, ne obavezno ortonormiranu bazu, prethodna formula takođe izražava proizvod $x\cdot y$ u koordinatama. Međutim, u dobijenom izrazu učestvuje svih devet sabiraka.

ili, koristeći konvenciju o sabiranju,

(1.15) $$x \cdot y = x_i\, y_i.$$

Ako je $y = e_j$, biće

(1.16) $$x \cdot e_j = x_i\,(e_i \cdot e_j) = x_i\,\delta_{ij} = x_j.$$

Stoga su koordinate vektora x u ortonormiranoj bazi, jednake ortogonalnim skalar – projekcijama tog vektora na ose određene odgovarajućim vektorima baze.

1.18. Neke primene skalarnog proizvoda.

Konačno, navedimo kako se neki geometrijski odnosi mogu interpretirati koristeći skalarni proizvod.

(1*) **Dužina** ili **norma vektora** $x = x_i\, e_i$ je data formulom

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\delta_{ij}\, x_i\, x_j} = \sqrt{x_i\, x_i}\,.$$

Svaki vektor $x \neq 0$ može se normirati, tj. može mu se dodeliti kolinearan jedinični vektor[14] x_o. Zaista,

$$x_o = \frac{x}{\|x\|}\,.$$

(2*) **Kosinus ugla** w koji zahvataju vektori $x = x_i\, e_i$ i $y = y_i\, e_i$ dat je formulom

$$\cos w = \frac{x \cdot y}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{x_i\, y_i}{\sqrt{x_i^2}\sqrt{y_i^2}}\,.$$

(3*) Ako je x jedinični vektor, tada je njegova i–ta koordinata x_i jednaka kosinusu ugla ϕ_i koji vektor x gradi sa vektorom e_i baze, tj.

$$x_i = x \cdot e_i = \cos \phi_i.$$

Osim toga je

$$\cos^2 \phi_1 + \cos^2 \phi_2 + \cos^2 \phi_3 = 1,$$

jer je $x \cdot x = 1$.

(4*) Skalar – projekcija vektora $x = x_i\, e_i$ na vektor $a = a_i\, e_i$ data je formulom

$$\mathbf{pr}_a\, x = \frac{a \cdot x}{\|a\|} = \frac{a_i\, x_i}{\sqrt{a_i^2}}\,.$$

Primedba. Svojstva (1*) i (2*) pokazuju da u euklidskim vektorskim prostorima V^m (m=1,2,3) dobro su definisani pojmovi dužine i ugla, tj. osnovnih pojmova sadržanih u Euklidovim aksiomama. U glavi posvećenoj eukldskim (unitarnim) vektorskim prostorima videćemo da se može se uvesti euklidska geometrija, što je posledica Koši – Švarcove nejednakosti.

1.19. Postojanje ortonormirane baze. U tački **1.17** definisali smo pojam ortonormirane baze u V_e^3, preciznije ako je $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ baza vektorskog prostora V_e^3 , ona je ortonormirana ako je $e.e_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Egzistencija ovakve baze može dokazati korišćenjem geometrijskih argumenata, ovde dajemo jedan opštiji dokaz.

Prvo razmotrimo sada sledeće pitanje: da li je moguće proizvoljnoj bazi (x, y, z) prostora V_e^3 pridružiti na pogodan način neku ortonormiranu bazu?

Odgovor daje sledeća teorema.

Teorema[**Gram – Šmitova,**[15] **ortoganalizacija**] *Neka je (x, y, z) baza vektorskog prostora V_e^3, tada postoji pozitivno orijentisana ortonormirana baza (e_1, e_2, e_3) takva da je*

(1.17) $$\begin{aligned} x &= x_1\, e_1, \\ y &= y_1\, e_1 + y_2\, e_2, \\ z &= z_1\, e_1 + z_2\, e_2 + z_3\, e_3, \end{aligned}$$

gde su $x_1 > 0$, $y_2 > 0$ i $z_3 > 0$.

---

[14] Naziva se i ort vektora x.

[15] J. P. Gram, danski matematičar i aktuar, E. Schmidt, nemački matematičar.

Dokaz. Izaberimo najpre, $e_1 = \frac{1}{\|x\|}\,x$ i $x_1 = \|x\|$. Ako sada skalarno pomnožimo drugu jednakost u (1.17) sa e_1 vidimo da je $y_1 = y \cdot e_1$ (Slika 17). Odatle nalazimo da je $y_2\, e_2 = y - (y \cdot e_1)\, e_1$, odnosno

$$e_2 = \frac{1}{\|y - (y \cdot e_1)\, e_1\|}\,(y - (y \cdot e_1)\, e_1).$$

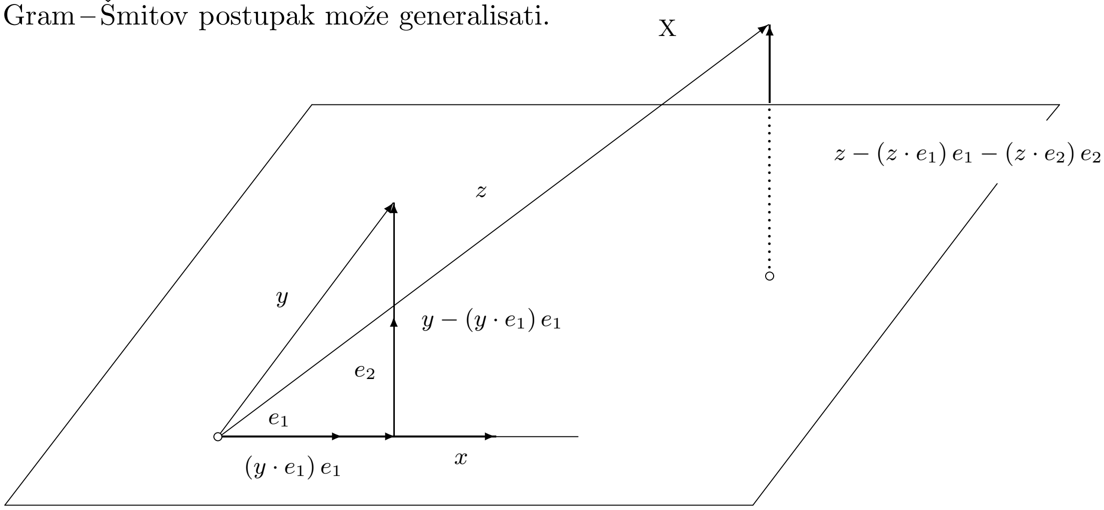
Na sličan način dobijamo $z_1 = z \cdot e_1$, $z_2 = z \cdot e_2$ i konačno

$$e_3 = \frac{1}{\|z - (z \cdot e_1)\, e_1 - (z \cdot e_2)\, e_2\|}\,(z - (z \cdot e_1)\, e_1 - (z \cdot e_2)\, e_2).$$

Time je lema dokazana. □

Postupak opisan u dokazu prethodne teoreme naziva se **Gram – Šmitov postupak ortogonalizacije** .

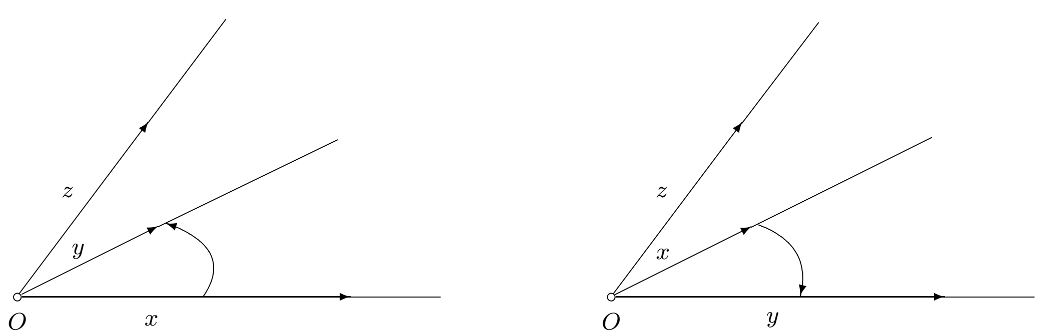
Primedba. Primetimo da iz formula (1.17) sledi da je Gram – Šmitov postupak linearan i da je trougaoni, tj. vektor ortonormirane baze e_i je linearna kombinacija prvih i vektora polazne baze. Takođe, napomenimo da se Gram – Šmitov postupak može generalisati.



Slika 17. Geometrijski smisao Gram – Šmitovog postupka

5. Vektorski i mešoviti proizvod

1.20. Orijentacija baze. Pre nego uvedemo vektorsko množenje neophodno je da vidimo kako se orijentiše prostor odnosno kako se uvodi pojam orijentisane baze[16]. Kao što se prava i ravan mogu orijentisati na dva načina izborom odgovarajućih baza tako se i prostor $\mathbb{E}^3$ orijentiše izborom neke baze prostora V_e^3. Za trojku linearno nezavisnih vektora (x, y, z) kažemo da je ***pozitivno orijentisana (ili kraće pozitivna)*** ako bismo, posmatrano sa vrha vektora z, krećući se kraćim putem od vektora x do vektora y, kretali se u smeru suprotnom od kretanja kazaljki nekog (uobičajenog) sata (Slika 18). Ako je (x, y, z) pozitivno orijentisan reper onda su (y, x, z) i $(x, -y, z)$ negativno orijentisani reperi. Inače, poznati su pravilo desnog zavrtnja i pravilo desne ruke za određivanje pozitivno orijentisanog repera. Primetimo da se cikličnom zamenom vektora nekog repera ne menja orijentacija baze, tj. reperi $(x, y, z), (y, z, x)$ i (z, x, y) imaju istu orijentaciju.



X

[16] Orijentacija će detaljnije biti razmatranu u nekoj od narednih glava.

Slika 18. Pozitivni i negativni reper

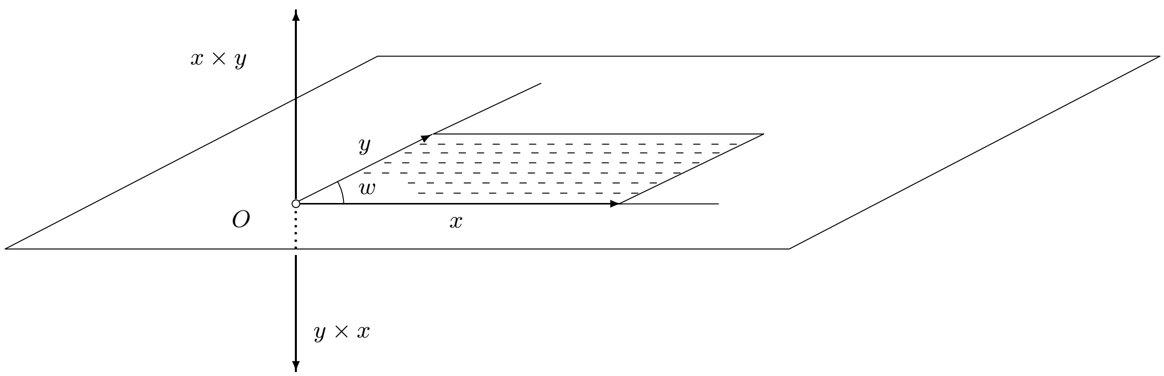
1.21. Definicije vektorskog i mešovitog proizvoda. Sada prvo definišemo vektorski proizvod, koji je specifičan samo za dimenziju 3.

Definicija. **Vektorski** ili **spoljašnji** proizvod vektora je binarna operacija $\times : V_e^3 \times V_e^3 \longrightarrow V_e^3$, kojom bilo kojem paru vektora x i y dodeljujemo vektor $x \times y$ (Slika 19) koji ima sledeća svojstva:

(i) intenzitet vektora $x \times y$ jednak je broju $\|x\|\,\|y\| \sin w$, gde je $w = \angle(x, y)$; drugim rečima intenzitet vektora $x \times y$ jednak je površini paralelograma koji je određen vektorima x i y,

(p) vektor $x \times y$ je normalan na svaki od vektora x i y,

(s) uređena trojka vektora $(x, y, x \times y)$ pozitivno je orijentisana.



X

Slika 19. Vektorski proizvod

Definicija. **Mešovitim proizvodom** vektora nazivamo operaciju dužine tri $[\cdot,\cdot,\cdot] : V_e^3 \times V_e^3 \times V_e^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, kojom uređenoj trojki (x, y, z) vektora vektorskog prostora V_e^3 dodeljujemo broj $[x, y, z]$ koji je dat formulom

$$[x, y, z] = (x \times y) \cdot z. \tag{1.18}$$

1.22. Geometrijska interpretacija mešovitog proizvoda. Geometrijska interpretacija mešovitog proizvoda data je u sledećoj teoremi.

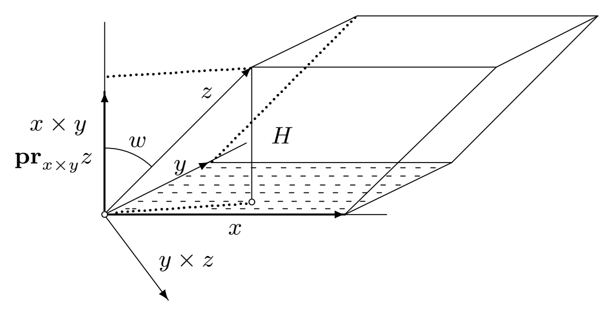
Teorema. *Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda $[x, y, z]$ jednaka je zapremini paralelepipeda određenog vektorima x, y i z.*

Dokaz. Neka vektori x i y određuju bazu paralelepipeda čija je površina B (vidi Sliku 20). Primetimo da se tada odgovarajuća visina H dobija projektovanjem vektora z na vektor $x \times y$. Odatle je zapremina paralelepipeda V

$$V = B\,H = \|x \times y\| \left|\mathbf{pr}_{x\times y} z\right| = \|x \times y\| \left|\|z\| \cos w\right|$$
$$= \left|(x \times y) \cdot z\right| = \left|[x, y, z]\right|,$$

pri čemu su korišćene osnovne osobine skalarnog i vektorskog množenja. □

X



Slika 20. Geometrijska interpretacija mešovitog proizvoda

1.23. Osnovna svojstva vektorskog i mešovitog proizvoda. Sledeća teorema sadrži osnovne osobine vektorskog i mešovitog proizvoda.

Teorema. *Ako su x, y, z, v proizvoljni vektori prostora V_e^3 i α neki realan broj tada je*

(L1) $x \times y = -(y \times x)$,
(L2) $(\alpha\, x) \times y = \alpha\,(x \times y)$,
(L3) $x + y) \times z = x \times z + y \times z$,

(P1) $[x, y, z] = -[y, x, z]$,
(P2) $[x, y, z] = [y, z, x] = [z, x, y]$,
(P3) $[\alpha x, y, z] = \alpha\,[x, y, z]$,
(P4) $[x + y, z, \mathbf{v}] = [x, z, \mathbf{v}] + [y, z, \mathbf{v}]$.

Dokaz. Svojstva (L1), (L2), (P1) i (P3) dokazuju se direktno koristeći definicije vektorskog i mešovitog proizvoda kao i osobine skalarnog proizvoda date u 1.16 Teorema. Kako je apsolutna vrednost mešovitog proizvoda vektora x, y i z jednaka zapremini paralelepipeda razapetog nad tim vektorima to je

$$\big|[x,y,z]\big| = \big|[y,z,x]\big| = \big|[z,x,y]\big|.$$

Da bismo završili dokaz svojstva (P2) potrebno je dokazati da isto orijentisani reperi imaju isti znak mešovitog proizvoda. Primetimo da je dovoljno pokazati jednakost $[x,y,z] = [y,z,x]$. Pretpostavimo npr. da je $[x,y,z] > 0$. Iz dokaza 1.22 Teorema vidimo da je ugao $\angle(x \times y, z)$ oštar, tj. da su vektori $x \times y$ i z sa iste strane ravni određene vektorima x i y. Tada su i vektori $y \times z$ i x sa iste strane ravni određene vektorima y i z (Slika 20), pa je i ugao $\angle(y \times z, x)$ oštar, tj. $[y,z,x] > 0$. Time je pokazano svojstvo (P2). Pokažimo sada osobinu (P4),

$$[x+y, z, \mathbf{v}] = [z, \mathbf{v}, x+y] \;=\; (z \times \mathbf{v}) \cdot (x+y) = (z \times \mathbf{v}) \cdot x + (z \times \mathbf{v}) \cdot y = [z, \mathbf{v}, x] + [z, \mathbf{v}, y] = [x, z, \mathbf{v}] + [y, z, \mathbf{v}].$$

Za dokaz preostalog svojstva (L3) iskoristimo 1.16 Lema po kojoj je dovoljno proveriti da je

$$[(x+y) \times z] \cdot \mathbf{v} = \big[(x \times z) + (y \times z)\big] \cdot \mathbf{v},$$

za proizvoljan vektor $\mathbf{v}$, a to se svodi na upravo dokazano svojstvo (P4). □

1.24. Vektorski i mešoviti proizvod u koordinatama. Ako je (e_1, e_2, e_3) ortonormirana baza vektorskog prostora V_e^3 tada su vektorski prozvodi vektora baze zadati sledećim tabelama

$\times$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

,

$\times$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	$-e_3$	e_2
e_2	e_3	0	$-e_1$
e_3	$-e_2$	e_1	0

,

pri čemu se prva tabela odnosi na slučaj kada je baza (e_1, e_2, e_3) pozitivno orijentisana, a druga, kada je ta orijentacija negativna.

Pre nego što u funkciji koordinata vektora x, y i z zadatih u ortonormiranoj bazi (e_1, e_2, e_3), izrazimo koordinate vektora $x \times y$ i vrednost mešovitog proizvoda $[x,y,z]$, uvedimo dva simbola ε i ε_{ijk} na sledeći način: $\varepsilon = 1$, ako je baza (e_1, e_2, e_3) pozitivno orijentisana, $\varepsilon = -1$, ako je ta baza negativno orijentisana. Zatim,

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = \varepsilon\,, \qquad \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -\varepsilon\,, \tag{1.19}$$

i $\varepsilon_{ijk} = 0$ kad god su barem bilo koja dva od indeksa i, j, k jednaka. Simbol ε_{ijk} koji zavisi od izabrane baze, naziva se **antisimetričnim Kronekerovim simbolom**. Koristeći se njime možemo kratko da zapišemo neke formule. Na primer, gornje dve tabela mogu se zapisati formulom

$$e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk}\, e_k, \tag{1.20}$$

gde se, u skladu sa Ajnštajnovom konvencijom, podrazumeva sumiranje po ponovljenom indeksu k.

Pokažimo sada da u pozitivno orijentisanoj ortonormiranoj bazi (e_1, e_2, e_3) vektor $x \times y$ ima koordinate

$$(x_2\, y_3 - x_3\, y_2,\; x_3\, y_1 - x_1\, y_3,\; x_1\, y_2 - x_2\, y_1). \tag{1.21}$$

Zaista, kako je

$$x = x_i\, e_i, \quad y = y_j\, e_j \quad \text{i} \quad e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk}\, e_k,$$

na osnovu 1.23 Teorema, biće

$$x \times y = (x_i\, e_i) \times (y_j\, e_j) = x_i\, y_j\, (e_i \times e_j) = \varepsilon_{ijk}\, x_i\, y_j\, e_k,$$

pri čemu se u poslednjem izrazu, naravno, podrazumeva sumiranje u odnosu na sva tri indeksa i, j, k. Dakle,

$$x \times y = \varepsilon\big[(x_2\, y_3 - x_3\, y_2)\, e_1 + (x_3\, y_1 - x_1\, y_3)\, e_2 + (x_1\, y_2 - x_2\, y_1)\, e_3\big], \tag{1.22}$$

što možemo zapisati u kompaktnijem obliku formalne determinante

$$x \times y = \varepsilon \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{1.23}$$

Rezimirajmo, ako je $z = x \times y$, njegove koordinate date su formulama

$$z_k = \varepsilon_{ijk}\, x_i\, y_j, \qquad \text{ili preciznije,} \tag{1.24}$$

$$z_1 = \varepsilon\,(x_2\, y_3 - x_3\, y_2), \qquad z_2 = \varepsilon\,(x_3\, y_1 - x_1\, y_3), \qquad z_3 = \varepsilon\,(x_1\, y_2 - x_2\, y_1)\,, \tag{1.25}$$

jer je $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$. Dakle, ako je baza pozitivna, tj. $\varepsilon = 1$, vidimo da se formule (1.25) svode na formule (1.21).

Da bismo vrednost mešovitog proizvoda $[x, y, z]$ izrazili u funkciji koordinata vektora x, y, z u odnosu na neku ortonormiranu bazu, dokažimo najpre, da je

$$[e_i, e_j, e_k] = \varepsilon_{ijk}. \tag{1.26}$$

Zaista, kako je

$$[e_i, e_j, e_k] = (e_i \times e_j) \cdot e_k = \varepsilon_{ijl}\, e_l \cdot e_k, \quad \text{i} \quad e_l \cdot e_k = \delta_{lk},$$

biće

$$\varepsilon_{ijl}\, e_l \cdot e_k = \varepsilon_{ijk}.$$

Ako su $x = x_i\, e_i$, $y = y_j\, e_j$, $z = z_k\, e_k$ tri proizvoljna vektora prostora V_e^3, biće

$$[x, y, z] = [x_i\, e_i, y_j\, e_j, z_k\, e_k] = x_i\, y_j\, z_k\, [e_i, e_j, e_k] = \varepsilon_{ijk}\, x_i\, y_j\, z_k.$$

Primetimo da izraz na desnoj strani sadrži $3^3 = 27$ sabiraka od kojih je samo njih 6 različito od nule jer se u ostalim sabircima pojavljuju činioci ε_{ijk} sa barem dva jednaka indeksa. Zato je

$$[x, y, z] = \varepsilon\,(x_1\, y_2\, z_3 + x_2\, y_3\, z_1 + x_3\, y_1\, z_2 - x_2\, y_1\, z_3 - x_1\, y_3\, z_2 - x_3\, y_2\, z_1), \tag{1.27}$$

što zapisujemo kompaktnije kao determinantu

$$[x, y, z\,] = \varepsilon \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{1.28}$$

1.25. Neasocijativnost vektorskog množenja. Jakobijev identitet. Postavlje se prirodno pitanje da li je vektorsko množenje asocijativna operacija. Odgovor na to pitanje sledi iza naredne teoreme.

Teorema. *Za ma koja tri vektora x, y, z prostora V_e^3 važi sledeća formula*

$$(x \times y) \times z = (x \cdot z)\, y - (y \cdot z)\, x\,. \tag{1.29}$$

Dokaz. Direktan dokaz sledi primenom formule za vektorski proizvod u koordinatama. Dakle, neka je $e = (e_1, e_2, e_3)$ pozitivno orijentisana ortonormirana baza, i neka su $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ i $z = (z_1, z_2, z_3)$ vektori prostora V_e^3. Tada je

$$\begin{aligned}
(x \times y) \times z \;&=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \times z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ (x \times y)_1 & (x \times y)_2 & (x \times y)_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = ((x \times y)_2\, z_3 - (x \times y)_3\, z_2)\, e_1 + ((x \times y)_3\, z_1 \\
&\quad - (x \times y)_1\, z_3)\, e_2 + ((x \times y)_1\, z_2 - (x \times y)_2\, z_1)\, e_3 = ((x_3\, y_1 - x_1\, y_3)\, z_3 - (x_1\, y_2 - x_2\, y_1)\, z_2)\, e_1 + ((x_1\, y_2 - x_2\, y_1) z_1 \\
&\quad - (x_2\, y_3 - x_3\, y_2)\, z_3)\, e_2 + ((x_2\, y_3 - x_3\, y_2)\, z_2 - (x_3\, y_1 - x_1\, y_3)\, z_1)\, e_3 \\
&= (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3)(y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) - (y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3)(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \\
&= (x \cdot z)\, y - (y \cdot z)\, x\,.
\end{aligned}$$

Drugi dokaz ove teoreme može se naći u [BBRL]. □

Posledica. *Vektorsko množenje nije asocijativno.*

Dokaz. Formula iz prethodne teoreme i osobina skalarnog i vektorskog proizvoda sledi da za bilo koja tri vektora x, y i z je

$$x \times (y \times z) = (z \times y) \times x = (z \cdot x)\, y - (y \cdot x)\, z = (x \cdot z)\, y - (x \cdot y)\, z.$$

Za linearno nezavisne vektore $x = (1, 0, 0), y = (1, 1, 0)$ i $z = (1, 1, 1)$ desna strana jednakosti (1.29) jednaka je $y - 2\,x$, dok je desna strana jednakosti (1.30) $y - z$. Dakle, za ovaj izbor vektora x, y i z pokazali smo da : $x \times (y \times z) \neq (x \times y) \times z$, tj. vektorsko množenje ne važi asocijativno.

Time smo dokazali da važi svaka od triju formula koje se jedna iz druge dobijaju cikličnom permutacijom vektora x, y, z. Napišimo ih sve tri:

$$\begin{aligned}
x \times (y \times z) &= (x \cdot z)\, y - (x \cdot y)\, z, \\
y \times (z \times x) &= (y \cdot x)\, z - (y \cdot z)\, x, \\
z \times (x \times y) &= (z \cdot y)\, x - (z \cdot x)\, y.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Sabiranjem relacija (1.30) lako dobijamo sledeću relaciju

(L4) $$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = ,$$

poznatiju kao **Jakobijev (Jacobijev) identitet**[17]. Kako vektorsko množenje nije asocijativna operacija, Jacobijev identitet predstavlja zamenu za asocijativni zakon.

Primedba. Napomenimo da za bilo koji vektorski prostor V, u koji je uvedena binarna operacija $[\cdot,\cdot] : V \times V \longrightarrow V$, za koju važe aksiome (L2) i (L3), kažemo da je **algebra** (nad $\mathbb{R}$), a ako još (analogno vektorskom množenju $\times$) važe i aksiome (L1) i (L4) tada V nazivamo **Lijevom (Liejevom) algebrom**[18].

Primer. Skup realnih kvadratnih matrica u odnosu na operaciju množenja matrica je algebra, a u odnosu na množenje dato sa $[A,B] = A\,B - B\,A$, je jedna Lijeva algebra. Više detalja o Lijevim algebrama može se naći npr. [H].

6. Prava

1.26. Razne jednačine prave. Neka je zadat Dekartov pravougli koordinatni sistem (O, e_1, e_2) i u njime određenoj ravni, prava l koja sadrži O. Odredimo jednačinu takve prave koristeći koordinate u odnosu na zadati sistem. Neka je tačka Y, čije su koordinate $(y_1, y_2) \neq (0,0)$, fiksna tačka te prave (Slika 21), onda tačka $X(x_1, x_2)$ pripada pravoj l ako i samo ako je

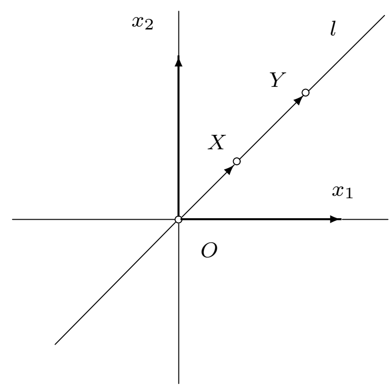
$$\mathcal{O}\mathbf{Y} = \alpha\, \mathcal{O}\mathbf{X}.$$

Ako se prava l poklapa sa osom x_1, biće $y_2 = x_2 = 0$, pa se za jednačinu

$$x_2 = 0,$$

kaže da je jednačina ose $O\,x_1$ jer su koordinate svake tačke $(x_1, 0)$ njena rešenja.

Ako se prava l razlikuje od ose x_1 biće $\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}\left[= -\frac{a}{b}\right]$ pa su koordinate bilo koje tačke prave l rešenja linearne jednačine



X

Slika 21. Jednačina prave kroz O

(1.31) $$a\,x_1 + b\,x_2 = 0.$$

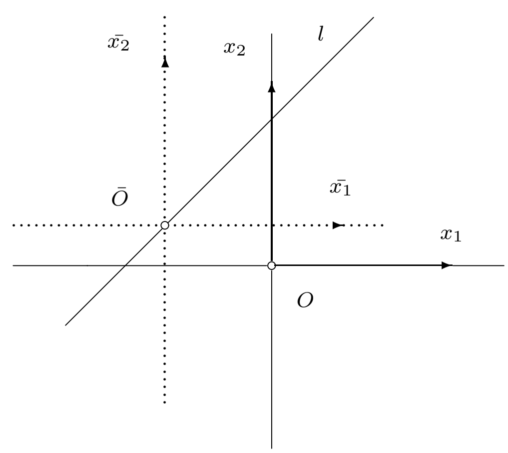
Stoga se ta jednačina naziva **jednačinom prave** l. Primetimo da vektor sa koordinatama $(b, -a)$ određuje pravac prave. Ako prava l ne sadrži koordinatni početak O, onda je prava l slika neke prave kroz O pri translaciji za vektor $\mathcal{O}\bar{\mathcal{O}}$ (Slika 22), gde je $\bar{O}(\bar{\mathcal{O}}_1, \bar{\mathcal{O}}_2)$ proizvoljna tačka prave l. Tom translacijom se koordinatni sistem $O\,e_1\,e_2$ preslikava u novi koordinatni sistem $\bar{O}\,e_1\,e_2$, sa koordinatama $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ u kojem je

$$a\,\bar{x}_1 + b\,\bar{x}_2 = 0,$$

jednačina prave l. Kako je $\bar{x}_1 = x_1 - \bar{\mathcal{O}}_1$ i $\bar{x}_2 = x_2 - \bar{\mathcal{O}}_2$, jednačina prave l u koordinatnom sistemu $O\,e_1\,e_2$ biće

(1.32) $$a\,(x_1 - \bar{\mathcal{O}}_1) + b\,(x_2 - \bar{\mathcal{O}}_2) = 0, \text{ ili } a\,x_1 + b\,x_2 + c = 0,$$

gde je $c = -a\,\bar{\mathcal{O}}_1 - b\,\bar{\mathcal{O}}_2$. Jednačina (1.32) zove se **opšta jednačina prave.**



X

Slika 22. Opšta jednačina prave

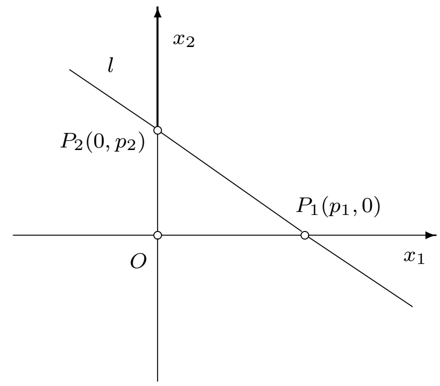
Obratno, tačke čije su koordinate rešenja jednačine (1.32) pripadaju jednoj pravoj. Dakle, neka jednačina $f(x_1, x_2) = 0$ je jednačina prave ako i samo ako je $f(x_1, x_2)$ linearni polinom.

Dve prave zadate linearnim jednačinama oblika (1.32) biće paralelne ako su im vektori pravca kolinearni, tj. ako im je odnos a/b isti, uključujući i mogućnost da im je obema $b = 0$ (tada su te dve prave paralelne pravoj

[17] Jacobi Carl Gustav Jacob, 1804 – 1851, nemački matematičar.
[18] Lie Sophus, 1842 – 1899, norveški matematičar.

x_1). Presek dveju pravih koje nisu paralelne biće tačka čije su koordinate rešenja sistema jednačina kojima su te dve prave zadate. Prava u ravni može se odrediti raznim geometrijskim uslovima. Svaki od njih određuje odgovarajući oblik jednačine prave. Analizirajmo to na sledećim primerima.
Prava je određena zadavanjem presečnih tačaka prave sa osama. Jednačina prave koja seče ose x_1 i x_2 u tačkama $P_1(p_1, 0)$ i $P_2(0, p_2)$, $p_1 \cdot p_2 \neq 0$, biće

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} = 1. \tag{1.33}$$



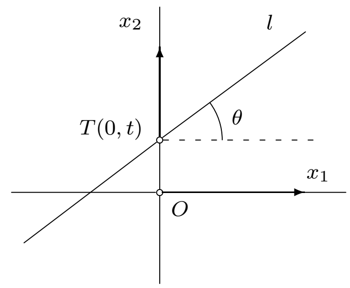
X

Slika 23. Segmentni oblik jednačine prave

Ako je $b \neq 0$, jednačina (1.32) ekvivalentna je sledećoj jednačini

$$x_2 = -\frac{a\,x_1 + c}{b} = k\,x_1 + n. \tag{1.34}$$

Na taj način svakoj vrednosti promenljive x_1 dodeljena vrednost promenljive x_2 (Slika 24). Tada je $k = -a/b = \tan\theta$, **koeficijent pravca** prave l, gde je θ ugao koji gradi prava l sa pozitivnim delom ose x_1 i $n = -c/b$ određuje presek prave l i x_2 ose. Za jednačinu prave (1.34) kažemo da je u **eksplicitnom obliku**. Ako je data jednačina $F(x_1, x_2) = 0$ ili $x_2 = f(x_1)$, tada se tačke čije koordinate zadovoljavaju zadatu jednačinu mogu odrediti dodeljivanjem vrednosti promenljive x_2 svakoj vrednosti promenljive x_1. Ponekad je korisno izraziti promenljive x_1 i x_2 u funkciji neke promenljive t. Promenljivu t u tom slučaju nazivamo **parametrom**, a jednačine kojima su zadate vrednosti promenljivih x_1 i x_2 u funkciji od t, **parametarskim jednačinama** (Slika 25).

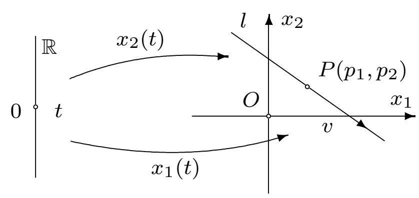


X

Slika 24. Eksplicitni oblik jednačine prave

Tako na primer, svaka prava kroz tačku $P(p_1, p_2)$ u pravcu vektora $v = (a, b)$, može se predstaviti pomoću parametarskih jednačina

$$x_1 = p_1 + a\,t, \qquad x_2 = p_2 + b\,t, \tag{1.35}$$



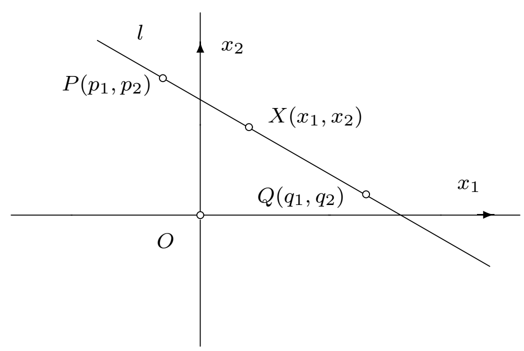
X

Slika 25. Parametarska jednačine prave

gde brojevi a i b zavise od ugla koji prava zaklapa sa x_1 osom. Promenljive x_1 i x_2 mogu biti izražene i u funkciji dveju promenljivih t_1 i t_2. Tako prava koja sadrži tačke $P(p_1, p_2)$ i $Q(q_1, q_2)$ (Slika 26) može biti predstavljena pomoću parametarskih jednačina

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1\,p_1 + t_2\,p_2, \\ x_2 &= t_1\,q_1 + t_2\,q_2, \\ &\text{uz uslov } \ t_1 + t_2 = 1. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Primetimo da će tačka $X(x_1, x_2)$ koja pripada duži PQ, podeliti tu duž u odnosu $t_1 : t_2$, pa je stoga nazivamo **središtem masa** t_1 u tački P, i t_2 u tački Q. Lako se vidi da za $t_1 \in (0, 1)$ tačka X pripada duži PQ.



X

Slika 26. Središte masa

Prava l može se jednoznačno odrediti i uslovom da sadrži tačku P i da je normalna na vektor n (Slika 27).

Izaberimo neku tačku O za centar koordinatnog sistema. Tada tačka X pripada pravoj l ako i samo ako je $\mathbf{PX}$ normalan na n, odnosno ako je

$$\mathbf{PX} \cdot n = 0.$$

Koristeći radijus vektore tačaka P i X, dobijamo

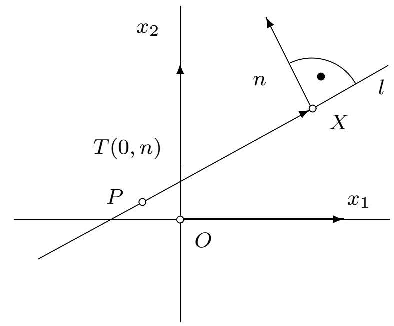
$$r \cdot n = p, \tag{1.37}$$

gde je p konstanta i $r = \mathcal{O}\mathbf{X}$.

Nađimo vezu između vektorske i opšte jednačine prave. Izaberimo ortonormiranu bazu (e_1, e_2) u ravni i neka je $\mathcal{O}\mathbf{P} = p = (p_1, p_2)$, i $n = (n_1, n_2)$. Jednačina (1.37) dobija oblik

$$x_1 n_1 + x_2 n_2 = p, \tag{1.38}$$

tj. oblik opšte jednačine prave.



X

Slika 27. Vektorska jednačina prave

Parametarski oblik zadavanja prave je najprirodniji jer se može generalisati na široke klase krivih i površi u bilo kojoj dimenziji.

1.27. Rastojanje tačke od prave. Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ proizvoljni skupovi u ravni, tada se postavlja prirodno pitanje kako definisati rastojanje između tih skupova koje bi bilo poopštenje našeg geometrijskog iskustva iz svakodnevnog života. Sledeća definicija daje odgovor kako to najprirodnije uraditi.

Definicija. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ skupovi tačaka na pravoj, u ravni ili u prostoru. Tada* **rastojanje između skupova**, *$d(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, definišemo kao*

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{\, d(A, B) \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\,\}. \tag{1.39}$$

Dakle, rastojanje između dva skupa svodi se na dobro poznato rastojanje između tačaka A i B ($d(A, B) = \|\mathbf{AB}\|$) datih skupova. Pri tome moramo uzeti **infimum**[19] skupa $\{\, d(A, B) \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\,\}$, jer ovaj skup ne mora imati minimalni (najmanji) element u opštem slučaju (npr. ako je $\mathcal{A} = (0, 1)$, a $\mathcal{B} = (1, 2)$).

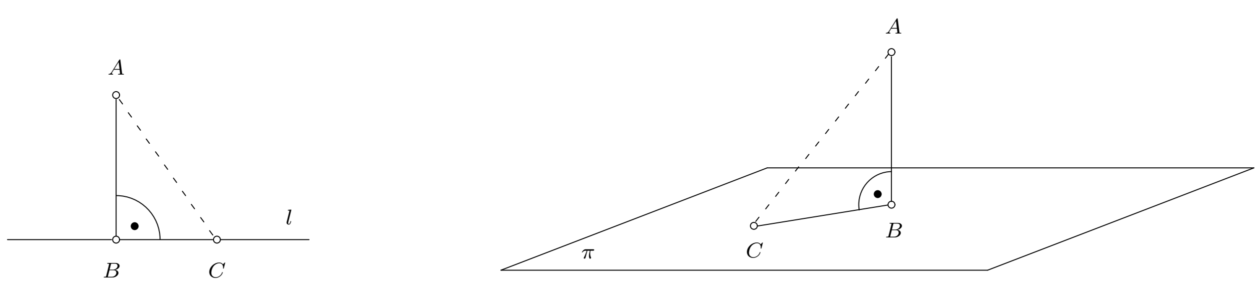
Sada se prirodno postavlja sledeće jednostavno pitanje: *Kako se određuje rastojanje tačke od prave?*

S obzirom na naše geometrijsko iskustvo očekujemo da se najkraće rastojanje od tačke do prave ili ravni ostvaruje normalom iz tačke na tu pravu ili ravan.

Lema. *Neka je data tačka A, prava l (ili ravan σ). Neka je B podnožje normale iz A na pravu l (ili ravan σ) i neka je C proizvoljna druga tačka sa te prave (ili ravni). Tada je*

$$d(A, B) \le d(A, C), \quad \text{odnosno} \quad d(A, l)\,(d(A, \sigma)) = \|\mathbf{AB}\|. \tag{1.40}$$

Dokaz. Uočimo trougao $\triangle\, ABC$ (Slika 28), s obzirom da je $AB \perp l$ (ili $AB \perp \sigma$) trougao $\triangle\, ABC$ je pravougli.



X

Slika 28. Rastojanje tačka do prave i ravni

Primenom **Pitagorine teoreme**[20] je

$$\|AB\|^2 = \|AC\|^2 - \|CB\|^2 \le \|AC\|^2.$$

Potpuno analogan dokaz važi i za slučaj ravni. $\square$

[19] najveću donju ogradu

[20] Pitagora, 580 – 500, grčki matematičar, filosof, ...

Upravo dokazana lema direktno daje način kako da odredimo, u nekom konkretnom slučaju, traženo rastojanje. Potrebno je odrediti jednačinu prave normalne na pravu koja sadrži datu tačku, a zatim odrediti koordinate presečne tačke polazne prave i normale. Ali postoji i drugi način da se odredi to rastojanje ne određujući eksplicitno podnožje normale, te je zbog toga znatno računski jednostavniji.

Propozcija. *Neka je tačka A zadata vektorom položaja a i prava l zadata jednačinom*

(1.41) $$r \cdot n = p.$$

Tada je rastojanje tačke A od prave l dato formulom

(1.42) $$d(A,l) = \frac{1}{\|n\|}\,\big|\,a\cdot n - p\,\big|\,.$$

Dokaz. Primetimo da je vektor $\frac{n}{\|n\|}$ jedinični i da su vektori n i $\mathbf{BA}$ kolinearni. Tada zbog prethodne leme imamo

$$d(A,l) \;=\; \|\,\mathbf{BA}\,\| = \Big|\,\mathbf{BA}\cdot\frac{n}{\|n\|}\,\Big| = \frac{1}{\|n\|}\;\big|\,(a-b)\cdot n\,\big| = \frac{1}{\|n\|}\;\big|\,a\cdot n - b\cdot n\,\big|\,.$$

Kako tačka B pripada pravoj l, njen vektor položaja, b, zadovoljava jednačinu (4.38), te dobijamo traženu jednakost. □

Pretpostavimo sada da su tačka A i prava l zadate u Dekartovom koordinatnom sistemu koordinatama $A(a_1,a_2)$ i jednačinom u opštem obliku: $a\,x_1 + b\,x_2 = p$.

Kako smo već uspostavili vezu između jednačine u opštem i vektorskom obliku, formula za rastojanje tačke do prave (4.39) postaje

(1.43) $$d(A,l) = \frac{|a_1\,a + a_2\,b - p\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

7. Ravan i prava u prostoru

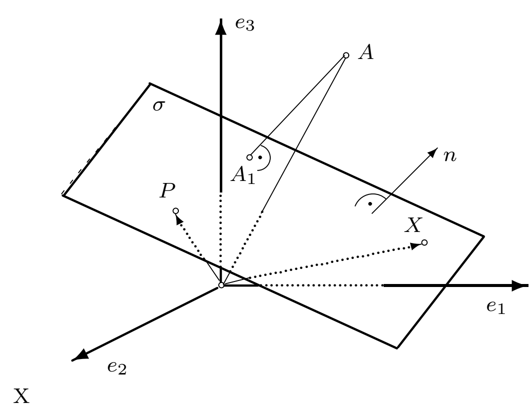
1.28. Jednačine ravni i prave u prostoru. U narednim tačkama izučavamo ravni i prave, osnovne geometrijske objekte u prostoru, kao i njihova glavna svojstva.

Neka je u prostoru zadat Dekartov pravougli koordinatni sistem $(O,\,e)$, pri čemu je $e = (e_1,e_2,e_3)$ baza vektorskog prostora V^3. Ako je σ proizvoljna ravan koja sadrži O, a $n(a_1,a_2,a_3)$ bilo koji nenula vektor normalan na tu ravan, tačka X sa koordinatama (x_1,x_2,x_3) će pripadati ravni σ ako i samo ako je

$$n\cdot \mathcal{O}\mathbf{X} = 0,$$

tj. ako i samo ako koordinate tačke X zadovoljavaju jednačinu

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 = 0.$$



Slika 29. Ravan

Stoga prethodnu jednačinu nazivamo *jednačinom ravni σ*. Ako ravan σ ne sadrži O onda je ona slika neke ravni koja sadrži tačku O, u translaciji za vektor $\mathcal{O}\mathbf{P}$, (Slika 29) pri čemu je $P(p_1,p_2,p_3)$ proizvoljna tačka ravni σ. Tom translacijom se koordinatni sistem $(O,\,e)$ preslikava u novi koordinatni sistem $(P,\,e)$ u kojem je jednačina ravni σ data sa

$$a_1\,\bar{x}_1 + a_2\,\bar{x}_2 + a_3\,\bar{x}_3 = 0.$$

Kako je $\qquad \bar{x}_1 = x_1 - p_1, \qquad \bar{x}_2 = x_2 - p_2, \qquad \bar{x}_3 = x_3 - p_3,$

jednačina ravni σ u koordinatnom sistemu $(P,\,e)$ biće: $a_i\,(x_i - p_i) = 0$, ili

(1.44) $$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 + b = 0, \quad \text{pri čemu je} \quad b = -\,a_i\,p_i = -\,a_1\,p_1 - a_2\,p_2 - a_3\,p_3.$$

Jednačina (1.44) naziva se **opšta jednačina ravni**.

Primetimo da na jeziku vektora jednačina ravni ima obliku

(1.45) $$(r-p)\cdot n = 0, \quad \text{odnosno} \quad r\cdot n = -\,b, \quad \text{gde je } -\,b = p\cdot n, \text{ konstanta.}$$

Naziva se vektorska jednačina ravni. Pri tome vektor n nazivamo normalnim vektorom ravni ili **vektorom normale ravni**.

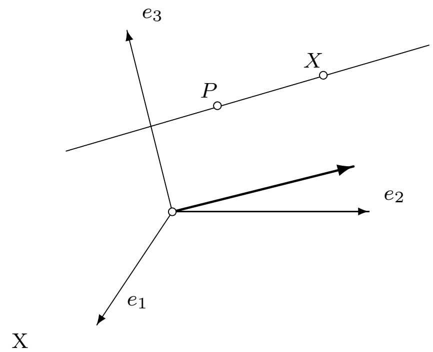
Ako je l proizvoljna prava koja sadrži koordinatni početak Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema (O, e) i neku tačku $A(a_1, a_2, a_3)$, tada tačka $X(x_1, x_2, x_3)$ pripada pravoj l ako i samo ako je

$$\mathcal{O}\mathbf{X} = l\,\mathcal{O}\mathbf{A},$$

tj. ako i samo ako koordinate tačke X zadovoljavaju parametarske jednačine

$$x_i = \lambda\, a_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Translacijom te prave za vektor $\mathcal{O}\mathbf{P}$, pri čemu je $P(p_1, p_2, p_3)$ proizvoljna tačka prostora (Slika 30), dobija se prava kroz tačku P određena pravcem vektora $a(a_1, a_2, a_3)$, čije su parametarske jednačine



Slika 30. Prava

(1.46) $x_1 = p_1 + l\, a_1, \quad x_2 = p_2 + l\, a_2, \quad x_3 = p_3 + l\, a_3.$

Eliminacijom parametra λ dobijaju se **kanonske jednačine prave**:

$$\frac{x_1 - p_1}{a_1} = \frac{x_2 - p_2}{a_2} = \frac{x_3 - p_3}{a_3}. \tag{1.47}$$

Primetimo da je $a(a_1, a_2, a_3)$ vektor prave. U formuli (1.47) u oznakama razlomaka dopuštamo da su neke od koordinata vektora $a(a_1, a_2, a_3)$ nula, pri čemu podrazumevamo da su tada odgovarajuće koordinate tačaka sa prave konstantne. Na primer, za prave određene vektorom $a(a_1, 0, a_3)$, je $x_2 = p_2$.

Primetimo, da je ravan data kao skup, $\mathcal{N}_{f_2}$, nula funkcije linearnog polinoma u tri promenljive,

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + b,$$

tako da ona predstavlja analogon prave u prostoru E^2. Dakle, postoji bijekcija između ravni u prostoru E^3 i svih linearnih polinoma u tri promenljive do na proporcionalnost.

Slično iz našeg "geometrijskog iskustva," a i iz formula (1.46) i (1.47) vidimo da se svaka prava može videti kao presek dve ravni $\mathcal{N}_{f_1}$ i $\mathcal{N}_{f_2}$.

1.29. Rastojanja od tačke do ravni i prave. Kao što znamo, rastojanja od tačke A do ravni σ i prave l određene su njenim normalnim projekcijama A_1 i A_2 redom na ravan σ i pravu l, odnosno

$$d(A, \sigma) = \min_{X\in\sigma} \|\mathbf{AX}\| = \|\mathbf{AA}_1\| \quad \text{i} \quad d(A, l) = \min_{X\in l} \|\mathbf{AX}\| = \|\mathbf{AA}_2\|. \tag{1.48}$$

Odredimo sada eksplicitno ta rastojanja. Neka je najpre ravan σ zadata jednačinom u vektorskom obliku, $r \cdot n = -\, b$, gde je n vektor normalan na ravan (Slika 29). Slično kao u poglavlju **4.1.** izvodi se sledeće tvrđenje.

Propozicija 1. *Rastojanje tačke A od ravni σ je*

$$d(A, \sigma) = \frac{1}{\|n\|}\left|a \cdot n + b\right|, \tag{1.49}$$

gde je ravan zadata jednačinom $r \cdot n = -\, b$, a a je vektor položaja tačke A.

Ako je ravan σ zadata jednačinom u opštem obliku (1.44) a tačka A koordinatama $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ tada je rastojanje određeno sledećom formulom

$$d(A, \sigma) = \frac{|a_1\, \bar{x}_1 + a_2\, \bar{x}_2 + a_3\, \bar{x}_3 + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \tag{1.50}$$

Odredimo sada rastojanje tačke A od prave l.

Propozicija 2. *Rastojanje tačke A od prave l je*

$$d(A, l) = \frac{1}{\|v\|}\left\|(a - q) \times v\right\|, \tag{1.51}$$

pri čemu je prava l određena tačkom Q i pravcem v, a a i q su vektori položaja tačaka A i Q.

X

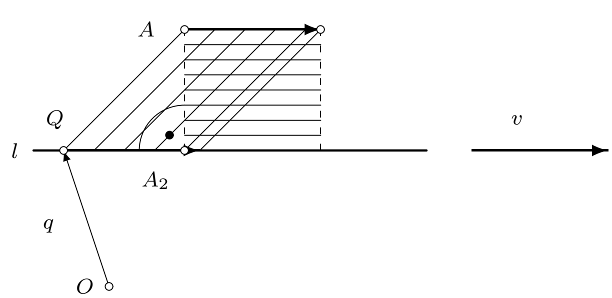
Dokaz: Posmatrajmo paralelogram čije su strane određene vektorima $\mathbf{QA}$ i v (Slika 31). Njegova površina, $\mathcal{P}$, izražava se na sledeća dva načina:

$$\mathcal{P} = d(A,l)\,\|v\| \quad \text{i} \quad \mathcal{P} = \|(a-q)\times v\|,$$

na osnovu definicije površine paralelograma i definicije vektorskog proizvoda. Iz ovih jednakosti sledi rezultat. □

Interesantno je da se rastojanje $d(A,l)$ može izraziti koristeći samo skalarne proizvode vektora $\mathbf{QA}$ i v.

Ako su A, Q i vektor v zadati redom svojim Dekartovim koordinatama $A(a_1,a_2,a_3)$, $Q(q_1,q_2,q_3)$, $v(v_1,v_2,v_3)$, onda formula (1.51) u razvijenom obliku postaje



Slika 31. Rastojanje tačke od prave

$$d(A,l) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2-q_2 & a_3-q_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1-q_1 & a_3-q_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1-q_1 & a_2-q_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}.$$

1.30. Mimoilazne prave. Posvetimo sada pažnju dvema pravama u opštem položaju u prostoru, odnosno mimoilaznim pravama. To su disjunktne prave koje nisu paralelne (Slika 32). Za mimoilazne prave važi sledeća važna činjenica.

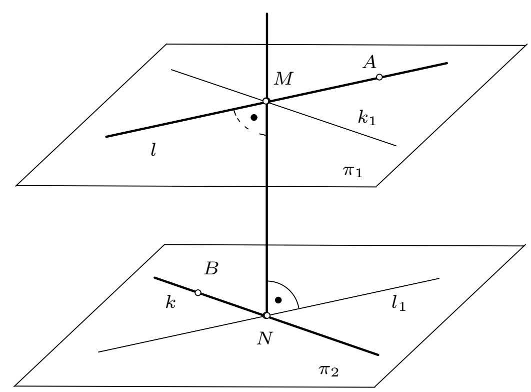
Propozicija 1. *Za proizvoljne dve mimoilazne prave l i k postoji tačno jedna prava koja ih seče i normalna je na njih. Pomenutu jedinstvenu pravu nazivamo zajedničkom normalom pravih l i k.*

Dokaz: Neka su paralelne ravni π_1 i π_2 određene redom, pravom l i pravcem prave k, i pravom k i pravcem prave l. Posmatrajmo sada ortogonalne projekcije, k_1, prave k na ravan π_1 i l_1 prave l na ravan π_2. Ako sa M i N redom obeležimo tačke preseka pravih l i k_1 odnosno k i l_1, tada prava određena tačkama M i N ima sve tražene osobine, dakle ona je zajednička normala pravih l i k. □

Postojanje zajedničke normale se može utvrditi i analitičkom (koordinatnom) metodom rešavanjem odgovarajućeg sistema linearnih jednačina.

Osnovna pitanja u ovom odeljku su čime je određeno rastojanje između mimoilaznih pravih i kako se ono izračunava?

Na prvo pitanje odgovor daje sledeća propozicija.



X

Slika 32. Zajednička normala

Propozicija 2. *Neka su l i k mimoilazne prave i tačke $M \in l$ i $N \in k$ takve da je prava MN zajednička normala pravih l i k. Za proizvoljne tačke $X \in l$ i $Y \in k$ je*

$$\|\mathbf{MN}\| \le \|\mathbf{XY}\|, \quad \text{odnosno,} \quad d(l,k) = \inf_{X\in l, Y\in k} d(X,Y) = \|\mathbf{MN}\|. \tag{1.52}$$

Dokaz: Kako je vektor $\mathbf{MN}$ normalan na $\mathbf{XM}$ i $\mathbf{YN}$ biće

$$\|\mathbf{XY}\|^2 = \langle \mathbf{XY}, \mathbf{XY}\rangle = \langle \mathbf{XM}+\mathbf{NY}+\mathbf{MN}, \mathbf{XM}+\mathbf{NY}+\mathbf{MN}\rangle = \|\mathbf{XM}+\mathbf{NY}\|^2 + \|\mathbf{MN}\|^2, \quad \text{te je} \quad \|\mathbf{XY}\|^2 \ge \|\mathbf{MN}\|^2,$$

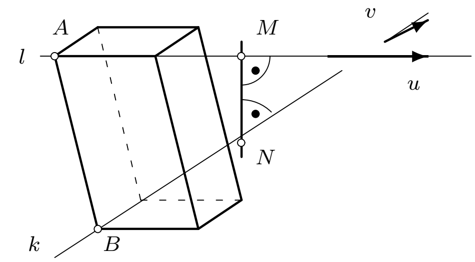
a to je i trebalo pokazati. □

Nađimo sada rastojanje između mimoilaznih pravih: neka je prava l zadata tačkom A i pravcem u a prava k tačkom B i pravcem v. Jedna mogućnost je da se odredi zajednička normala a zatim i samo rastojanje. S obzirom da je ovo rešenje računski zahtevno, potražimo rešenje ovog problema koje ne zahteva određivanje zajedničke normale.

Propozicija 3. *Rastojanje između mimoilaznih pravih l i k dato je formulom*

$$d(l,k) = \frac{\left|[\mathbf{AB}, u, v]\right|}{\|u \times v\|}. \tag{1.53}$$

Dokaz: Posmatrajmo paralelepiped određen vektorima $\mathbf{AB}$, u i v. Koristeći geometrijsku interpretaciju mešovitog proizvoda (Teorema 2.4), njegova zapremina je $V = |[\mathbf{AB}, u, v]|$. Ako izaberemo da vektori u i v određuju bazu paralelepipeda površine B, to je zapremina $V = B \cdot d(l,k) = d(l,k) \cdot \|u \times v\|$, zbog definicije vektorskog proizvoda. Odavde sledi (4.25). □



X

Slika 33. Rastojanje izmedju l i k

Posledica ovog dokaza je da $[\mathbf{AB}, u, v]$ ne zavisi od izbora tačaka A i B pravih l i k redom.

Ako su a i b vektori položaja tačaka A i B onda se (4.25) zapisuje u obliku

$$d(l,k) = \frac{\left|[b-a, u, v]\right|}{\|u \times v\|}. \tag{1.54}$$

Konačna formula se može izraziti u koordinatama polaznih elemenata. Ako su prave l i k određene jednačinama

$$l: \quad \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \frac{x_3 - a_3}{u_3}, \qquad k: \quad \frac{x_1 - b_1}{v_1} = \frac{x_2 - b_2}{v_2} = \frac{x_3 - b_3}{v_3},$$

onda je

$$d(l,k) = \frac{\left|\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2}}.$$

8. Zadaci, vežbanja i dopune

1.31. Važni primeri Abelovih grupa (I).

(i1) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$.

(i2) $(n\,\mathbb{Z}, +)$, $(\frac{1}{n}\,\mathbb{Z}, +)$ i $(\sqrt{2}\,\mathbb{Z}, +)$ gde je $n \in \mathbb{N}$.

(i3) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ gde je $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ i sl. $\mathbb{R}^*$ i $\mathbb{C}^*$.

(i4) $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$, $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, gde je $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ i sl. $\mathbb{R}^+$.

1.32. Dokažite da su Abelove grupe.

(i1) $(K_n, \cdot)$, gde je $K_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Ovo je grupa $n-$tih korena iz jedinice.

(i2) $(G, \cdot)$ gde je $G = \{a + \sqrt{2}\,b \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$.

(i3) $(G, \cdot)$ gde je $G = \{a + \sqrt[3]{2}\,b + \sqrt[3]{4}\,c \mid a, b, c \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\}$.

(i4) Uopštite primere iz (i2) i (i3).

1.33. Jedinstvenost neutralnog elementa i inverza u grupi. Neka je $(G, \cdot)$ proizvoljna grupa.

(i1) Dokažite da je neutralni element u grupi jedinstven.

(i2) Neka je $x \in G$ proizvoljane element grupe G. Pokažite da u G postoji jedinstven inverz od x^{-1}, kojeg obeležavamo sa x^{-1}.

Rešenje. (i1) Pretpostavimo da postoje dva neutralna elementa u G, e i f, tj. neka za svaki $x \in G$ važi, $x = x \cdot e = e \cdot x = x \cdot f = f \cdot x$. Sada prvo imamo, jer je e neutal: $f = f \cdot e$, a zatim jer je f neutral, $f \cdot e = e$, odakle je $e = f$.

(i2) Pretpostavimo da postoje y i z in G takvi da je $e = x \cdot y = y \cdot x = x \cdot z = z \cdot x$, tako da imamo,

$$y = y \cdot e = y \cdot (x \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z = e \cdot z = z.$$

1.34. Skraćivanje u grupi. Translacije. Preslikavanja $L_a, D_a : G \longrightarrow G$, definisana formulama $L_a(x) = a \cdot x$ i $D_a(x) = x \cdot a$, zovemo levom i desnom transalcijom za $a \in G$. Preslikavanja L_a i D_a su bijekcije grupe G, jer je inverz u grupi jedinstven. Zbog toga što su ovo bijekcije u grupi se može skraćivati i sa leva i sa desna, tj. sledeći iskazi su ekvivalentni:

(i1) $x = y$. (i2) $x \cdot a = y \cdot a$. (i3) $a \cdot x = a \cdot y$.

Pokažimo da je npr. L_a bijekcija. L_a je injekcija jer iz $L_a(x) = L_(y)$ sledi $a \cdot x = a \cdot y$, a zatim ako ovu relaciju sa leva pomnožimo da jedinstvenim inverzom elementa a, tj. sa a^{-1} imamo

$$a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot (a \cdot y) \iff (a^{-1} \cdot a) \cdot x = (a^{-1} \cdot a) \cdot y \iff e \cdot x = x = e \cdot y = y.$$

Pokažimo još da je L_a i surjektivno preslikavanje. Dakle, za proizvoljno $z \in G$ tražimo $x \in G$ takav da je $L_a(x) = z$. Posledenja jednakost ekvivalentna je sa $a \cdot x = z$, odakle odmah vidimo da ako za x uzmemo element $x = a^{-1} \cdot z$ vidimo da će biti, $L_a(x) = a \cdot (a^{-1} \cdot z) = (a \cdot (a^{-1}) \cdot z = e \cdot z = z$.

1.35. U svakoj grupi važi:

(i1) $(x^{-1})^{-1} = x, \forall\, x \in G$.

(i2) $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}, \forall\, x, y \in G$.

Rešenje.(i2) Koristeći asocijatvnost imamo redom: $(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = (y^{-1} \cdot x^{-1})(x \cdot y) = e$, s druge strane znamo da je inverz elementa $x \cdot y$ jednak $(x \cdot y)^{-1}$, dakle element $x \cdot y$ ima dva inverza, a kako je inverz u grupi jedinstven, odmah sledi $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$.

(i1) Sada je: $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = e$. Odakle, uzimanjem inverza leve i desne strane jednakosti[21] dobijamo $(x^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1} = e^{-1} = e$. Time smo zapravo pokazali da element x^{-1} ima dva inverza $(x^{-1})^{-1}$ i x, pa oni moraju biti jednaki, tj. važi: $(x^{-1})^{-1} = x$.

1.36. U grupi se stepenovanje može proširiti na sve cele brojeve tj. ako stavimo: x^{-1} = inverz od x, koji je jedinstven u grupi i $x^0 = e$. Tada važi:

(i1) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n,\ \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$.

(i2) $(a^m)^n = a^{m\,n}, \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$.

Uputstvo. Prvo se indukcijom pokaže da formula važi za $n, m \in \mathbb{N}$. Sada je potrebno analizirati četiri slučaja koja se dobiju u zavisnosti o znaku brojeva m i n, tj. $m, n > 0$; $m > 0, n < 0$; $m < 0, n > 0$ i $m, n < 0$.

1.37. Za $m \in \mathbb{N}, m > 1$, obeležimo sa $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, ..., m-1\}$ skup ostataka pri delenju sa m. Euklidova[22] teorema o deljenju[23] nam omogućuje da na $\mathbb{Z}_m$ definišemo sabiranje po modulu m. $(\mathbb{Z}_m, \underset{m}{+})$ je Abelova grupa. Dokažite.

Rešenje. Očito je $\mathbb{Z}_m$ zatvoreno za operaciju sabiranja.

Asocijativnost. neka su $x, y, z \in \mathbb{Z}_m$, tada prema Euklidovoj teoremi o delenju imamo: $x + y = k\,m + r$, $k = 0, 1$ $r \in \mathbb{Z}_m$, Tada je: $x \underset{m}{+} y = r$ i neka je $r + z = l\,m + s$, tako da je $(x \underset{m}{+} y) \underset{m}{+} z = s$. Dakle, imamo,

$$(x + y) + z = k\,m + l\,m + s = (k + l)\,m + s = x + (y + z) \quad \text{tj.} \quad x \underset{m}{+} (y \underset{m}{+} z) = s.$$

Neutralni element je 0.

Inverz elementa $k \in \mathbb{Z}_m$, je $m - k \in \mathbb{Z}_m$. Očito je grupa Abelova.

1.38. Grupa bijekcija (permutacija). Neka je S neki neprazan skup i neka je $G = \{f \in S^S \mid f \text{ je bijekcija}\}$ skup svih bijekcija skupa S. Uređeni par $(G, \circ)$ grupa, koja se naziva grupom **bijekcija** skupa S ili grupom **permutacija** ako je skup S konačan.

Rešenje. Dokaz je vrlo jednostavan jer je kompozicija bijekcija bijekcija i jer je kompozicija asocijativna operacija (najvažnijih osobina kompozicije), neutral je identičko preslikavanje ($id_S(x) = x,\ \forall\, x \in S$), a inverz je inverzno preslikavanje (za $f \in G$ posmatramo preslikavanje f^{-1} koje je definisano na sledeći način: ako je $y = f(x)$ onda je $f^{-1}(y) = x$).

1.39. Direktan proizvod grupa.[24] Neka su $(G, \cdot)$ i $(H, \circ)$ proizvoljne grupe onda je i $(G \times H, *)$ grupa gde je $(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b \circ d)$. Dokažite.

[21] Što možemo jer je inverz u grupi jedinstven.

[22] $E\upsilon\kappa\lambda\epsilon\delta\eta\zeta$, Euklid 330-275, grčki matematičar.

[23] Za proizvoljne $n \in \mathbb{Z}$ i $m \in \mathbb{N}$ postoje jedinstveno određeni brojevi $q \in Z$ i $r \in \mathbb{Z}_m$ takvi da je $n = m\,q + r$.

[24] Ovaj direktni proizvod grupa poznat je kao spoljašnji proizvod grupa, jer je definisan uz korišćenje struktura grupa faktora.

Primedba i primer. Ova konstrukcija pokazuje kako se na najjednostavniji način prave nove grupe iz poznatih i ona sa zove **direktan proizvod grupa.** Ova konstrukcija može se proširiti na proizvoljnu familiju grupa koja ne mora biti prebrojiva.

Primer. Klajnova[25] četvorna grupa, $V_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Rešenje. Sve osobine naslede se iz strukura $(G, \cdot)$ i $(H, \circ)$, dakle, $e = (e_G, e_H)$ i $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$.

[25] Klein Felix, nemački matematičar.

GLAVA 2

VEKTORSKI PROSTORI

1. Definicija i primeri vektorskih prostora

2.1. Definicija vektorskog prostora i posledice. Pojam realnog vektorskog polja može se najjednostavnije generalisati tako što se u definiciji iz prethodne glave $\mathbb{R}$ može zameniti bilo kojim poljem $\mathbb{F}$. Preciznije,

Definicija. *Neka je $V \neq \emptyset$, tada se uređena četvorka $(V, \mathbb{F}, +, \cdot) = V$ zove se* **vektorski prostor nad poljem** $\mathbb{F}$ *ako $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall\, x, y \in V$ važi:*

(VP1) $(V, +)$ *je Abelova grupa,*

(VP2) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\, \beta)\, x$,

(VP3) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

(VP4) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

(VP5) $1 \cdot x = x$,

Primedba. Aksioma (VP5) je važna zbog toga jer njome izbacujemo trivijalne vektorske prostore tj. one kod kojih je množenje sa skalarima trivijalno, tj. za svaki vektor x i skalar α važi $\alpha \cdot x = 0$.

Teorema. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, x neki vektor i α neki skalar. Tada važi:*

(i1) $\alpha \cdot (-x) = (-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)$,

(i2) $0 \cdot x = 0$.

(i3) $\alpha \cdot 0 = 0$,

Ako je $\alpha \cdot x = 0$ tada je ili $\alpha = 0$ ili $x = 0$.

Dokaz. (i1) Korišćenjem aksiome (VP2) kao i komutativnosti množenja skalara imamo redom:

$$\alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot ((-1) \cdot x) = (\alpha(-1)) \cdot x = ((-1)\alpha) \cdot x = \begin{cases} (-1)(\alpha \cdot x) = -(\alpha \cdot x). \\ ((-1\alpha)) \cdot x = (-\alpha) \cdot x. \end{cases}$$

Sada iz (i1) lako slede (i2) i (i3):

$$0 \cdot x = (\alpha + (-\alpha)) \cdot x = \alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot x + (-(\alpha \cdot x)) = 0, \quad \text{i}$$
$$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (x + (-x)) = \alpha \cdot x + ((-\alpha) \cdot x) = \alpha \cdot x + (-(\alpha \cdot x)) = 0.$$

Pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$, tada u polju $\mathbb{F}$ postoji inverz α^{-1} tako da redom imamo

$$x = 1 \cdot x = ((\alpha^{-1})\, \alpha) \cdot x = (\alpha^{-1})(\alpha \cdot x) = (\alpha^{-1}) \cdot 0 \overset{\text{(i3)}}{=} 0.$$

Dakle, ako $\alpha \neq 0$ tada mora biti $x = 0$. □

Primedba. Napomenimo da ćemo u daljnjem tekstu uglavnom[1] ispuštati $\cdot$ kao oznake za množenje vektora sa skalarom.

2.2. Primeri vektorskih prostora.

(i1) Proizvoljno polje, $\mathbb{F} = (\mathbb{F}, \mathbb{F}, +, \cdot)$ je vektorski prostor nad samim sobom. Specijalno, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ su vektorski prostori.

(i2) Skup svih vektora V^3, kao i skup svih radijus vektore $V^3(O)$ su realni vektorski prostori. Podsetimo se da je $V^3 = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 / \sim$, gde je $\sim$[2] standardna relacija ekvivalencije, ($(A, B) \sim (C, D)$ ako se duži $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ polove) na skupu svih orjentisanih duži $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3$.

[1] Ponekad ćemo stavljati tu oznaku da naglasimo razliku između množenja sa skalarima i neke druge binarne operacije.

[2] Za više detalja o relaciji $\sim$ vidi npr. [AG], 1. glava.

(i3) Ako sa $\mathbb{F}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \big| \, x_i \in \mathbb{F}\}$, označimo skup svih uređenih n-torki sa elementima iz polja $\mathbb{F}$. Tada je $(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}, +, \cdot)$ vektorski prostor ako su operacije sabiranja i množenja sa skalarom date sa:

(s) $x + y = (x_1, x_2, .., x_n) + (y_1, y_2, .., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, .., x_n + y_n)$,

(m) $\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \ldots, \lambda\, x_n)$.

Specijalno, vektorski prostori su: $\mathbb{Q}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$.

(i4) Prema (i3), $\mathbb{C}^n$ je vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, ali je $\mathbb{C}^n$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ uz sabiranje vektora i množenje vektora kao u (i3).

(i5) Matrice. Neka je

$$\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) = \mathbf{a} \,\middle|\, a_{ij} \in \mathbb{F} \right\},$$

skup svih matrica tipa $m \times n$, tj. sa m vrsta i n kolona. Skup $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F})$ postaje vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije kao i $\mathbb{F}^n$ (vidi prethodni primer (i3)). Preciznije, $\forall\, A, B \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F})$ i $\forall\, \lambda \in \mathbb{F}$,

(s) $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$,

(m) $\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda\, a_{ij})$.

Specijalno $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ i $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C})$ su vektorski prostori nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ redom. Primetimo da je $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C}) = (\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ realan vektorski prostor.

(i6) Polinomi. Neka $\mathbb{F}$ polje, tada je $(\mathbb{F}[x], \mathbb{F}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ pri čemu je $+$ standardno sabiranje polinoma, a $\cdot$ je množenje polinoma sa nekim skalarom. Jasno, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ su vektorski prostori i $\mathbb{C}[x] = (\mathbb{C}[x], \mathbb{R}, +, \cdot)$ je realan vektorski prostor.

(i7) Skup svih nizova nad $\mathbb{F}$. $\mathbb{F}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots) \,\big|\, x_i \in \mathbb{F},\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, uz operacije sabiranja vektora po komponentama i množenja skalara kao u $\mathbb{F}^n$, je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Dakle, vektorski prostor $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ je jedna prirodna generalizacija vektorskog prostora $\mathbb{F}^n$. Prema tome, $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ i $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{R}}$ su vektorski prostori.

(i8) Funkcije. Ako sa $\mathbb{F}^S = \{f \big| f : S \longrightarrow \mathbb{F}\}$ označimo skup svih funkcija sa nekog nepraznog skupa S u polje $\mathbb{F}$. Tada $\mathbb{F}^S$ postaje vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz sabiranje funkcija i množenje funkcija sa skalarom date sa $(\forall\, f, g \in \mathbb{F}^S,\ \forall\, \lambda, x \in \mathbb{F})$:

(s) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,

(m) $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

Analogno prethodnim slučajevima, $\mathbb{Q}^S, \mathbb{R}^S, \mathbb{C}^S$ su vektorski prostori. Da li je $\mathbb{C}^S$ realan vektorski prostor ?

(9) Formalni redovi. Kako su formalni redovi $\mathbb{F}[[x]] = \{f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i\, x^i \mid a_i \in \mathbb{F}\}$ jedno uopštenje skupa polinoma $\mathbb{F}[x]$, skup formalnih redova $\mathbb{F}[[x]]$ je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ s obzirom na sabiranje formalnih redova i uobičajeno množenje formalnih redova sa skalarom ,(analogno kao za polinome). Formalnije $(\mathbb{F}[[x]], \mathbb{F}, +, \cdot)$ je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

(i10) Loranovi (Laurent) [3] redovi i polinomi. Analogno prethodnom slučaju, budući da je skup Loranovih redova $\mathbb{F}[\,x, x^{-1}] = \{f(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i\, x^i \mid a_i \in \mathbb{F}\}$ jedno uopštenje polinoma $\mathbb{F}[x]$, nije teško zaključiti da je uređena četvorka $(\mathbb{F}[\,x, x^{-1}], \mathbb{F}, +, \cdot)$ takođe vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, s obzirom na sabiranje Loranovih redova (polinoma) i uobičajeno množenje Loranovih redova (polinoma) sa skalarom (analogno kao za polinome).

Nije teško u svim ovim važnim primerima proveriti da se zaista radi o vektorskim prostorima. Takođe možemo zaključiti da je pojam vektorskog prostora veoma važan u savremenoj matematici jer ima toliko važnih primera, koji se pojavljuju u drugim oblastima matematike.

Zbog važnosti primera (i3) i (i5) posvećujemo im sledeća dva poglavlja.

[3] Pierre Alphonse Laurent, 18. jul, 1813. – 2. septembar, 1854, francuski matematičar.

2. Vektorski prostori $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$

2.3. Neki računski primeri. U ovoj tački malo više pažnje posvećujemo računima u vektorskim prostorima $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$, uglavnom kada je $n = 3$.

Neka su $x = (2, -1, 3), y = (-3, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$. Tada je

$$
\begin{aligned}
&x + y = (2, -1, 3) + (-3, 4, 2) = (2 + (-3), -1 + 4, 3 + 2) = (-1, 3, 5),\\
&5 \cdot x = 5 \cdot (2, -1, 3) = (5 \cdot 2, 5 \cdot (-1), 5 \cdot 3) = (10, -5, 15),\\
&-x = (-1) \cdot x = (-1) \cdot (2, -1, 3) = (-1 \cdot 2, -1 \cdot (-1), -1 \cdot 3) = (-2, 1, -3)\\
&5 \cdot x - 3 \cdot y = (10, -5, 15) - (3 \cdot (-3), 3 \cdot 4, 3 \cdot 2) = (10, -5, 15) - (-9, 12, 6) = (19, -17, 9).
\end{aligned}
$$

Primetimo, koristeći ovaj primer, da nije teško proveriti da za $(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}, +, \cdot)$($\mathbb{F}$ je polje) sve aksiome vektorskog prostora (VP1)-(VP5) iz 1.1 Definicija.

Da bismo se u to uverili uvedimo prvo kraće oznake $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_j)$, u kojima se jasnije vidi da se operacije sabiranja i množenja vektora sa skalarom svodi na sabiranje i množenje u $\mathbb{F}$ na svakoj od komponenti. Preciznije,

$$
\begin{aligned}
&x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_j) + (y_j) = (x_j + y_j) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)\\
&\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \cdot (x_j) = (\lambda \cdot x_j) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n).
\end{aligned}
$$

Dakle, uz ove oznake asocijativnost sabiranja vektora i aksioma (VP4) lako slede,

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) &= (x_j) + ((y_j) + (z_j)) = (x_j) + (y_j + z_j) = (x_j + (y_j + z_j)) \overset{(\text{asoc. u } \mathbb{F})}{=} ((x_j + y_j) + z_j)\\
&= ((x_j) + (y_j)) + (z_j) = (x + y) + z,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha \cdot (x + y) &= \alpha \cdot ((x_j) + (y_j)) = \alpha \cdot (x_j + y_j) = (\alpha \cdot (x_j + y_j)) \overset{(\text{distrib. u } \mathbb{F})}{=} (\alpha \cdot x_j + \alpha \cdot y_j) = (\alpha \cdot x_j) + (\alpha \cdot y_j)\\
&= \alpha \cdot (x_j) + \alpha \cdot (y_j) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.
\end{aligned}
$$

Jasno, neutralni element za sabiranje vektora je nula vektor $0 = (0, 0, \cdots, 0)$. Nula vektor je istaknuti vektor u vektorskom prostoru jer je jedini vektor koji zadovoljava uslov: $0 + x = x + 0 = x$.

Preostale aksiome vektorskog prostora: (postojanje neutralnog elementa, postojanje inverznog elementa, komutativnost vektoskog sabiranja, kao i aksiome (VP2), (VP3) i (VP5)), proveravaju se na sličan način, i ostavljamo ih za vežbu čitaocu.

Kao što znamo pojam baze je veoma važan u svakom vektorskom prostoru, tako da je važno da znamo proveriti da li je neki skup vektora linearno nezavisan. Npr. ako vektorima $x = (2, -1, 3)$ i $y = (-3, 4, 2)$, dodamo vektor $z = (1, 0, 0)$, možemo se pitati da li je (x, y, z) baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, zbog 1.12 Teorema ($\mathbb{R}^3 \equiv V^3$) i 1.11 Posledica 2 (dimenzija od V^3 je tri).

Proverimo linearnu nezavisnost vektora x, y i z. U tu svrhu posmatramo jednačinu

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \alpha_1(2, -1, 3) + \alpha_2(-3, 4, 2) + \alpha_3(1, 0, 0) = (2\alpha_1, -\alpha_1, 3\alpha_1) + (-3\alpha_2, 4\alpha_2, 2\alpha_2) + (\alpha_3, 0, 0)\\
&= (2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + 4\alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2) \qquad \text{odakle dobijamo linearni sistem}
\end{aligned}
$$

$$
2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad -\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0, \quad 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0.
$$

Iz poslednje dve jednačine lako sledi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, a zatim iz prve dobijamo da je i $\alpha_3 = 0$, tj. (x, y, z) je baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

2.4. Veza između vektorski prostora V^n i $\mathbb{R}^n$. U prethodnoj glavi videli smo kako se konstruiše vektorski prostor $V^n (n = 1, 2, 3)$. Ista procedura može se generalisati i na više dimenzije, i imitirajući ideje iz tačaka 1.10-1.12, vidimo da 1.12 Teorema važi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Drugim rečima prostori V^n i $\mathbb{R}^n$ su izomorfni[4], prostori dimenzije n. Dakle, ako je $\mathcal{B} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ baza vektorskog prostora V^n, tada svaki vektor $v \in V^n$ ima jedinstven zapis u obliku

$$
v = v_1\, a_1 + v_2\, a_2 + \cdots + v_n\, a_n, \quad \text{i njemu dodelimo njegove koordinate tj.} \quad \kappa_{\mathcal{B}}(v) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n.
$$

[4] U glavi posvećenoj linearnim operatorima videćemo malo preciznije šta znači izmorfnost vektorskih prostora.

Preslikavanje $\kappa_{\mathcal{B}} : V^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, zove se koordinatizacija s obzirom na bazu $\mathcal{B}$ i analogon 1.12 Teoreme zapravo tvrdi da je svaka koordinatizacija izomorfizam (bijekcija, koja poštuje sabiranje i množenje vektora sa skalarima) vektorskih prostora V^n i $\mathbb{R}^n$. Primetimo da vektori $\kappa_{\mathcal{B}}(a_1) = (1, 0, \ldots, 0)$, $\kappa_{\mathcal{B}}(a_2) = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \kappa_{\mathcal{B}}(a_n) = (0, 0, \ldots, 1)$, čine bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, koja se zove kanonska baza.

Geometrijska kostrukcija skalarnog proizvoda kojeg smo uveli u prethodnoj glavi ne zavisi od dimenzije, i uvek se može definisati istom formulom. S druge strane videli smo kako bilo kojoj bazi od V^3 možemo dodeliti Gram-Šmitovovim postupkom ortonormiranu bazu. Gram-Šmitov postupak se može lako generalistati na bilo koju konačnu dimenziju, tj. i u prostoru V^n. Time smo se ubedili da u vektorskom prostoru V^n postoji ortonormirana baza $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, tj. baza u kojoj važi $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n$, i u ortonormiranoj bazi skalarni proizvod vektora $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$ i $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$ dat je formulom (vidi (1.14))

$$\langle x, y \rangle = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n. \tag{2.1}$$

Ako sada posmatramo koordinatizaciju, κ_e, s obzirom na pozitivno orijentisanu ortonormiranu bazu e, tada vidimo da je i kanonska baza u $\mathbb{R}^n$ ortonormirana i pozitivno orijentisana, tako da na $\mathbb{R}^n$ za vektore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definišemo standardni skalarni proizvod formulom (2.1).

Primer. Neka su dati vektori, $x = (2, -1, 3), y = (-3, 4, 2), z = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, kao u prethodnoj tački 2.4.

(i1) *Proverimo, koristeći vektorsko množenje, da su vektori x i y linearno nezavisni.*

Da bismo ovo proverili potrebno je izračunati vektorski proizvod vektora x i y, i ako je $x \times y \neq 0$, tada su vektori x i y linearno nezavisni (tj. nisu kolinearni). Dakle imamo,

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} e_3 = (-2-12)e_1 - (4+9)e_2 + (8-3)e_3$$

$$= -14\, e_1 - 13\, e_2 + 5\, e_3 = (-14, -13, 5) \neq 0,$$

tj. vektori su x i y linearno nezavisni.

(i2) *Proverimo, koristeći mešoviti proizvod, da su vektori x, y i z linearno nezavisni.*

Da bismo ovo proverili potrebno je izračunati mešoviti proizvod vektora x, y i z, i ako je $[x, y, z] \neq 0$, tada su vektori x, y i z linearno nezavisni (tj. nisu koplanarni). Dakle imamo,

$$[z, x, y] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} 1 - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} 0 + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} 0 = (-2-12)1 - (4+9)0 + (8-3)0 = 14 \neq 0,$$

tj. vektori su x i y linearno nezavisni. Primetimo da je zapremina paralelepipeda razapetog vektorima x, y i z jednaka 14 (vidi 1.22).

2.5. Malo analitičke geometrije. Sada ćemo iskoristiti račune iz prethodne glave kako bismo ih primenili na rešavanje nekih od osnovnih geometrijskih zadataka o pravama i ravnima u prostoru.

Neka su dati linearno nezavisni vektori $x = (2, -1, 3)$ i $y = (-3, 4, 2)$ kao i tačke $P = (1, -1, 2)$ i $M = (0, -1, -1)$. Rešimo sada sledeće probleme.

1. Odrediti parametarsku jednačinu ravni π određene vektorima x, y i tačkom P.

Neka je $X = (x_1, x_2, x_3)$ proizvoljna tačka prostora $\mathbb{E}^3$. Tačka P pripada ravni π akko je vektor $\mathbf{PX}$ linearna kombinacija vektora x i y. Tako dobijamo parametarsku jednačinu ravni, tj.

$$X \in \pi \iff \mathbf{PX} = \alpha\, x + \beta\, y \quad \text{tj.} \quad (x_1 - 1, x_2 + 1, x_3 - 2) = (2\,\alpha - 3\,\beta, -\alpha + 4\,\beta, 3\,\alpha + 2\,\beta) \qquad \text{ili}$$

$$x_1 = 1 + 2\,\alpha - 3\,\beta, \quad x_2 = -1 - \alpha + 4\,\beta, \quad x_3 = 2 + 3\,\alpha + 2\,\beta\,.$$

2. Odrediti opštu jednačinu ravni π određene vektorima x, y i tačkom P.

Potrebno je eliminisati parametre α i β iz parametarske jednačine ravni π date u prethodnom primeru.

(a) Za to je dovoljno primetiti da su vektori $\mathbf{PX}, x$ i y su koplanarni, tako da je zapremina paralelepipeda određenog njima jednaka 0 (jer mu je visina jednaka 0), tj.

$$[\mathbf{PX}, x, y] = \begin{vmatrix} x_1-1 & x_2+1 & x_3-2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} (x_1-1) - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} (x_2+1) + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} (x_3-2)$$

$$= -14(x_1-1) - 13(x_2+1) + 5(x_3-2) = -14\,x_1 - 13\,x_2 + 5\,x_3 - 9 = 0.$$

(b) Drugi način da rešimo ovaj problem jeste da iskoristimo da je vektor $w = x \times y$ normalan na vektor $\mathbf{PX}$(vidi 1.28) za svaku tačku $X \in \pi$. U prethodnoj tački smo izračunali vektor $w = (-14, -13, 5)$. Tako dobijamo,

$$X \in \pi \iff 0 = \langle \mathbf{PX}, w \rangle = -14(x_1-1) - 13(x_2+1) + 5(x_3-2) = -14\,x_1 - 13\,x_2 + 5\,x_3 - 9.$$

3. Odrediti rastojanje tačke M i ravni π određene vektorima x, y i tačkom P, bez računanja podnožja normale iz tačke M na ravan π.

Za rastojanje tačke M i ravni π dato je formulom (1.50), tako imamo

$$d(M, \pi) = \frac{|-14 \cdot 0 - 13 \cdot (-1) + 5 \cdot (-1) - 9|}{\sqrt{(-14)^2 + (-13)^2 + 5^2}} = \frac{|13 - 5 - 9|}{\sqrt{196 + 169 + 25}} = \frac{1}{\sqrt{390}}.$$

4. Odrediti podnožja normale N iz tačke M na ravan π, a zatim i rastojanje tačaka M i N.

Tačka N je presek normale n i ravni π. Prava n određena je vektorom te prave, a to je npr. vektor $w = (-14, -13, 5)$ i tačkom $M = (0, -1, -1)$. Dakle, tačka $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3$ pripada pravoj n akko $\mathbf{MX} = \lambda\, w$, tj.

$$(x_1 - 0, x_2 + 1, x_3 + 1) = \lambda\,(-14, -13, 5) \quad \text{ili} \quad x_1 = -14\,\lambda, \quad x_2 = -1 - 13\,\lambda, \quad x_3 = -1 + 5\,\lambda.$$

Primetimo da je svaka tačka prave n, parametrizovana parametrom λ, tj. $X_n(\lambda) = (-14\,\lambda, -1-13\,\lambda, -1+5\,\lambda)$. Mi tražimo onu tačku, ili preciznije parametar λ_0, koja pripada ravni π, tj. koordinate tražene tačke moraju zadovoljavati jednačinu ravni π. Tako nalazimo,

$$0 = -14(-14\,\lambda) - 13(-13\,\lambda - 1) + 5(5\,\lambda - 1) - 9 = 390\,\lambda - 1, \quad \text{odakle je} \quad \lambda_0 = \frac{1}{390}.$$

Dakle, tačka $N = X_n(1/390)$ ima koordinate $1/390\ (-14, -13, 5)$, i na kraju nalazimo,

$$d(M, N) = \sqrt{\left(\frac{-14}{390} - 0\right)^2 + \left(-1 + \frac{-13}{390} + 1\right)^2 + \left(-1 + \frac{5}{390} + 1\right)^2} = \frac{1}{390}\sqrt{14^2 + 13^2 + 5^2} = \frac{1}{\sqrt{390}}.$$

Dakle, vidimo da je $d(M, \pi) = d(M, N)$.

5. Odrediti rastojanje između prave $l = l(x, P)$ (određene vektorom x i tačkom P) i tačke M.

Primenimo formulu (1.51) iz 1.29 Propozicija 2. Tako prvo imamo $\mathbf{MP} = (1, 0, 3)$, a zatim

$$d(M, l) = \frac{\|\mathbf{MP} \times x\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{(3)^2 + (-3)^2 + (1)^2}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{14}}.$$

6. Odrediti ortogonalnu projekciju Q tačke M na pravu $l = l(x, P)$, kao i rastojanje između tačaka M i Q.

Primetimo da tačka Q pripada i ravni $\sigma = \sigma(M, x)$ (određenoj vektorom normale x i tačkom M), tj. Q je presek prave l i ravni σ. Kako je,

$$l \ \ldots \ \mathbf{PX} = \lambda\, x \quad \text{tj.} \quad X(\lambda) = (1 + 2\,\lambda, -1 - \lambda, 2 + 3\,\lambda) \quad \text{i}$$

$$\sigma \ \ldots \ 0 = 2(x_1 - 0) - (x_2 + 1) + 3(x_3 + 1) = 2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 + 2.$$

Sada nalazimo parametar λ_0 takav da je $Q = X(\lambda_0)$,

$$0 = 2\,(1 + 2\,\lambda) - (-1 - \lambda) + 3\,(2 + 3\,\lambda) + 2 = 14\lambda + 11 \implies \lambda_0 = -\frac{11}{14} \implies Q = X(\frac{-11}{14}) = \frac{-1}{14}\,(8, 3, 5).$$

Sada nalazimo rastojanje između tačaka M i Q,

$$d(M,Q)=\|\mathbf{MQ}\|=\sqrt{\left(\frac{-8}{14}-0\right)^2+\left(\frac{-3}{14}+1\right)^2+\left(\frac{-5}{14}+1\right)^2}=\frac{1}{14}\sqrt{8^2+11^2+9^2}=\frac{1}{14}\sqrt{266}$$
$$=\frac{\sqrt{14\cdot 19}}{14}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{14}}\,.$$

Dakle, vidimo da je $d(l,M)=d(Q,M)$.

2.6. Analitička geometrija u $\mathbb{R}^n$. Mnoge od izloženih ideja mogu se generalisati sa dimenzije 3 na proizvoljnu dimenziju n, kao što su npr. $k-$dimenzione ravni za svako $1\le k<n$. Prvo, primetimo da ako je dat skup od k linearno nezavisnih vektora $(a_1,\dots,a_k)$ i tačka $P\in\mathbb{E}^n$, tada je $k-$dimenziona ravan π definisana sa

$$X\in\pi \iff \mathbf{PX}=\alpha_1\,a_1+\alpha_2\,a_2+\dots+\alpha_k\,a_k. \tag{2.2}$$

Naravno, prethodnu parametarsku jednačinu k dimenzione ravni moguće je napisati i po komponentama kao u slučaju $n=3$ i $k=2$.

$1-$dimenzione ravni zovu se prave za svako n, a $(n-1)-$dimenzione ravni u $\mathbb{R}^n$ nazivaju se hiperravni. U $\mathbb{R}^2$ hiperravni su prave, a u $\mathbb{R}^3$ ravni su hiperravni.

Primetimo da su u parametarskoj jednačini $k-$dimenzione ravni π, koordinatne funkcije x_i, tačke $X=(x_i)\in\pi$ linearne funkcije parametara $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$. Ako dozvolimo da su koordinatne funkcije x_i dovoljno 'dobre'[5] funkcije od k promenljivih dobićemo mnogo bogatiju i komplikovaniju geometriju. Npr. za $k=1$, dobijamo parametarsku jednačinu krive $X(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))$. Da bismo dobili 'dovoljno dobre objekte' potrebno je postaviti barem uslov da je kriva regularna, tj. da je $0\ne\dot X=(\dot x_1(t),\dot x_2(t),\dots,\dot x_n(t))$.

Upravo opisani objekti predmet su izučavanja oblasti Diferencijalna geometrija.

2.7. Vektorski prostor $\mathbb{C}^n$. Sve ono što smo rekli za vektorski prostor $\mathbb{R}^n\equiv(\mathbb{R}^n,\mathbb{R},+,\cdot)$ u tački 2.3, važi i za prostor $\mathbb{C}^n\equiv(\mathbb{C}^n,\mathbb{C},+,\cdot)$ uz iste dokaze i račune. Tako npr. $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ imaju iste kanonske baze.

Primetimo da ima smisla posmatrati i vektorski prostor $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}\equiv(\mathbb{C}^n,\mathbb{R},+,\cdot)$, tj. uz isto sabiranje vektora i množenje vektora sa skalarima. Jedina je razlika u tome što su skalari realni brojevi u $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$, a kompleksni brojevi u $\mathbb{C}^n$. Ova činjenica ima za posledicu da se kanonska baza od $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ sastoji od $2\,n$ vektora:

$$e_1=(1,0,\dots,0),\qquad e_2=(0,1,\dots,0),\qquad \dots\dots\dots,\qquad e_n=(0,0,\dots,1),$$
$$e_{n+1}=(i,0,\dots,0),\qquad e_{n+2}=(0,i,\dots,0),\qquad \dots\dots\dots,\qquad e_{2\,n}=(0,0,\dots,i).$$

Analognim metodama[6] može se posmatrati i analitička geometrija pravih i ravni nad $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$, i još opštije u $\mathbb{F}^n$.

3. Matrice

2.8. Matrice kao vektorski prostor. Neka je

$$\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F})=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}=(a_{ij})=\mathcal{A}\;\middle|\; a_{ij}\in\mathbb{F}\right\},$$

skup svih matrica tipa $m\times n$, tj. sa m vrsta i n kolona. Skup $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F})$ postaje vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije kao i $\mathbb{F}^n$. Jedina je razlika u tome što su kod matrica elementi zapisani tabelu (zbog čega su indeksirani sa dva indeksa), a kod vektora samo u jednu vrstu. Preciznije, $\forall\,\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F})$ i $\forall\,\lambda\in\mathbb{F}$,

(s) $\mathcal{A}+\mathcal{B}=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$,

(m) $\lambda\cdot\mathcal{A}=\lambda\cdot(a_{ij})=(\lambda\,a_{ij})$.

[5] Svakako moraju biti glatke i zadovoljavati neke prirodne geometrijske uslove.

[6] Kao u slučaju realnih brojeva

Dokaz da je, uz upravo definisano sabiranje matrica i množenje matrica sa skalarom $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F})$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, je ista kao i u slučaju vektorskog prostora $\mathbb{F}^n$ uz oznake uvedene u 2.3.

Specijalno $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ i $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C})$ su vektorski prostori nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ redom. Primetimo da je $\mathbb{M}_{mn}{}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = (\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ realan vektorski prostor.

2.9. Množenje matrica. Posmatrajmo skupove $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F})$ i $\mathbb{M}_{nk}(\mathbb{F})$ matrice tipova $m \times n$ i $n \times k$ sa koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$, tada je moguće definisati množenje matrica $\cdot : \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F}) \times \mathbb{M}_{nk}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F})$ na sledeći način: za matrice $\mathcal{A} = [a^1, a^2, \ldots, a^n] = [a_1, a_2, \ldots, a_m] = (\alpha_{ij})$ i $\mathcal{B} = [b^1, b^2, \ldots, b^k] = [b_1, b_2, \ldots, b_n] = (\beta_{ij})$, gde su matrični elementi (na preseku $i-$te vrste i $j-$te kolone) označeni sa α_{ij} i β_{ij}, sa a^i, b^i označili smo njihove $i-$te vrste, tj. $a^i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$, i analogno sa a_i, b_i označili smo $i-$te kolone ovih matrica, tj. npr. $a_i = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{mi})^\tau = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}$ definišemo množenje matrica formulom:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} = (\gamma_{ij}), \quad \text{gdje je} \quad \gamma_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\, \beta_{lj} = \langle a^i, \beta_j \rangle \quad \text{ili}$$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = [a^1, a^2, \ldots, a^m] \cdot [b_1, b_2, \ldots, b_k] = \begin{bmatrix} \langle a^1, b_1 \rangle & \langle a^1, b_2 \rangle & \ldots & \langle a^1, b_k \rangle \\ \langle a^2, b_1 \rangle & \langle a^2, b_2 \rangle & \ldots & \langle a^2, b_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle a^m, b_1 \rangle & \langle a^m, b_2 \rangle & \ldots & \langle a^m, b_k \rangle \end{bmatrix}, \quad \text{ili još detaljnije}$$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (\alpha_{ij}) \cdot (\beta_{ij}) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_{1l}\, \beta_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_{1l}\, \beta_{l2} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_{1l}\, \beta_{lk} \\ \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_{2l}\, \beta_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_{2l}\, \beta_{l2} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_{2l}\, \beta_{lk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_{ml}\, \beta_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_{ml}\, \beta_{l2} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_{ml}\, \beta_{lk} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Osnovna osobina množenja matrica je njena asocijativnost, kad god svi proizvodi istih imaju smisla.

Neka su date tri proizvoljne matrice $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) = ((\mathcal{A})_{ij}) \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F})$, $\mathcal{B} = (\beta_{ij}) = ((\mathcal{B}_{ij})) \in \mathbb{M}_{nk}(\mathbb{F})$ i $\mathcal{C} = (\gamma_{ij}) = ((\mathcal{C}_{ij})) \in \mathbb{M}_{kl}(\mathbb{F})$.

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C})_{ij} &= \sum_{p} (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})_{ip}\, (\mathcal{C})_{pj} = \sum_{p} \left(\sum_{s} \alpha_{is}\, \beta_{sp} \right) \gamma_{pj} = \sum_{p,\, s} \alpha_{is}\, \beta_{sp}\, \gamma_{pj} = \sum_{s} \alpha_{is} \left(\sum_{p} \beta_{sp}\, \gamma_{pj} \right) \\ &= \left(\sum_{s} \alpha_{is} \left(\sum_{p} \beta_{sp}\, \gamma_{pj} \right) \right) = \sum_{s} (\mathcal{A})_{is}\, (\mathcal{B} \cdot ccc)_{sj} = (\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}))_{ij} \end{aligned}$$

Kako prethodna formula važi za sve $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, l$, sledi da je

$$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}). \tag{2.4}$$

Primedba 1. Prvo, primetimo da vektore, tj. elemente skupa $\mathbb{F}^n$ možemo smatrati matricama tipa $n \times 1$ ili $1 \times n$. Tako da formula (2.3) omogućava sledeću interpretaciju matrice iz $\mathbb{M}_{mn}$ kao preslikavanja, $\mathbb{M}_{mn} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$.

Za $\mathcal{A} = (a_{ij})$ i $x = (x_i)$ imamo,

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}x = (\alpha_{ij})(x_j) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{ml} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{1l}\, x_l \\ \sum_{l=1}^{n} \alpha_{2l}\, x_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{n} \alpha_{ml}\, x_l \end{bmatrix}$$

Zbog prehodne interpretacije matrica kao preslikavanja, vektore ćemo zapisivati u kolone, jer je to u skladu sa uobičajenim oznakama za funkciju $(\mathcal{A}(x))$ [7].

Primedba 2. U glavi posvećenoj linearnim operatorima videćemo dublji smisao formule (2.3) i kraći dokaz asocijativnosti množenja matrica.

2.10. Transponovanje matrica. Primetimo da svakoj matrici iz skupa $\mathbb{M}_{mn}$ možemo na očigledan način dodeliti matricu iz $\mathbb{M}_{nm}$ tako što zamenimo ulogu vrsta i kolona polazne matrice, tj. vrste (kolone) polazne matrice postaju kolone (vrste) nove. Ovo preslikavanje zove se **transponovanje matrica**, koje obeležavamo sa $^{\tau}$. Preciznije, $^{\tau} : \mathbb{M}_{mn} \longrightarrow \mathbb{M}_{nm}$, tj. transponat (ili transponovana matrica) matrice $\mathcal{A} = [a^1, a^2, \dots, a^n] = [a_1, a_2, \dots, a_m] \in \mathbb{M}_{mn}$, je matrica $\mathcal{A}^{\tau} = [b^1, b^2, \dots, b^m] = [b_1, b_2, \dots, b_n] \in \mathbb{M}_{nm}$, takva da je $b^i = a_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ i $b_j = a^j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Za transponovanje koristimo i oznaku: za $\mathcal{A} = (a_{ij})$ njen transponat je matrica $\mathcal{A}^{\tau} = (a_{ji})$.

Propozicija. Transponovanje matrica ima sledeća svojstva za sve $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{M}_{mn}$ i $\lambda \in \mathbb{F}$,

(i1) $(\lambda\,\mathcal{A})^{\tau} = \lambda\,\mathcal{A}^{\tau}$,

(i2) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\tau} = \mathcal{A}^{\tau} + \mathcal{B}^{\tau}$,

(i3) $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^{\tau} = \mathcal{A}^{\tau} \cdot \mathcal{A}^{\tau}$.

Dokaz. (i1) i (i2) direktno iz odgovarajućih definicija sledi da operacije množenje matrice sa skalarom i transponovanje odnosno sabiranje matrica i transponovanje komutiraju. Zato pokažimo (i3). Neka su $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{mn}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_{nk}$

$$((\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^{\tau})_{ij} = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})_{ji} = \sum_{l=1}^{n} (\mathcal{A})_{jl} \cdot (\mathcal{B})_{li} = \sum_{l=1}^{n} (\mathcal{A}^{\tau})_{lj} \cdot (\mathcal{B}^{\tau})_{il} = \sum_{l=1}^{n} (\mathcal{B}^{\tau})_{il} \cdot (\mathcal{A}^{\tau})_{lj} = (\mathcal{B}^{\tau} \cdot \mathcal{A}^{\tau})_{ij}.$$

Kako ovo važi za sve $i = 1, 2, \dots, m$ i $j = 1, 2, \dots, k$ sledi tražena jednakost. □

2.11. Algebra matrica $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. U prethodnoj tački videli smo da je množenje matrica definisano samo u slučaju kada prvi faktor u proizvodu ima kolona koliko drugi faktor ima vrsti. Vidim da taj problem nemamo ako su matrice kvadratne, tj. ako je $m = n$ i tada koristimo kraću oznaku $\mathbb{M}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{F}) \equiv \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{F})$.

Kao što je 0 matrica istaknuti element u Abelovoj grupi $(\mathbb{M}_n, +)$, ispostavlja se da matrica

$$\mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} \alpha_{ii} = 1, \; i = 1, \dots, n, \\ \alpha_{ij} = 0, \; \text{inače}. \end{cases}$$

ima isto svojstvo, neutralnog elementa za množenje matrica, zbog čega je nazivamo jediničnom matricom.

[7] Potpuno je legitimno prvo pisati vektor(ali tada kao vrstu), a zatim matricu, mada u savremenijoj literaturi koriste se obično oznake koje i mi koristimo.

Pre nego što proverimo da je matrica $\mathbb{I}_n$ zaista neutralni element za množenje matrica, primetimo da su vrste i kolone matrice $\mathbb{I}_n$ zapravo vektori kanonske baze (e). Dakle imamo,

$$\mathcal{A}\cdot\mathbb{I}_n = [a^1, a^2, \ldots, a^n]\cdot[e_1, e_2, \ldots, e_n] = \begin{bmatrix} a^1\cdot e_1 & a^1\cdot e_2 & \ldots & a^1\cdot e^n \\ a^2\cdot e_1 & a^2\cdot e_2 & \ldots & a^2\cdot e^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^n\cdot e_1 & a^n\cdot e_2 & \ldots & a^n\cdot e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \mathcal{A} = \begin{bmatrix} e^1\cdot a_1 & e^1\cdot a_2 & \ldots & e^1\cdot a^n \\ e^2\cdot a_1 & e^2\cdot a_2 & \ldots & e^2\cdot a^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^n\cdot a_1 & e^n\cdot a_2 & \ldots & e^n\cdot a_n \end{bmatrix} = [e^1, e^2, \ldots, e^n]\cdot[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \mathbb{I}_n\cdot\mathcal{A}.$$

Iz formule (2.3) jasno je da množenje matrica nije komutativna operacija ako je je $n > 1$, kao što pokazuje sledeći primer $(n = 2)$, za

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ i } \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ imamo}$$

$$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{B}\cdot\mathcal{A}.$$

Ipak, množenje matrica je kompatibilno sa osnovnim operacijama u vektorskom prostoru $\mathbb{M}_n$, kao što pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija. *Za sve* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbb{M}_n$ *i* $\forall\,\lambda \in \mathbb{F}$ *važi:*

(i1) $\lambda\,(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) = (\alpha\,\mathcal{A})\cdot\mathcal{B} = \mathcal{A}\cdot(\alpha\,\mathcal{B})$,

(i2) $\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}$,

(i3) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\cdot\mathcal{C} = \mathcal{A}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$.

Dokaz. Sva tri svojstva dokazuju se tako što pokažemo da se proizvoljne (i, j) komponente matrica sa leve i desne strane jednakosti podudaraju.

(i1) je očigledno.

(i2) Dokažimo (i2). Neka su $\mathcal{A} = ((\mathcal{A})_{ij}), \mathcal{B} = ((\mathcal{B}_{ij}))$ i $\mathcal{C} = ((\mathcal{C}_{ij})) \in \mathbb{M}_n$. Tada redom imamo,

$$(\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C}))_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A})_{ik}(\mathcal{B}+\mathcal{C})_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A})_{ik}((\mathcal{B})_{kj}+(\mathcal{C})_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}((\mathcal{A})_{ik}\,(\mathcal{B})_{kj}+(\mathcal{A})_{ik}\,(\mathcal{C})_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A})_{ik}\,(\mathcal{B})_{kj}+\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A})_{ik}\,(\mathcal{C})_{kj} = (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})_{ij}+(\mathcal{A}\cdot\mathcal{C})_{ij} = (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C})_{ij}.$$

Analogno se dokazuje i (i3). □

Definicija. Neka je V neki neprazan skup. Tada za strukturu $V \equiv (V, \mathbb{F}, +, , \cdot)$ kažemo da je $\mathbb{F}-$**algebra** ako je:

(A1) $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

(A2) $(V, +, *)$ prsten, tj. preslikavanje $* : V\times V \longrightarrow V$, koje nazivamo množenje vektora, zadovoljava sledeće aksiome $\forall\,A, B, C \in V$ važi:

(i1)) $A*(B+C) = A*B+A*C$,

(i2) $(A+B)*C = A*C+B*C$.

(A3) Preslikavanje, $*$ je kompatibilno sa množenjem matrica, tj. $\forall\,A, B \in V$ i $\forall\,\alpha \in \mathbb{F}$ važi:

$$\alpha\cdot(A*B) = (\alpha\cdot A)*B = A*(\alpha\cdot B).$$

U zavisnosti od toga da li u prstenu $(V, +, *)$ važi još po neko od svojstava:

(A4) $A*(B*C) = (A*B)*C$,

(A5) postoji neutalni element za operaciju $*$, tj. postoji element $E \in V$ takav da je $A*E = \mathbb{I}_n*E = A$, (A6) $\quad A * B = B * A$,

kažemo da je V asocijativna algebra, algebra sa jedinicom i komutativna algebra, redom.

Dakle, ako sada uzmemo u obzir sve što smo do sada naučili o strukturi skupa matrica $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, možemo formulisati sledeću teoremu.

Teorema. *$\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ je asocijativna $\mathbb{F}-$algebra sa jedinicom.*

Napomena. U skladu sa tradicionalnim duhom koji se obično koristi u matematičkoj literaturi, oznake za množenje skalara, skalara i vektora i vektora pojednostavljujemo tako što izostavljamo oznaku za množenje $(\cdot, *)$, bez bojazni da će to dovesti do zabune.

2.12. Opšta linearna grupa. Sada želimo još da ispitamo da li je $\mathbb{M}_n$ grupa s obzirom na množenje matrica. Iz prethodne tačke znamo da je $(\mathbb{M}_n, \cdot)$ monoid, tj. operacija množenja matrica ima sledeća svojstva: zatvorenost (proizvod dva elementa iz $\mathbb{M}_n$ takođe je element skupa $\mathbb{M}_n$), asocijativnost i postoji neutral za množenje matrica (jedinična matrica). Dakle, da bi $(\mathbb{M}_n, \cdot)$ bila grupa, trebalo bi da svaka matrica iz $\mathbb{M}_n$ ima inverznu matricu, tj. da za svako $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n$ postoji matrica $\mathcal{A}^{-1}$ takva da je $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \mathbb{I}_n = \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A}$.

Primetimo da npr. nula matrica ne može imati inverz, jer je proizvod nula matrice i bilo koje druge matrice uvek nula matrica, tj. ne može biti jednako jediničnoj matrici. Naravno, mogli bismo isključiti iz skupa $\mathbb{M}_n$ nula matricu i posmatrati skup ${\mathbb{M}_n}^* = \mathbb{M}_n \setminus \{0\}$, kao što se radi u definicije tela i polja, ali sledeći primer pokazuje da ni u ${\mathbb{M}_n}^*$ svi elementi nemaju inverz.

Primer. Posmatrajmo matricu $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i primetimo da je $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = 0$. Matrica $\mathcal{A}$ nema inverz, jer kada bi npr. postojala matrica $\mathcal{B}$ takva da je $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathbb{I}_2$, tada bi bilo

$$\mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathbb{I}_2 = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A}^2 \cdot \mathcal{B} = 0 \cdot \mathcal{B} = 0,$$

što je nemoguće jer $\mathcal{A} \neq 0$.

Napomena. 1. Matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n$ zove se nilpotentna ako postoji $n > 1$ takva da je $\mathcal{A}^n = 0$. Nilpotente matrice su objekti koji ne postoje u polju $\mathbb{F}$, i zapravo predstavljaju osnovnu razliku između matrica i brojeva.

2. Pojam nilpotentnog elementa može se, analognom definicijom, uvesti u svaki prsten (vidi 1.9).

Dakle, iz gornjeg primera vidimo da iz $(\mathbb{M}_n(\mathbb{F}), \cdot)$ moramo da izbacimo "loše" elemente, tj. one koji nemaju inverz i tako dobijamo grupu koja se zove **opšta linearna grupa** i koju označavamo sa $\mathsf{GL}\,(n, \mathbb{F})$ ili kraće GL_n. Invertibilne elemente monoida $(M_n(\mathbb{F}), \cdot)$ zovemo regularnim ili invertibilnim (inverzibilnim) matricama. Dakle, matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n$ je invertibilna ako postoji matrica $\mathcal{A}^{-1}$ takva da je:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \mathbb{I}_n = \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A}. \tag{2.5}$$

Napomenimo da je grupa $\mathsf{GL}\,(n, \mathbb{F})$ jedna od najvažnijih grupa u matematici.

2.13. Neki važni podskupovi od $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Navedimo sada neke važne podskupove od $\mathbb{M}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, čijom strukturom ćemo se baviti u nastavku.

(s) Matrica $\mathcal{A}$ je simetrična ako važi $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\tau$. Skup svih simetričnih matrica reda n obeležimo sa $\mathcal{S}_n$. Nije teško proveriti da je $\mathcal{S}_n = (\mathcal{S}_n, \mathbb{F}, +, \cdot)$ vektorski prostor. $(\mathcal{S}_n, \cdot)$ nije grupa, jer npr. proizvod dve simetrične matrice ne mora biti simetrična matrica.

(a) Matrica $\mathcal{A}$ je kososimetrična ili antisimetrična ako važi $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^\tau$. Skup svih kososimetričnih matrica reda n obeležimo sa $\mathcal{K}_n$. Nije teško proveriti da je $\mathcal{K}_n = (\mathcal{A}_n, \mathbb{F}, +, \cdot)$ vektorski prostor. $(\mathcal{K}_n, \cdot)$ nije grupa, jer npr. jedinična matrica nije kososimetrična.

(o) Matrica $\mathcal{A}$ je ortogonalna ako važi $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^\tau = \mathbb{I}_n = \mathcal{A}^\tau \cdot \mathcal{A}$, tj. ako je $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^\tau$.
Skup svih ortogonalnih matrica $\mathcal{O}\,(n, \mathbb{F})$ nije vektorski prostor, jer npr. zbir dve ortogonalne matrice ne mora biti ortogonalna matrica.

Pokažimo da je $(\mathcal{O}\,(n, \mathbb{F}), \cdot)$ podgrupa od $\mathsf{GL}\,(n, \mathbb{F})$, tj. $\mathcal{O}\,(n, \mathbb{F}) \subsetneqq \mathsf{GL}\,(n, \mathbb{F})$ i $\mathcal{O}\,(n, \mathbb{F})$ je i sama grupa s obzirom na istu operaciju (množenje matrica) kao i $\mathsf{GL}\,(n, \mathbb{F})$. $\mathcal{O}\,(n, \mathbb{F})$ se zove ortogonalna grupa.

Da bismo se proverili da je $\mathcal{O}(n, \mathbb{F})$ grupa, tj. da zadovoljava aksiome grupe (vidi tačku 1.9), potrebno je proveriti da je

(i1) proizvod dve ortogonalne matrice ortogonalna matrica

(i2) inverz ortogonalne matrice je ortogonalna matrica,

jer je jedinična matrica $\mathbb{I}_n$ ortogonalna i jer je asocijativnost nasledna (sa skupa $\mathsf{GL}\,(n,\mathbb{F})$ na svaki njegov podskup) osobina.
Dakle ako je $\mathcal{A}\in\mathcal{O}(n,\mathbb{F})$ onda je $\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{A}^{\tau}$, i korišćenjem idempotentnosti [8] transponovanja i inverza, redom nalazimo,

$$(\mathcal{A}^{-1})^{\tau}=(\mathcal{A}^{\tau})^{\tau}=\mathcal{A}=(\mathcal{A}^{-1})^{-1}=(\mathcal{A}^{\tau})^{-1},\quad \text{tj. } \mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{O}(n,\mathbb{F}).$$

Ako su $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{O}(n,\mathbb{F})$ onda je

$$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})^{-1}=\mathcal{B}^{-1}\cdot\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{B}^{\tau}\cdot\mathcal{A}^{\tau}=(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})^{\tau},\quad \text{tada je i}\quad \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}\in\mathcal{O}(n,\mathbb{F}).$$

Prema tome $\mathcal{O}(n,\mathbb{F})$ je podgrupa od $\mathsf{GL}\,(n,\mathbb{F})$.
(d) Matrica $\mathcal{A}$ je dijagonalna ako za sve $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ takve da $i\neq j$ važi $\alpha_{ij}=0$. Skup svih dijagonalnih matrice reda n, $\mathcal{D}_n$ je vektorski prostor. Skup svih regularnih dijagonalnih matrice $\mathcal{D}_n^*$ obrazuje podgrupu opšte linearne grupe $\mathsf{GL}\,(n,\mathbb{F})$. [9] Ponekad ćemo dijagonalne matrice obeležavati na sledeći način: $\mathrm{diag}[\alpha_{11},\alpha_{22},\ldots,\alpha_{nn}]$, tj. popisivanjem dijagonalnih elemenata matrice (ostali matrični elementi su 0).

(sc) Matrica $\mathcal{A}$ je skalarna ako je oblika $\mathcal{A}=\lambda\,\mathbb{I}_n$, $\lambda\in\mathbb{F}$. Lako se proverava da je skup svih skalarnih matrica reda n, Sc_n, je vektorski prostor od $\mathbb{M}_n$ a skup svih regularnih skalarnih matrica Sc_n^* $(\lambda\neq 0)$ je podgrupa opšte linearne grupe $\mathsf{GL}\,(n,\mathbb{F})$ [10].

4. Baza i dimenzija vektorskog prostora

2.14. Linearna kombinacija vektora i skup generatora. Neka je dat neki podskup B vektorskog prostora V, koji ne sadrži nula vektor. Kažemo da je $x\in V$ linearna kombinacija vektora iz B, ako postoje $n\in\mathbb{N}$, vektori $a_1,a_2,\ldots,a_n\in B$ i skalari $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ takvi da je

$$x=\alpha_1\,a_1+\alpha_2\,a_2+\cdots+\alpha_n\,a_n. \tag{2.6}$$

Relaciju (2.6) možemo interpretitati i na sledeći način: vektor x je linearna kombinacija vektora $a_1,a_2,\ldots,a_n\in B$ ako vektorska jednačina (2.6) ima rešenja u $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$.

Od posebnog je interesa slučaj kada je svaki vektor $x\in V$ linearna kombinacija vektora iz skupa B. Tada kažemo da je skup B **skup generatora** [11] vektorskog prostora V.

Primedba. Iz same definicije skupa generatora, lako se vidi da za proizvoljni skup generatora B od V važi:

(i1) ako je dat vektor $0\neq y$ tada je i skup $B'=\{y\}\cup B$ takođe skup generatora, tj. nadskup skupa generatora i sam je skup generatora.

(i2) ako je neki $y\in B$ linearna kombinacija vektora iz $B''=B\setminus\{y\}$ tada je B'' takođe skup generatora.

2.15. Linearna nezavisnost. Neka je dat neki podskup $B=\{a_1,\ldots,a_n\}\subseteq V$ vektorskog prostora V. Kažemo da je B **linearno nezavisan** ako jednačina linearne (ne)zavisnosti:

$$\alpha_1\,a_1+\alpha_2\,a_2+\cdots+\alpha_n\,a_n=0,\qquad \alpha_i\in\mathbb{F}\ \ (i=1,\ldots,n), \tag{2.7}$$

ima samo trivijalno (koje uvek postoji) rešenje: $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. Skup B je linearno zavisan ako nije linearno nezavisan, tj. ako jednačina (2.7) ima netrivijalno rešenje [12]. Ako je skup B beskonačan kažemo da je linearno nezavisan ako je svaki njegov konačni podskup linearno nezavisan.

Primetimo da ako skup $B=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ sadrži nula vektor onda je on linearno zavisan jer ako je npr. $a_1=0$, imamo netrivijalnu linearnu kombinaciju nula vektora,

$$0=5\cdot 0+0\cdot a_2+0\cdot a_3+\cdots+0\cdot a_n\,.$$

Zbog toga ćemo uvek podrazumevati [13] da skup kojem ispitujemo linearnu nezavisnost ne sadrži nula vektor.

Primedba. Iz same definicije linearno (ne)zavisnog skupa lako se vidi da važe sledeće činjenice:

(i1) ako je B jednočlan tada je on linearno nezavisan.

---

[8] $(\mathcal{A}^{\tau})^{\tau}=\mathcal{A}$ i $(\mathcal{A}^{-1})^{-1}=\mathcal{A}$
[9] Proverite !
[10] Proverite !
[11] Ili generišući skup.
[12] Barem jedan od skalara α_i, $i=1,\ldots,n$ je različit od nule.
[13] a ponekad i naglašavati.

(i2) ako je $B = \{a_1, a_2\}$ dvočlan, tada je on linearno zavisan akko su vektori v_1 i v_2 proporcionalni, tj. ako postoji skalar $0 \neq \lambda$ takav da je $a_2 = \lambda\, a_1$.

(i3) redosled članova u skupu B ne utiče na linearnu (ne)zavisnost skupa B.

(i4) svaki podskup linearno nezavisnog skupa i sam je linearno nezavisan.

(i5) svaki nadskup linearno zavisnog skupa i sam je linearno zavisan.

Propozicija. *Neka je $B = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ podskup vektorskog prostora V koji ne sadrži nula vektor. Skup B je linearno zavisan akko postoji indeks $i > 1$ takav da je vektor a_i linearna kombinacija svojih prethodnika*[14].

Dokaz. Neka je vektor a_i linearna kombinacija prethodnika, tj. neka je $a_i = \alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2 + \cdots + \alpha_{i-1}\, a_{i-1}$, tada imamo netrivijalnu linearnu kombinaciju

$$\alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2 + \cdots + \alpha_{i-1}\, a_{i-1} + (-1)\, a_i + 0\, a_{i+1} + 0\, a_{i+2} + \cdots 0\, a_n = 0,$$

tako da je skup B linearno zavisan. Obratno, ako je skup B linearno zavisan postoji barem jedna netrivijalna veza oblika $\alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2 + \cdots + \alpha_n\, a_n = 0$. Ako u ovoj relaciji uočimo najveći indeks i takav da je $\alpha_i \neq 0$[15] tada je

$$0 = \alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2 + \cdots + \alpha_{i-1}\, a_{i-1} + \alpha_i\, a_i \quad \text{odakle je} \quad a_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\, a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i}\, a_2 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\, a_{i-1}\,,$$

tj. vektor a_i je linearna kombinacija svojih prethodnika. □

2.16. Teorema o bazi vektorskog prostora. Podskup B vektorskog prostora V koji je istovremeno njegov skup generatora i koji je linearno nezavisan zove se **baza** vektorskog prostora.

Osnovne činjenice o bazi vektorskog prostora date su u sledećoj fundamentalnoj teoremi.

Teorema (o bazi). *Neka je V proizvoljan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada,*

(i1) *postoji barem jedna baza B vektorskog prostora V.*

(i2) *ako su B_1 i B_2 dve proizvoljne baze vektorskog prostora V onda postoji bijekcija $f : B_1 \longrightarrow B_2$.*

Primedba. Tvrđenje (i2) iz prethodne Teoreme kaže da sve baze vektorskog prostora imaju 'jednak'[16] broj elemenata, što nam omogućuje da definišemo pojam dimenzije vektorskog prostora. Dakle, **dimenzija vektorskog prostora** V je kardinalni broj neke njegove baze. Kažemo da je V **konačnodimenzioni** vektorski prostor ako ima barem jednu konačnu bazu.

Kanonska baza. Podsetimo se, da u vektorskom prostoru $\mathbb{F}^n$ postoji najjednostavnija (najprirodnija) baza, $e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ gde je

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1). \tag{2.8}$$

koja se zove **kanonska baza**. Da je e linearno nezavisan vidimo iz

$$0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \alpha_1(1, 0 \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1 \ldots, 0) + \ldots \alpha_n(0, 0 \ldots, 1) = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n),$$

odakle je jasno $\alpha_1 = \alpha_2 \cdots = \alpha_n = 0$. e je skup generatora jer za proizvoljni vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ imamo,

$$x = (x_1, x_2 \ldots, x_n) = x_1(1, 0 \ldots, 0) + x_2(0, 1 \ldots, 0) + \ldots x_n(0, 0 \ldots, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Obeležimo sa $\mathbb{E}_{ij} \in \mathbb{M}_n$ matricu koja na preseku $i-$te vrste i $j-$te kolone ima 1, i sve ostale elemente jednake 0. Primetimo, da matrične elemente matrice $\mathbb{E}_{ij}$ možemo zapisati na sledeći način: $(\mathbb{E}_{ij})_{lk} = \delta_{il}\, \delta_{jk}$.
Analogno slučaju $\mathbb{F}^n$, kanonsku bazu u prostoru $\mathbb{M}_n$ čine matrice $\{\mathbb{E}_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, n\}$.

Važna napomena. Ako se u daljnjem tekstu (i zadacima) ne spominje dimenzija prostora pretpostavlja se da je ona konačna ili da ne utiče na dati iskaz.

Kako ćemo se u ovoj knjizi baviti konačnodimenzionim vektorskim prostorima daćemo dokaz tvrdnje iz (i2) Teoreme o bazama u konačnodimenzionom slučaju. Potpun dokaz teoreme o bazama može se naći npr. u knjizi S. Langa, *Algebra*. Da bismo dokazali (i2) iz Teoreme o bazama u konačnodimenzionom slučaju, pokažimo prvo sledeću lemu koja govori o vezi između nekog skupa generatora od V i nekog linearno nezavisnog skupa.

---

[14] tj. vektora $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$.

[15] Tada su svakako $\alpha_{i+1} = \alpha_{i+2} = \cdots = \alpha_n = 0$.

[16] tj. da postoji bijekcija sa jedne baze na drugu.

Lema. *Neka je $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ neki skup generatora vektorskog prostora V i neka je $S = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ linearno nezavisan podskup od V. Tada je $m \leq n$ i V je generisan skupom vektora*

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_m, a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n-m}}\}$$

Specijalno, svaki podskup od V, koji sadrži barem $n + 1$ vektor je linearno zavisan.

Dokaz. Posmatrajmo prvo skup $B_1 = \{b_1, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ovaj skup je linearno zavisan jer je nadskup skupa generatora, pa na osnovu 2.15 Propozicija postoji najmanji indeks i takav da je a_i linearna kombinacija prethodnih vektora $\{b_1, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$. Sada posmatrajmo skup $B_2 = \{b_1, b_2, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$. Skup B_2 je linearno zavisan iz istih razloga kao i B_1. Takođe, primetimo da je skup $\{b_1, b_2\}$ linearno nezavisan (kao podskup linearno nezavisnog skupa), tako da u ovom koraku ne može biti izbačen vektor b_2, i postoji najmanji indeks j takav da je a_j linearna kombinacija prethodnih vektora $\{b_1, b_2, a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}\}$ [17] Analogno nastavljamo dalje i u $k-$tom ($k \leq m$) koraku definišemo skup $B_k = \{b_1, b_2, \ldots b_k, a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n-k+1}}\}$. Skup B_k je linearno zavisan iz istih razloga kao i svi prethodni skupovi B_i. Primetimo takođe da je skup $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ linearno nezavisan (kao podskup linearno nezavisnog skupa), tako da u ovom koraku ne može biti izbačen niti jedan vektor iz skupa $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ i postoji najmanji indeks j_l takav da je a_{j_l} linearna kombinacija prethodnih vektora. Tako smo konstruisali novi skup generatora $\{b_1, b_2, \ldots b_k, a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{l-1}}, a_{j_{l+1}}, \ldots, a_{j_{n-k+1}}\}$. Ako je $m \leq n$ u $m.-$tom koraku [18] dolazimo do traženog oblika za skup generatora, jer je dovoljno primeniti rezultate $k.-$tog koraka (stavljajući $k = m$) uz zamenu indeksa vektora iz skupa B, koji prežive svih m izbacivanja.

Kada bi $n < m$, tada bismo u $n.-$tom koraku došli do skupa generatora $\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$, i dodajući tom skupu sledeći vektor dolazimo do skupa $B_{n+1} = \{b_1, b_2, \ldots b_n, b_{n+1}\}$ koji je linearno zavisan (kao nadskup skupa generatora $\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$) što je nemoguće jer je B_{n+1} podskup linearno nezavisnog skupa S. Ova kontradikcija pokazuje da ne može biti $n < m$. Time je završen dokaz ove leme. □

Koristeći sada ovu lemu, dobijamo (i2) iz Teoreme 1 za konačnodimenzionalne prostore kao njenu posledicu.

Dokaz (i2) iz Teoreme (o bazi) za konačnodimenzione prostore. Neka su $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ dve baze vektorskog prostora V. Primetimo da je dovoljno dokazati da je $n = m$, jer bijekcija između dva konačna skupa postoji akko ti skupovi imaju jednak broj elemenata. Kako je svaka baza vektorskog prostora linearno nezavisan skup i skup generatora, prvo primenimo prethodnu lemu na $B = e$ i $S = f$, odakle sledi da je $m \leq n$, a zatim primenimo lemu na $B = f$ i $S = e$, odakle sledi da je $n \leq m$. Prema tome, iz $m \leq n$ i $n \leq m$ sledi da je $n = m$ i tvrdnja je dokazana. □

2.17. Još neke teoreme o bazi konačnodimenzionog vektorskog prostora. Navedimo sada još nekoliko jednostavnih teorema o bazi konačnodimenzionih vektorskih prostora, koje su korisne i često se koristiti.

Teorema 1. *Neka je V vektorski prostor dimenzije n. Tada,*

(i1) *svaki podskup od V koji sadrži barem $n + 1$ vektora je linearno zavisan.*

(i2) *svaki linearno nezavisan skup $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je baza od V.*

(i3) *svaki skup generatora $\overline{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ od V, je i njegova baza.*

Dokaz. (i1) je dokazano u 2.16 Lema. Za (i2) dovoljno je izabrati neku bazu e od V i primeniti 2.16 Lema na $B = e$ i $S = a$, koja implicira da je skup a i skup generatora, pa je baza od V. (i3) kada $\overline{B}$ ne bi bio linearno nezavisan onda bi, na osnovu 2.15 Propozicija, postojao vektor b_i koji je linearna kombinacija prethodnih vektora, pa bismo ga mogli izbaciti iz $\overline{B}$ i dobijeni skup $\overline{B}'$ koji ima $n - 1$ element opet bi bio skup generatora. Ponavljajući ovu proceduru konačno mnogo puta došli bismo do skupa generatora $\widetilde{B}$ od V koji je linearno nezavisan, pa je prema tome baza od V, koja sadrži manje od n elemenata što je nemoguće jer je svaka baza od V ima n elemenata (2.16 Teorema (i2)). □

Teorema 2. *Neka je S skup generatora konačnodimenzionog vektorskog prostora V. Tada,*

(i1) *maksimalan broj linearno nezavisnih vektora u S je baza od V.*

(i2) *ako iz S izbacimo sve vektore koji su linearne kombinacije svojih prethodnika dobijamo bazu od V.*

Dokaz. Neka je $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ maksimalan linearno nezavisan podskup od S. Za proizvoljni $x \in S$ posmatrajmo skup $B_x = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, x\}$. Skup B_x je linearno zavisan, jer u suprotnom B ne bi bio

[17] ako je $j > i$ tada u linearnoj kombinaciji ne učestvuje vektor a_i koji je izbačen u prvom koraku.

[18] Stavimo $k = m$ i primenimo zaključke za $k.-$ti korak.

maksimalan linearno nezavisan podskup od S, i kako su vektori $a_1, a_2, \ldots, a_k$ linearno nezavisni vektor x je njihova linearna kombinacija. Ako sada iz skupa S izbacimo vektor x preostali skup je i dalje skup generatora. Kako je x proizvoljan vektor iz $S \setminus B$ zaključujemo da je skup B skup generatora od V, pa je time i baza.

(i2) ako iz S izbacimo sve vektore koji su linearne kombinacije svojih prethodnika dobijamo maksimalan linearno nezavisan podskup od S, i primenom (i1) zaključujemo da je taj skup baza vektorskog prostora V. □

Teorema 3. *Neka je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ linearno nezavisan podskup vektorskog prostora V dimenzije n. Tada je S podskup neke baze od V, tj. S je moguće nadopuniti nekim vektorima do baze od V.*

Dokaz. Neka je $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ neka baza od V. Iz skupa generatora $S' = \{a_1, a_2, \ldots, a_r, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ od V izbacimo sve vektore koji su linearne kombinacije svojih prethodnika i na osnovu (i2) iz Teoreme 2 zaključujemo da je dobijeni skup S'' baza od V. Primetimo da vektori $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ne mogu biti izbačeni jer su linearno nezavisni, tako da je $S'' = \{a_1, a_2, \ldots, a_r, e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-r}}\}$, i dokaz je gotov. □

5. Potprostor

2.18. Definicija potprostora. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je L podskup od V. L je potprostor od V ako je i sam vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ s obzirom na iste operacije sabiranja vektora i množenja vektora sa skalarima kao u V.

Da bismo našli efektivnu karakterizaciju[19] potprostora potrebno je ispitati koja svojstva definisana u aksioma vektorskog prostora su nasledna, tj. prelaze sa skupa na podskup. Nije se teško uveriti da su to asocijativnost i komutativnost sabiranja i aksiome (VP2)-(VP5). Tako da lako dobijamo sledeću karakterizacionu teoremu.

Teorema (Karakterizacije potprostora). *Neka je $\emptyset \neq L$ podskup vektorskog prostora V. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

(i1) *L je potprostor vektorskog prostora V,*

(i2) (a) *za proizvoljne vektore x, y iz L i njihova suma $x + y$ pripada L,*
(b) *za proizvoljni vektor x iz L i skalar $\alpha \in \mathbb{F}$ vektor $\alpha\, x$ pripada L,*

(i3) *za proizvoljne vektore x, y iz L i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ vektor $z = \alpha\, x + \beta\, y$ pripada L,*

(i4) *za proizvoljne vektore x, y iz L i skalar $\alpha \in \mathbb{F}$ vektor $z = \alpha\, x + y$ pripada L.*

Dokaz. (i1) Ako je L potprostor tada je on zatvoren na operacije sabiranja vektora množenja vektora sa skalarom pa lako slede (i2), (i3) i (i4). Iz (i2) sledi (i3) jer prvo zbog uslova (b) sledi da vektori $\alpha\, x$ i $\beta\, y$ pripadaju L a zatim zbog (a) sledi da i njihova suma pripada L što dokazuje (i3). Slično se vidi da iz (i2) sledi i (i4). Primetimo da iz (i2) sledi (i1) jer su preostale aksiome nasledne osim eventualno neutrala za sabiranje i inverza za sabiranje. Kako je $\emptyset \neq L$ na osnovu svojstva (b) sledi da je za neki vektor $y \in L$ i $0 \in \mathbb{F}$ vektor $0 \cdot y = 0 \in L$. Dakle, $0 \in L$, pa je nula vektor jasno neutral i u L, a za $y \in L$ je i vektor $(-1) \cdot y = -y$ u L. Odakle, sledi da je L potprostor. Da iz (i3) sledi (i2) vidi se izborom skalara α i β : za svojstvo (a) dovoljno je uzeti $\alpha = \beta = 1$, a za (b) dovoljno je uzeti $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Slično iz (i3) sledi (i4) izborom $\beta = 1$. Na kraju, pokažimo da iz (i4) sledi (i2). Prvo uz izbor $y = x$ i $\alpha = -1$ sledi da je $0 \in L$, a zatim izborom $\alpha = 1$ dobijamo uslov (a) iz (i2). Uslov (b) dobijamo ako izaberemo $y = 0$.
Time je u potpunosti dokazana teorema. □

Primer 1. Pokažimo da je $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 4\, x_3 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^3$ dimenzije 2.
Neka su $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni elementi tada je: $x_1 - x_2 + 4\, x_3 = 0$ i $y_1 - y_2 + 4\, y_3 = 0$.
Kako je $\alpha\, x + \beta\, y = z = (z_1, z_2, z_3) = (\alpha\, x_1 + \beta\, y_1, \alpha\, x_2 + \beta\, y_2, \alpha\, x_3 + \beta\, y_3)$, imamo:

$$z_1 - z_2 + 4\, z_3 = \alpha\, x_1 + \beta\, y_1 - (\alpha\, x_2 + \beta\, y_2) + 4\,(\alpha\, x_3 + \beta\, y_3) = \alpha\,(x_1 - x_2 + 4\, x_3) + \beta\,(y_1 - y_2 + 4\, y_3) = 0.$$

Dakle, V je zaista potprostor od $\mathbb{R}^3$. Sada nađimo jednu njegovu bazu. Neka je $x \in V$ tada redom imamo:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 4\, x_3, x_2, x_3) = x_2\,(1, 1, 0) + x_3\,(-4, 0, 1) = x_2\, a + x_3\, b,$$

odakle vidimo da vektori $a = (1, 1, 0)$ i $b = (-4, 0, 1)$ razapinju V, a lako se proveri da su i linearno nezavisni pa je skup $\{a, b\}$ baza od V, i dimenzija od V jednaka je 2.

[19] tj. neke potrebne i dovoljne uslove

Primedba 1. Geometrijski (vidi 1.28) znamo da uslov kojim je definisan skup V predstavlja ravan koja prolazi kroz koordinatni početak (nula vektor). Nije teško videti da samo ravni, koje sadrže nula vektor, predstavljaju vektorske potprostore u $\mathbb{R}^n$.

Primer 2. Pokažimo da su skupovi $\mathcal{S}_2$ i $\mathcal{K}_2$ kvadratnih 2×2 simetričnih i kososimetričnih matrica vektorski potprostori od $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ i nađimo neke njihove baze.
Da su $\mathcal{S}_2$ i $\mathcal{K}_2$ potprostori direktno sledi iz definicije i svojstava transponovanja. Nađimo sada neku bazu od $\mathcal{S}_2 = \{\mathcal{A} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathcal{A} = \mathcal{A}^\tau\}$. Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_2$, tada je

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \mathcal{A}^\tau, \text{ odakle sledi da je } a = a,\ b = c,\ c = b,\ d = d, \text{ i vidimo da je}$$

$$\mathcal{A} = a\,\mathcal{E}_1 + b\,\mathcal{E}_2 + d\,\mathcal{E}_3, \text{ gde je } \quad \mathcal{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathcal{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathcal{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle vidimo da matrice $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ i $\mathcal{E}_3$ generišu $\mathcal{S}_2$, a lako se vidi da je taj skup linearno nezavisan te je $\dim \mathcal{S}_2 = 3$.
Analogno nalazimo da je potprostor $\mathcal{K}_2$ razapet sa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, te mu je dimenzija jednaka 1.

Sada formulišimo sledeću propoziciju, koja ne važi ako je V beskonačno dimenzioni vektorski prostor.

Propozicija. *Neka je L potprostor konačnodimenzionog vektorskog prostora V. Tada je $\dim L \le n = \dim V$. Specijalno, ako je $\dim L = n$ tada je $L = V$.*

Dokaz. Primetimo da proizvoljna baza od L ne može sadržavati više od n elemenata, jer je svaki podskup vektorskog prostora V koji ima više od n elemenata, linearno zavisan (2.17 Teorema 1. (i1)), pa kao takav ne bi mogao biti baza od L. Dakle, $\dim L \le n$.
Ako je $\dim L = n$ tada L ima bazu B_L koja se sastoji od n elemenata i kako je to linearno nezavisan skup on je zbog 2.17 Teorema 1. (i2) baza od V, tako da je $L = V$. □

Primedba. Primenom 2.17 Teorema 3 na proizvoljnu bazu B_L potprostora L zaključujemo da se ona može nadopuniti do baze za čitav prostor.

2.19. Presek potprostora. Direktan proizvod potprostora. U mnogim matematičkim oblastima postoje slični načini konstrukcije novih podstruktura iz datih. Jedan od najklasičniji je dat u sledećoj teoremi.

Teorema 1. *Neka je $\mathcal{F} = \{L_i, i \in I\}$ familija*[20] *potprostora vektorskog prostora V. Tada je i*

$$L = \bigcap_{i \in I} L_i \qquad \text{potprostor od } V.$$

Dokaz. Dovoljno je proveriti neke od ekvivalentnih uslova iz prethodne teoreme. Proverimo uslove (i3), dakle neka su x, y proizvoljni vektori iz L i α, β proizvoljni skalari. Tada redom imamo niz ekvivalencija:

$$x, y \in L \text{ i } \alpha, \beta \in \mathbb{F} \iff x, y \in L_i\ (\forall\, i \in I) \text{ i } \alpha, \beta \in \mathbb{F} \overset{L_i \text{ je potpr.}}{\iff} \alpha\, x + \beta\, y \in L_i,\ (\forall i \in I)$$
$$\iff \alpha\, x + \beta\, y \in L. \qquad \square$$

Drugi način da od poznatih vektorskih prostora nad istim poljem $\mathbb{F}$ dobijamo nove je direktan proizvod prostora. Neka su V i W dva vektorska prostora nad $\mathbb{F}$. Tada na njihovom Dekartovom proizvodu, $V \times W$, definišemo sabiranje vektora i množenje vektora sa skalarom:

(s) $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 +_v v_2, w_1 +_w w_2)$, gde su $v_1, v_2 \in V$ i $w_1, w_2 \in W$,

(ms) $\lambda \cdot (v, w) = (\lambda \cdot_v v, \lambda \cdot_w w)$, gde su $v \in V$, $w \in W$ i $\lambda \in \mathbb{F}$.

Teorema 2. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, tada je $(V \times W, \mathbb{F}, +, \cdot)$ takođe vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.*

Dokaz. Potrebno je proveriti aksiome vektorskog prostora (VP1)-(VP5).

[20] I je proizvoljan neprazan skup.

(VP1): $(V\times W,+)$ je Abelova grupa, tj. za sve $v,v_1,v_2,v_3\in V,\ \ w,w_1,w_2,w_3\in W$, imamo

Asoc.: $((v_1,w_1)+(v_2,w_2))+(v_3,w_3) = (v_1+_v v_2, w_1+_w w_2)+(v_3,w_3) = ((v_1+_v v_2)+_v v_3,(w_1+_w w_2)+_w w_3)$

$= \left\{\begin{matrix}\text{asocijativnost važi u } V \text{ i } W\\ \text{jer su vektorski prostori}\end{matrix}\right\} = (v_1+_v(v_2+_v v_3), w_1+_w(w_2+_w w_3)) = (v_1,w_1)+(v_2,+_v v_3, w_2+_w w_3)$

$= (v_1,w_1)+((v_2,w_2)+(v_3,w_3))$.

neut.: $(v,w)+(0_v,0_w) = (v+_v 0_v, w+_w 0_w) = (v,w) = (0_v+v, 0_w+w) = (v,w)+(0_v,0_w)$

tj. neutral u $V\times W$ je $(0_v,0_w)$ gde su 0_v i 0_w neutralni elementi u $(V,+)$ i $(W,+)$, redom.

inv.: $(v,w)+(-v,-w) = ((v+_v(-v), w+_w(-w)) = (0_v,0_w) = ((-v)+_v v,(-w)+_w w)) = (-v,-w)+(v,w)$

tj. inverz od (v,w) u $V\times W$ je $(-v,-w)$ gde su $-v$ i $-w$ inverzi od v i w u $(V,+)$ i $(W,+)$, redom.

komu.: $(v_1,w_1)+(v_2,w_2) = (v_1+_v v_2, w_1+_w w_2) = \left\{\begin{matrix}\text{komutativnost važi u } V \text{ i } W\\ \text{jer su vektorski prostori}\end{matrix}\right\} = (v_2+_v v_1, w_2+_w w_1)$

$= (v_2,w_2)+(v_1,w_1)$.

Slično, proveravamo i ostale aksiome, tj. $v,v_1,v_2\in V,\ \ w,w_1,w_2\in W$, i $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, redom imamo

(VP2): $\alpha\cdot(\beta\cdot(v,w)) = \alpha\cdot(\beta\cdot_v v,\beta\cdot_w w) = (\alpha\cdot_v(\beta\cdot_v v),\alpha\cdot_w(\beta\cdot_w w)) = \left\{\begin{matrix}\text{(VP2) važi u } V \text{ i } W\\ \text{jer su vekt. prostori}\end{matrix}\right\} = ((\alpha\,\beta)\cdot_v v,(\alpha\,\beta)\cdot_w w)$

$= (\alpha\,\beta)\cdot(v,w)$.

(VP3): $(\alpha+\beta)\cdot(v,w) = ((\alpha+\beta)\cdot_v v,(\alpha+\beta)\cdot_w w) = (\alpha\cdot_v v+\beta\cdot_v v,\alpha\cdot_w w+\beta\cdot_w w) = \left\{\begin{matrix}\text{(VP3) važi u } V \text{ i } W\\ \text{jer su vekt. prostori}\end{matrix}\right\}$

$= (\alpha\cdot_v v,\alpha\cdot_w w)+(\beta\cdot_v v,\beta\cdot_w w) = \alpha\cdot(v,w)+\beta\cdot(v,w)$.

(VP4): $\alpha\cdot((v_1,w_1)+(v_2,w_2)) = \alpha\cdot(v_1+_v v_2, w_1+_w w_2) = (\alpha\cdot(v_1+_v v_2),\alpha\cdot(w_1+_w w_2)) = \left\{\begin{matrix}\text{(VP4) važi u } V \text{ i } W\\ \text{jer su vekt. prostori}\end{matrix}\right\}$

$= (\alpha\cdot_v v_1+\alpha\cdot_v v_2,\alpha\cdot_w w_1+\alpha\cdot_w w_2) = (\alpha\cdot_v v_1,\alpha\cdot_w w_1)+(\alpha\cdot_v v_1+\alpha\cdot_w w_2) = \alpha\cdot(v_1,w_1)+\alpha\cdot(v_2,w_2)$.

(VP5): $1\cdot(v,w) = (1\cdot_v v, 1\cdot_w w) = \left\{\begin{matrix}\text{(VP5) važi u } V \text{ i } W\\ \text{jer su vekt. prostori}\end{matrix}\right\} = (v,w)$.

Time je završen dokaz. □

Napomenimo da ćemo iz oznaka za sabiranje $(+)$ i množenje $(\cdot)$ ubuduće izostavljati oznake skupova na kojem one deluju. Štaviše često ćemo kod svih vrsta množenja izostavljati i $\cdot$.

Primedba 1. Ovako definisan proizvod vektorskih prostora zove se i spoljašnji direktni proizvod vektorskih prostora V i W, jer ne pretpostavljamo da su V i W potprostori nekog vektorskog prostora. Uskoro ćemo videti i konstrukciju unutrašnjeg direktnog proizvoda kada ćemo pretpostavljati da su V i W vektorski potprostori nekog vektorskog prostora.

Primedba 2. Prethodna konstrukcija može se uopštiti na proizvoljnu familiju

$$\mathcal{F} = \{V_i \mid V_i \text{ je vektorski prostor nad poljem } \mathbb{F}, i\in I\},\quad \text{gde je } I \text{ neki neprazni skup indeksa.}$$

U tom slučaju uobičajena oznaka za direktan proizvod familije $\mathcal{F}$ je $\prod_{i\in I} V_i$, a operacije sabiranja i množenja definišu se po komponentama, tj.

(s) $(v_i)_{i\in I}+(w_i)_{i\in I} = (v_i+_i w_i)_{i\in I}$, gde su $v_i,w_i\in V_i$, za sve $i\in I$

(ms) $\lambda\cdot(v_i)_{i\in I} = (\lambda\cdot_i v_i)_{i\in I}$ gde su $v_i\in V_i$, i $\lambda\in\mathbb{F}$.

Napomenimo da skup indeksa I može biti i beskonačan.

Primedba 3. Ako malo analiziramo vektorski prostor $\mathbb{F}^n$ tada lako možemo zaključiti da je on jedan specijalni slučaj direktnog proizvoda od n primeraka vektorskog prostora $\mathbb{F}$ nad $\mathbb{F}$, tj.

$$\mathbb{F}^n = \underbrace{\mathbb{F}\times\mathbb{F}\times\cdots\times\mathbb{F}}_{n-\text{ primeraka}}.$$

2.20. Lineal. Ako je $S\subseteq V$ proizvoljan podskup vektorskog prostora V, tada postoji najmanji potprostor od V koji sadrži skup S, koji se naziva lineal nad skupom S i za kojeg koristimo oznaku $\mathcal{L}(S)$.

Neke od očiglednih osobina lineala sadržane su u sledećoj propoziciji.

Propozicija. *Neka su* S *i* S_1 *neki podskupovi vektorskog prostora* V*. Tada,*

(i1) *ako je* S *potprotor od* V *onda je* $\mathcal{L}(S) = S$.

(i2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$.

(i3) *ako je* $S \subseteq S_1$ *tada je* $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(S_1)$.

Eksplicitan opis lineala dat je u sledećoj teoremi.

Teorema. *Neka je* S *neki podskup vektorskog prostora* V*. Tada je*

$$\mathcal{L}(S) = \bigcap_{\substack{M \text{ potpr. od } V \\ S \subseteq M}} M = \left\{\alpha_1\, a_{i_1} + \cdots + \alpha_k\, a_{i_k} \middle| k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{F},\, a_{i_j} \in S\right\},$$

tj., $\mathcal{L}(S)$ *je skup svih linearnih kombinacija elemenata iz* S.

Dokaz. Iz definicije je jasno da je $\mathcal{L}(S)$ jednak preseku svih potprostora od V koji sadrže skup S. Ako obeležimo skup sa desne strane gornje jednakosti sa L, vidimo da on sadrži sve elemente skupa S (kao jednočlane linearne kombinacije sa skalarom 1), tj. $S \subseteq L$. Da je L potprostor lako sledi jer zbir dva vektora koji su linearne kombinacije vektora iz L dužina n i m je linearna kombinacija dužine manje ili jednake $n+m$. Proizvod skalara $\lambda \in \mathbb{F}$ i linearne kombinacije vektora iz S opet je linearna kombinacija istih vektora. Ako je M neki potprostor od V koji sadrži S onda M (jer je potprostor) mora sadržavati bilo koju linearnu kombinaciju vektora iz S, tj. $L \subseteq M$. Drugim rečima L je najmanji potprostor koji sadrži skup S, pa se podudara sa linealom $\mathcal{L}(S)$. $\square$

Primer. Primetimo da:

(i1) ako je $0 \neq a_1 \in V$ da je tada $\mathcal{L}(a_1)$ jednodimenzioni potprostor od V, kojeg nazivamo vektorska prava ili samo prava od V,

(i2) ako su a_1 i a_2 linearno nezavisni vektori od V, tada je $\mathcal{L}(a_1, a_2)$ dvodimenzioni potprostor od V, kojeg nazivamo vektorska ravan ili samo ravan od V.

Nastavljajući na analogan način vidimo da je vektorski prostor V lineal nad bilo kojom svojom bazom B, tj. $V = \mathcal{L}(B)$.

6. Suma potprostora i faktor prostor

2.21. Suma potprostora. Neka su L i M potprostori konačnodimenzionog vektorskog prostora V. Suma potprostora L i M je najmanji potprostor od V koji sadrži L i M, dakle, $L + M = \mathcal{L}(L \cup M)$.
Za sumu potprostora L i M kažemo da je direktna ako je $L \cap M = \{0\}$.
Oznake koje se u literaturi najčešće koriste za direktnu sumu su $L \oplus M$ i $L \dot{+} M$.
Ako je $L \oplus M = V$ onda kažemo da je M direktni komplement od L u V i da je L direktni komplement od M u V.

Teorema 1. *Neka su* L *i* M *potprostori vektorskog prostora* V*. Tada je*

$$L + M = \mathcal{L}(L \cup M) = \{v \,|\, v = l + m, l \in L,\, m \in M\}.$$

Dokaz. Obeležimo sa $N = \{v \,|\, v = l + m, l \in L,\, m \in M\}$. Dovoljno je pokazati da je N najmanji potprostor od V, koji sadrži skupove L i M. Prvo proverimo da je N potprostor: neka su $x = l_1 + m_1$ i $y = l_2 + m_2$ elementi skupa N i neka su α, β skalari iz $\mathbb{F}$, tada imamo redom

$$z = \alpha\, x + \beta\, y = \alpha\,(l_1 + m_1) + \beta\,(l_2 + m_2) = (\alpha\, l_1 + \beta\, l_2) + (\alpha\, m_1 + \beta\, m_2) = l + m,$$

gde je $l = \alpha\, l_1 + \beta\, l_2 \in L$ i $m = \alpha\, m_1 + \beta\, m_2 \in M$, jer su L i M potprostori. Odavde odmah sledi (vidi 2.18 Teorema) da je N je potprostor. Očigledno N sadrži L jer $L \ni l = l + 0 \in N$. Slično se vidi da N sadrži i M. Ako je W potporstor od V koji sadrži potprostore L i M, tada W mora sadržavati[21] sve vektore oblika $l + m$ $(l \in L, m \in M)$, tj. $N \subseteq W$. I dokaz je gotov. $\square$

Važi i sledeća propozicija koja daje karakterizaciju direktne sume vektorskih potprostora.

Propozicija. *Neka je* V *vektorski prostor. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni :*

[21] vidi **3.7** Teorema (i2).

(i1) *suma* $L+M$ *je direktna,*

(i2) *svaki vektor iz* $L+M$ *ima jedinstven prikaz u obliku zbira jednog vektora iz* L *i jednog iz* M*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je suma $L+M$ direktna, i neka neki vektor $x \in L+M$ ima prikaze $x = l + m = l_1 + m_1$, gde su $l, l_1 \in L$ i $m, m_1 \in M$. Iz ove relacije odmah sledi da je vektor $y = l - l_1 = m_1 - m$, u $L \cap M = \{0\}$ (jer $l - l_1 \in L$ i $m_1 - m \in M$), tj. $l = l_1$ i $m = m_1$.
Obratno, ako je $0 \neq x \in L \cap M$, tada vektori x i 0 pripadaju i L i M, pa vektor x ima barem dva prikaza u obliku: $x = x + 0 = 0 + x$ što je u kontradikciji sa jedinstvenošću tog prikaz u obliku zbira jednog vektora iz L i jednog iz M. Dakle, $L \cap M = \{0\}$. □

U sledećoj teoremi dokazujemo poznatu Grasmanovu formulu, koja dovodi u vezu dimenzije sume i preseka dva vektorska potprostora sa njihovim dimenzijama. Preciznije važi,

Teorema 2 *Neka su* L *i* M *potprostori vektorskog prostora* V *dimenzije* n*. Tada važi sledeća formula*

$$\dim(L+M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M). \tag{2.9}$$

Formula (5) zove se Grasmanova formula.

Dokaz. Konstruišimo bazu od $L+M$. Neka je $B_{L\cap M} = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ baza potprostora $L \cap M$ koju, nadopunimo (2.17 Teorema 3.) vektorima $\{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_l\}$ do baze $B_L = \{c_1, c_2, \ldots, c_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_l\}$ od L i vektorima $\{b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_m\}$ do baze $B_M = \{c_1, c_2, \ldots, c_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_m\}$ od M.

Tvrdimo da je skup $B = \{c_1, c_2, \ldots, c_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_l, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_m\}$, baza potprostora $L+M$.

Kako B sadrži baze potprostora L i M, skup B je generator potprostora $L+M = \mathcal{L}(L \cup M)$ i preostaje nam da pokažemo njegovu linearnu nezavisnost. Posmatrajmo relaciju,

$$\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \alpha_{k+2} a_{k+2} + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_{k+1} b_{k+1} + \beta_{k+2} b_{k+2} + \cdots + \beta_m b_m = 0,$$

koju možemo prepisati u ekvivalentnom obliku,

$$x = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \alpha_{k+2} a_{k+2} + \cdots + \alpha_l a_l = -(\beta_{k+1} b_{k+1} + \beta_{k+2} b_{k+2} + \cdots + \beta_m b_m),$$

odakle zaključujemo da je $x \in L$ [22] i $x \in M$, [23] tj. $x \in L \cap M$, tako da imamo

$$x = \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2 + \cdots + \delta_k c_k = -(\beta_{k+1} b_{k+1} + \beta_{k+2} b_{k+2} + \cdots + \beta_m b_m), \qquad \text{ili ekvivalentno}$$

$$0 = \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2 + \cdots + \delta_k c_k + \beta_{k+1} b_{k+1} + \beta_{k+2} b_{k+2} + \cdots + \beta_m b_m. \tag{2.10}$$

Iz poslednje relacije (2.10) sledi da je $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_k = \beta_{k+1} = \cdots = \beta_m = 0$ jer je skup B_M baza pa je specijalno i linearno nezavisan. Odavde sledi da je $x = 0$. I na kraju ako iskoristimo da je $x \in L$, tj. da je linearna kombinacija vektora baze B_L zaključujemo da je i $\gamma_1 = \cdots = \gamma_k = \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} \cdots = \alpha_m = 0$ tj. skup B je i linearno nezavisan pa je samim tim i baza vektorskog prostora $L+M$. Formula za dimenzije sada sledi prebrajanjem baza odgovarajućih potprostora, tj.

$$\dim(L+M) = l + (m-k) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M)\,.$$ □

Primetimo da iz prethodne teoreme možemo dobiti još jednu karakterizaciju direktne sume potprostora.

Posledica. $L+M$ je direktna akko je $\dim(L+M) = \dim L + \dim M$.

Dokaz. Suma potprostora $L+M$ je direktna akko je $L \cap M = \{0\}$, a to je ekvivalentno sa $\dim L \cap M = 0$. □

Primedba. Iz 2.17 Teorema 3 jasno je da za svaki potprostor L od V postoji njegov direktni komplement, tj. potprostor M takav da je $L \oplus M = V$. Sa $M = V \ominus L$ obeležavamo direktni komplement od L u V. Očigledno, direktni komplement nije jedinstven, ali je dimenzija svih direktnih komplemenata jedinstvena: $\dim M = \dim V - \dim L$.

Primer 1. U $\mathbb{R}^3$, posmatrajmo potprostor $L = \mathcal{L}(\{e_1, e_2\})$, gde su e_1 i e_2 vektori kanonske baze. Tada znamo da je dimenzija svakog direktnog komplementa jednaka 1. Neki direktni komplementi [24] su:

$$M_1 = \mathcal{L}\big(\{(0,0,1)\}\big), \quad M_2 = \mathcal{L}\big(\{(1,1,1)\}\big), \quad M_3 = \mathcal{L}\big(\{(2,-1,1)\}\big), \ldots$$

Primer 2. U tački 2.18 pokazali smo da su skupovi $\mathcal{S}_2$ i $\mathcal{K}_2$ simetričnih i koso simetričnih matrica potprostori vektorskog prostora $\mathbb{M}_2$. Pokažimo da je suma $\mathcal{S}_2 + \mathcal{K}_2$ direktna i jednaka $\mathbb{M}_2$.
Posledica: svaka se matrica može zapisati kao zbir jedne simetrične i jedne kososimetrične matrice.

[22] kao linearna kombinacija vektora baze B_L.
[23] kao linearna kombinacija nekih vektora baze B_M.
[24] Šta je zajedničko svim vektorima sa kojima su određeni svi direktni komplementi od V?

Kako je $\mathcal{S}_2 \cap \mathcal{K}_2 = \{\mathcal{A} \,|\, \mathcal{A} = \mathcal{A}^\tau = -\mathcal{A}\} = \{0\}$, suma je direktna i imamo,

$$\dim(\mathcal{S}_2 + \mathcal{K}_2) = 4 \text{ tako da je } \mathcal{S}_2 \oplus \mathcal{K}_2 = \mathbb{M}_2(\mathbb{R}). \text{ Traženi prikaz je: } \mathcal{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^\tau)}_{\in \mathcal{S}_2} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^\tau)}_{\in \mathcal{K}_2}.$$

Ista dekompozicija važi i u proizvoljnoj dimenziji, tj. $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{K}_n = \mathbb{M}_n$.

Primer 3. Neka je $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ vektorski prostor svih kvadratnih matrica reda n i neka je $\mathsf{DT}_n = \{\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \mid \alpha_{ij} = 0, \text{za } i < j\}$ skup donje trougaonih matrica i $\mathsf{GT}_n = \{\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \mid \alpha_{ij} = 0, \text{za } i > j\}$ skup gornje trougaonih matrica. Nije teško videti da su DT_n i GT_n potprostori, ispitajmo da li je suma $\mathsf{DT}_n + \mathsf{GT}_n$ direktna. Da bismo ispitali da li je $\mathsf{DT}_n + \mathsf{GT}_n$ direktna, potrebno je da odredimo $\mathsf{DT}_n \cap \mathsf{GT}_n$.
Bazu potprostora DT_n čine matrice kanonske baze $\mathbb{E}_{ij}\,(i \geq j)$. Slično važi i za GT_n, tj. bazu čine matrice $\mathbb{E}_{ij}\,(i \leq j)$. Tako da je

$$\dim \mathsf{DT}_n = \dim \mathsf{GT}_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{pa je}$$

$$\dim \mathsf{DT}_n + \dim \mathsf{GT}_n = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) > n^2 = \dim \mathbb{M}_n,$$

i suma potprostora DT_n i GT_n nije direktna. Lako se vidi da se presek potprostora DT_n i GT_n sastoji od dijagonalnih matrica $(\mathbb{E}_{ii}, i = 1, 2, \ldots, n)$, odakle je $\dim(\mathsf{DT}_n \cap \mathsf{GT}_n) = n$. Dakle svaka matrica moći će se prikazati kao suma donje i gornje trougaone matrice, ali prikaz neće biti jedinstven kao što pokazuje sledeći primer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\in \mathsf{GT}_n} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathsf{DT}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathsf{GT}_n} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}}_{\in \mathsf{DT}_n}.$$

Algoritam za nalaženje baze sume i preseka potprostora. Neka je V proizvoljni vektorski prostor i M, N njegovi potprostori $(\dim M \geq \dim N)$, neka je $B_M = \{a_1, \ldots, a_k\}$ neka baza od M, a $B_N = \{b_1, \ldots, b_l\}$ baza od N. Bazu vektorskog prostora $M + N$ dobijamo na sledeći način:

(i1) prvo definišemo skup $B_0 = B_M$, zatim proverimo da li je skup $\mathbb{B}_M \cup \{b_1\}$ linearno nezavisan; ako jeste onda definišemo $B_1 = B_0 \cup \{b_1\}$, ako nije onda stavimo $B_1 = B_0$. Sada nastavimo analogno dalje, tj. ispitamo da li je skup $B_1 \cup \{b_2\}$ linearno nezavisan; ako jeste onda definišemo $B_2 = B_1 \cup \{b_2\}$, a ako nije onda stavimo $B_2 = B_1$, itd. Jasno, $B_l = B_{M+N}$ biće jedna baza vektorskog prostora $M + N$.
(i2) Pretpostavimo sada da je $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s\}$ jedna baza od $M + N$ (ovo možemo pretpostaviti jer nakon određivanja baze od $M + N$ vektore iz N u toj bazi samo eventualno prenumerišemo) i neka je dalje

$$b_j = \underbrace{\alpha_{j1}\, a_1 + \alpha_{j2}\, a_2 + \cdots + \alpha_{jk}\, a_k}_{e_j} + \underbrace{\beta_{j1}\, b_1 + \cdots + \beta_{js}\, b_s}_{f_j} = e_j + f_j,\ j = s+1, \ldots, l.$$

Tada je $\{e_j,\ j = s+1, \ldots, l\}$ jedna baza od $M \cap N$.

Da bismo se uverili da je tvrđenje (i2) tačno, primetimo da su $e_j \in M$ i $e_j \in N$, ima ih $l - s$ koliko i treba (zbog Grasmanove formule), tako da je samo potrebno proveriti da su linearno nezavisni. Zaista,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_{s+1}\, e_{s+1} + \lambda_{s+2}\, e_{s+2} + \cdots + \lambda_l\, e_l = \lambda_{s+1}\,(b_{s+1} - f_{s+1}) + \lambda_{s+2}\,(b_{s+2} - f_{s+2}) + \cdots + \lambda_l\,(b_l - f_l) \\ &= \lambda_{s+1}\, b_{s+1} + \cdots + \lambda_l b_l - (\underbrace{\lambda_{s+1}\, f_{s+1} + \cdots + \lambda_l\, f_l}_{\in \mathcal{L}(\{b_1, b_2, \cdots, b_s\})}), \end{aligned}$$

kako su $b_1, \ldots, b_l$ linearno nezavisni odmah sledi $\lambda_{s+1} = \lambda_{s+2} = \cdots = \lambda_l = 0$. Prema tome vektori $e_{s+1}, \ldots, e_l$ su linearno nezavisni.

2.22. Faktor prostor. [25] Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je L potprostor od V, tada uvodimo relaciju $\sim_L$ na V na sledeći način: $x \sim_L y$ akko je $x - y \in L$. Lako se uveriti da je ovo relacija ekvivalencije na V. Njene klase ekvivalencije su $[x]_L = \{y \in L \mid x \sim_L y\}$, i sa $V/L = \{[x]_L,\, x \in V\}$ obeležimo

[25] Sinonimi koji se još koriste u literaturi: količnički, kvocijentni prostor.

skup svih klasa ekvivalencije relacije $x \sim_L y$. Na skupu V/L definišemo operacije sabiranja vektora i množenje vektora sa skalarom koristeći odgovarajuće operacije na V:

(s) $[x]_L +_L [y]_L = [x+y]_L, \quad x, y \in V,$

(m) $\alpha \cdot_L [x]_L = [\alpha \cdot x]_L, \quad x \in V,\ \alpha \in \mathbb{F}.$

Operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarima dobro definisane, tj. ne zavise od izbora predstavnika,

$$(s)\ [x]_L = [x']_L,\ [y]_L = [y']_L \iff x - x', y - y' \in L \text{ odakle je } x - x' + y - y' = x + y - (x' + y') \in L$$
$$\iff [x+y]_L = [x'+y']_L,$$
$$(m)\ [x]_L = [x']_L \iff x - x' \in L \iff \alpha \cdot (x - x') \in L \iff \alpha \cdot x - \alpha \cdot x' \in L \iff [\alpha \cdot x]_L = [\alpha \cdot x']_L.$$

Umesto $[x]_L$ koristićemo kraću oznaku $[x]$ kada iz konteksta bude jasno o kojem se potprostoru radi.

Teorema 1. *$V/L = (V/L, +_L, \cdot_L)$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.*

Dokaz. Potrebno je proveriti aksiome vektorskog prostora. Prvo proverimo asocijativnost sabiranja vektora. Neka su $[x], [y]$ i $[z]$ proizvoljni vektori, tada imamo redom

$$([x] +_L [y]) +_L [z] = [x+y] +_L [z] = [(x+y)+z] = [x+(y+z)] = [x] +_L [y+z] = [x] +_L ([y] +_L [z]).$$

Komutativnost sabiranja vektora dokazuje sa analogno kao asocijativnost. Očigledno, neutral za sabiranje vektora je klasa $[0] = L$. Inverz sa sabiranje klase $[x]$ je klasa $[-x]$. Od preostalih aksioma (VP2)-(VP5), pokažimo (VP4). Imamo,

$$\alpha \cdot_L ([x]_L + [y]) = \alpha \cdot_L [x+y] = [\alpha \cdot (x+y)] = [\alpha \cdot x + \alpha \cdot y] = [\alpha \cdot x] +_L [\alpha \cdot y] = \alpha \cdot_L [x] +_L \alpha \cdot_L [y].$$

Preostale aksiome proveravaju se analogno, i ostavljamo ih za vežbu čitaocu. □

U sledećoj teoremi rešavamo problem efektivnog pronalažnja baze faktor prostora.

Teorema 2. *Neka je L potprostor $n-$dimenzionog vektorskog prostora V, neka je $B_L = \{a_1, \ldots, a_l\}$ baza od L, i neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n\}$ neka njena dopuna do baze od V. Tada je skup $B_{V/L} = \{[a_{k+1}], [a_{k+2}], \ldots, [a_n]\}$ baza faktor prostora V/L i važi formula $\dim V/L = \dim V - \dim L$.*

Dokaz. Potrebno je pokazati da je skup $B_{V/L}$ linearno nezavisan skup generatora od V/L.
Linearna nezavisnost sledi iz

$$[0] = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i\,[a_i] = \sum_{i=k+1}^{n} [\alpha_i\, a_i] = \left[\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i\, a_i\right], \quad \text{pa je} \quad \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i\, a_i \in L, \quad \text{i kako je } B_L \text{ baza od } L \text{ biće}$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i\, a_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, a_i. \tag{2.11}$$

Kako je $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n\}$ baza prostora V, iz relacije (2.11) sledi da je $\alpha_i = 0,\ i = 1, \ldots, n.$
$B_{V/L}$ je skup generatora vektorskog prostora V/L, jer je

$$[x] = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, a_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,[a_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, a_i + L = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i\, a_i + L = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i\,[a_i].$$

Time je dokaz završen. □

Primer. Odredimo bazu faktor prostora $\mathbb{R}^4/M$, gde je $M = \mathcal{L}(\{(0,-3,2,1), (-1,2,-1,1)\})$.
Prema prethodnoj teoremi, prvo nadopunimo bazu od M vektorima $e_1 = (1,0,0,0)$ i $e_2 = (0,1,0,0)$. Lako se vidi da je skup vektora $B = \{a_1, a_2, e_1, e_2\}$ ($a_1 = (0,-3,2,1)$, $a_2 = (-1,2,-1,1)$) baza od $\mathbb{R}^4$. Skup $B_{\mathbb{R}^4/M} = \{[e_1]_M, [e_2]_M\}$ je baza faktor prostora $\mathbb{R}^4/M$.

Geometrijska interpretacija. Kao što znamo potprostori vektorskog prostora V su ravni koje se zadaju homogenim sistemom linearnih jednačina, dakle potprostori sadrže koordinatni početak. Npr. u $\mathbb{R}^3$ dvodimenzioni potprostori su ravni koje prolaze kroz koordinatni početak, a jednodimenzioni potprostori su prave koje prolaze kroz koordinatni početak. Ravni koje ne prolaze kroz koordinatni početak su elementi faktor prostora $\mathbb{R}^3/N$, gde je N jednodimenzioni potprostor i njih nazivamo linearnim mnogostrukostima. Hiperravni su linearne mnogostrukosti dimenzije $\dim V - 1$, ili kodimenzije 1.

Očigledno, ovu geometrijsku interpretaciju možemo proširiti na svaki vektorski prostor V i njegove ravni dimenzije $k < n = \dim V$, mogu se videti kao elementi nekog faktor prostora V/N, gde je $\dim N = n - k$.

2.24. Zavisnost koordinata vektora o bazi. Neka je V vektorski prostor dimenzije n nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ neka baza od V. Za fiksiranu bazu e, koordinatizacija je preslikavanje, $\kappa_e : V \longrightarrow \mathbb{F}^n$, koje je definisano formulom:

$$\kappa_e(x) = \kappa_e\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = (x_1, \ldots, x_n) = x(e).$$

Znamo da koordinatizacija κ_e zadovoljava sledeća svojstva (vidi 1.12 Teorema),

(ia) $\kappa_e(x + y) = \kappa_e(x) + \kappa_e(y)$, za sve $x, y \in V$,

(ih) $\kappa_e(\lambda x) = \lambda \kappa_e(x)$ za sve $x \in V$ i $\lambda \in \mathbb{F}$.

(ib) κ_e je bijekcija.

Primedba. Svako preslikavanje, $A : V \longrightarrow W$, koje zadovoljava svojstva (ia), (ih) i (ib) zove se izomorfizam $\mathbb{F}-$vektorskih prostora V i W. Dakle, svaka koordinatizacija je izomorfizam vektorskih prostora V i $\mathbb{F}^n$. U sledećoj glavi bavićemo se više preslikavanjima između vektorskih prostora nad istim poljem koji poštuju strukture vektorskih prostora.

Sada se postavlja prirodno pitanje pronalaženje veza između različitih koordinatizacija vektorskog prostora V, ili preciznije vezi između koordinata istog vektora u različitim bazama.

Neka su date dve baze od V, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ i $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. Očigledna je ideja kako da nađemo tu vezu: potrebno je vektore jedne baze izraziti kao linearne kombinacije vektora druge baze. Preciznije, imamo

$$e'_k = T_{ee'}\, e_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\, e_i, \qquad k = 1, \ldots, n\,.$$

Obeležimo sa $T_{ee'} = (\alpha_{ij})$ matricu prelaska sa baze e u bazu e'. Za proizvoljni vektor $x \in V$, imamo

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i\,, \quad \text{a zatim računamo,}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j T e_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i\right) \; \text{odakle, prvo sledi} \; \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j\right) e_i = 0,$$

a zatim zbog linearne nezavisnosti vektora e_i, sledi i: $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j$.

Sada prethodne formule možemo prepisati u matričnom obliku,

(2.12) $$x(e) = T_{ee'} x(e') \qquad \text{ili} \qquad x(e') = T_{e'e}\, x(e).$$

Primetimo, iz same definicije matrice prelaska, da je $T_{ee} = \mathbb{I}_n$. Ako je e'' treća baza od V onda nakon eliminacije baze e' dobijamo:

(2.13) $$x(e) = T_{ee'} x(e') = (T_{ee'} T_{e'e''})\, x(e''), \quad \text{a iz (2.12) imamo} \quad x(e) = T_{ee''} x(e''), \quad \text{tj.}$$

(2.14) $$x(e) = (T_{ee'} T_{e'e''})\, x(e'') = T_{ee''} x(e'').$$

Kako prethodna formula (2.14) važi za sve vektore $x \in V$, zaključujemo da važi formula

(2.15) $$T_{ee''} = T_{ee'} \cdot T_{e'e''}.$$

Ako sada u formuli (2.15) izaberemo da je $e'' = e$ dobićemo,

(2.16) $$\mathbb{I}_n = T_{ee} = T_{ee'} \cdot T_{e'e},$$

odakle odmah sledi da je $T_{e'e} = [T_{ee'}]^{-1}$.

Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. *Neka su e, e' i e'' tri baze vektorskog prostora V. Tada važi,*

(i1) $x(e) = T_{ee'} x(e')$,

(i2) $T_{ee''} = T_{ee'} \cdot T_{e'e''}$.

(i3) $[T_{ee'}]^{-1} = T_{e'e}$,

7. Zadaci, vežbanja i dopune

2.26. Pokažite da je komutativnost sabiranja vektora posledica ostalih aksioma.

Dokaz. Kako svaki $x \in V$ važi $0\cdot x = 0$, imamo $0 = x\,(1-1) = x+(-1)\,x$, odakle je zbog jedinstvenosti inverza u grupi $(-1)\,x = -\,x$. Sada imamo:

$$0 = x + y - y - x = x + y + \underbrace{(-1)(x + y)}_{inverz} \quad \text{odakle sledi,} \quad (-1)(x + y) = -y - x,$$

opet zbog jedinstvenosti inverza u grupi. S druge strane $(-1)(x + y) = -x - y$, zbog distributivnosti, pa na kraju dobijamo: $-x - y = -y - x$, tj. $x + y = y + x$. □

2.27. Primeri vektorskih prostora. Proverite da su svi primeri iz 2.2 vektorski prostori.

2.28. Neka je $A \neq \emptyset$ neki skup i $\mathcal{P}(A)$ njegov partitivni skup. Neka je $\triangle$ simetrična razlika skupova, tj. preslikavanje $A\triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(i1) Dokažite da je $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ Abelova grupa.

(i2) Kako je $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle)$ ($\mathbb{R}$ je skup realnih brojeva) Abelova grupa, definišemo sada i množenje sa skalarima, $\circ : \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, formulom,
$\alpha \circ A = \{\alpha\, x \mid x \in A\}$. Da li je $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle, \circ)$ realni vektorski prostor?

2.29. Neke posledice definicije linearne nezavisnosti. Dokažite sva svojstva ((i1)-(i5)) iz 2.15 Primedbe.

2.30. Svojstva lineala. Dokažite Propoziciju iz tačke 2.20.

2.31. Direktan proizvod vektorskih prostora. Neka je $\mathcal{F} = \{V_i \mid V_i$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}, i \in I\}$, gde je I neki neprazni skup indeksa, familija vektorskih prostora. Pokažite da je $(\prod_{i\in I} V_i, \mathbb{F}, +, \cdot)$ uz operacije sabiranja vektora i množenja vektora sa skalarom kao 2.19 Primedba vektorski prostor.

2.32. Direktan suma vektorskih prostora. Neka je $\mathcal{F}$ familija vektorskih prostora kao u prethodnoj tački, tada definišemo direktnu sumu familije vektorskih prostora $\mathcal{F}$, kao skup svih $I-$torki čije su komponente jednake 0_i osim za konačno mnogo indeksa. Oznaka koja se koristi za direktnu sumu je $\bigoplus_{i\in I} V_i$. Operacije sabiranja i množenja sa skalarima su iste kao i u $\prod_{i\in I} V_i$. Pokažite da je $(\bigoplus_{i\in I} V_i, \mathbb{F}, +, \cdot)$ uz vektorski prostor.
Jasno, ako je skup indeksa I konačan, tada se direktna suma i direktan proizvod vektorskih prostora podudaraju.

2.33. Jedna relacija ekvivalencije. Neka je V vektorski prostor i L neki njegov potprostor. Tada je u tački 2.22 uvedena relacija $\sim_L$ na V na sledeći način: $x \sim_L y$ akko je $x - y \in L$. Dokažite da je $\sim_L$ relacija ekvivalencije na V.

2.34. Linearna nezavisnost. Ispitaj linearnu zavisnost sledećih skupova vektora:

(i1) $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 1, -1, -1)\}$.

(i2) $\{(5, -3, 2, 1, 10), (-1, 8, 1, -4, 7), (2, 1, 9, -3, 5), (1, 3, -5, 9, 11)\}$.

2.35. Linearna nezavisnost. Ako su $x, y, z \in V$, linearno nezavisni vektori. Dokaži da su vektori:

(i1) $x,\ x + y,\ x + y + z$ linearno nezavisni.

(i2) $x + y,\ x + z,\ y + z$ linearno nezavisni.

(i3) $x - y,\ y - z,\ z - x$ linearno zavisni.

(i4) $\alpha\, x - \beta\, y,\ \gamma\, y - \alpha\, z,\ \beta\, z - \gamma\, x$ $(\alpha, \beta, \gamma \neq 0)$ linearno zavisni.

Rešenje. (i4) Iz $\lambda(\alpha\, x - \beta\, y) + \mu\,(\gamma\, y - \alpha\, z) + \rho\,(\beta\, z - \gamma\, x) = 0$, sledi da je

$$(\lambda\,\alpha - \rho\,\gamma)\, x + (-\lambda\,\beta + \mu\,\gamma)\, y - \mu\,\alpha + \rho\,\beta)\, z = 0, \qquad \text{odakle je:} \quad \lambda\,\alpha - \rho\,\gamma = 0, \quad -\lambda\,\beta + \mu\,\gamma = 0 \quad \text{i} \quad -\mu\,\alpha + \rho\,\beta = 0\,.$$

Pretpostavimo da je $\lambda \neq 0$, tada je $\alpha = \frac{\rho}{\lambda}\,\gamma$ i $\beta = \frac{\mu}{\lambda}\,\gamma$, te je zadnja relacija automatski zadovoljena, tj. polazni vektori su linearno zavisni. Ako je npr. $\rho = 0$, tada iz prve i druge jednačine odmah sledi da je $\alpha = \beta = 0$, što je u kontradikcija sa $\alpha \neq 0$. Analogno u ostalim slučajevima ($\lambda = 0$ ili $\mu = 0$).

2.36. Linearna nezavisnost. Dokažite da je skup funkcija $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ na:

(i1) $\mathbb{R}$,

(i2) intervalu $[a,b]$ $(a \neq b)$,

linearno nezavisan.

2.37. Baza. Neka je $(a_1, a_2, ..., a_n)$ baza vektorskog prostora V, i neka je dat vektor $a_{n+1} = -(a_1 + \cdots + a_n)$. Dokažite da se svaki $x \in V$ može prikazati u obliku $x = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i\, a_i$, tako da je $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$. Da li je taj prikaz jedinstven?

Rešenje. Kako je $(a_1, a_2, ..., a_n)$ baza u V postoje jedinstveni $\theta_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \dots, n$ takvi da je $x = \sum_{i=1}^n \theta_i\, a_i$. Nađimo sada λ_i $(i = 1, 2 \dots, n+1)$ tako da je

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\, a_i \qquad \text{i} \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0\,.$$

Ako stavimo $\varphi = \sum_{i=1}^n \theta_i$, imamo redom:

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\, a_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i + \lambda_{n+1}\, a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i - \lambda_{n+1}(a_1 + \cdots + a_n) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_{n+1})\, a_i = \sum_{i=1}^{n} \theta_i\, a_i,$$

odakle je

(2.17) $\lambda_i - \lambda_{n+1} = \theta_i$, za sve $i = 1, 2, \dots, n$, i ako saberemo sve ove relacije dobićemo: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i - n\lambda_{n+1} = \varphi\,.$

Sada iz uslova $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$, odmah sledi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\lambda_{n+1}$, tako da je $\lambda_{n+1} = -\,\varphi/(n+1)$, i konačno, nakon zamene u prvu jednakost u (2.17), imamo da je $\lambda_i = \theta_i + \varphi/(n+1)\,(i = 1, 2, \dots, n)$. Prikaz je jedinstven jer je izbor skalara θ_i, $(i = 1, 2, \dots, n)$ jedinstven.

2.38. Potprostori i dimenzije. Ispitajte da li su dati skupovi potprostori i nađite im neku bazu i odredite dimenziju. Dobijene baze nadopunite do baze celog prostora.

(i1) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 4\, x_3 = 1\}$,

(i2) $V = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - 4\, x_3 + x_4 - 2\, x_5 = 0\}$,

(i3) $V = \{z \in \mathbb{C}^3_{\mathbb{R}} \mid z_1 - \overline{z_2} + 2\, z_3 = 0\}$,

(i4) $V = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_3 = x_5, x_2 - x_4 = 2\, x_1 - x_3\}$,

(i5) $V = \{z \in \mathbb{C}^3 \mid z_2 - z_1 = \overline{z_3 - z_2}\}$,

(i6) $V_p = \{f \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p\, f' - 4\, f = 0\}$, gde je $p(t) = t - 3$,

(i7) $S_V = \{y \in \mathbb{R}^n \,\big|\, (x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i = 0, \forall\, x \in V\}$ gde je $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ data hiperravan.

Rešenja i uputstva. (i1) Neka su $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni elementi tada je $x_1 - x_2 + 4\, x_3 = 1$ i $y_1 - y_2 + 4\, y_3 = 1$. Kako je $\alpha\, x + \beta\, y = z = (z_1, z_2, z_3) = (\alpha\, x_1 + \beta\, y_1, \alpha\, x_2 + \beta\, y_2, \alpha\, x_3 + \beta\, y_3)$, lako nalazimo:

$$z_1 - z_2 + 4\, z_3 = \alpha\, x_1 + \beta\, y_1 - (\alpha\, x_2 + \beta\, y_2) + 4\,(\alpha\, x_3 + \beta\, y_3) = \alpha\,(x_1 - x_2 + 4\, x_3) + \beta\,(y_1 - y_2 + 4\, y_3) = \alpha + \beta.$$

Dakle, npr. $\alpha = 2$ i $\beta = 1$ vidimo da je $z_1 - z_2 + 4\, z_3 = 3 \neq 1$, tj. V nije potprostor od $\mathbb{R}^3$.
Dakle, ravni u $\mathbb{R}^n$ koje ne prolaze kroz koordinatni početak, tj. ne sadrže nula vektor nisu potprostori.
(i2) i (i4) Slično kao u 2.18 Primer 1 pokažemo da su potprostori. U slučaju (i2) tražimo bazu. Neka je $x \in V$, tada redom imamo,

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2 - x_3, x_2, x_3, -x_2 + 4\, x_3 + 2\, x_5, x_5) = x_2\, a + x_3\, b + x_5\, c,$$

gde su $a = (1, 1, 0, -1, 0)$, $b = (-1, 0, 1, 4, 0)$ i $c = (0, 0, 0, 2, 1)$. Odakle vidimo da a, b i c razapinju V i lako se vidi da je skup $\{a, b, c\}$ linearno nezavisan, te je tako i baza od V. Dakle, $\dim V = 3$.
U slučaju (i4), za $x \in V$ imamo redom,

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_4 + x_1, x_1, x_4, x_1) = x_1\, a + x_4\, b,$$

gde je $a = (1, 1, 1, 0, 1)$ i $b = (0, 1, 0, 1, 0)$. Skup $\{a, b\}$ je baza od V i $\dim V = 2$.
(i3) Lako se proveri da je potprostor. Kako je $\overline{\alpha} = \alpha$ za $\alpha \in \mathbb{R}$, tada za $z \in V$ imamo redom,

$z_1 - \overline{z_2} + 2\, z_3 = 0$, ako sada stavimo $z_i = x_i + i\, y_i$, $(i = 1, 2, 3)$, nalazimo, $\overline{z_2} = z_1 + 2\, z_3$ tj. $x_2 = x_1 + 2\, x_3$, $y_2 = -y_1 - 2\,, y_3$,

a zatim i $z = (x_1 + i\, y_1, x_2 + i\, y_2, x_3 + i\, y_3) = x_1\,(1, 1, 0) + \ x_3\,(0, 2, 1) + y_1\,(i, -i, 0) + y_3\,(0, -2i, i)\,.$

Prema tome vektori $a=(1,1,0)$, $b=(0,2,1)$, $c=(i,-i,0)$ i $d=(0,-2i,i)$ razapinju V i linearno su nezavisni te tako tvore jednu bazu od V, jasno $\dim V=4$.

(i5) nije potprostor jer je $\overline{\alpha}\neq\alpha$, za proizvoljni $\alpha\in\mathbb{C}$, tako da iz $z\in V$ ne mora slediti da je i $\lambda\, z\in V$.

(i6) Neka su $f,g\in V_p$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tada je $p\,f'-4\,f=0$, $p\,g'-4\,g=0$. Sada redom imamo:

$$p\,(\alpha\,f+\beta\,g)'-4\,(\alpha\,f+\beta\,g)=\alpha\,(p\,f'-4\,f)+\beta\,(p\,g'-4\,g)=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0\,.$$

Dakle, V_p je potprostor. Nađimo mu neku bazu. Neka je $f\in V_p$, tako da redom imamo,

$$f(t)=a\,t^4+b\,t^3+c\,t^2+d\,t+e \quad\text{i}\quad f'(t)=4\,a\,t^3+3\,b\,t^2+2\,c\,t+d,\quad \text{odakle je}$$

$$0=p(t)\,f'(t)-4\,f(t)=(4\,a-4\,a)\,t^4+(3\,b-12\,a-4\,b)\,t^3+(2\,c-9\,b-4\,c)\,t^2+(d-6\,c-4\,d)\,t+(-3\,d-4\,e),$$

tako da na kraju, rešavanjem gornjeg sistema, dobijamo:

$$b=-12\,a,\qquad c=-\frac{9}{2}\qquad b=54\,a,\qquad d=-2\,c=-108,\qquad e=-\frac{3}{4}\,d=81\,a.$$

Dakle, vidimo da polinom (vektor) $f(t)=a\,(t^4-12\,t^3+54\,t^2-108\,t+81)$, generiše potprostor V_p, i odmah zaključujemo da je $\dim V_p=1$.

(i7) Na standardan način, lako se proveri da je V vektorski prostor i da su vektori baze:

$$a^i=(-1,0,\dots,\underbrace{1}_{i},0,\dots,0),\quad i=2,\dots,n,\quad \text{dakle,}\quad \dim V=n-1.$$

Pokažimo da je S_V potprostor. Neka su $y,z\in S_V,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, i sada nalazimo

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i=0 \qquad \text{i} \qquad \sum_{i=1}^{n}x_i\,z_i=0,\ \forall x\in V.$$

Kako je $i-$ta koordinata vektora $\alpha\,y+\beta\,z$ jednaka $\alpha\,y_i+\beta\,z_i$ (vidi prethodne primere) tako da je

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\,(\alpha\,y_i+\beta\,z_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i+\beta\sum_{i=1}^{n}x_i\,z_i=0,\qquad \forall x\in V.$$

Time je pokazano da je S_V potprostor. Da bismo našli bazu od S_V dovoljno je posmatrati samo relacije (iz definicije skupa S_V) za bazne vektore (obrazložite !!) tj.

$$(y,a^j)=\sum_{i=1}^{n}a_i^j\,y_i=0,\ j=2,\dots,n.\ \text{ Neka je } y\in S_V,\ y=(y_1,\dots,y_n),\text{ onda imamo:}$$

$$(y,a^j)=-y_1+y_j=0,\ j=2,\dots,n,\quad \text{odakle sledi da je}\quad y_j=y_1\,,\ j=2,\dots,n.$$

Dakle, vektor $a=(1,1,\dots,1)$, generiše S_V, a kako je jedan onda on tvori bazu i $\dim S_V=1$.

2.39. Potprostori i njihove suma. Neka su $\mathsf{sl}_3=\{\mathcal{A}\in\mathbb{M}_{33}(\mathbb{C})\mid \mathsf{Tr}\,\mathcal{A}=0\}$ i $\mathsf{GT}_3=\{\mathcal{A}\in\mathbb{M}_{33}(\mathbb{C})\mid \mathcal{A}_{ij}=0,i>j\}$ podskupovi vektorskog prostora $\mathbb{M}_{33}(\mathbb{C})$.

(i1) Pokažite da su sl_3 i GT_3 potprostori od $\mathbb{M}_{33}(\mathbb{C})$, odredite njihove baze i dimenzije.

(i2) Na koliko je načina moguće predstaviti matricu, $\mathcal{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\2&3&5\end{bmatrix}$ u obliku $\mathcal{B}=\mathcal{C}+\mathcal{D}$, pri čemu je $\mathcal{C}\in\mathsf{sl}_3$ i $\mathcal{D}\in\mathsf{GT}_3$.

2.40. Potprostori i dimenzije. Neka je $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ vektorski prostor svih kvadratnih matrica reda n. Ispitajte da li su dati skupovi vektorski potprostori od $\mathbb{M}_n$ i nađite im dimenziju.

(i1) $\mathcal{S}_n=\{\mathcal{A}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})\mid \mathcal{A}=\mathcal{A}^\tau\}$ i $\mathcal{K}_n=\{\mathcal{A}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})\mid \mathcal{A}=-\mathcal{A}^\tau\}$,

(i2) $\mathsf{DT}_n=\{\mathcal{A}=(\alpha_{ij})\mid \alpha_{ij}=0,\text{ za } i<j\}$ skup donje trougaonih matrica i
$\mathsf{GT}_n=\{\mathcal{A}=(\alpha_{ij})\mid \alpha_{ij}=0,\text{za } i>j\}$ skup gornje trougaonih matrica.

(i1) Vidi 2.18 Primer 2. $\dim\mathcal{S}_n=\frac{n\,(n+1)}{2}$ i $\dim\mathcal{K}_n=\frac{n\,(ni1)}{2}$.

(i2) $\dim\mathsf{DT}_n=\dim\mathsf{GT}_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

2.41. Lineal. U $\mathbb{R}^5$ dati su vektori:

$$\begin{aligned} a_1&=(1,2,3,4,5), & b_1&=(1,0,0,-6,24),\\ a_2&=(1,-1,1,-1,1), & b_2&=(0,1,0,-1,10),\\ a_3&=(2,-1,3,1,-1), & b_3&=(0,0,1,4,-13).\end{aligned}$$

Dokaži da su potprostori $L=\mathcal{L}(\{a_1,a_2,a_3\})$ i $B=\mathcal{L}(\{b_1,b_2,b_3\})$ jednaki.

Rešenje. Kako je dimenzija od B jednaka 3 (lako se vidi) dovoljno je svaki od vektore b_1, b_2 i b_3 izraziti kao linearne kombinacije vektora a_1, a_2 i a_3. Dakle, treba rešiti sisteme:

$$\begin{array}{rcll} 1 &=& \alpha+\beta+2\gamma & (=\ 0),\ (=\ 0) \\ 0 &=& 3\alpha-\beta-\gamma & (=\ 1),\ (=\ 0) \\ 0 &=& 3\alpha+\beta+3\gamma & (=\ 0),\ (=\ 1) \\ -6 &=& 4\alpha-\beta+\gamma & (=-1),\ (=\ 4) \\ 24 &=& 5\alpha+\beta-\gamma & (=\ 10),\ (=-13) \end{array} \quad \text{odakle sledi} \quad \begin{array}{rcl} 3\alpha+\gamma &=& 1,\ (1),\ (0), \\ 5\alpha+2\gamma &=& 1,\ (0),\ (1), \\ \alpha &=& 2,\ (1),\ (-1), \\ \beta &=& 9,\ (3),\ (-5), \\ \gamma &=& -5,\ (-2),\ (3). \end{array}$$

Prema tome, na kraju dobijamo: $b_1 = 2a_1 + 9a_2 - 5a_3,\ b_2 = a_1 + 3a_2 - 2a_3$, i $b_3 = -a_1 - 5a_2 + 3a_3$.

2.42. Sume potprostora. Neka su dati podskupovi od $\mathbb{R}^3$: $N = \{x \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0, 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}$ i $M = \{x \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$.

Dokažite da su M i N potprostori, da je $\dim M = 2$, $\dim N = 1$, $M \cap N = \{0\}$ i $\mathbb{R}^3 = M \oplus N$.

Rešenje. Lako se proverava (analogno kao u 2.18 Primer 1. da su M i N potprostori. Nađimo sada bazu od M,

$$x \in M \Longrightarrow x_3 = 2x_1 + 3x_2,\ x = (x_1, x_2, 2x_1 + 3x_2) = x_1(1,0,2) + x_2(0,1,3) \quad \text{i od } N$$

$$x \in N \quad \Longrightarrow \quad 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_2 = 3x_1 - 4x_2 \quad \Longrightarrow \quad 2x_1 = 5x_2, x_2 = \frac{2}{5}x_1,\ x_3 = -\frac{7}{5}x_1,$$

odakle, stavljajući $x_1 = 5$ vidimo da je $N = \mathcal{L}\{(5,2,-7)\}$. Kada bi $M \cap N$ bio netrivijalan ($\neq \{0\}$) morao bi biti jednak N, što je ekvivalentno sa $(5,2,-7) \in M$. Tada bi jednačina

$$\alpha(1,0,2) + \beta(0,1,3) = (\alpha, \beta, 2\alpha + 3\beta) = (5,2,-7),$$

morala imati rešenja. Upoređujući prve koordinate prethodne jednačine dobijamo da je $\alpha = 5$, a zatim iz drugih koordinata nalazimo da je $\beta = 2$. Ali to nije rešenje jer se ne podudaraju treće koordinate, naime $-7 \neq 2\alpha + 3\beta = 10 + 6 = 16$. Dakle, $M \oplus N$ ima dimenziju 3, pa je $M \oplus N = \mathbb{R}^3$.

2.43. Sume potprostora. Neka je $V = \{f \mid f : R \longrightarrow R\} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ prostor realnih funkcija (jedne realne promenljive) i neka su redom dati skupovi parnih i neparnih funkcija na $\mathbb{R}$, $M = \{f \in V \mid f(t) = f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ i $N = \{f \in V \mid f(t) = -f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Dokažite da su M i N potprostori od V, da je $M \cap N = \{0\}$ i $M \oplus N = V$.

Rešenje. M i N su očigledno potprostori, npr. za M imamo redom

$$\forall f, g \in M, \forall \alpha, \beta, t \in \mathbb{R} \Longrightarrow (\alpha f + \beta g)(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) = \alpha f(-t) + \beta g(-t) = (\alpha f + \beta g)(-t).$$

Neka je $f \in M \cap N \Longrightarrow f(t) = f(-t) = -f(-t), \forall t \Longrightarrow f(t) = 0, \forall t \Longrightarrow f \equiv 0$.

Budući da vektorski prostor $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nema konačnu dimenziju (i tako ne možemo koristiti Grassmannovu formulu za dokazivanje jednakosti dva prostora) uzmimo $g \in V$ stavimo

$$g(t) = \underbrace{\frac{g(t) + g(-t)}{2}}_{\in M} + \underbrace{\frac{g(t) - g(-t)}{2}}_{\in N} \quad \Longrightarrow \quad V \subseteq M \oplus N \subseteq V \quad \Longrightarrow \quad M \oplus N = V.$$

2.44. Sume i preseci potprostora i njihove baze.

(i1) U $\mathbb{R}^3$ dati su potprostori M i N svojim bazama, $M = \mathcal{L}(\{a_1, a_2\})$ i $N = \mathcal{L}(\{b_1, b_2\})$, gde su $a_1 = (1,0,3), a_2 = (1,-1,1)$ i $b_1 = (1,1,0), b_2 = (1,0,-1)$.
Odredi po jednu bazu za $M + N$ i $M \cap N$.

(i2) U $\mathbb{R}^3$ dati su potprostori $X = \mathcal{L}(\{x_i, i = 1,2,3\})$ i $Y = \mathcal{L}(\{y_i, i = 1,2,3\})$, gde su $x_1 = (2,1,0), x_2 = (1,2,3), x_3 = (-5,-2,1)$ i $y_1 = (1,1,2), y_2 = (-1,3,0), y_3 = (2,0,3)$.
Odredi neku barem jednu bazu i dimenziju potprostora $X, Y, X+Y$ i $X \cap Y$.

(i3) U $\mathbb{R}^4$ dati su potprostori $X = \mathcal{L}(\{x_i, i = 1,2,3\})$ i $Y = \mathcal{L}(\{y_i, i = 1,2,3\})$, gde su: $x_1 = (1,1,1,1)$, $x_2 = (1,1,-1,-1), x_3 = (1,-1,1,-1)$ i $y_1 = (1,-1,-1,1), y_2 = (2,-2,0,0), y_3 = (3,-1,1,1)$.
Odredi neku bazu i dimenziju potprostora $X, Y, X+Y$ i $X \cap Y$.

Rešenje. (i1) Prema algoritmu datom u 2.21., ispitajmo da li je b_1 linearna kombinacija od a_1 i a_2, tj. rešavamo jednačinu $b_1 = \alpha a_1 + \beta a_2$. Tako dobijamo linearan sistem,

$1 = \alpha + \beta,\quad 1 = -\beta,\quad 0 = 3\alpha + \beta,\quad$ iz prve dve jednačine sledi: $\beta = -1, \alpha = 2$, ali onda 3. jednačina postaje $0 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$,

a to je nemoguće. Dakle, skup $\{a_1, a_2, b_1\}$ je linearno nezavisan tako da zbog dimenzionalnih razloga sledi da je baza od $M + N$.

Prema tome, sledi da je $b_2 \in M+N$, i rešavamo jednačinu: $b_2 = \alpha\, a_1 + \beta\, a_2 + \gamma\, b_1$. Na kraju dobijamo, $\alpha = -3/5$, $\beta = \gamma = 4/5$, tj.

$$e_2 = -\frac{3}{5}\, a_1 + \frac{4}{5}\, a_2 = \left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, -1\right) \sim (1,-4,-5), \quad \text{tako da je } \{e_2\} \text{ baza od } M\cap N.$$

(i3) Lako se dobija da su skupovi vektora $\{x_1,x_2,x_3\}$ i $\{y_1,y_2,y_3\}$ linearno nezavisni, te su redom baze od X i Y, i $\dim X = \dim Y = 3$. Sada ispitajmo da li je y_1 linearna kombinacija vektora x_1, x_2 i x_3, tj. rešimo jednačinu: $\alpha\, x_1 + \beta\, x_2 + \gamma\, x_3 = y_1$. Ispostavlja se da ova jednačina nema rešenja, tj. x_1, x_2, x_3 i y_1 su linearno nezavisni, te tako tvore bazu za $\mathbb{R}^4 = X+Y$. Zbog dimenzionih razloga, jasno je da ta suma nije direktna.
Bazu od $X\cap Y$ tražimo koristeći algoritmu iz 2.21, tj. moramo da rešimo jednačine,

$$\alpha\, x_1 + \beta\, x_2 + \gamma\, x_3 + \delta\, y_1 = y_2, \quad \text{i} \quad \alpha_1\, x_1 + \beta_1\, x_2 + \gamma_1\, x_3 + \delta_1\, y_1 = y_3, \quad \text{tj.}$$

$$\alpha\,(1,1,1,1) + \beta\,(1,1,-1,-1) + \gamma\,(1,-1,1,-1) + \delta\,(1,-1,-1,1) = (2,-2,0,0), \quad \text{i}$$

$$\alpha_1\,(1,1,1,1) + \beta_1\,(1,1,-1,-1) + \gamma_1\,(1,-1,1,-1) + \delta_1\,(1,-1,-1,1) = (3,-1,1,1).$$

Tako dobijamo rešenja: Rešavajući ih istovremeno dobijamo: $\alpha = \beta = 0, \gamma = \delta = 1$ i $\beta_1 = 0, \alpha_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 1$.
Dakle, bazu potprostora $X\cap Y$ čine vektori:

$$e_1 = \alpha\, x_1 + \beta\, x_2 + \gamma\, x_3 = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = x_3 = (1,-1,1,-1), \quad \text{i}$$

$$e_2 = \alpha\, x_1 + \beta\, x_2 + \gamma\, x_3 = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = x_1 + x_3 = (2,0,2,0).$$

2.45. Linearne mnogostrukosti. Neka je V vektorski prostor dimenzije n i M potprostor dimenzije k i neka je $x_0 \in V/M$. Dokaži da je linearna mnogostrukost $x_0 + M$ presek od $n-k$ linearnih mnogostrukosti dimenzije $n-1$ (hiperravni).

Rešenje. Neka je N potprostor koji sadrži M. Tada je jasno, $x_0 + M \subseteq x_0 + N$. Neka je $(a_1,\ldots,a_k)$ baza potprostora M, i neka je $(a_{k+1},\ldots,a_n)$ njena dopuna do baze prostora V. Posmatrajmo linearne mnogostrukosti $x_0 + N_i$, $i = k+1,\ldots,n$, gde je $N_i = \mathcal{L}(\{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,\overset{\wedge}{a_i},\ldots,a_n\})$ ($\overset{\wedge}{a_i}$ znači da smo izbacili vektor a_i) Primetimo da je

$$x_0 + M \subseteq \bigcap_{i=k+1}^{n} x_0 + N_i, \quad \text{jer je} \;\; x_0 + M \subseteq x_0 + N_i, \quad \forall\, i = k+1,\ldots,n.$$

Dokažimo sada još i obratnu inkluziju.
Neka je $x_0 = \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_l\, a_l$ i $y \in \bigcap_{i=k+1}^{n} x_0 + N_i$, tada je $y - x_0 \in N_i$, $i = k+1,\ldots,n$. Dakle za svako $i \in \{k+1,\ldots,n\}$ važi:

$$y - x_0 = \sum_{l\in\{1,\ldots,\hat{i},\ldots,n\}} \beta_l\, a_l \quad \Longrightarrow \quad y = \alpha_i\, a_i + \sum_{l\in\{1,\ldots,\hat{i},\ldots,n\}} (\alpha_l + \beta_l)\, a_l.$$

Time smo dobili $n-k$ prikaza vektora y u bazi $B = (a_1,\ldots,a_n)$, te svi oni moraju biti jednaki. Specijalno za $i \neq j\,(i,j \in \{k+1,\ldots,n\})$ imamo redom

$$y = \alpha_i\, a_i + \sum_{l\in\{1,\ldots,\hat{i},\ldots,n\}} (\alpha_l + \beta_l)\, a_l = \alpha_j\, a_j + \sum_{l\in\{1,\ldots,\hat{j},\ldots,n\}} (\alpha_l + \beta_l)\, a_l,$$

zaključujemo da je $\beta_i = \beta_j = 0$. Kako ovo važi za sve $i,j \in \{k+1,\ldots,n\}\,(i \neq j)$ dobijamo da je $\beta_{k+1} = \cdots = \beta_n = 0$, pa je $y - x_0 = \sum\limits_{l=1}^{k} \beta_l\, a_l \in M$. Dakle, $y \in x_0 + M$. I dokaz je završen.

2.46. U $\mathbb{R}^3$ zadate su baze e i f. Nađi matricu prelaska iz baze e u bazu f ako je $f_1 = e_1 + 3\,e_2 - 4\,e_3$, $f_2 = 2\,e_1 - e_2 + 5\,e_3$ i $f_3 = 4\,e_1 + 5\,e_2 + 3\,e_3$.

2.47. Matrica prelaska. U $\mathbb{R}^2$ date su baze e i f. Odredite koordinate vektora $x = 3\,e_1 - 2\,e_2$ u bazi f ako je $f_1 = 5\,e_1 + 3\,e_2$ i $f_2 = e_1 + e_2$.

2.48. Matrica prelaska. Date su dve baze a i b vektorskih prostora: (i1) $\mathbb{C}^2$ i (i2) $\mathbb{C}^3$. Odredite matricu prelaska sa baze a u bazu b ako je:

(i1) $a_1 = 2\,e_1 - 3\,e_2$ i $a_2 = -e_1 + 3\,e_2$; $b_1 = -4\,e_1 + 6\,e_2$ i $b_2 = e_1 + 3\,e_2$.

(i2) $a_1 = 2\,e_1 + e_2 - e_3$, $a_2 = e_1 + e_2$ i $a_3 = 2e_1$; $b_1 = e_1 - e_2$, $b_2 = 2\,e_1 - e_2$ i $b_3 = e_1 + e_2 - e_3$.

2.49. Koordinate vektora u bazi. Neka je e kanonska baza u $\mathbb{F}^3$, a $f = (f_1,f_2,f_3)$ baza koja se sastoji od vektora $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,1,2)$ i $f_3 = (2,1,1)$. Nađite $(f_1+f_2)(e)$ i $(e_1-e_2)(f)$.

Rešenje. $(f_1+f_2)(e) = f_1(e) + f_2(e) = (1,1,1) + (1,1,2) = (2,2,3)$.

Da bismo izračunali, $(e_1 - e_2)(f)$, koristimo formulu (3.21) tj. imamo

$$(e_1 - e_2)(f) = T^{-1}(e_1 - e_2)(e), \quad \text{gde je } T \text{ matrica prelaska sa baze } e \text{ u bazu } f.$$

Kako je, $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, na standardni način nalazimo: $T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Konačno je: $\quad (e_1 - e_2)(f) = T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2.50. Koordinate vektora u bazi. U $\mathbb{R}^3$ date su baze e i f. Odredite koordinate vektora $x = e_1 + 2\,e_2 + 3\,e_3$ u bazi f ako je $f_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $f_2 = 2\,e_1 - e_2 + 2\,e_3$ i $f_3 = e_1 + e_2 + 5\,e_3$.

2.51. Koordinate vektora u bazi. Dokažite da je $\{f_1, f_2, f_3\}$ baza od $\mathbb{R}^3$, a zatim u toj bazi nađite koordinate vektora x ako je:

(i1) $f_1 = (1,2,3)$, $f_2 = (-1,4,0)$, $f_3 = (1,0,0)$ i $x = (5,2,-6)$.

(i2) $f_1 = (0,-1,4)$, $f_2 = (3,0,-1)$, $f_3 = (2,1,-2)$ i $x = (-4,0,5)$.

GLAVA 3

LINEARNI OPERATORI

3.1. Linearni operator. Preslikavanja između dva vektorska prostora U i V nad istim poljem $\mathbb{F}$, koja poštuju strukture vektorskih prostora igraju veoma važnu ulogu u matematici, zbog toga ćemo njima posvetiti ovu glavu, kao i jednu od narednih u kojoj ćemo se baviti dubljim osobinama linearnih operatora.

Definicija. Neka su U, V vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : U \longrightarrow V$, nazivamo **linearni operator** [1] **ili linearna transformacija** [2] ako važi jedan od ekvivalentnih uslova $(\forall\, x, y \in U,\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{F})$:

(i1) (a) $A(x + y) = A(x) + A(y)$,

(b) $A(\alpha\, x) = \alpha\, A(x)$.

(i2) $A(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, A(x) + \beta\, A(y)$.

(i3) $A(\alpha\, x + y) = \alpha\, A(x) + A(y)$.

Ponekad se u obeležavanju linearnih operatora koristi i skraćena oznaka $A\, x := A(x)$.
Injektivni linearni operator nazivamo monomorfizmom, surjektivni epimorfizmom, a bijektivni izomorfizmom. Ako je $U = V$ tada za linearni operator kažemo da je endomorfizam od V, bijektivni endomorfizam nazivamo automorfizmom.

Skup svih linearnih operatora sa U u V obeležavamo sa $\mathsf{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$, kada je poznato polje $\mathbb{F}$ onda ga ispuštamo iz ove oznake. Ako je $U = V$ oznaku još skraćujemo i pišemo samo $\mathsf{Hom}\, V$.

Propozicija. *Uslovi (i1), (i2) i (i3) iz prethodne definicije su ekvivalentni.*

Dokaz. Pretpostavimo da važi (i1), tada $\forall\, x, y \in U,\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ imamo prvo za $v = \alpha\, x$ i $w = \beta\, y$ zbog uslova (b), da je $Av = \alpha\, A(x)$ i $Aw = \beta\, A(y)$, a zatim iz (a) sledi

$$A(\alpha\, x + \beta\, y) = A(v + w) = A(v) + A(w) = \alpha\, A(x) + \beta\, A(y),$$

što je (i2). (i3) dobijamo ako izaberemo da je $\beta = 1$. Time smo pokazali da iz (i1) sledi (i2) i (i3).

Ako u (i2) stavimo $\beta = 1$ odmah sledi (i3). Da iz (i3) sledi (i1)(b) vidimo tako što izaberemo $y = 0$, a za (i1)(a) dovoljno je u (i3) izabrati $\alpha = 1$. $\square$

Primeri. (i1) Nula preslikavanje. Neka je $\mathbb{O} : U \longrightarrow V$, nula preslikavanje koje sve $x \in U$ preslikava u $0 \in V$. Tada je jasno, da za sve x, y, i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ važi

$$\mathbb{O}(\alpha\, x + \beta\, y) = 0 = \alpha\, \mathbb{O}(x) + \beta\, \mathbb{O}(y),$$

tj. nula preslikavanje je linearni operator (*nula operator*).

(i2) Identičko preslikavanje. Neka je V vektorski prostor, tada je identičko preslikavanje, $\mathsf{id}(x) = x, \forall\, x \in V$, očigledno jedan linearni operator.

(i3) Projekcija. Neka je $P : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ preslikavanje definisano formulom, $P(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 0, x_3, 0)$, tj. projekcija na ravan $x_1 x_3$, . Pokažimo da projekcija P, zadovoljava uslov (i2) iz prethodne definicije, tj. da je linearni operator. Za vektore $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ i $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ imamo redom,

$$\begin{aligned} P(\alpha\, x + \beta\, y) &= P(\alpha\, x_1 + \beta\, y_1, \alpha\, x_2 + \beta\, y_2, \alpha\, x_3 + \beta\, y_3, \alpha\, x_4 + \beta\, y_4) = (\alpha\, x_1 + \beta\, y_1, 0, \alpha\, x_3 + \beta\, y_3, 0) \\ &= (\alpha\, x_1, 0, \alpha\, x_3, 0) + (\beta\, y_1, 0, \beta\, y_3, 0) = \alpha\, (x_1, 0, x_3, 0) + \beta\, (y_1, 0, y_3, 0) \\ &= \alpha\, P(x_1, x_2, x_3, x_4) + \beta\, P(y_1, y_2, y_3, y_4) = \alpha\, P(x) + \beta\, P(y). \end{aligned}$$

[1] Tradicionalno se prelikavanja između dva vektorska prostora nazivaju operatorima.

[2] Termin linearna transformacija se više koristi ako je $U = V$.

(i4) Diferenciranje. Neka je V vektorski prostor svih glatkih[3] funkcija na $\mathbb{R}$. Tada je operator diferenciranja $\mathbb{D} = d/dt : V \longrightarrow V$ linearan operator jer za sve $f, g \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ važi,

$$\mathbb{D}(f+g) = \frac{d(f+g)}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt} = \mathbb{D}(f) + \mathbb{D}(g), \qquad \mathbb{D}(\alpha\, f) = \frac{d(\alpha\, f)}{dt} = \alpha\,\frac{df}{dt} = \alpha\,\mathbb{D}(f).$$

Kao što smo videli u prethodnim primerima za proveravanje da je neko preslikavanje linearni operator koristićemo neki od tri ekvivalentna uslova iz definicije linearnog operatora, u zavisnosti od toga koja nam je od tri osobine najpogodnija. Obično će to biti uslov (i2), a ponekad (i1).

Za proizvoljni linearni operator $A \in \mathsf{Hom}\,(U,V)$, kao i kod svakog preslikavanja, ima smisla posmatrati **sliku** preslikavanja $\mathsf{Im}\,A = A(U)$, ali kako u svakom vektorskom prostoru postoji istaknuti element-nula vektor, važnu ulogu igra i skup $\mathsf{Ker}\,A = \{x \in U \mid Ax = 0\} = A^{-1}(0)$ kojeg nazivamo **jezgro** linearnog operatora A. U narednim tvrđenjima bavimo se osnovnim svojstvima linearnih operatora.

Teorema 1. *Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, i neka je $A \in \mathsf{Hom}\,(U,V)$ linearni operator. Tada je*

(i1) A(0)=0,

(i2) $A(-x) = -A(x)$,

(i3) *Ako je U_1 potprostor od U tada je i $A(U_1)$ $A(U_1)$ potprostor od V,*

(i4) *Ako je V_1 potprostor od V tada je i $A^{-1}(V_1)$ potprostor od U,*

(i5) *Specijalno, $\mathsf{Im}\,A$ i $\mathsf{Ker}\,A$ su potprostori,*

(i6) *A je monomorfizam akko $\mathsf{Ker}\,A = \{0\}$.*

Dokaz. (i1) Kako je $A(0) = A(0+0) = A(0) + A(0)$, dodajući levoj i desnoj strani ove jednakosti inverzni element od $A(0)$, tj. $-A(0)$, dobijamo traženu jednakost.

(i2) Kako u svakom vektorskom prostoru važi: $-x = (-1)\cdot x$, biće $A(-x) = A((-1)\cdot x) = (-1)\cdot A(x) = -A(x)$.

(i3) Neka su $x, y \in A(U_1)$ tada postoje $u, v \in U_1$ takvi da je $A(u) = x$ i $A(v) = y$, i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, tada

redom imamo: $\alpha\cdot x + \beta\cdot y = \alpha\cdot A(u) + \beta\cdot A(v) = A(\alpha\cdot u + \beta\cdot v)$,

tj. vektor $\alpha\cdot x + \beta\cdot y \in A(U_1)$, budući da je vektor $z = \alpha\cdot u + \beta\cdot v \in U_1$ (jer je U_1 potprostor).

(i4) Neka su $x, y \in A^{-1}(V_1)$, tada postoje $u = A(x), v = A(y) \in V_1$, i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, tada za $z = \alpha\cdot x + \beta\cdot y$

redom imamo: $A(z) = A(\alpha\cdot x + \beta\cdot y) = \alpha\cdot A(x) + \beta\cdot A(y) = \alpha\cdot u + \beta\cdot v \in V_1$,

jer je V_1 potprostor. Time je pokazano da je $A^{-1}(V_1)$ potprostor od U.

(i5) Kako je $\mathsf{Im}\,A = A(U)$, zbog (i3) $\mathsf{Im}\,A$ je potprostor od V. Slično za $V_1 = A^{-1}(0) = \mathsf{Ker}\,A$, na osnovu (i4) zaključujemo da je vektorski prostor od U.

(i6) Ako $\mathsf{Ker}\,A \neq \{0\}$, tada postoji neki $0 \neq x \in \mathsf{Ker}\,A$. Kako je zbog (i1) $0 \in \mathsf{Ker}\,A$ uvek, A nije $1-1$, tj. nije monomorfizam. Obratno, pretpostavimo da je $\mathsf{Ker}\,A = \{0\}$, pokažimo da je tada A injektivno preslikavanje. Neka je $A(x) = A(y)$ za neke x i $y \in V$. Kako je A linearan operator iz ove jednakosti sledi da je $A(x-y) = 0$, tj. $x - y \in \mathsf{Ker}\,A = \{0\}$. Dakle, $x = y$ i A je $1-1$ preslkavanje. □

Teorema 2. *Kompozicija linearnih operatora je linearni operator. Ako je $\dim V \geq 2$ tada je $(\mathit{Hom}\,V, \circ)$ nekomutativni monoid, čiji invertibilni elementi su automorfizmi.*

Dokaz. Neka su $A : U \longrightarrow V$ i $B : V \longrightarrow W$ linearni operatori, pokažimo da je i $B \circ A : U \longrightarrow W$ linearni operator. Za $\forall\, x, y \in U$ i $\forall\, \alpha, \beta \in F$ imamo,

$$\begin{aligned}(A\circ B)(\alpha\, x + \beta\, y) &= A(B(\alpha\, x + \beta\, y)) = A(\alpha\, B(x) + \beta\, B(y)) \\ &= \alpha\, A(B(x)) + \beta\, A(B(y)) = \alpha\,(A\circ B)(x) + \beta\,(A\circ B)(y).\end{aligned}$$

Prethodna tvrdnja pokazuje da je $\mathsf{Hom}\,V$ zatvoren s obzirom na kompoziciju. Kako je kompozicija preslikavanja asocijativna potrebno je još pokazati da postoji neutral. Očigledno je identičko preslikavanje neutral.

Pokažimo da ovaj monoid nije komutativan. Neka je $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ neka baza od V, i neka su

$$A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_1, 0, \ldots, 0), \quad \text{i} \quad B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, 0, 0, \ldots, 0),$$

[3] 'glatka funkcija' = 'beskonačno puta diferencijabilna funkcija'.

linearni operatori[4] na V. Sada računamo,

$$(A\circ B)(1,1,\dots,1) = A(B(1,1,\dots,1)) = A(1,0,\dots,0) = (0,1,0\dots,0)$$
$$(B\circ A)(1,1,\dots,1) = B(A(1,1,\dots,1)) = B(0,1,0,\dots,0) = (1,0,\dots,0),$$

odakle odmah sledi da je $A\circ B \neq B\circ A$.

Invertibilni elementi ovog monoida su automorfizmi vektorskog prostora V. Neka je $A\in \mathsf{Hom}\,V$ bijekcija, potrebno je pokazati da je inverzno preslikavanje A^{-1} takođe linearno. Neka su a,b proizvoljni vektori iz V i α,β proizvoljni skalari i kako je A bijekcija, postoje vektori x i y iz V takvi da je $a=A(x)$ i $b=A(y)$, tako da redom imamo,

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha\, a+\beta\, b) &= A^{-1}(\alpha\, A(x)+\beta\, A(y)) = A^{-1}(A(\alpha\, x+\beta\, y)) \\ &= (A^{-1}\circ A)(\alpha\, x+\beta\, y) = \alpha\, x+\beta\, y = \alpha\, A^{-1}(a)+\beta\, A^{-1}(b). \end{aligned}$$

Dakle, A^{-1} je linearna bijekcija, tj. automorfizam od V. □

3.2. Rang i defekt linearnog operatora. Neka je $A: U \longrightarrow V$ linearni operator, tada se postavlja prirodno pitanje: *koji je najmanji skup podataka koji u potpunosti određuje A.*

Odgovor na ovo pitanje daje sledeća lema.

Lema. *Linearni operator $A\in \mathsf{Hom}\,(U,V)$ u potpunosti je određen svojim dejstvom na nekoj bazi e vektorskog prostora U.*

Dokaz. Neka je $e=(e_1,e_2,\dots,e_m)$ neka baza od U. Obeležimo sa $f_i = Ae_i, (i=1,2,\dots,m)$ slike baznih vektora pri dejstvu operatora A. Ako sada uzmemo proizvoljni $x\in U$ postojaće jedinstveni skalari $x_1,x_2,\dots,x_m$ takvi da je $x=\sum_{i=1}^m x_ie_i$, jer je e baza od V. Tako da, koristeći linearnost od A, možemo izračunati Ax na sledeći način,

$$Ax = A\Big(\sum_{i=1}^m x_ie_i\Big) = \sum_{i=1}^m x_iA(e_i) = \sum_{i=1}^m x_if_i. \tag{3.1}$$

time je dokaz završen. □

Digresija. Formula (3.1) ponekad se zove i proširenje operatora A po linearnosti.

Neka je $A: U \longrightarrow V$ linearni operator i $\dim U, V < \infty$[5] i kako su $\operatorname{Ker} A$ i $\operatorname{Im} A$ potprostori definišemo **rang i defekt linearnog operatora**:

$$\operatorname{rang} A = r(A) = \dim(\operatorname{Im} A) \qquad \text{i} \qquad \operatorname{defekt} A = d(A) = \dim(\operatorname{Ker} A).$$

Važnu ulogu igra sledeća jednostavna teorema.

Teorema (o rangu i defektu linearnog operatora). *Neka je $A: U \longrightarrow V$ linearni operator i neka je $\dim U < \infty$, tada je*

$$d(A) + r(A) = \dim U.$$

Dokaz. Neka je $d(A) = \dim\ \mathsf{Ker}\, A$ defekt operatora A, i neka je $e_K = (e_1,e_2,\dots,e_d)$ baza potprostora $\mathsf{Ker}\, A$. Sada skup e_K nadopunimo vektorima $e_{d+1},\dots,e_m$ do baze za čitav prostor U. Da bismo dovršili dokaz potrebno je pokazati da su vektori $Ae_{d+1},\dots,Ae_m$ linearno nezavisni. U tu svrhu računamo,

$$0 = \lambda_{d+1}Ae_{d+1} + \lambda_{d+2}Ae_{d+2} + \cdots + \lambda_m Ae_m = A(\lambda_{d+1}e_{d+1} + \lambda_{d+2}e_{d+2} + \cdots + \lambda_m e_m),$$

odakle sledi da je vektor $\lambda_{d+1}e_{d+1} + \lambda_{d+2}e_{d+2} + \cdots + \lambda_m e_m \in \mathsf{Ker}\, A$. Kako je $e_K = (e_1,e_2,\dots,e_d)$, kao baza vektorskog prostora $\mathsf{Ker}\, A$, ujedno i skup generatora od $\mathsf{Ker}\, A$ sledi da je

$$\lambda_{d+1}e_{d+1} + \lambda_{d+2}e_{d+2} + \cdots + \lambda_m e_m = \lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \cdots + \lambda_d e_d. \tag{3.2}$$

S druge strane znamo da je $e=(e_1,e_2,\dots,e_m)$ linearno nezavisan skup, jer je baza vektorskog prostora U, tako da je prethodna jednakost (3.2) moguća samo na trivijalan način, tj. $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$. Time je pokazano da je skup $\{Ae_{d+1}, Ae_{d+2},\cdots, Ae_m\}$ linearno nezavisan, i dokaz je gotov. □

[4] Dokazati !

[5] zapravo dovoljno je zahtevati samo da je $\dim U < \infty$.

Posledica 1. *Neka je L pravi potprostor konačnodimenzionog prostora U. Tada L i U nisu izomorfni, tj. ne postoji linearna bijekcija sa U na L.*

Dokaz. Kako je $L \subsetneq U$, tada je $\dim\, L < \dim\, U$ i pretpostavimo da postoji linearna bijekcija $A : U \longrightarrow L$. Tada bi prethodna teorema implicirala, da je $n = \dim\, U = r(A) + d(A)$, a kako je $r(A) < n$ sledilo bi da je $d(A) \geq 1$, tj. A ne bi bilo injektivno preslikavanje, zbog tvrdnja (i6) 3.1 Teorema. Dobijena kontradikcija pokazuje da ne postoji linearna bijekcija sa U na L pa oni nisu izomorfni. □

Posledica 2. *Neka je V konačnodimezionalni prostor i neka je $A : V \longrightarrow V$ linearni operator. Tada je ekvivalentno:*

(i1) *A je izomorfizam,*

(i2) *A je monomorfizam,*

(i3) *A je epimorfizam.*

Dokaz. Iz definicija je jasno da iz (i1) slede (i2) i (i3). Dovoljno je dokazati da su tvrdnje (i2) i (i3) ekvivalentne.

Dokažimo prvo da iz (i2) sledi (i3). Ako je A monomorfizam, onda je $\mathsf{Ker}\, A = \{0\}$ i $d(A) = 0$, pa je $r(A) = \dim V$. Kako je s druge strane $\mathsf{Im}\, A \subseteq V$ i oba vektorska prostora $\mathsf{Im}\, A$ i V imaju istu dimenziju, oni se podudaraju tj. $\mathsf{Im}\, A = V$.

Obrat, tj. neka je A epimorfizam, $\mathsf{Im}\, A = V$, pa je $r(A) = \dim V$ i $d(A) = 0$. Sada iz $d(A) = 0$ zaključujemo da je $\mathsf{Ker}\, A = \{0\}$, pa je A monomorfizam. □

Posledica 3. *Neka je V konačnodimenzioni vektorski prostor, neka je $A : V \longrightarrow V$ linerani operator i neka je $B : V \longrightarrow V$ linearni operator takav da je ili $A\,B = \mathsf{id}_V$ ili $B\,A = \mathsf{id}_V$. Tada je A izomorfizam i $A^{-1} = B$.*

Dokaz. Pretpostavimo npr. da je $A\,B = \mathsf{id}_V$, odakle zaključujemo da je preslikavanje A epimorfizam (ako je kompozicija dve funkcije $f \circ g$ surjekcija onda je f surjekcija). Sada Posledica 2 implicira da je A izomorfizam, pa postoji $A^{-1} \in \mathsf{Hom}\, V$. Dakle, imamo da je $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = \mathsf{id}_V$ i $A\,B = \mathsf{id}_V$, odavde je prvo $A\,B = A\,A^{-1}$, a zatim je i $A\,(B - A^{-1}) = \mathbb{O}$. Kada bi $B - A^{-1} \neq \mathbb{O}$ onda bi postojao $0 \neq x \in V$ takav da je $(B - A^{-1})\,x \neq 0$, pa bi i $A\,(B - A^{-1})\,x \neq 0$, što je nemoguće. Prema tome dobijena kontradikcija pokazuje da je $B - A^{-1} = \mathbb{O}$, tj. $B = A^{-1}$.
Slično se tretira i slučaj kada je $B\,A = \mathsf{id}_V$. □

Primer 1. Neka je $\mathcal{P}_n = \mathbb{R}_n[t] = \{a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots + a_n\,t^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ vektorski prostor realnih polinoma stepena manjeg od $n+1$, i neka je $\mathbb{D} = d/dt : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_{n-1}$ operator diferenciranja.

Odredimo rang i defekt operatora $\mathbb{D}$. Kako je skup $e = (1, t, t^2, \ldots, t^n)$ baza vektorskog prostora $\mathcal{P}_n$ i kako je $\mathbb{D}(e) = (0, 1, 2\,t, \ldots, n\,t^{n-1})$ zaključujemo da je $d(\mathbb{D}) = 1$, jer $\mathbb{D}$ samo konstantne polinome preslikava u 0, tako da je, na osnovu Teoreme o rangu i defektu(TRD), $r(\mathbb{D}) = n$ jer je $\dim \mathcal{P}_{n-1} = n$. Primetimo da je $\mathbb{D}$ epimorfizam realnih vektorskih prostora $\mathcal{P}_n$ i $\mathcal{P}_{n-1}$.

Primer 2. Tvrđenje Posledica 1, 2 i 3 nisu tačna ako izbacimo uslov konačne dimenzionalnosti prostora U, kao što pokazuje sledeći primeri. Neka je $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ skup svih realnih nizova, i posmatrajmo linearno preslikavanje $A : V \longrightarrow V$ definisano formulom,

$$A(x) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots) = (x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$

Primetimo da operator A pomera sve komponente niza x za jedno mesto u levo, zato se operator A tradicionalno naziva levi šift.

(P1) $L = \{x \in V \mid x_1 = x_2\}$ je pravi potprostor od V, i lako se vidi da je $A(L) = V$, tj. levi šift je linearna bijekcija sa L na V.

(P2) A je epimorfizam, jer za $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots,) \in V$ postoji $x = (0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \ldots,) \in V$ takav da je: $Ax = y$. Očigledno, A nije monomorfizam jer $A(1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots,) = 0$, tj. $\mathsf{Ker}\, A$ nije trivijalno.

Slično, ako posmatramo desni šift tj. preslikavanje, $B : V \longrightarrow V$, dato formulom:

$$B(x) = B(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots,)\,.$$

Desni šift je monomorfizam, jer je $Bx = 0$ ako i samo ako je

$$0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \ldots,$$

nije surjektivan jer npr. za $y = (1, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,)$ ne postoji $x \in V$ takav da je $Bx = y$ [6].

(P3) Za levi i desni šift važi,

$$A\,B(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = A(0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

tj. $A\,B = \mathsf{id}_V$, ali s druge strane imamo da je

$$B\,A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = B(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots) = (0, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots),$$

pa je očigledno da je $B\,A \neq \mathsf{id}_V$. Dakle, ako dimenzija od V nije konačna onda ni jedna od relacija $A\,B = \mathsf{id}_V$ i $B\,A = \mathsf{id}_V$ ne implicira onu drugu [7].

Primer 3: Projektor. Neka je V konačnodimenzioni vektorski prostor i neka je $P : V \longrightarrow V$ linearni operator za koje važi da je $P^2 = P$. Linearni operatori sa ovom osobinom veoma su važni u raznim oblastima matematike i zovu se **projektori**.

Svaki projektor P zadovoljava sledeća svojstva:

(i1) $x \in \mathsf{Im}\,A$ ako i samo ako je $Px = x$,

(i2) ako $P \neq \mathsf{id}_V$ onda P nije izomorfizam,

(i3) $V = \mathsf{Ker}\,P \oplus \mathsf{Im}\,P$.

Dokaz. (i1) Neka je $x \in \mathsf{Im}\,A$ onda postoji $y \in V$ takav da je $x = Py$, pa imamo redom: $Px = P(P(y)) = P^2 y = Py = x$. Obratno, ako je $x = Px$ onda je jasno $x \in \mathsf{Im}\,A$.

(i2) Pretpostavimo da je $P \neq \mathsf{id}_V$, onda je $P - \mathsf{id}_V \neq \mathbb{O}$ i postoji $0 \neq x \in V$ takav da je $(P - \mathsf{id}_V)\,x \neq 0$ što je ekvivalentno sa $Px \neq x$, i sada (i1) implicira da $x \notin \mathsf{Im}\,P$, tj. $\mathsf{Im}\,P \neq V$ i P nije izomorfizam.

(i3) Neka je $x \in \mathsf{Ker}\,P \cap \mathsf{Im}\,P$ onda je $Px = 0$ i $Px = x$ odakle zaključujemo da je $x = 0$, pa je suma direktna i jednakost je posledica teoreme o rangu i defektu. ☐

3.3. Regularni operatori. Linearni operator A je regularan ako je maksimalnog ranga. Ova definicija ima sledeće dve mogućnosti u zavisnosti od odnosa dimenzija vektorskih prostora U i V:

(i1) ako je $\dim U \leq \dim V$ tada je A regularan akko je $\dim\,\mathsf{Im}\,A = \dim U$ i $\mathrm{Ker}\,A = \{0\}$,

(i2) ako je $\dim U > \dim V$ tada je A regularan akko je $\mathrm{Im}\,A = V$.

U praksi nas će uglavnom interesovati prvi slučaj iz prethodne definicije. Za linearni operator A kažemo da je singularan ako je $\mathsf{Ker}\,A \neq \{0\}$, tj. $d(A) \geq 1$. Primetimo, da u slučaju (i1) iz definicije regularnosti operatora sledi da su iskazi, *(r1) A nije regularan operator* i *(r2) A je singularan operator, ekvivalentni.*

Primetimo, ako je $A : V \longrightarrow V$ invertibilan element monoida $(\mathsf{Hom}\,V, \circ)$, tada je A linearan i bijekcija, pa na osnovu svojstva (i6) iz 3.1 Teorema sledi da je $\mathsf{Ker}\,A$ trivijalno i A je regularan.

Obratno, ako je $A : V \longrightarrow V$ regularan tada je $r(A) = \dim V$ i $d(A) = 0$. Iz $r(A) = \dim V$ i činjenice da je $\mathsf{Im}\,A \subseteq V$ sledi da je $\mathsf{Im}\,A = V$, tj. A je surjekcija. S druge strane $d(A) = 0$ i 3.1 Teorema (i6) impliciraju da je A injektivno preslikavanje. Dakle, u ovom slučaju A je bijekcija, koja ima linearni inverz A^{-1} (3.1 Teorema 2). Time smo pokazali sledeću propoziciju.

Propozicija 1. *$A \in \mathsf{Hom}\,V$ je A regularan akko je A invertibilan.*

Sledeća propozicija pokazuje da komponovanje linearnog operatora sa leva ili sa desna sa regularnim operatorom ne menja njegov rang.

Propozicija 2. *Neka su $A \in \mathsf{Hom}\,V$, $B \in \mathsf{Hom}\,(U, V)$ i $C \in \mathsf{Hom}\,U$ linearni operatori takvi da su A i C regularni. Tada*

(i1) $r(A \circ B) = r(B)$,

(i2) $r(B \circ C) = r(B)$,

---

[6] jer je prva komponenta vektora Bx uvek jednaka 0.

[7] Jednakost $A\,B = \mathsf{id}_V$, primenimo prvo na operator A, a zatim na B, i tako dobijamo da niti jedna od relacija iz Propozicije 3 ne implicira onu drugu.

(i3) $r(A \circ B \circ C) = r(B)$,

(i4) *ako je* V_1 *potprostor vektorskog prostora* V, *tada je* $\dim A(V_1) = \dim V_1$.

Dokaz. Ako je $D \in \mathsf{Hom}\,(W)$ regularan operator, biće $r(D) = \dim W$ i $d(D) = 0$, ili ekvivalentno $\mathsf{Im}\, D = W$ i $\mathsf{Ker}\, D = \{0\}$.

U slučaju (i1), jer je A regularan, za $x \in \mathsf{Ker}\,(A \circ B)$ imamo redom,

$$0 = (A \circ B)(x) = A(Bx), \quad \text{tj. } Bx \in \mathsf{Ker}\, A\,.$$

Kako je $\mathsf{Ker}\, A = \{0\}$, biće $B(x) = 0$, tj. $\mathsf{Ker}\,(A \circ B) \subseteq \mathsf{Ker}\, B$ i budući da obratna inkluzija uvek važi, sledi da je $\mathsf{Ker}\,(A \circ B) = \mathsf{Ker}\, B$, tako da je i $d(A \circ B) = d(B)$. Sada primena teoreme o rangu i defektu linearnog operatora na $A \circ B$ implicira da je i $r(A \circ B) = r(B)$.

(i2) Kako je operator C regularan imamo,

$$\mathsf{Im}\,(B \circ C) = (B \circ C)(U) = B(C(U)) = B(U) = \mathsf{Im}\, B\,, \quad \text{odakle odmah sledi da je} \quad r(B \circ C) = r(B).$$

(i3) je očigledna posledica svojstava (i1) i (i2).

(i4) Primena (TRD) na linearni operator $A_1 : V_1 \longrightarrow A(V_1)$, definisan sa $A_1(x) = A(x)$, $\forall\, x \in V_1$, uz korišćenje činjenice da je A regularan, tj. $d(A) = 0$, odmah daje tvrdnju. □

Napomenimo da linearni operator $A_1 = A_{|V_1}$ nazivamo **restrikcija operatora** A na potprostor V_1.

Na skupu $\mathsf{Hom}\,(U, V)$ definišemo sledeće dve relacije:

(i1) $A \sim B$ ako je $r(A) = r(B)$,

(i2) $A \approx B$ ako postoje regularni operatori $S \in \mathsf{Hom}\, V$ i $T \in \mathsf{Hom}\, U$ takvi da je $A = S \circ B \circ T$.

Očigledno, relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na $\mathsf{Hom}\,(U, V)$, zato jer je u njenoj osnovi jednakost [8], koja jeste relacija ekvivalencije. Manje očigledno je da je i relacija $\approx$ takođe relacija ekvivalencije, što pokazujemo u sledećoj lemi.

Lema. *Relacija* $\approx$ *je relacija ekvivalencije na* $\mathsf{Hom}\,(U, V)$.

Dokaz. Refleksivnost od $\approx$ sledi ako uzmemo da je $S = \mathsf{id}_U$ i $T = \mathsf{id}_V$.

Ako je $A \approx B$ tada postoje regularni operatori $S \in \mathsf{Hom}\, V$ i $T \in \mathsf{Hom}\, U$ takvi da je $A = S \circ B \circ T$. Kako su S i T regularni, oni su invertibilni i $S^{-1} \in \mathsf{Hom}\, V$ i $T^{-1} \in \mathsf{Hom}\, U$, tako da ako na jednakost $A = S \circ B \circ T$ primenimo regularne operatore S^{-1} i T^{-1} redom sa leva i desna, dobićemo,

$$S^{-1} \circ A \circ T^{-1} = S^{-1} \circ (S \circ B \circ T) \circ T^{-1} = (S^{-1} \circ S) \circ B \circ (T \circ T^{-1}) = \mathsf{id}_V \circ B \circ \mathsf{id}_U = B.$$

Dakle, $B \approx A$ i relacija $\approx$ je simetrična.

Neka su sada $A \approx B$ i $B \approx C$ tada postoje invertibilni operatori $S_1, S_2 \in \mathsf{Hom}\, V$ i $T_1, T_2 \in \mathsf{Hom}\, U$ takvi da je $A = S_1 \circ B \circ T_1$ i $B = S_2 \circ C \circ T_2$. Iz ove dve jednakosti dobijamo,

$$A = S_1 \circ B \circ T_1 = S_1 \circ (S_2 \circ C \circ T_2) \circ T_1 = (S_1 \circ S_2) \circ C \circ (T_2 \circ T_1) = S \circ C \circ T,$$

gde je $S = S_1 \circ S_2$ i $T = T_2 \circ T_1$. Kako je kompozicija dva invertibilna operatora invertibilan operator (ako je $S = S_1 \circ S_2$, pri čemu su S_1 i S_2 invertibilni, $S^{-1} = S_2^{-1} \circ T_1^{-1}$), iz dobijene jednakosti $A = S \circ C \circ T$, sledi da je $A \approx C$ i relacija $\approx$ je tranzitivna. Time je dokaz završen. □

Teorema 1. *Relacije* $\sim$ *i* $\approx$ *se podudaraju.*

Dokaz. Ako je $A \approx B$ tada iz prethodne Propozicije 2 sledi da je tada i $A \sim B$.

Obratno, ako je $A \sim B$ tada je $r = r(A) = r(B)$ i $d = d(A) = d(B) = m - r$ ($m = \dim U$) i potrebno je naći regularne operatore $S \in \mathsf{Hom}\, V$ i $T \in \mathsf{Hom}\, U$, takve da je $A = S \circ B \circ T$. Zbog 3.2 Lema dovoljno je definisati dejstvo operatora S i T na nekim bazama vektorskih prostora V i U. Kao u dokazu teoreme o rangu i defektu konstruišemo dve baze vektorskog prostora U : $e = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ i $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, takve da su $e_A = (e_1, \ldots, e_d)$ i $f_B = (f_1, \ldots, f_d)$ baze potprostora $\mathsf{Ker}\, A$ i $\mathsf{Ker}\, B$, redom. Jasno, skupovi

$$e'_A = (e'_1 = Ae_{d+1}, e'_2 = Ae_{d+2}, \ldots, e'_r = Ae_m) \quad \text{i} \quad f'_B = (f'_1 = B(f_{d+1}), f'_2 = B(f_{d+2}), \ldots, f'_r = B(f_m))$$

su baze potprostora $\mathsf{Im}\, A$ i $\mathsf{Im}\, B$, redom, i kao takvi su linearno nezavisni. I sada ih nadopunimo do baza vektorskog prostora V, tako da su $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ i $f' = (f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)$, baze vektorskog prostora V. Na kraju, definišemo operatore T i S dejstvima na bazama f i f' na sledeći način $f_i = Te_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ i

[8] rangova matrica.

$e'_j = Sf'_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Budući da operatori S i T prevode jednu bazu u drugu oni su regularni, i pri tome, iz konstrukcija baza, još imamo,

$$(S \circ B \circ T)(e_i) = S(B(Te_i)) = S(B(f_i)) = S(0) = 0 = Ae_i, \quad i = 1, 2, \ldots, d$$

$$(S \circ B \circ T)(e_j) = S(B(Te_j)) = S(B(f_j)) = S(f'_{j-d}) = e'_{j-d} = Ae_j, \quad j = d+1, d+2, \ldots, m.$$

Kako linearni operatori A i $S \circ B \circ T$ deluju jednako na bazi e vektorskog prostora U sledi da se oni podudaraju, tj. $A = S \circ B \circ T$. $\square$

3.4. Izomorfizmi vektorskih prostora. Za dva vektorska prostora U i V nad poljem $\mathbb{F}$ kažemo da su izomorfna ako postoji barem jedan izomorfizam sa U u V, tj. postoji barem jedno bijektivno linearno preslikavanje $A : U \longrightarrow V$. Oznaka koju koristimo za izomorfizam vektorskih prostora je $\cong$.

Time je definisana relacija 'biti izomorfan'($\cong$) na skupu $\mathcal{V}(\mathbb{F})$ svih konačnodimenzionih vektorskih prostora nad poljem $\mathbb{F}$. Osnovno svojstvo ove relacije sadržano je u sledećoj lemi.

Lema. *Relacija $\cong$ je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{V}(\mathbb{F})$.*

Dokaz. Potrebno je proveriti da je relacija $\cong$ refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Za refleksivnost, dovoljno je posmatrati identičko preslikavanje $\mathrm{id}_U : U \longrightarrow U$, koje je, očigledno, linearno i bijekcija, tj. izomorfizam.

Ako su U i V izomorfni tada postoji linearna bijekcija $A : U \longrightarrow V$. U tački 3.1 Teorema 2 pokazali smo da je tada i preslikavanje $A^{-1} : V \longrightarrow U$ linearno, a kako je i bijekcija, iz definicije sledi da su V i U izomorfni, tj. relacija $\cong$ je simetrična.

Neka su U, V i $W \in \mathcal{V}(\mathbb{F})$ vektorski prostori nad $\mathbb{F}$ takvi da je $U \cong V$ i $V \cong W$. Tada postoje linearne bijekcije $A : U \longrightarrow V$ i $B : V \longrightarrow W$. U tački 3.1 Teorema 2 pokazali smo takođe da je $C = A \circ B$ linearno preslikavanje, a kako je i kompozicija bijekcija bijekcija, sledi da je preslikavanje $C : U \longrightarrow W$ izomorfizam vektorskih prostora U i W. Time je pokazana i tranzitivnost relacije $\cong$. $\square$

Kao što znamo, svaka relacije ekvivalencije na nekom skupu razbija taj skup u međusobno disjunktne klase ekvivalencije. Tako je i u upravo posmatranom slučaju skupa $\mathcal{V}(\mathbb{F})$ i relacije $\cong$. Stoga je potrebno naći neku jednostavnu karakterizaciju klasa ekvivalencije relacije $\cong$ kao i najjednostavnije predstavnike istih. Odgovor na prvo pitanje daje sledeća teorema.

Teorema. *Dva konačnodimenziona vektorska prostora U i V nad istim poljem su izomorfna ako i samo ako imaju istu dimenziju.*

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je $\dim U = \dim V = n$. Tada postoje baze $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ i $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ od U i V, redom. Sada definišemo operator $A : U \longrightarrow V$, formulom $A(e_i) = f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ i operator A proširimo po linearnosti formulom (3.1). Pokažimo da je preslikavanje A, '1-1' i 'na'. Ako je $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ i $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ biće $Ax = Ay$ akko

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i A(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_i = \sum_{i=1}^n y_i f_i = \sum_{i=1}^n y_i A(e_i) = A\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = Ay.$$

Kako su koeficijenti nekog vektora u bazi f jedinstveno određeni prethodna jednakost je moguća akko je $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada je $x = y$, tj. A je '1-1'.

Da bismo pokazali da je A 'na' uzmimo proizvoljni vektor $z = \sum_{i=1}^n z_i f_i \in V$, i sada se nije teško ubediti da je $Ax = z$ za $x = \sum_{i=1}^n z_i e_i$.

Obratno, pretpostavimo sada da su U i V izomorfni, tj. postoji linearna bijekcija $A : U \longrightarrow V$. Zbog teoreme o rangu i defektu primenjene na operator A prvo imamo,

$$\dim U = r(A) + d(A) = \{\text{jer je } A \text{ monomorfizam, 3.1 Tm.(i6)}\} = r(A) = \{\text{jer je } A \text{ 'na'}\} = \dim V,$$

i dokaz je gotov. $\square$

Odgovor na drugo pitanje, tj. da pronađemo nekog predstavnika klasa ekvivalencije relacije $\cong$, već znamo: to su vektorski prostori $\mathbb{F}^n = (\mathbb{F}^n, \mathbb{F}, +, \cdot)$, $(n \in \mathbb{N})$, vidi tačku 2.3. Iz pomenute tačke možemo videti da su oznake u prostorima $\mathbb{F}^n$ najjednostavnije i da su oni najbolji prototipovi vektorskih prostora nad poljem $\mathbb{F}$ dimenzije n. Prethodna činjenica pokazuje važnost vektorskih prostora $\mathbb{F}^n$, u suštini sva naša istraživanja o konačnodimenzionim vektorskim prostorima možemo svesti na proučavanja vektorskih prostora $\mathbb{F}^n$.

3.5. Teoreme o izomorfizmu. U ovoj tački navodimo poznate teoreme o izomorfizmu, čiji analogoni važe i u slučaju grupa i prstena.

Teorema 1. *Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $A : U \longrightarrow V$ epimorfizam. Tada je $U/\mathsf{Ker}\,A$ izomorfno sa V.*

Dokaz. Prvo primetimo da je kanonska projekcija $\pi : U \longrightarrow U/\mathsf{Ker}\,A$, koja je definisana formulom, $\pi(x) = [x] = x + \mathsf{Ker}\,A$, uvek epimorfizam

$$\pi(x+y) = [x+y] = [x] + [y] = \pi(x) + \pi(y), \qquad \pi(\lambda\, x) = [\lambda\, x] = \lambda\,[x] = \lambda\,\pi(x).$$

Postoji jedinstveni izomorfizam $\varphi : U/\mathsf{Ker}\,A \longrightarrow V$ takav da je $A = \varphi \circ \pi$, pri čemu je $\pi : U \longrightarrow U/\mathsf{Ker}\,A$ kanonski epimorfizam, tj. da komutira sledeći dijagram:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V \\ & U/\mathsf{Ker}\,A \arrow[ur, "\exists\,!\,\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Zahtevi na komutativnost dijagrama (svojstvo preslikavanja φ) inspirišu nas da definišemo preslikavanje φ formulom: $\varphi[x] = A\,x$. Pokažimo da je φ dobro definisano preslikavanje: ako je $[x] = [x']$ onda je $x - x' \in \mathsf{Ker}\,A$, tako da prvo imamo,

$$0 = A(x - x') = A\,x - A\,x', \qquad \text{a zatim sledi}$$

$$\varphi[x] = A\,x = A\,x' = \varphi[x'],$$

a to upravo znači da je preslikavanje φ dobro definisano.
Sada pokažimo da je φ linearni operator,

$$\varphi(\alpha\,[x] + \beta\,[y]) = \varphi[\alpha\,x + \beta\,y] = A(\alpha\,x + \beta\,y) = \alpha\,A\,x + \beta\,A\,y = \alpha\,\varphi[x] + \beta\,\varphi[y].$$

Da bismo završili dokaz potrebno je još pokazati jedinstvenost preslikavanja φ. Dakle, pretpostavimo da je ψ neko drugo preslikavanje koje ima osobinu da gornji dijagram komutira, tj. preslikavanje za koje važi da je $\psi \circ \pi = A$. Tada nalazimo,

$$\psi[x] = A\,x = \varphi[x] \quad \text{za sve } [x] \in U/\mathsf{Ker}\,A. \quad \text{Dakle,} \quad \psi \equiv \varphi. \qquad \square$$

Teorema 2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, i neka su L i M njegovi potprostori. Tada je $L + M/M \cong L/L \cap M$.*

Dokaz. Zbog prethodne teoreme dovoljno je naći epimorfizam $A : L+M \longrightarrow L/L\cap M$, takav da je $\mathsf{Ker}\,A = M$. Pokažimo da preslikavanje, $A(l+m) = [l]_{L\cap M}$, ima tražena svojstva. Prvo pokažimo da je preslikavanje A dobro definisano, tj ne zavisi od predstavljanja vektora $x \in L+M$ u obliku $x = l + m$, gde je $l \in L$ i $m \in M$. Zato pretpostavimo da je $x = l + m = l' + m'$, odakle sledi da je $l - l' = m' - m \in L \cap M$. S druge starane imamo,

$$A(l+m) = [l]_{L\cap M} = \{\text{jer je } l - l' \in L \cap M\} = [l']_{L\cap M} = A(l' + m').$$

Linearnost preslikavanja A očigledna je iz njegove definicije, kao i definicije sabiranja u faktor prostoru.
A je surjektivno preslikavanje, jer za proizvoljni $y = [x]_{L\cap M} \in L/L\cap M$, imamo da je $y = x + L \cap M$, tj. $x \in L$, a zatim vidimo da za $z = x + 0 \in L + M$ važi da je $Az = y$.

Neka je $x = l + m \in \mathsf{Ker}\,A$, tada je $[0]_{L\cap M} = Ax = A(l+m) = [l]_{L\cap M}$, odakle je $l \in L \cap M$, tj. $x \in M$, tj. $\mathsf{Ker}\,M$. $\square$

Teorema 3. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, i neka su L i M njegovi potprostori takvi da je $L \subseteq M$. Tada je je M/L potprostor od V/L i $V/M \cong V/L\big/M/L$.*

Dokaz. Očigledno, M/L je potprostor od V/L.

Zbog Teoreme 1, dovoljno je naći epimorfizam $A : V/L \longrightarrow V/M$, takav da je $\mathsf{Ker}\,A = M/L$. Pokažimo da preslikavanje, $A[x]_L = [x]_M$, ima tražena svojstva. Neka je $[x]_L = [x']_L$, onda je $x - x' \in L \subseteq M$ pa je $A[x]_L = [x]_M = [x']_M = A[x']_L$, tj. A je dobro definisan operator sa V/L u V/M. Sada pokažimo da je A linearan operator:

$$A[\alpha\,x + \beta\,y]_L = [\alpha\,x + \beta\,y]_M = \alpha\,[x]_M + \beta\,[y]_M = \alpha\,A[x]_L + \beta\,A[y]_L.$$

Jasno, A je surjektivno preslikavanje, jer za proizvoljni $y = [x]_M \in V/M$, imamo da je $y = x + M$, a zatim vidimo da za $z = x + L = [x]_L$ važi da je $Az = y$.

Neka je $[x]_L \in \mathsf{Ker}\,A$, tada je $[0]_M = A[x]_L = [x]_M$, odakle je $x \in M$, tj. $\mathsf{Ker}\,A = \{[x]_L \mid x \in M\} = M/L$. $\square$

Primedba. Primetimo, da ako su u Teoremama 1,2 i 3 pretpostavi da su U i V konačnodimenzioni vektorski prostori tada deo tvrđenja o izomorfnosti odgovarajućih prostora odmah sledi jer pomenuti prostori imaju iste dimenzije: u Teoremi 1 to su $U/\mathsf{Ker}\,A$ i V, u Teoremi 2 to su , Teoremi 3 to su V/M i $V/L\Big/M/L$.

3.6. Tačni (egzaktni) nizovi. Niz vektorskih prostora $\{V_i\}_{i\in\mathbf{z}}$ i linearnih preslikavanja $\{A_i : V_i \longrightarrow V_{i+1}\}_{i\in\mathbf{z}}$:

$$\ldots\ldots\ V_{i-2} \xrightarrow{\mathrm{A}_{i-2}} V_{i-1} \xrightarrow{\mathrm{A}_{i-1}} V_i \xrightarrow{\mathrm{A}_i} V_{i+1} \xrightarrow{\mathrm{A}_{i+1}} V_{i+2} \xrightarrow{\mathrm{A}_{i+2}} \ldots\ldots\ ,$$

zovemo **tačnim (egzaktnim) nizom** ako je $\mathsf{Im}\,A_{i-1} = \mathsf{Ker}\,A_i$, $\forall\, i \in \mathbb{Z}$. Od posebnog su interesa tkz. **kratki tačni nizovi** tj. tačni nizovi oblika:

$$\{0\} \xrightarrow{\mathrm{i}} U \xrightarrow{\mathrm{A}} V \xrightarrow{\mathrm{B}} W \xrightarrow{\pi} \{0\}.$$

Propozicija. *U kratkom tačnom nizu važi* $M = \mathsf{Im}\,A = \mathsf{Ker}\,B,\ \ U \cong M$ *i* $V/M \cong W$.

Dokaz. Iz definicije tačnog niza zaključujemo redom, $\{0\} = \mathsf{Im}\,i = \mathsf{Ker}\,A$, pa je A monomorfizam. Slično iz $\mathsf{Im}\,B = \mathsf{Ker}\,\pi = W$, sledi da je B je epimorfizam. Budući da je A monomorfizam odmah sledi da je $M = \mathsf{Im}\,A \cong U$, i kako je B epimorfizam primjenjujući 3.3 Teorema 1 zaključujemo da je $V/\mathsf{Ker}\,B \cong W$. Iskoristimo li da je niz tačan u prostoru V[9], biće $M = \mathsf{Im}\,A = \mathsf{Ker}\,B$, pa je i $V/M \cong W$. □

3.7. Algebra $\mathsf{Hom}\,V$. U prethodnim tačkama bavili smo se nekim svojstvima linearnih operatora nad proizvoljnim poljem $\mathbb{F}$, tj. elementima skupa $\mathsf{Hom}\,(U,V) = \mathsf{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V)$. Ova tačka posvećena je otkrivanju algebarske strukture skupa $\mathsf{Hom}\,(U,V)$. Tako dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 1. (i1) *Uređena četvorka* $\mathsf{Hom}\,(U,V) = (\mathsf{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V), \mathbb{F}, +, \cdot)$, *gde je*

(a) $(A+B)(x) = Ax + Bx$, *za sve* $A, B \in \mathsf{Hom}\,(U,V)$ *i za sve* $x \in U$,

(m) $(\lambda \cdot A)(x) = \lambda \cdot Ax$, *za sve* $A \in \mathsf{Hom}\,(U,V)$, $\lambda \in \mathbb{F}$ *i za sve* $x \in U$.

je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

(i2) *Ako su* $e = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ *i* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *neke dve baze vektorskih prostora* U *i* V, *redom, i ako sa* E_{ij} *obeležimo linearni operator, koji u paru baza* e *i* f *deluje na sledeći način:*

(3.3) $$E_{ij}(e_k) = \delta_{jk}\, f_i, \quad \text{tada je skup} \quad E = \{E_{ij} \mid i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n\}$$

baza vektorskog prostora $\mathsf{Hom}\,(U,V)$. *Specijalno,* $\dim \mathsf{Hom}\,(U,V) = \dim U \cdot \dim V$.

Dokaz. (i1) Iz definicije sabiranja linearnih operatora i množenja linearnih operatora sa skalarima lako se vidi da je $\mathsf{Hom}\,(U,V)$ vektorski prostor, jer se potrebna svojstva linearnih operatora svode na odgovarajuća svojstva u vektorskim prostorima U i V.

(i2) Potrebno je proveriti da je skup operatora E[10] linearno nezavisan i da je skup generatora.

Linearna nezavisnost skupa E sledi iz

$$\mathbb{O}(e_k) = 0 = \Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}E_{ij}\Big)(e_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}E_{ij}(e_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}\delta_{jk}f_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_{ik}f_i, \quad k = 1,2,\ldots,m,$$

i kako je skup $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ linearno nezavisan, prethodna jednakost moguća je samo na trivijalan način: $\lambda_{k1} = \lambda_{k2} = \cdots = \lambda_{kn} = 0$, za sve $k = 1,2,\ldots,m$.

Sada uzmimo proizvoljni $A \in \mathsf{Hom}\,(U,V)$, tada u paru baza $e = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ i $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, imamo

(3.4) $$Ae_k = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}\, f_i, \qquad k = 1,2,\ldots,m.$$

Posmatrajmo sada linearni operator $B = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,E_{ij}$. Tvrdimo da je $B = A$, i da bi to dokazali potrebno je da proverimo da operatori A i B jednako deluju na bazi e. Sada računamo,

$$B(e_k) = \Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}E_{ij}\Big)(e_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}E_{ij}(e_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\delta_{jk}f_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}f_i \overset{(3.4)}{=} Ae_k, \quad k = 1,2,\ldots,m,$$

[9] ili preciznije na mestu V u tačnom nizu

[10] Primetite da su sada, u smislu definicije vektorskog prostora, vektori linearni operatori.

odakle sledi da je linearno nezavisan skup E i skup generatora vektorskog prostora $\mathsf{Hom}\,(U,V)$, tj. E je baza od $\mathsf{Hom}\,(U,V)$. Kako skup E ima $m \cdot n$ elemenata sledi i formula za dimenziju od $\mathsf{Hom}\,(U,V)$. $\square$

Primetimo, da smo u dokazu tvrdnje (i2) prethodne teoreme morali uzeti par baza $e = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ i $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, od U i V, redom. I tada smo linearnom operatoru A formulom (3.4) dodelili matricu $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$. Iz tačke 2.8 znamo da je skup $\mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$ takođe vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ dimenzije $m \cdot n$, iste kao i vektroski prostor $\mathsf{Hom}\,(U,V)$. Dakle, sada za fiksirane baze $e = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ i $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, od U i V, redom, možemo definisati preslikavanje,

$$\text{(3.5)} \qquad \varphi_{e,f} : \mathsf{Hom}\,(U,V) \longrightarrow \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F}), \quad \text{formulom} \quad \varphi_{e,f}(A) \overset{(3.4)}{=} \mathcal{A} = (\alpha_{ij}).$$

Primetimo da je preslikavanje $\varphi_{e,f}$ linearno, jer za $A, B \in \mathsf{Hom}\,(U,V)$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ imamo u paru baza e i f,

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\, f_k i, \quad Be_k = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik}\, f_i, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\text{tako da je prvo,} \quad (A+B)\, e_k = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ik} + \beta_{ik})\, f_i, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \quad \text{a zatim je i:}$$

$$\text{(3.6)} \qquad \varphi_{e,f}(A+B) = \varphi_{e,f}(A) + \varphi_{e,f}(B).$$

$$\text{Slično, imamo} \quad (\lambda A) e_k = \lambda\, (A e_k) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\, f_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\, \alpha_{ik})\, f_i, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad \text{tako da je}$$

$$\text{(3.7)} \qquad \varphi_{e,f}(\lambda\, A) = \lambda\, \varphi_{e,f}(A).$$

Kako je očigledno $\mathsf{Ker}\,(\varphi_{e,f}) = \{\mathbb{O}\}$ i $\dim \mathbb{M}_{nm} = \mathsf{Hom}\,(U,V) = m \cdot n$ sledi da je preslikavanje $\varphi_{e,f}$ izomorfizam vektorski prostora. Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema 2. *Vektorski prostori $\mathsf{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V)$ i $\mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$ su izomorfni.*

Primedba 1. Primetimo da ne postoji kanonski izomorfizam (ne može se definisati bez korišćenja para baza) sa $\mathsf{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V)$ na $\mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$, tj. svi izomorfizmi između $\mathsf{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V)$ i $\mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$ su oblika $\varphi_{e,f}$ za neki izbor baza e od U i f od V.

Primedba 2. Zbog onoga što je rečeno na kraju prethodne tačke, mogli smo u razmatranjima ove tačke uzeti da je $U = \mathbb{F}^m$ i $V = \mathbb{F}^n$.

Primedba 3. Kao što znamo kompozicija linearnih operatora je linearni operator, i da bismo to iskoristili da dobijemo neku bogatiju strukturu na $\mathsf{Hom}\,(\mathsf{U},\mathsf{V})$, potrebno je uzeti da je $U = V$. Od ranije znamo da je $(\mathsf{Hom}\, V, \circ)$ monoid. U tački 2.11 Teorema pokazali smo da je $\mathbb{M}_n(F)$ asocijativna $\mathbb{F}-$algebra sa jedinicom. Sada očekujemo da isto važi i za $\mathsf{Hom}\, V$, i da se preslikavanje $\varphi_e = \varphi_{e,e}$ može proširiti do izomorfizma $\mathbb{F}-$algebri $(\mathsf{Hom}\, V, \circ)$ i $\mathbb{M}_n(F)$. Da je to tako dokazujemo u sledećoj teoremi.

Teorema 3. (i1) *Uređena petorka $\mathsf{Hom\,V} = (\mathsf{Hom\,V}, \mathbb{F}, +, \circ, \cdot)$, je asocijativna algebra sa jedinicom.*

(i2) *Asocijativne algebre sa jedinicom $\mathsf{Hom\,V}$ i $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ su izomorfne.*

(i3) *Izomorfizam $\varphi_e : \mathsf{Hom\,V} \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ preslikava regularne (invertibilne) operatore u regularne (invertibilne) matrice.*

Dokaz. (i1) Budući da već znamo da je $\mathsf{Hom\,V}$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ (Teorema 1), i da je $(\mathsf{Hom\,V}, \circ)$ monoid (3.1 Teorema 2), potrebno je proveriti samo uslov (A3) kompatibilnosti množenja vektora i množenja sa skalarima (2.11 Definicija algebre). Preciznije, za $\forall\, A, B \in \mathsf{Hom\,V}$, $\lambda \in \mathbb{F}$, i $x \in V$, važi,

$$\begin{aligned}\underline{(\lambda \cdot (A \circ B))(x)} &= \lambda\, (A \circ B)(x) = \lambda\, (A(B(x))) = (\lambda \cdot A)(B(x)) = \underline{((\lambda \cdot A) \circ B)(x)} = A(\lambda \cdot B(x)) \\ &= \underline{(A \circ (\lambda \cdot B))(x)}.\end{aligned}$$

Iz prethodne relacije (ispuštajući x iz potcrtanih relacija) dobijamo da važi i aksioma (A3).

(i2) Da bismo pokazali da je linearni izomorfizam vektorskih prostora $\varphi_e = \varphi_{e,e} : \mathsf{Hom\,V} \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, definisan formulom (3.5), izomorfizam algebri, potrebno je još samo pokazati da φ_e homomorfizam nekomutativnih monoida, tj. da važi: $\varphi_e(A \circ B) = \varphi_e(A)\, \varphi_e(B)$.

Neka su $A, B \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ zadati svojim dejstvima na bazi (e), tj. neka je $Ae_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\, e_k$ i $Be_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji}\, e_j$, tako da je,

$$(A \circ B)(e_i) \;=\; A(B(e_i)) = A\Bigg(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ji}\, e_j\Bigg) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji}\, A(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\, \beta_{ji}\Big)\, e_k.$$

Kako je $(A \circ B)(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ki}\, e_k$, zaključujemo da je $\gamma_{ki} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\, \beta_{ji}$, a to je matrični element proizvoda matrica, tj. važi da je $\gamma_{ki} = (\mathcal{A}\,\mathcal{B})_{ki}$. Sada lako sledi,

$$\varphi_e(A \circ B) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \varphi_e(A)\, \varphi_e(B).$$

(i3) Pokažimo da je A regularan operator ako i samo ako je $\mathcal{A}$ regularna matrica. Dokaz provodimo u malo opštijem slučaju tj. pretpostavljamo da imamo dve izomorfne $\mathbb{F}-$algebre sa jedinicom $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$, tj. neka je $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, izomorfizam algebri. Tada je $\varphi(1_{\mathcal{F}}) = 1_{\mathcal{G}}$, jer iz jednakosti

$$x \cdot 1_{\mathcal{F}} = 1_{\mathcal{F}} \cdot x = x, \quad \text{sledi} \quad \varphi(x)\, \varphi(1_{\mathcal{F}}) = \varphi(1_{\mathcal{F}})\, \varphi(x) = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{F}.$$

Budući da u $\mathcal{G}$, postoji jedinstveni neutral za množenje i kako je φ bijekcija zaključujemo da je $\varphi(1_{\mathcal{F}}) = 1_{\mathcal{G}}$. Ako je x invertibilan tada

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1_{\mathcal{F}} \quad \text{sledi} \quad \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1})\varphi(x) = \varphi(1_{\mathcal{F}}).$$

Dakle, $\varphi(x)$ je invertibilan i $[\varphi(x)]^{-1} = \varphi(x^{-1})$, tj. ako je x invertibilan element onda je i $\varphi(x)$ invertibilan. Obratno ako je $\varphi(x)$ invertibilan imamo,

$$\varphi(x)\, y = y\, \varphi(x) = \varphi(1_{\mathcal{F}}),$$

i primenom inverznog izomorfizma φ^{-1}, sledi

$$x\, \varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(y)\, x = 1_{\mathcal{F}} \quad \text{odakle sledi da je i } x \text{ invertibilan.}$$

Sada primenimo upravo dokazano na naš slučaj u kojem je $\mathcal{F} = \mathsf{Hom}\, V$, $\mathcal{G} = \mathbb{M}_n$ i $\varphi = \varphi_e$. Ako je operator A regularan, na osnovu gornjih razmatranja $\varphi_e(A) = \mathcal{A}$ je regularna matrica. $\square$

Posledica. *Neka je $\varphi_e(A) = \mathcal{A}$. Matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n$ je regularna ako i samo ako $r(A) = n$.*

Primedba 1. Primetimo, termini "regularan" i "invertibilan" podudaraju se u algebrama $\mathsf{Hom}\, V$ i $\mathbb{M}_n$.

Primedba 2. Iz gornjeg dokaza postaje jasnije zašto je množenje matrica uvedeno relativno komplikovanom formulom. Suština je u činjenici da množenju matrica odgovara kompozicija odgovarajućih operatora. Budući da su linearni operatori apstraktni objekti (kao takvi nisu operativni) njima, nakon što izaberemo neke baze vektorskih prostora, dodeljujemo matrice (matrice operatora u izabranoj bazi) sa kojima znamo računati (jer su matrice operativni objekti). Time je rešen problem računanja u algebri $\mathsf{Hom}\, V$, tj. ono je izomorfizmom φ_e svedeno na računanje u algebri $\mathbb{M}_n$.
Primetimo, da na izomorfizam φ_e možemo gledati kao na 'prevodilac' sa jezika linearnih operatora na jezik matrica.

Elementarne transformacije

3.8. Rang matrice. Očekujemo da se svi pojmovi koje smo definisali (i eventualno budemo kasnije) za linearne operatore direktno prenose pomoću izomorfizma $\varphi_{e,f}$, na matrice.

Očigledno je da iz formule (3.4) sledi da vektori $a_1 = Ae_1, a_2 = Ae_2, \ldots, a_m = Ae_m$ čine kolone matrice $\varphi_{e,f}(A) = \mathcal{A} = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$, i kako s druge strane znamo da vektori $a_1 = Ae_1, a_2 = Ae_2, \ldots, a_m = Ae_m$ razapinju potprostor $\mathsf{Im}\, A$, čija dimenzija se zove rang linearnog operatora A i koji je jednak maksimalnom broju linearno nezavisnih vektora u skupu $\{a_1 = Ae_1, a_2 = Ae_2, \ldots, a_m = Ae_m\}$, definišemo rang matrice $\mathcal{A}$ kao maksimalan broj njenih linearno nezavisnih kolona.

Dakle, ako je data neka matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, tada na nju možemo gledati kao na sliku nekog operatora $A \in \mathsf{Hom}\,(\mathsf{U}, \mathsf{V})$ pri dejstvu izomorfizma $\varphi_{e,f}$, pri čemu su e i f neke baze od U i V, redom. Jasno, rang operatora A ne zavisi od izbora baza e i f.

Ako je $\mathcal{A}$ neka generička (u opštem obliku) matrica, tada ne možemo jednim pogledom na matricu $\mathcal{A}$ odrediti maksimalan broj njenih linearno nezavisnih kolona. Ali za sledeću matricu,

$$\mathbb{D}^r_{nm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_r & \mathcal{O}_{r\,m-r} \\ \hline \mathcal{O}_{n-r\,r} & \mathcal{O}_{n-r\,m-r} \end{array}\right],$$

pri čemu je $\mathbb{I}_r$ jedinična matrica reda r ($r \leq \min\{m,n\}$) i gde su $\mathcal{O}_{r\,m-r}, \mathcal{O}_{n-r\,r}$ i $\mathcal{O}_{n-r\,m-r}$ nula matrice odgovarajućih redova, nije teško odrediti njen rang i on iznosi r.

Matrice $\mathbb{D}^r_{mn}$ nazivamo kanonskim matricama ranga r tipa $m \times n$.

Postavlja se pitanje kako polaznu matricu dovesti nekim transformacijama, koje ne menjaju rang, *do neke od kanonskih matrica* $\mathbb{D}^r_{nm}$ *?*

Odgovor na ovo pitanje nalazi se u tački 3.3, kao i već pomenutom izomorfizmu $\varphi_{e,f}$.

1. Svojstvo (i3) iz 3.3 Propozicija 2 implicira da matrice kojima svodimo polaznu matricu $\mathcal{A}$ na $\mathbb{D}^r_{mn}$ moraju biti regularne.

2. Kako je $\varphi_{e,f}$ izomorfizam možemo definisati i relacije $\sim$ i $\approx$ i za matrice, tj. kažemo da su matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$ u relaciji

(i1) $\sim$ ako je $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{B})$,

(i2) $\approx$ ako postoje regularne matrice $\mathcal{S} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ i $\mathcal{T} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{F})$ takve da je $\mathcal{A} = \mathcal{S}\,\mathcal{B}\,\mathcal{T}$.

3. Na osnovu 3.3 Lema i Teorema 1 znamo da su relacije $\sim$ i $\approx$ na $\mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$ relacije ekvivalencije i da se podudaraju, zbog toga kažemo da su matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$ **ekvivalentne** ako postoje regularne matrice $\mathcal{S} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ i $\mathcal{T} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{F})$ takve da je $\mathcal{A} = \mathcal{S}\,\mathcal{B}\,\mathcal{T}$.

4. Tako da nam ostaje da pronađemo najpogodnije[11] regularne matrice kojima ćemo polaznu matricu $\mathcal{A}$ svesti na neku od kanonskih matrica $\mathbb{D}^r_{nm}$.

Elementarne transformacije (ET) nad vrstama (kolonama) su:

(el1) Množenje vrste (kolone) sa skalarom $\neq 0$,

(el2) Zamena dve vrste (kolone),

(el3) Dodavanje j.-te vrste (kolone) i.-toj vrsti (koloni), $i \neq j$.

U nekoliko narednih propozicija pokazujemo da se elementarne transformacije mogu realizovati množenjem polazne matrice sa regularnim matricama, i to za elementarne transformacije nad vrstama s leva i nad kolonama s desna. Preciznije, imamo:

Propozicija 1. *Neka je $\mathbb{E}_{ij}$ matrica koja na preseku $i.-$te vrste i $j.-$te kolone ima jedinicu, a sve ostale elemente jednake* 0. *Tada važi sledeća formula,*

$$\mathbb{E}_{ij}\,\mathbb{E}_{kl} = \delta_{jk}\,\mathbb{E}_{il}, \tag{3.8}$$

kad god ima smisla.

Dokaz. Primetimo da je $(\mathbb{E}_{ij})_{rs} = \delta_{ir}\,\delta_{js}$, tada za proizvoljni indeks (r,s) iz formule za množenje matrica i osobina Kronekerovog delta simbola sledi:

$$(\mathbb{E}_{ij}\,\mathbb{E}_{kl})_{rs} = \sum_{t=1}^{n} (\mathbb{E}_{ij})_{rt}(\mathbb{E}_{kl})_{ts} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{ir}\,\delta_{jt}\,\delta_{kt}\,\delta_{ls} = \delta_{ir}\,\delta_{ls}\sum_{t=1}^{n}\delta_{jt}\,\delta_{kt} = \delta_{jk}\,\delta_{ir}\,\delta_{ls} = \delta_{jk}\,(\mathbb{E}_{il})_{rs} = (\delta_{jk}\,\mathbb{E}_{il})_{rs},$$

odakle odmah sledi tvrdnja. □

Propozicija 2. *Za $\lambda \neq 0$, data je matrica $\mathbb{F}_{i,\lambda} = \mathsf{diag}\,[1,1,\ldots,\overset{i}{\lambda},1,\ldots,1] \in \mathbb{M}_n$ i neka je $\mathcal{A} = [a_1,a_2,\ldots,a_m] = [a^1,a^2,\ldots,a^n] \in \mathbb{M}_{nm}$. Tada je $\mathbb{F}_{i,\lambda}\,\mathcal{A} = [a^1,a^2,\ldots,\overset{i}{\lambda\,a^i},\ldots,a^n]$, tj. sve vrste osim $i.-$te, matrica $\mathbb{F}_{i,\lambda}\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ se podudaraju, a $i.-$ta vrsta matrice $\mathbb{F}_{i,\lambda}\,\mathcal{A}$ jednaka je proizvodu λ i $i.-$te vrste matrice $\mathcal{A}$.*

Analogno tvrđenje važi i za kolone matrica $\mathcal{A}\,\mathbb{F}_{i,\lambda}$ $(\mathbb{F}_{i,\lambda} \in \mathbb{M}_m)$ i $\mathcal{A}$, tj. $\mathcal{A}\,\mathbb{F}_{i,\lambda} = [a_1,a_2,\ldots,\overset{i}{\lambda\,a_i},\ldots,a_m]$. Matrica $\mathbb{F}_{i,\frac{1}{\lambda}}$ je inverz od $\mathbb{F}_{i,\lambda}$, tj. $\mathbb{F}_{i,\lambda}$ je regularna *matrica.*

[11] sa kojima je najlakše računati.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = (\alpha_{kp})$, tada matricu $\mathbb{F}_{i,\lambda}$ možemo zapisati i u obliku: $\mathbb{F}_{i,\lambda} = \begin{cases} \gamma_{kk} = 1, & k = 1,\dots,n,\ k \neq i \\ \gamma_{ii} = \lambda, & \\ \gamma_{kp} = 0, & \text{inače.} \end{cases}$

Tada je: $\quad (\mathbb{F}_{i,\lambda}\,\mathcal{A})_{lp} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{lk}\,\alpha_{kp} \qquad (*).$

Sada u formuli (*) imamo sledeće dve mogućnosti:

(1) $l \neq i$, implicira $\gamma_{l1} = \gamma_{l2} = \cdots = \gamma_{ll-1} = \gamma_{ll+1} = \cdots = \gamma_{ln} = 0$, i $\gamma_{ll} = 1$, tako da u formuli $(*)$ ostaje samo jedan ne-nula član i to kada je $k = l$, tj. $(\mathbb{F}_{i,\lambda}\,\mathcal{A})_{lp} = \alpha_{lp} = (\mathcal{A})_{lp}$ za svaki $p = 1,\dots m$. Dakle, $l.-$te vrste matrica $\mathbb{F}_{i,\lambda}\,\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ se podudaraju.

(2) $l = i$ tada u u skupu $\{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{in}\}$ svi elementi su 0, osim $\gamma_{ii} = \lambda$, i formula $(*)$ svodi se na $(\mathbb{F}_{i,\lambda}\,\mathcal{A})_{ip} = \lambda\,\alpha_{ip} = \lambda\,(\mathcal{A})_{ip}$, za $p = 1,\dots,m$, što je i trebalo pokazati.

Kako je matrica $\mathbb{F}_{i,\lambda}$ dijagonalna i kako je proizvod dijagonalnih matrica dijagonalna matrica, odmah sledi da je $\mathbb{F}_{i,\frac{1}{\lambda}}$ inverzna matrica od $\mathbb{F}_{i,\lambda}$. □

Propozicija 3. *Neka je* $\mathbb{G}_{ij} = \mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{ij} + \mathbb{E}_{ji} - \mathbb{E}_{ii} - \mathbb{E}_{jj} \in \mathbb{M}_n$, $i < j$, *i neka je* $\mathcal{A} = [a_1, a_2, \dots, a_m] = [a^1, a^2, \dots, a^n] \in \mathbb{M}_{nm}$. *Tada je* $\mathbb{G}_{ij}\mathcal{A} = [a^1, a^2, \dots, \overset{i}{a^j}, \dots, \overset{j}{a^i}, \dots, a^n]$, *tj. sve vrste osim $i.-$te i $j.-$te matrica $\mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ se podudaraju, a $i.-$ta vrsta matrice $\mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{A}$ jednaka je $j.-$toj vrsti matrice $\mathcal{A}$, i $j.-$ta vrsta matrice $\mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{A}$ jednaka je $i.-$toj vrsti matrice $\mathcal{A}$.*

Analogno tvrđenje važi i za kolone matrica $\mathcal{A}\,\mathbb{G}_{ij}$ $(\mathbb{G}_{ij} \in \mathbb{M}_m)$ i $\mathcal{A}$, tj. $\mathcal{A}\,\mathbb{G}_{ij} = [a_1, a_2, \dots, \overset{i}{a_j}, \dots, \overset{j}{a_i}, \dots, a_m]$.

Kako je $\mathbb{G}_{ij}^2 = \mathbb{I}_n$ tj. $\mathbb{G}_{ij}$ je inverz sam sebi, tj. $\mathbb{G}_{ij}$ regularna matrica.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = (\alpha_{kp})$, tada matricu $\mathbb{G}_{ij}$ zapisujemo u obliku: $\mathbb{G}_{ij} = \begin{cases} \gamma_{kk} = 1, & k = 1,\dots,,n,\ k \neq i,j \\ \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = 1, & \\ \gamma_{kp} = 0, & \text{inače.} \end{cases}$

Formula za množenje matrica daje, $\qquad (\mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{A})_{lp} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{lk}\,\alpha_{kp} \qquad (*).$

Sada imamo sledeće mogućnosti:

(1) $l \neq i, j$, tada u $\{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{in}\}$ svi su elementi 0 osim $\gamma_{ll} = 1$, tako da u formuli $(*)$ ostaje samo jedan ne-nula član i to kada je $k = l$, tj. $(\mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{A})_{lp} = \alpha_{lp} = (\mathcal{A})_{lp}$, za svaki $p = 1,\dots,m$.
Dakle, ova vrsta matrice $\mathcal{A}$ se ne menja ako matricu $\mathcal{A}$ pomnožimo sa leva matricom $\mathbb{G}_{ij}$.

(2) $l = i$, tada u skupu $\{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{in}\}$ svi elementi su 0, osim $\gamma_{ij} = 1$, i formula $(*)$ postaje $(\mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{A})_{ip} = \alpha_{jp} = (\mathcal{A})_{jp}$, za $p = 1,\dots,n$, dakle $i.-$ta vrsta matrice $\mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{A}$ jednaka je $j.-$toj vrsti matrice $\mathcal{A}$.

(3) $l = j$, analogno slučaju (2) vidi se da je $j.-$ta vrsta matrice $\mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{A}$ jednaka $i.-$toj vrsti matrice $\mathcal{A}$.

Neka je $\mathbb{I}_n = [e_1, e_2, \dots, e_n] \in \mathbb{M}_n$, jedinična matrica, tj. neka su e_i vektori kanonske baze, tada je

$$(\mathbb{G}_{ij})^2\,\mathbb{I}_n = \mathbb{G}_{ij}(\mathbb{G}_{ij}\,\mathbb{I}_n) = \mathbb{G}_{ij}\,[e_1, e_2, \dots, \overset{i}{e_j}, \dots, \overset{j}{e_i}, \dots, e_m] = [e_1, e_2, \dots, e_n] = \mathbb{I}_n,$$

tj. preslikavanje, $\mathbb{G}_{ij}^2$ deluje na kanonsku bazu prostora $\mathbb{F}^n$ kao identiteta, tj. $\mathbb{G}_{ij}^2 = \mathbb{I}_n$. □

Propozicija 4. *Neka je* $\mathbb{E}_{ij}' = \mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{ij} \in \mathbb{M}_n$, $i < j$, *i neka je* $\mathcal{A} = [a_1, a_2, \dots, a_m] = [a^1, a^2, \dots, a^n] \in \mathbb{M}_{nm}$. *Tada je* $\mathbb{E}_{ij}'\mathcal{A} = [a^1, a^2, \dots, \overset{i}{a^i + a^j}, \dots, a^j, \dots, a^n]$, *tj. sve vrste osim $i.-$te matrica $\mathbb{E}_{ij}'\,\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ se podudaraju, a $i.-$ta vrsta matrice $\mathbb{E}_{ij}'\,\mathcal{A}$ jednaka je zbiru $i.-$te i $j.-$te vrste matrice $\mathcal{A}$.*

Analogno tvrđenje važi i za kolone matrica $\mathcal{A}\,\mathbb{E}_{ij}'$ $(\mathbb{E}_{ij}' \in \mathbb{M}_m)$ i $\mathcal{A}$, tj. $\mathcal{A}\,\mathbb{E}_{ij}' = [a_1, a_2, .., a_i \overset{i}{+} a_j, .., a_j, .., a_m]$.

Matrica $\mathbb{I}_n - \mathbb{E}_{ij} \in \mathbb{M}_n$ je inverz od $\mathbb{E}_{ij}'$, tj. $\mathbb{E}_{ij}'$ je regularna matrica.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = (\alpha_{kp})$, tada matricu $\mathbb{E}_{ij}'$ možemo zapisati i u obliku: $\mathbb{E}_{ij}' = \begin{cases} \gamma_{kk} = 1, & k = 1,\dots,n \\ \gamma_{ij} = 1, & \\ \gamma_{kp} = 0, & \text{inače.} \end{cases}$

Posmatrajmo sada formulu za množenje matrica: $\qquad (\mathbb{E}_{ij}'\,\mathcal{A})_{lp} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{lk}\,\alpha_{kp}\,. \qquad (*)$

Analizirajući formulu (*) imamo sledeće dve mogućnosti:

(1) $l \neq i$, tada je $\gamma_{l1} = \gamma_{l2} = \cdots = \gamma_{lk-1} = \gamma_{lk+1} = \cdots = \gamma_{ln} = 0$, i $\gamma_{ll} = 1$, tako da u formuli (*) ostaje samo jedan ne-nula član i to kada je $k = l$, dakle za sve p je $(\mathbb{E}'_{ij}\mathcal{A})_{lp} = \alpha_{lp} = (\mathcal{A})_{lp}$, tako da zaključujemo da se $l.-$te vrste matrica $\mathbb{E}'_{ij}\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ podudaraju.

(2) $l = i$, tada u skupu $\{\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{in}\}$ svi elementi su 0, osim $\gamma_{ii} = \gamma_{ij} = 1$, i formula (*) postaje $\alpha_{ip} + \alpha_{jp}$, dakle, $(\mathbb{E}'_{ij}\mathcal{A})_{ip} = \alpha_{ip} + \alpha_{jp} = (\mathcal{A})_{ip} + (\mathcal{A})_{jp}$, za $p = 1, \ldots, m$, što pokazuje da je $i.-$ta vrsta matrice $\mathbb{E}'_{ij}\mathcal{A}$ jednaka zbiru $i.-$te i $j.-$te vrste matrice $\mathcal{A}$.

Pokažimo sada još da je matrica $\mathbb{E}'_{ij}$ regularna,

$$\mathbb{E}'_{ij}(\mathbb{I}_n - \mathbb{E}_{ij}) = (\mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{ij})(\mathbb{I}_n - \mathbb{E}_{ij}) = \mathbb{I}_n^2 - \mathbb{E}_{ij}^2 = \mathbb{I}_n \text{ odakle sledi da je } \mathbb{E}'^{-1}_{ij} = \mathbb{I}_n - \mathbb{E}_{ij}\,. \qquad \square$$

Teorema. *Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$ neka matrica ranga $r \in \{0, 1, \ldots, \min(n, m)\}$. Tada postoji konačan broj elementarnih transformacija nad vrstama i kolonama matrice $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$ tako da njihovom primenom, matricu $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$ svodimo na kanonsku matricu $\mathbb{D}^r_{nm}$.*

Specijalno, ako je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ regularna matrica tada ju je moguće svesti na jediničnu matricu primenom elementarnih transformacija samo nad vrstama (kolonama) *matrica $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Dokaz je algoritamski, zato ga dajemo u obliku koraka algoritma.

(i0) Pretpostavimo da je $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \neq \mathbb{D}^r_{nm}$, jer tada nemamo šta dokazivati.

(i1) Postoji neki matrični element matrice $\mathcal{A}_0$ koji se ne poništava, tj. $\alpha_{ij} \neq 0$,

(i2) $i.-$tu vrstu matrice $\mathcal{A}_0$ prvo pomnožimo sa $1/\alpha_{ij}$ tako da će u dobijenoj matrici $\mathcal{A}_1 = (\alpha^1_{ij})$ matrični element na mestu (i, j) biti jednak 1.

(i3) $i.-$tu vrstu matrice $\mathcal{A}_1$ množimo redom elementima $-\alpha^1_{1j}, -\alpha^1_{2j}, .., -\alpha^1_{i-1\,j}, -\alpha^1_{i+1\,j}, .., -\alpha^1_{1\,n}$ i dodajemo redom $1.-$oj, $2.-$oj,...,$(i-1).-$oj,$(i+1).-$oj,...,$n.-$toj vrsti matrice $\mathcal{A}_1$. Nakon primene ovih elementarnih transformacija dolazimo do matrice $\mathcal{A}_2 = (\alpha^2_{ij})$ u kojoj su svi elementi j.-te kolone jednaki 0 osim elementa α^2_{ij} koji je jednak 1.

(i4) Sada množimo redom j.-tu kolonu matrice $\mathcal{A}_2$ sa $-\alpha^2_{i1}, -\alpha^2_{i2}, .., -\alpha^2_{i\,j-1}, -\alpha^2_{i\,j+1}, .., -\alpha^2_{i\,m}$ i dodajemo redom $1.-$oj, $2.-$oj,...,$(j-1).-$oj,$(j+1).-$oj,...,$m.-$toj koloni matrice $\mathcal{A}_2$. Nakon primene ovih elementarnih transformacija dolazimo do matrice $\mathcal{A}_3 = (\alpha^3_{ij})$ u kojoj su svi elementi i.-te vrste i j.-te kolone jednaki 0 osim elementa α^3_{ij} koji je jednak 1.

(i5) ako se matrica $\mathcal{A}_3$ može svesti nekim zamenama vrsta i kolona na matricu $\mathbb{D}^r_{nm}$ onda smo gotovi, a ako to nije slučaj možemo pronaći matrični element $0 \neq \alpha^3_{i_1 j_1}$ $(i_1 \neq i, j_1 \neq j)$ matrice $\mathcal{A}_3$, i vratimo se na korak (i1), jer je ispunjen uslov iz (i1), ali za matricu $\mathcal{A}_3$. Zatim ponovimo korake (i2), (i3), (i4) i (i5), za matricu $\mathcal{A}_3$ (umesto $\mathcal{A}_0$), itd....

(i6) Algoritam, ako nije završio u koraku (i0), zbog konačnog broja vrsta i kolona matrice $\mathcal{A}$, mora završiti u nekoj primeni koraka (i5).

U slučaju kada je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ regularna matrica, u prethodnom algoritmu samo preskočimo korak (i4), i u najviše $n + 1$ [12] ponavljanja koraka (i1),(i2),(i3) i (i5) dolazimo do jedinične matrice. $\square$

Primedba 1. Prethodna teorema omogućuje da elementarnim transformacijama nad vrstama i kolonama date matrice $\mathcal{A}$, istu svedemo na neku od matrica $\mathbb{D}^r_{nm}$, koja ima rang r. S druge strane, u Propozicijama 2, 3, 4 pokazali smo da elementarnim transformacijama (el1), (el2) i (el3) nad vrstama odgovara množenje s leva regularnim matricama $\mathbb{F}_{i,\lambda}, \mathbb{G}_{ij}$ i $\mathbb{E}'_{ij}$, redom, a elementarnim transformacijama nad kolonama odgovara množenje s desna tim istim matricama. Kako množenje s desna i sa leva regularnim matricama ne menja rang matrice, to nakon konačno mnogo transformacija dolazimo do (ako je rang od $\mathcal{A}$ jednak r) matrice $\mathbb{D}^r_{nm}$. Preciznije, imamo:

$$\mathbb{D}^r_{nm} = \underbrace{\mathcal{S}_1\,\mathcal{S}_2 \cdots \mathcal{S}_k}_{\mathcal{S}}\;\mathcal{A}\;\underbrace{\mathcal{T}_1\,\mathcal{T}_2 \cdots \mathcal{T}_s}_{\mathcal{T}}, \tag{3.9}$$

gde su $\mathcal{S}_p \in \{\mathbb{F}_{i,\lambda}, \mathbb{G}_{ij}, \mathbb{E}'_{ij} \mid \lambda \in \mathbb{F}, i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n\}$ i $\mathcal{T}_p \in \{\mathbb{F}_{i,\lambda}, \mathbb{G}_{ij}, \mathbb{E}'_{ij} \mid \lambda \in \mathbb{F}, i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, m\}$.

Primedba. Primetimo, da smo rang matrice definisali kao maksimalan broj njenih linearno nezavisnih kolona. Ako bismo za dejstvo linearnog operatora (ili matrice) na vektor koristili oznaku $x\,A$ (umesto $A\,x$), tada bi vrste

[12] Zašto ne mora biti uvek dovoljno n ponavljanja (koraka (i1),(i2),(i3) i (i5)) da bismo završili posao ?

matrice operatora A u nekom paru baza generisale potprostor $\mathsf{Im}\,A$ i mogli bismo konstruisati izomorfizam $\varphi'_{e,f}$ između $\mathsf{Hom}\,(\mathsf{U},\mathsf{V})$ i $\mathbb{M}_{mn}$, kao i relaciju $\sim'$, koja bi nakon primene izomorfizma $\varphi'_{e,f}$ postala: matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su u relaciji $\sim'$ ako imaju jednake maksimalne brojeve linearno nezavisnih vrsta. Relacija $\approx'$ bi se podudarala sa relacijom $\approx$ samo što matrica $\mathcal{S}$ bi pripadala $\mathbb{M}_m$, a matrica $\mathcal{T}$ bi pripadala $\mathbb{M}_n$.

Tada bismo rang matrice definisali kao maksimalan broj njenih linearno nezavisnih vrsta (sa istom geometrijskom idejom da je rang matrice zapravo rang odgovarajućeg linearnog operatora).

Kako primenom elementarnih transformacija polaznu matricu $\mathcal{A}$, ranga r, svodimo na kanonsku matricu $\mathbb{D}^r_{nm}$, i kako kanonske matrice $\mathbb{D}^r_{nm}$, imaju jednake maksimalne brojeve linearno nezavisnih vrsta i kolona (njih r), zaključujujemo da i polazna matrica $\mathcal{A}$ ima jednake maksimalne brojeve linearno nezavisnih vrsta i kolona.

Drugim rečima definicija ranga matrice ne zavisi od izbora da li rang računamo po kolonama ili vrstama.

Primer. Odredimo dimenziju lineala razapetog vektorima: $a_1=(5,4,3)$, $a_2=(3,3,2)$ i $a_3=(8,1,3)$. Problem je ekvivalentan određivanju ranga matrice $\mathcal{A}=\begin{bmatrix}5&3&8\\4&3&\boxed{1}\\3&2&3\end{bmatrix}$.

(1) Uočimo prvo jedinicu na komponenti $(2,3)$ matrice $\mathcal{A}$, a zatim pomnožimo prvo 3.-ću kolonu matrice $\mathcal{A}$ sa (-4) i dodamo 1.-oj koloni, a zatim 3.-ću kolonu pomnožimo sa (-3) i dodamo 2.-oj koloni. Nakon ovih elementarnih transformacija dobijamo, $\mathcal{A}_1=\begin{bmatrix}-27&-21&8\\0&0&\boxed{1}\\-9&-7&3\end{bmatrix}$.

(2) Sada pomnožimo 2.-gu vrstu matrice $\mathcal{A}_1$ sa (-8) i dodamo 1.-oj i 2.-gu vrstu sa (-3) i dodamo 3.-oj vrsti, tako da imamo $\mathcal{A}_2=\begin{bmatrix}-27&-21&0\\0&0&1\\-9&-7&0\end{bmatrix}$.

(3) U matrici $\mathcal{A}_2$ pomnožimo prvu kolonu sa (-1/9), a drugu sa (-1/7) tako da dobijamo $\mathcal{A}_3=\begin{bmatrix}3&3&0\\0&0&1\\\boxed{1}&1&0\end{bmatrix}$.

(4) Ako sada pomnožimo 3.-ću vrstu matrice $\mathcal{A}_3$ sa (-3) i dodamo 1.-oj vrsti, dobijamo $\mathcal{A}_4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\\boxed{1}&1&0\end{bmatrix}$.

(5) i ako na kraju pomnožimo 1.-vu kolonu matrice $\mathcal{A}_4$ sa (-1) i dodamo 2.-oj koloni, a zatim zamenimo 1.-vu i 3.-ću vrstu, a zatim i 3.-ću i 2.-gu kolonu dobićemo $\mathcal{A}_5=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\mathbb{D}^2_{33}$.

Dakle, kako je $\mathcal{A}\sim\mathbb{D}^2_{33}$ zaključujemo da je $r(\mathcal{A})=2=\dim\mathcal{L}(\{a_1,a_2,a_3\})$.

3.9. Određivanje inverzne matrice. Navedimo sada jednu od "najekonomičnijih" i najboljih metoda za nalaženje inverza koja se zasniva na elementarnim transformacijama nad vrstama. Da bismo odredili inverz (ako postoji) matrice $\mathcal{A}$ formiramo matricu $n\times(2\,n)$ tako što dopišemo jediničnu matricu reda n sa desne (leve) strane matrice $\mathcal{A}$, tj. $\mathcal{B}=[\,\mathcal{A}\mid\mathbb{I}_n\,]$. Zatim vršimo elementarne transformacije ((el1), (el2) i (el3)) isključivo nad vrstama matrice $\mathcal{B}$, dok ne "transformišemo" $\mathcal{A}$ u $\mathbb{I}_n$, istovremeno se u desnoj polovini matrice $\mathcal{B}$, matrica $\mathbb{I}_n$ transformiše u $\mathcal{A}^{-1}$, tj. imamo:

$$[\;\mathcal{A}\;\mid\;\mathbb{I}_n\;]\xrightarrow{el.transformacije}[\;\mathbb{I}_n\;\mid\;\mathcal{A}^{-1}\;]. \tag{3.10}$$

Opravdajmo sada ovu proceduru. Pretpostavimo da matrica $\mathcal{A}$ ima inverznu matricu. Budući da vršimo elementarne transformacije nad vrstama matrice $\mathcal{A}$, matricu $\mathcal{A}$ množimo, sa leve strane, nekim od matrica iz skupa $\{\mathbb{F}_{i,\lambda},\mathbb{G}_{ij},\mathbb{E}'_{ij}\mid\lambda\neq0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\ldots,n\}$ dok $\mathcal{A}$ ne transformišemo u $\mathbb{I}_n$, tako da je $\mathcal{S}\cdot\mathcal{A}=\mathbb{I}_n$, gde je $\mathcal{S}=\mathcal{S}_m\cdot\mathcal{S}_{m-1}\cdot\mathcal{S}_2\cdot\mathcal{S}_1$.

Množenjem jednakosti $\mathcal{S}\cdot\mathcal{A}=\mathbb{I}_n$ inverzom od $\mathcal{S}$ s leva, dobićemo da je $\mathcal{A}=\mathcal{S}^{-1}\cdot\mathbb{I}_n$, a zatim uzimanjem inverza od obe strane ove jednakosti, imamo $\mathbb{I}_n^{-1}\cdot(\mathcal{S}^{-1})^{-1}=\mathbb{I}_n\cdot\mathcal{S}=\mathcal{S}\cdot\mathbb{I}_n=\mathcal{A}^{-1}$. Dakle, ako nad matricom $\mathbb{I}_n$ izvršimo iste transformacije (kao i nad matricom $\mathcal{A}$) opisane matricom $\mathcal{S}$ ona će se transformisati u matricu $\mathcal{A}^{-1}$.

Primedba 1. Primetimo da opisana procedura daje i odgovor na pitanje da li je polazna matrica $\mathcal{A}$ regularna. Ako $\mathcal{A}$ nije regularna onda umesto matrice $\mathbb{I}_n=\mathbb{D}^n_{nn}$, dobijemo neku od kanonskih matrica $\mathbb{D}^r_{nn}$, za $r<n$.

Primedba 2. Isti postupak može se provesti vršeći isključivo elementarne transformacije nad kolonama, ali tada je potrebno matricu $\mathbb{I}_n$ dopisati ispod (ili iznad) matrice $\mathcal{A}$, tj. $\begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathbb{I}_n \end{bmatrix}$.

Primedba 3. Pokažimo da ne možemo kombinovati elementarne transformacije nad vrstama i nad kolonama, i da istim postupkom dobijemo inverznu matricu polazne matrice. Dakle, ako bi bilo $\mathcal{S} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{T} = \mathbb{I}_n$, onda množenjem ove relacije sa leve strane matricom $\mathcal{S}^{-1}$, a sa desne sa $\mathcal{T}^{-1}$, prvo dobijamo $\mathcal{A} = \mathcal{S}^{-1} \cdot \mathbb{I}_n \cdot \mathcal{T}^{-1}$, odakle invertiranjem imamo: $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{T} \cdot \mathbb{I}_n \cdot \mathcal{S}$. Naravno, ako matrice $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ ne komutiraju (a komutiraju samo u specijalnim slučajevima) onda ovaj postupak nije primenjiv.

Primer. Korišćenjem elementarnih transformacija nad vrstama, odrediti inverz matrice, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Formirajmo, prvo matricu reda $n \times (2n)$ tako što dopišemo jediničnu matricu n sa desne strane matrice $\mathcal{A}$, tj. $\mathcal{B} = [\,\mathcal{A} \mid \mathbb{I}_n\,]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 2.\text{v} \times (-3) + 1.\text{v} \\ 2.\text{v} \times (-2) + 3.\text{v} \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -7 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -7 & 1 & -3 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 3.\text{v} \times (7) + 1.\text{v} \\ 3.\text{v} \times (-2) + 2.\text{v} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & -17 & 7 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & -17 & 7 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 1.\ \text{v} \ +2.\ \text{v} \\ 1.\ \text{v} \ \times (-1) \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 17 & -7 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left\{\begin{array}{l} \text{zamenimo } 1.-\text{vu} \\ \text{i } 2.-\text{gu vrstu} \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -12 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 17 & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \end{array}\right], \quad \text{Dakle, } \mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.10. Linearni funkcionali. Svako linearno preslikavanje, $f : V \longrightarrow \mathbb{F}$, pri čemu je V neki vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ zove se **linearni funkcional**. Ako je $\mathsf{dim} V = n < \infty$ onda je skup svih linearnih funkcionala na V vektorsku prostor, $\mathsf{Hom}(V, \mathbb{F})$, dimenzije n za kojeg koristimo skraćenu oznaku V^*.
Primetimo, da zbog Teoreme o rangu i defektu uvek važi:

$$\mathsf{rang}\, f \leq 1 \quad \text{i} \quad \mathsf{defekt}\, f \geq n - 1.$$

Dakle, ako je $f \neq 0$ onda postoji vektor $0 \neq v \in V$ takav da je $f(v) = \alpha \neq 0$.

Primeri linearnih funkcionala.

(i1) Neka je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ neka baza od $\mathbb{F}^n$ tada za svaki vektor $x \in \mathbb{F}^n$ možemo predstaviti u toj bazi kao, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, e_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$, posmatrajmo projektor[13], definisan formulom $\pi_j(x) = \alpha_j$. Očigledno, $\pi_j : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}$ je linearni funcional na $\mathbb{F}^n$.

(i2) Preslikavanje, $\mathsf{Tr} : \mathbb{M}_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$, definisano formulom:

$$\mathsf{Tr}(\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^{n} (\mathcal{A})_{jj} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$

koje se zove **trag matrice** $\mathcal{A}$, je linearni funkcional na $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Primetimo da je trag linearna kombinacija projektora iz Primera (i1), ali na vektorskom prostoru $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$·

(i3) Neka je dat interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, i neka je $\mathcal{C}[a, b]$ skup neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$. Tada je $\mathcal{C}_{[a,b]} = (\mathcal{C}[a, b], \mathbb{R}, +, \cdot)$ realni vektorski prostor. Za proizvoljni $x_0 \in [a, b]$, posmatrajmo preslikavanje, $\varphi_{x_0} : \mathcal{C}_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisano formulom $\varphi_{x_0}(f) = f(x_0)$. Preslikavanje φ_{x_0} je jedno uopštenje projektora iz (i1), i lako se proverava da je linearni funkcional.

(i4) U vektorskom prostoru $\mathcal{C}_{[0,1]} = (\mathcal{C}[0, 1], \mathbb{R}, +, \cdot)$ posmatrajmo preslikavanje $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$. Zbog linearnosti integralenja φ je linearni funkcional, verovatno najvažniji u matematici.

Dualna baza. Neka je V konačnodimenzioni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Obeležimo prvo, analogon projektora π_j iz Primera (i1) sa e_j^* i primetimo da e_j^* deluje na bazi e od V na sledeći način, $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$.
Kako su linearni funkcionali specijalan slučaj linearnih operatora, možemo primeniti rezultate koje smo već dobili za linearne operatore. Tako dobijamo,

[13] na $j.-$tu komponentu,

Teorema 1. *Neka je $e = (e_1, \dots, e_n)$ neka baza konačnodimenzionog vektorskog prostora V. Tada postoji jedinstvena baza $e^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ od V^* takva da je $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$, i*

(i1) *svaki linearni funkcional f na V je oblika*

$$f = \sum_{j=1}^{n} f(e_j)\, e_j^*, \tag{3.11}$$

(i2) *za svaki vektor $x \in V$ važi*

$$x = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(x)\, e_j. \tag{3.12}$$

Baza e^* zove se **dualna baza** bazi e.

Dokaz. Tvrđenje (i2) iz 3.7 Teorema 1 implicira da je $e^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ jedinstvena baza vektorskog prostora V^*, za koju važi $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$. Drugim rečima za proizvoljni linearni funkcional $f \in V^*$ postoje skalari $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ takvi da je

$$f = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\, e_j^*. \tag{3.13}$$

Da bismo odredili skalare ξ_j, primenimo f na bazni vektor e_j, tada imamo

$$f(e_j) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i^*\Big)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, \delta_{ij} = \xi_j, \tag{3.14}$$

i ako sada zamenimo dobijeni rezultat, tj. $\xi_j = f(e_j)$, u (8.8) sledi tvrdnja (i1).
Za (i2) primenimo funkcional e_j^* na vektor $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$, odakle dobijamo

$$e_j^*(x) = e_j^*\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_j^*(e_i) \sum_{i=1}^{n} x_i\, \delta_{ij} = x_j. \tag{3.15}$$

Iz dobijene relacije $x_j = e_j^*(x)$, i odmah sledi (i2). $\square$

Anihilator. Ako je dat neki ne-nula linearni funkcional f na V, tada je $r(f) = 1$ i $d(f) = n - 1$. S druge strane, prema prethodnoj teoremi važi da je $f = \sum_{j=1}^{n} f(e_j)\, e_j^*$, i ako ovu formulu primenimo na proizvoljni vektor $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ i iskoristimo da vektor dualne baze deluju kao projekcije, dobićemo

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\, e_j^*(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\, x_j, \quad \text{gde su } \xi_j = f(e_j) \in \mathbb{F}. \tag{3.16}$$

Dobijena relacija (3.16) predstavlja opšti oblik linearnog funkcionala, tako da se postavlja pitanje određivanja njegovog jezgra, tj. pronalaženja onih $x \in V$ za koje je

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\, x_j = 0. \tag{3.17}$$

Od ranije znamo da je skup nula jednačine (3.17) hiperravan u prostoru $V \cong \mathbb{F}^n$.
Prema tome, pokazali smo da ako je $0 \neq f \in V^*$, tada je $\mathsf{Ker}\, f$ hiperravan u V. Kako važi i obrat, tj. svakoj hiperravni u V možemo dodeliti neki linearni polinom čiji je ona skup nula, sledi da postoji bijekcija sa skupa svih hiperravni vektorskog prostora V i skupa svih ne-nula linearnih funkcionala na V. Dakle, svaka hiperravan na V je jezgro nekog funkcionala na V.
Za dati $0 \neq f \in V^*$, posmatramo $\mathsf{Ker}\, f$, koja je $(n-1)$ dimenzioni potprostor od V i neka je $\mathcal{B}_f = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ neka baza od $\mathsf{Ker}\, f$. Kako je $\mathsf{Ker}\, f$ hiperravan, vidimo da svaku tačku te hiperravni možemo predstaviti u parametarskom obliku kao

$$X = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_{n-1} a_{n-1}. \tag{3.18}$$

Bazu $\mathcal{B}_f = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ nadopunimo vektorom a_0 do baze za čitav prostor V. Sada možemo posmatrati skup svih onih funkcionala na V koji anuliraju vektor a_0 $(g(a_0) = 0)$, i tako gledati na hiperravan.

Ova konstrukcija može se generalisati na svaki podskup S vektorskog prostora V. Dakle, neka je S podskup od V tada skup $S^0 = \{f \in V^* \mid f(x) = 0, \text{za sve } x \in S\}$ nazivamo anihilator (anulator) skupa S.

Zbog definicije sabiranja u V^* jasno je da je S^0 potprostor od V^*, bez obzir da li je S potprostor od V ili ne. Ako je $S = V$ tada se S^0 sastoji samo od nula funkcionala, i ako je $S = \{0\}$ tada je $S^0 = V$. Osnovno svojstvo anihilatora sadržano je u sledećoj teoremi.

Teorema 2. *Neka je V konačnodimenzioni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je L neki njegov potprostor. Tada je*

$$\dim L + \dim L^0 = \dim V. \tag{3.19}$$

Dokaz. Neka je $l = \dim L$ i $e_L = (e_1, e_2, \ldots, e_l)$ neka njegova baza. Nadopunimo bazu e_L vektorima $e_{l+1}, \ldots, e_n$ tako da je $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ baza od V. Neka je sada $e^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ dualna baza od e. Dovoljno je pokazati da je $(e_{l+1}^*, e_{l+2}^* \ldots, e_n^*)$ baza anihilatora od L. Jasno, za $j \in \{l+1, \ldots, n\}$, iz odgovarajućih definicija sledi $e_j^*(e_i) = 0$ za svaki vektor e_i baze e_L. Kako je e_j^* linearno preslikavanje biće za svaki $x \in L$,

$$e_j^*(x) = e_j^*\left(\sum_{i=1}^{l} x_1 e_i\right) = \sum_{i=1}^{l} x_1 e_j^*(e_i) = \sum_{i=1}^{l} x_1 \delta_{ij} = \{j \notin \{1, \ldots, l\}\} = \sum_{i=1}^{l} x_1 \cdot 0 = 0.$$

Budući da je skup linearnih funkcionala $\{e_{l+1}^*, e_{l+2}^* \ldots, e_n^*\}$ linearno nezavisan, jer je podskup dualne baze, potrebno je pokazati da je taj skup i skup generatora od L^0. Dakle, neka je $f \in L^0$ tada (3.11) implicira redom

$$f = \sum_{j=1}^{n} f(e_j)\, e_j^*, \quad \text{ali kako je } f \in L^0 \text{ biće } f(e_i) = 0 \text{ za } i = 1, 2, \ldots, l, \text{ i prethodna formula postaje}$$

$$f = \sum_{j=l+1}^{n} f(e_j)\, e_j^*,$$

a to je i trebalo pokazati. Dakle, $\{e_{l+1}^*, e_{l+2}^* \ldots, e_n^*\}$ je baza od L^0 i $\dim L^0 = n - l$. ☐

Posledica 1. *Neka je L $l-$dimenzioni potprostor $n-$dimenzionog vektorskog prostora V, tada je L presek $(n-l)$ hiperravni od V.*

Dokaz. Iz dokaza prethodne teoreme vidimo da je L skup svih vektora $x \in V$, takvih da je $e_j^*(x) = 0$, $j = l+1, l+2, \ldots, n$. Ranije smo videli da svakom ne-nula funkcionalu f odgovara jedna hiperravan (ekvivalentno jedna linearna jednačina u n promenljivih). Budući da su funkcionali $e_j^* \neq \mathbf{O}$, linearno nezavisni i ima ih tačno $n - l$, tvrđenje sledi. ☐

Posledica 2. *Neka su L i M potprostori konačnodimenzionog vektorskog prostora V, tada je $L = M$* **akko** *$L^0 = M^0$.*

Dokaz. Jasno, ako je $L = M$ onda je i $L^0 = M^0$.

Obratno, ako $L \neq M$ tada svaki od potprostora L i M sadrže neki vektor koji nije element onog drugog. Pretpostavimo da postoji vektor $y \in L$ i $y \notin M$. Sada uzmemo neku bazu $e_M = (e_1, \ldots, e_m)$ od M i nju nadopunimo vektorima $e_{m+1} = y, e_{m+2}, \ldots, e_n$ do baze $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ od V i posmatramo njoj dualnu bazu e^*. Tada funkcional $f = e_{m+1}^*$, pripada M^0, ali ne pripada L^0 jer je $f(y) \neq 0$. ☐

Refleksivnost. Primetimo da ima smisla, jer je V^* i sam vektorski prostor nad istim poljem kao i $\mathbb{F}$, posmatrati niz vektorskih prostora: $V, V^*, V^{**} = (V^*)^*, V^{***}, \ldots$.

Kako je V konačnodimenzioni vektorski prostor, tada svi prostori u ovom nizu imaju istu dimenziju kao i V pa su izomorfni. U slučaju kada je dimenzija od V beskonačna to ne mora biti tačno.

Primetimo da možemo definisati preslikavanje $\phi : V \longrightarrow V^{**}$, formulom $\phi(x)[f] = f(x)$, za svaki $x \in V$ i $f \in V^*$, kojom svakom $f \in V^*$ dodeljujemo skalar $f(x) \in \mathbb{F}$. Primetimo da je $\phi(x)$ linearno preslikavanje, jer za $f, g \in V^*$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ imamo,

$$\phi(x)[\alpha\, f + \beta\, g] = (\alpha\, f + \beta\, g)(x) = (\alpha\, f + \beta\, g)(x) = (\alpha\, f)(x) + (\beta\, g)(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, g(x) = \alpha\, \phi(x)[f] + \beta\phi(x)[g].$$

Drugim rečima, $\phi(x) \in (V^*)^* = V^{**}$.

Teorema 3. *Neka je V konačnodimenzioni prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada je preslikavanje ϕ izomorfizam vektorskih prostora V i V^{**}.*

Dokaz. Potrebno je prvo da pokažemo da je ϕ linearno preslikavanje. Pretpostavimo da su $x, y \in V$, $f \in V^*$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tako da redom imamo,

$$\phi(\alpha\, x + \beta\, y)[f] = f(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, f(x) + \beta\, f(y) = \alpha\, \phi(x)[f] + \beta\phi(y)[f] = (\alpha\, \phi(x) + \beta\phi(y))[f],$$

odakle, sledi da je $\phi(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, \phi(x) + \beta\phi(y)$, tj. ϕ je linearno.

Da bismo završili dokaz dovoljno je pokazati, zbog 3.2 Posledica 2, da ϕ je injektivno, tj. da je $\mathsf{Ker}\, \phi$ trivijalno. Za dokaz ove tvrdnje potrebna nam je sledeća lema.

Lema. *Neka je V konačnodimenzioni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, i neka je $0 \neq x \in V$. Tada postoji neki funkcional $f \in V^*$ takav da je $f(x) \neq 0$.*

Dokaz Leme. Neka je $0 \neq x \in V$ tada postoji neka baza e_x od V čiji je x prvi vektor, i sada posmatramo dualnu bazu e_x^* u V^*. Iz definicije dualne baze sledilo bi da je $e_1^*(x) = 1$, tj. traženi funkcional je $f = e_1^*$. $\square$

Nastavak dokaza Teoreme 3. Neka je $x \in \mathsf{Ker}\, \phi$, tada je $\phi(x)$ nula funkcional na V^*, tj. $\phi(x)[f] = f(x) = 0$, za svaki $f \in V^*$, i prethodna lema implicira da je $x = 0$, tj. ϕ je monomorfizam i dokaz je gotov. $\square$

Posledica 3. *Neka je V konačnodimenzioni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.*

(i1) *Neka je $\Psi \in V^{**}$ tada postoji jedinstveni vektor $x \in V$ takav da je $\phi(x) = \Psi$.*

(i2) *Svaka baza od V^* dualna je nekoj bazi iz V.*

(i3) *Neka je S proizvoljni podskup od V tada je $(S^0)^0 = \mathcal{L}(S)$.*

Dokaz. (i1) je direktna posledica činjenice da je preslikavanje ϕ surjekcija.
(i2) Neka je $e^* = (e_i^*)$ neka baza od V^*, tada postoji njoj dualna baza $e^{**} = (e_i^{**})$ od V^{**}. Zbog (i1) odmah sledi da za proizvoljni vektor e_i^{**} baze e^{**} postoji neki vektor $e_i \in V$ takav da je $\phi(e_i) = e_i^{**}$. Kako je ϕ izomorfizam i e^{**} baza od V^{**}, biće i e baza od V. Proverimo da je ona dualna baza od $e^* = (e_i^*)$,

$$e_i^*(e_j) = \phi(e_j)[e_i^*] = e_j^{**}[e_i^*] = \delta_{ij}.$$

(i3) Ako je L podskup od V^* tada je L^0 podskup prostora V^{**}. Kako smo u prethodnoj teoremi identifikovali V i V^{**} preko izomorfizma ϕ, možemo na L^0 gledati kao na potprostor (anihilator bilo kog skupa je potprostor) od V. Iz definicije anihilatora, jasno je da je $S^0 = \mathcal{L}(S)^0$. Zbog toga možemo pretpostaviti da je S potprostor, tj. $S = \mathcal{L}(S)$. Iz Teoreme 2 sledi,

$$\dim\, S + \dim\, S^0 = \dim\, V, \qquad\qquad \dim\, S^0 + \dim\, S^{00} = \dim\, V^*,$$

i kako je $\dim\, V = \dim\, V^*$ biće i $\dim\, S = \dim\, S^{00}$. Budući da je S potprostor od S^{00} sledi da je $S = S^{00}$. $\square$

Primedba. (i1) Vektorski prostor V nad nekim poljem je refleksivan ako je $V \cong V^{**}$. Teorema 3 zapravo tvrdi da su svi konačnodimenzioni vektorski prostori refleksivni.
(i2) Primetimo da je preslikavanje ϕ definisano bez korišćenja baze i zato se ponekad za to preslikavanje kaže da je kanonski izomorfizam.

3.11. Dualno preslikavanje. Neka su U i V dva vektorska prostora nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in \mathsf{Hom}\,(\mathsf{U}, \mathsf{V})$ neki linearni operator. Tada, na prirodan način, linearni operator A indukuje preslikavanje $A^* : V^* \longrightarrow U^*$, sledećom formulom:

$$(A^*[f])(x) := A^*[f](x) = (f \circ A)(x) = f(A(x)), \tag{3.20}$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "A"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ U^* & V^* \arrow[l, "A^*"'] \end{tikzcd}$$

gde je $A \in \mathsf{Hom}\,(\mathsf{U}, \mathsf{V})$, $f \in V^*$ i $x \in U$. Primetimo, da je desna strana jednakosti neki skalar, jer je $A(x) \in V$, a na levoj strani vidimo da je $A^*[f] \in U^*$, tj. preslikavanje A^* preslikava funkcional $f \in V^*$ u funkcional $A^*[f] \in U^*$, tako da formula (3.20) ima smisla.
Primetimo da je preslikavanje A^* linearno, tj. $A^* \in \mathsf{Hom}\,(V^*, U^*)$, jer za $f, g \in V^*$, $x \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ imamo,

$$\begin{aligned} A^*[\alpha\, f + \beta\, g](x) &= (\alpha\, f + \beta\, g)(A(x)) = \alpha\, f(A(x)) + \beta\, g(A(x)) \\ &= \alpha\, A^*[f](x) + \beta\, A^*[g](x) = (\alpha\, A^*[f] + \beta\, A^*[g])(x) \quad \text{ili} \quad A^*[\alpha\, f + \beta\, g] = \alpha\, A^*[f] + \beta\, A^*[g]. \end{aligned}$$

Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema 1. *Neka su U i V dva vektorska prostora nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $A \in \mathsf{Hom}\,(\mathsf{U}, \mathsf{V})$ linearni operator. Tada postoji jedinstveni linearni operator $A^* \in \mathsf{Hom}\,(V^*, U^*)$ takav da je $A^*[f](x) = f(A(x))$, za sve $f \in V^*$ i $x \in U$.*

Linearni operator A^* zove se dualni (transponovani, adjungovani) operator od A. Ponekad se kaže da je A^* transponat od A, a razlog za to videćemo uskoro.

Teorema 2. *Neka su U i V dva konačnodimenziona vektorska prostora nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in \mathsf{Hom}\,(\mathsf{U}, \mathsf{V})$. Tada,*

(i1) $\mathsf{Ker}\, A^* = (\mathsf{Im}\ A)^0$,

(i2) $\mathsf{Im}\, A^* = (\mathsf{Ker}\ A)^0$,

(i3) $\mathrm{rang}(\mathrm{A}^*) = \mathrm{rang}(\mathrm{A})$.

Dokaz. (i1) Neka je $f \in \mathsf{Ker}\, A^*$, tada je $A^*[f](x) = f(A(x)) = 0$, za svaki $x \in U$, i zbog definicije anihilatora, $f \in (\mathsf{Im}\ A)^0$. Dakle, $\mathsf{Ker}\, A^* \subseteq (\mathsf{Im}\ A)^0$. Očigledno, ista relacija implicira i drugu inkluziju.
(i3) Neka je $\dim\, U = m$ $\dim\, V = n$, i neka je $r(A) = r$. Tada 3.10 Teorema 2 implicira da je $\dim\,(\mathsf{Im}\ A)^0 = n - r$, a zbog (i1) je i $\dim\, \mathsf{Ker}\, A^* = d(A^*) = n - r$. I napokon, primena (TRD) na operator A^* daje,

$$r(A^*) = \dim\, V^* - d(A^*) = \dim\, V - d(A^*) = n - (n - r) = r = r(A).$$

Dakle, linearni operatori A i A^* imaju isti rang.
(i2) Svaki funkcional u slici od A^* je element anihilatora od $\mathsf{Ker}\ A$. Zaista, neka je $g \in \mathsf{Im}\ A^*$ tada postoji $f \in U^*$ takav da je $g = A^* f$, i za proizvoljni $x \in \mathsf{Ker}\ A$ imamo,

$$g(x) = A^*[f](x) = f(A(x)) = f(0) = 0.$$

Time je pokazano, $\mathsf{Im}\ A^* \subseteq (\mathsf{Ker}\ A)^0$, i sada još primetimo,

$$\dim\,(\mathsf{Ker}\ A)^0 = m - \dim\, \mathsf{Ker}\ A \overset{(TRD)}{=} r(A) \overset{(i3)}{=} r(A^*).$$

Kako potprostor $\mathsf{Im}\ A^*$ ima istu dimenziju kao prostor $(\mathsf{Ker}\ A)^0$, oni se podudaraju. $\square$

Teorema 3. *Neka su U i V dva konačnodimenziona vektorska prostora nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in \mathsf{Hom}\,(\mathsf{U}, \mathsf{V})$. Neka je e neka baza od U i e^* njoj dualna baza od U^*, i neka je f neka baza od V i f^* njoj dualna baza od V^*. Ako sa $\mathcal{A}$ obeležimo matricu operatora A u paru baza e i f, a sa $\mathcal{A}^*$ matricu operatora A^* u paru baza f^* i e^* tada je $\mathcal{A}^\tau = \mathcal{A}^*$.*

Dokaz. Neka su $e = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$, $e^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ i $f^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*)$ odgovarajuće baze iz iskaza teoreme, i neka je $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$ i $\mathcal{A}^* = (\beta_{ij})$. Budući su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^*$ matrice operatora A i A^* u parovima baza e i f odnosno f^* i e^*, biće,

$$Ae_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\, f_k, \quad j = 1, 2, \ldots, m \qquad \text{i} \qquad A^* f_j^* = \sum_{k=1}^{m} \beta_{kj}\, e_k^*, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Sada računamo vrednost izraza $A^*[f_j^*](e_i)$ na dva različita načina,

$$(1)\ \ (A^*[f_j^*])(e_i) = \sum_{k=1}^{m} \beta_{kj}\, e_k^*(e_i) = \sum_{k=1}^{m} \beta_{kj}\, e_k^*(e_i) = \sum_{k=1}^{m} \beta_{kj}\, \delta_{ki} = \beta_{ij}\,,$$

$$(2)\ \ (A^*[f_j^*])(e_i) = f_j^*(A(e_i)) = f_j^*\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\, f_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\, f_j^*(f_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\, \delta_{jk} = \alpha_{ji}\,,$$

odakle odmah sledi da je $\mathcal{A}^\tau = \mathcal{A}^*$. $\square$

Primedba. Zbog rezultata prethodne teoreme, jasno je zašto se linearni operator A^* naziva transponat od A.

Sada rezultate prethodne dve teoreme možemo iskoristiti da pokažemo, bez korišćenja elementarnih transformacija, da je rang matrice po kolonama jedna rangu matrice po vrstama.

Posledica *Neka je $\mathcal{A}$ neka matrica nad poljem $\mathbb{F}$. Tada se rang od $\mathcal{A}$ po vrstama podudara sa rangom od $\mathcal{A}$ po kolonama.*

Dokaz. Matricu $\mathcal{A}$ možemo tretirati kao matricu nekog linearnog operatora $A : \mathbb{F}^m \longrightarrow \mathbb{F}^n$ u paru kanonskih baza e od $\mathbb{F}^m$ i f od $\mathbb{F}^n$. Tada dualnom operatoru A^* u paru dualnih baza f^* i e^* odgovara matrica $\mathcal{A}^\tau$, tj. kolone matrice $\mathcal{A}$ podudaraju se sa vrstama matrice $\mathcal{A}^\tau$ (Teorema 3).

Budući da se rangovi operatora A i A^* podudaraju (Teorema 2 (i3)), maksimalni brojevi linearno nezavisnih kolona matrica tih operatora u bilo kojim parovima baza će se podudarati, pa tako i u izabranim. Drugim rečima matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^\tau$ imaju jednak maksimalan broj linearno nezavisnih kolona. Kako su kolone matrice $\mathcal{A}^\tau$ zapravo vrste matrice $\mathcal{A}$ zaključujemo da se rang matrice $\mathcal{A}$ po kolonama podudara sa rangom matrice $\mathcal{A}$ po vrstama. □

3.12. Zavisnost matrice operatora o bazi. Neka su U, V i W konačnodimenzioni vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, i neka je $m = \dim U$, $n = \dim V$, i $l = \dim W$. Neka su dati operatori $A : U \longrightarrow V$ i $B : V \longrightarrow W$, i redom baze e, f i g u prostorima U, V i W, i ako je $Ae_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i$, $Bf_k = \sum\limits_{l=1}^{p} \beta_{lk} g_l$, tada je u tački 3.7 pokazano da za matricu linearnog operatora $C = B \circ A$ važi

$$\mathcal{C} = C(g,e) = B(g,f)\,A(f,e) = \mathcal{B}\,\mathcal{A}. \tag{3.21}$$

U tački 2.24 rešen je problem, veze između koordinata nekog vektora $x \in U$ u paru baza e i e'. Ta veza data je u 2.24 Teorema, tj. važi

$$x(e) = T_{ee'}\,x(e'), \quad \text{gde je } T_{ee'} \text{ matrica prelaska sa baze } e \text{ u bazu } e'. \tag{3.22}$$

Sada nas interesuje nešto komplikovaniji problem pronalaženje veze između matrice proizvoljnog operatora $A : U \longrightarrow V$ u parovima baza (e, f) i (e', f').

Neka su e e' dve baze od U, i f i f' dve baze vektorskog prostora V i neka je $A : U \longrightarrow V$ linearni operator. Uzmimo proizvoljni vektor $x \in U$ i posmatrajmo jednakost $y = Ax$. Koristeći sada formulu (3.21) ova jednakost u paru baza (e, f) ima oblik:

$$y(f) = A(f,e)\; x(e)\,. \tag{3.23}$$

Analogna formula u paru baza (e', f') glasi:

$$y(f') = A(f',e')\; x(e')\,. \tag{3.24}$$

Sada iz (3.23), (3.24) i nekoliko primena formule (3.22) dobijamo,

$$A(f,e)\,T_{ee'}\,x(e') = A(f,e)\,x(e) = y(f) = T_{ff'}\,y(f') = T_{ff'}\,A(f',e')x(e'),$$

kako je x proizvoljan vektor, iz prethodne formule sledi

$$T_{ff'}\,A(f',e') = A(f,e)\,T_{ee'} \quad \text{odakle je} \quad A(f',e') = [T_{ff'}]^{-1}\,A(f,e)T_{ee'}, \tag{3.25}$$

jer je $T_{ff'}$ regularna matrica. Od posebnog interesa je slučaj kada je $V = U$ i kada se baze, e i f odnosno e' i f', podudaraju tada (3.25) postaje:

$$A(e',e') = [T_{ee'}]^{-1}\,A(e,e)\,T_{ee'}, \qquad \text{ili} \qquad A(e') = [T_{ee'}]^{-1}\,A(e)\,T_{ee'}. \tag{3.26}$$

Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. *Neka su U, V konačnodimenzioni vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Neka je $A : U \longrightarrow V$ linearni operator i neka su e, e' baze od U i f, f' od V. Tada je veza između matrica operatora A u parovima baza (e, f) i (e', f') data formulom,*

$$A(f',e') = [T_{ff'}]^{-1}\,A(f,e)T_{ee'},$$

pri čemu su $T_{ee'}$ i $T_{ff'}$ matrice prelaska sa baza eue' i f u f', redom.
Specijalno, ako je $V = U$ i ako se baze, e i f, odnosno e' i f' podudaraju, tada je

$$A(e') = [T_{ee'}]^{-1}\,A(e)\,T_{ee'}. \tag{3.27}$$

Primedba 1. Postavlja se pitanje da li postoje operatori, koji imaju istu matricu u svim bazama. Odgovor na ovo pitanje možemo dobiti, analizirajući jednakost (3.27), u kojoj se matrice $A(e')$ i $A(e)$ podudaraju, tj. $A(e') = A(e) = \mathcal{A}$. Množeći sada jednakost (3.27) sa leva matricom $T_{ee'} = \mathcal{T}$ dolazimo do relacije $\mathcal{T}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{T}$, koja mora da važi za svaku regularnu matricu $\mathcal{T}$. Jasno, nula operator $\mathbb{O}$ i identitetiteta id, koji su neutrali za sabiranje matrica i množenje matrica, u svakoj bazi imaju iste matrice i to nula matricu $\mathcal{O}_n$ i jediničnu matricu $\mathbb{I}_n$, redom. Napomenimo da ćemo kasnije videti da je tada $\mathcal{A} = \lambda\,\mathbb{I}_n$ (Šurova lema).

Primedba 2. U tački 3.8 uveli smo relaciju ekvivalentnosti matrica: matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$ su ekvivalentne ako postoje regularne matrice $\mathcal{S} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ i $\mathcal{T} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{F})$ takve da je $\mathcal{A} = \mathcal{S}\,\mathcal{B}\,\mathcal{T}$. Pokazali smo da je ekvivalentnost matrica relacija ekvivalencije, čije su klase ekvivalencije karakterisane rangom nekog od predstavnika klase. Dakle, u istoj klasi su samo one matrice koje imaju isti rang.

Poslednja relacija (3.27) inspiriše nas da uvedemo relaciju **sličnosti matrica** na skupu kvadratnih matrica $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$: *matrice* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ *su* ***slične*** *ako postoji regularna matrica* $\mathcal{T} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ *takva da je* $\mathcal{B} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}$.
Tada važi sledeća jednostavna činjenica.

Propozicija. *Relacija sličnosti matrica na* $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ *je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Analogan dokazu 3.3. Lema. □

Prethodna teorema otkriva i šta su klase ekvivalencije relacije sličnosti – to su linearni operatori. Dakle, ako su matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ slične tada postoji neki linearni operator $A \in V \cong \mathbb{F}^n$ i baze e, e' tako da je $\mathcal{A}$ matrica operatora A u bazi e, a $\mathcal{B}$ matrica istog operatora A u bazi e' i pri tome je $\mathcal{T} = T_{ee'}$, matrica prelaska sa baze e u bazu e'. Štaviše, možemo uzeti da je baza e kanonska baza u $\mathbb{F}^n$.

Primer 1. Neka je e kanonska baza u $\mathbb{R}^3$, a $f = (f_1, f_2, f_3)$ baza koja se sastoji od vektora $f_1 = 3e_1 + e_2 + 2e_3$, $f_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$ i $f_3 = -e_1 + 2e_2 + 5e_3$ i neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathbb{R}^3$ linearni operator zadat svojom matricom u bazi e,

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađimo matricu operatora A u bazi f.

Rešenje. Koristeći formulu $A(f) = T^{-1}A(e)T$, gdje je T matrica prelaska sa baze e u bazu f. Prvo nalazimo,

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{a zatim} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i na kraju} \quad A(f) = \begin{bmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Zadaci, vežbanja i dopune

3.14. Dokažite da su preslikavanja A i B iz 3.1 Teorema linearni operatori na V.

3.15. Linearni operatori. Da li su sledeća preslikavanja linearni operatori:

(i1) $k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, dato sa $k(x+iy) = x - iy$ linearni operator nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$.

(i2) $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$, dato formulom, $A(x_1, x_2) = |\, x_2 \,|$.

(i3) $B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dato formulom, $B(x,y,z) = (x \cdot z, y)$.

Rešenje. (i1) k je aditivno u oba slučaja, nije homogeno kada $\mathbb{C}$ posmatramo kao kompleksni vektorski prostor, a jeste ako ga posmatramo kao realni vektorski prostor.

(i2) $A(0,0) = A((0,1) + (0,-1)) = A(0,1) + A(0,-1) = 1 + 1 = 2$, dakle A nije linearni operator jer ne preslikava nula vektor u nula vektor.

(i3) Za $\alpha \notin \{0,1\}$ i $x, z \neq 0$ imamo

$$B(\alpha\, x, \alpha\, y, \alpha\, z) = (\alpha^2\, x\, z, \alpha\, y) \neq \alpha\,(x\, z, y) = \alpha\, B(x,y),$$

dakle B nije linearan operator jer nije homogen.

3.16. Linearni operatori. Neka je $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vektorski prostor realnih funkcija[14]. Ispitaj da li su sledeća preslikavanja sa V u V linearni operatori:

(i1) $A(f)(t) = f(t) - 1$,

(i2) $B(f)(t) = f(t+a)$, gde je $0 \neq a \in \mathbb{R}$,

(i3) $C(f)(t) = f^2(t) = (f \circ f)(t)$,

(i4) $D(f)(t) = (f(t))^2$.

Rešenje. (i1) Uzmimo za f nula funkciju $0(t) = 0$, tada je $A(0)(t) = 0(t) - 1 = -1 \neq 0$, pa B nije linearni operator jer nula vektor $(0(t) \equiv 0)$ ne preslikava u nula vektor.

(i2) Proverimo prvo aditivnost preslikavanja B

$$B(f+g)(t) \;=\; (f+g)(t+a) = f(t+a) + g(t+a) = B(f)(t) + B(g)(t) = (B(f) + B(g))(t),$$

dakle, B je aditivno. Homogenost sledi iz

$$B(\alpha\, f)(t) = (\alpha\, f)(t+a) = \alpha\, f(t+a) = (\alpha\, B(f))(t).$$

Prema tome B je linearni operator. Lako se vidi da je $B^{-1}(f)(t) = f(t-a)$ inverz (koji je prema upravo dokazanom takođe linearni operator), pa je B automorfizam vektorskog prostora V.

(i3) C nije linearni operator jer,

$$C(f+g)(t) \;=\; f(f(t) + g(t)) + g(f(t) + g(t)) \neq f(f(t)) + g(g(t)) = (C(f) + C(g))(t),$$

dovoljno je uzeti npr. $f(t) = t$, $g(t) = 1$ i $t = 2$.

(i4) $D(f+g) \neq D(f) + D(g)$, dovoljno je uzeti $(\forall\, t \in \mathbb{R})$, $f(t) = g(t) = 1$.

3.17. Linearni operatori. Neka su dati linearni operatori $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $A(x,y,z) = (-x, z)$, i $B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $B(x,y) = (x, y, 2\,x - y)$. Izračunajte $A \circ B$ i $B \circ A$.

Rešenje. Lako nalazimo da je:

$$(A \circ B)(x,y) = A(x,y,2\,x-y) = (-x, 2\,x - y) \qquad \text{i} \qquad (B \circ A)(x,y,z) = B(-x,z) = (-x, z, -2x - z).$$

Odavde vidimo da $A \circ B \neq B \circ A$, štaviše slike nisu u istom prostoru.

3.18. Dati strogi dokaz da je proširenje po linearnosti operatora A, uvedeno u dokazu **3.2** Lema, linearno i da je bijekcija.

3.19. Proverite se da je "levi šift" iz **3.2.** Primer 2 linearna bijekcija.

3.20. Pokažite da je preslikavanje, $C : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dato formulom,

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \left(x_1, \frac{1}{2}\,(x_1 + x_2), \ldots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \ldots, \right),$$

[14] Primetite da $\dim V$ nije konačna.

autorfizam vektorskog prostora $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3.21. Dati strog dokaz sledećih tvrdnji: ako je kompozicija funkcija $f \circ g$ surjekcija onda je f surjekcija i ako je $f \circ g$ injekcija onda je g injekcija (vidi dokaz **3.2** Posledica 2).

3.22. Teorema o rangu i defektu. Dokažite da je formulom $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2\,x_1 - x_2 + x_3 + 4\,x_4)$ definisan linearni operator $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Nađite mu rang i defekt, te po jednu bazu za jezgru i sliku.

Rešenje. Neka su $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada je:

$$A(\alpha\,x + \beta\,y) \;=\; (\alpha\,(x_1 - x_2) + \beta\,(y_1 - y_2), \alpha\,(2\,x_1 - x_2 + x_3 + 4\,x_4) + \;\beta\,(2\,y_1 - y_2 + y_3 + 4\,y_4)) = \alpha\,A(x) + \beta\,A(y).$$

Dakle, A je linearni operator.

Nađimo bazu od $\operatorname{Ker} A$. Neka je $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \operatorname{Ker} A$ tj. $A(x) = 0$. Time je određen sledeći sistem

$$x_1 - x_2 = 0, \qquad 2\,x_1 - x_2 + x_3 + 4\,x_4 = 0,$$

iz kojeg nalazimo da je $x_1 = x_2$, $x_3 = -x_1 - 4\,x_4$. Dakle, ako dobijeno prepišemo na sledeći način

$$x = (x_1, x_1, -x_1 - 4x_4, x_4) = x_1(1, 1, -1, 0) + x_4(0, 0, -4, 1),$$

vidimo da vektori, $(1, 1, -1, 0)$ i $(0, 0, -4, 1)$ čine jednu baza od $\operatorname{Ker} A$. Sada nam Teorema o rangu i defektu daje $r(A) = d(A) = 2$. Dakle, A je epimorfizam i za bazu potprostora $\operatorname{Im} A$ možemo uzeti bilo koja dva linearno nezavisna vektora u $\mathbb{R}^2$, recimo $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$.

3.23. Teorema o rangu i defektu. Dokažite da je formulom $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2\,x_1 - x_2 + x_3 + 4\,x_4)$ definisan linearni operator $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Nađite mu rang i defekt, te po jednu bazu za jezgru i sliku.

Rešenje. Neka su $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada je:

$$A(\alpha\,x + \beta\,y) \;=\; (\alpha\,(x_1 - x_2) + \beta\,(y_1 - y_2), \alpha\,(2\,x_1 - x_2 + x_3 + 4\,x_4) + \;\beta\,(2\,y_1 - y_2 + y_3 + 4\,y_4)) = \alpha\,A(x) + \beta\,A(y).$$

Dakle, A je linearni operator.

Nađimo bazu od $\operatorname{Ker} A$. Neka je $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \operatorname{Ker} A$ tj. $A(x) = 0$. Time je određen sledeći sistem

$$x_1 - x_2 = 0, \qquad 2\,x_1 - x_2 + x_3 + 4\,x_4 = 0,$$

iz kojeg nalazimo da je $x_1 = x_2$, $x_3 = -x_1 - 4\,x_4$. Dakle, ako dobijeno prepišemo na sledeći način

$$x = (x_1, x_1, -x_1 - 4x_4, x_4) = x_1(1, 1, -1, 0) + x_4(0, 0, -4, 1),$$

vidimo da vektori, $(1, 1, -1, 0)$ i $(0, 0, -4, 1)$ čine jednu baza od $\operatorname{Ker} A$. Sada nam Teorema o rangu i defektu daje $r(A) = d(A) = 2$. Dakle, A je epimorfizam i za bazu potprostora $\operatorname{Im} A$ možemo uzeti bilo koja dva linearno nezavisna vektora u $\mathbb{R}^2$, recimo $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$.

3.24. Teorema o rangu i defektu. Operator $A : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ dat je svojim dejstvom na bazi:

$$A(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A(e_3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } A(e_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite opštu formulu za operator A, odredite mu rang i defekt.

Rešenje. Kako je $x = (x_1, \ldots, x_5) = x_1\,e_1 + x_2\,e_2 + x_3\,e_3 + x_4\,e_4 + x_5\,e_5$ dobijamo:

$$(3.28)\; A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{bmatrix} -x_3 + x_5 & x_1 + x_3 & -x_1 + x_4 \\ -2\,x_2 & 3\,x_2 - x_4 + x_5 & x_3 + 2\,x_4 \\ x_1 + x_4 & x_2 + x_4 & x_3 + x_5 \end{bmatrix}.$$

Rešavajući jednačinu $A(x) = 0$, lako se vidi iz formule (3.28) da je $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, npr. dovoljno je prvo posmatrati komponente matrice (1,1) i (3,3),

iz kojih dobijamo $x_3 = x_5 = 0$, a zatim i komponente (1,3) i (3,1), iz kojih sledi $x_1 = x_4 = 0$, i na kraju iz komponente (2,1) sledi da je $x_2 = 0$. Time smo pokazali da je A monomorfizam. Dakle, $d(A) = 0$ i $r(A) = 5$.

3.25. Teorema o rangu i defektu. Za proizvoljnu kvadratnu matricu $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{F})$ definišemo preslikavanja $T_{\mathcal{A}}$, $S_{\mathcal{A}} : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, formulama, $T(\mathcal{X}) = \mathcal{A}\,\mathcal{X} - \mathcal{X}\,\mathcal{A}$, i $S(\mathcal{X}) = \mathcal{A}\,\mathcal{X} + \mathcal{X}\,\mathcal{A}$.
Dokažite da su T i S linearni operatori i u specijalnom slučaju $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nađite $r(T), r(S), d(T)$ i $d(S)$, te odredite neku bazu jezgre i sliku operatora T i S.

Rešenje. Dokažimo da je npr. T linearni operator.

$$T(\alpha\,\mathcal{X} + \beta\,\mathcal{Y}) \;=\; \mathcal{A}(\alpha\,\mathcal{X} + \beta\,\mathcal{Y}) - (\alpha\,\mathcal{X} + \beta\,\mathcal{Y})\,\mathcal{A} = \alpha\,(\mathcal{A}\,\mathcal{X} - \mathcal{X}\,\mathcal{A}) + \beta\,(\mathcal{A}\,\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\,\mathcal{A}) = \alpha\,T(\mathcal{X}) + \beta\,T(\mathcal{Y}).$$

Odredimo npr. bazu za $\operatorname{Ker} S$. Neka je $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} S$, tj. $0 = A\,\mathcal{X} + \mathcal{X}\,A$, što zapisujemo u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,a+b+2\,c & 2\,a+b+2\,d \\ a+c+d & b+2\,c \end{bmatrix}.$$

Odavde dolazimo do linearnog sistema:

$$2\,a+b+2\,c=0, \quad 2\,a+b+2\,d=0, \quad a+c+d=0, \quad b+2\,c=0, \quad \text{čije je rešenje} \quad c=d,\ a=-2\,d,\ b=-2\,d,\ a=0.$$

Odakle odmah sledi da je $\operatorname{Ker} S = \{0\}$, tako da je $r(S)=4$ i $d(S)=0$. Dakle, operator S je izomorfizam i za bazu slike može se uzeti bilo koji skup od četiri linearno nezavisna vektora, npr. kanonska baza $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

3.26. Dato je preslikavanje $A : \mathbb{M}_{22}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_{23}(\mathbb{R})$ formulom:

$$A(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2\,\mathsf{Tr}(\mathcal{X}) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(i1) Dokažite da je A linearni operator.

(i2) Odredite rang i defekt operatora A.

(i3) Nađite neku bazu potprostora $\mathsf{Ker}\,A$ i $\mathsf{Im}\,A$.

(i4) Odredite matricu operatora A u paru standardnih baza.

3.27. Neka je $A : V \longrightarrow V$ linearni operator takav da je $V = \mathsf{Ker}\,A \oplus \mathsf{Im}\,A$. Dokažite da onda važi i $V = \mathsf{Ker}\,A^n \oplus \mathsf{Im}\,A^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

3.27. Teoreme o izomorfizmu. Dokažite Teoreme 1, 2, 3 iz tačke 3.5 ako su svi vektorski prostori, koji se pominju u tim teoremama konačnodimenzioni.

3.28. Baza vektorskog prostora $\mathsf{Hom}\,(U, V)$. Provedite detaljan dokaz tvrdnje (i1) iz 3.7 Teorema.

3.29. Elementarne transformacije. Dokažite da je matrica $\mathbb{F}_{i,\lambda}$ regularna koristeći kanonsku bazu $\mathbb{E}$ u $\mathsf{Hom\,V}$, tj. da je $\mathbb{F}_{i,\lambda} = \mathbb{I}_n + (\lambda-1)\,\mathbb{E}_{ii}$.

Rešenje. Primetimo da je $\mathbb{F}_{i,\lambda} = \mathbb{I}_n + (\lambda-1)\,\mathbb{E}_{ii}$ i $\mathbb{F}_{i,\frac{1}{\lambda}} = \mathbb{I}_n + (\frac{1}{\lambda}-1)\,\mathbb{E}_{ii}$ i sada imamo:

$$\mathbb{F}_{i,\lambda}\,\mathbb{F}_{i,\frac{1}{\lambda}} = (\mathbb{I}_n + (\lambda-1)\,\mathbb{E}_{ii})(\mathbb{I}_n + (\frac{1}{\lambda}-1)\,\mathbb{E}_{ii}) = \mathbb{I}_n + \Big(\lambda - 1 + \frac{1}{\lambda} - 1 + (\lambda-1)(\frac{1}{\lambda}-1)\Big)\,\mathbb{E}_{ii} = \mathbb{I}_n,$$

dakle, $\mathbb{F}_{i,\frac{1}{\lambda}}$ je inverz od $\mathbb{F}_{i,\lambda}$ i $\mathbb{F}_{i,\lambda}$ je regularna matrica.

3.30. Elementarne transformacije. Dokažite da je matrica $\mathbb{G}_{ij}$ regularna koristeći kanonsku bazu $\mathbb{E}$ u $\mathsf{Hom\,V}$, tj. da je $\mathbb{G}_{ij} = \mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{ij} + \mathbb{E}_{ji} - \mathbb{E}_{ii} - \mathbb{E}_{jj}$.

Rešenje. Kako je $\mathbb{G}_{ij} = \mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{ij} + \mathbb{E}_{ji} - \mathbb{E}_{ii} - \mathbb{E}_{jj}$, sada redom imamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{ij}^2 &= (\mathbb{I}_n - \mathbb{E}_{ii} - \mathbb{E}_{jj} + \mathbb{E}_{ij} + \mathbb{E}_{ji})^2 = \mathbb{I}_n^2 + \mathbb{E}_{ii}^2 + \mathbb{E}_{jj}^2 + \mathbb{E}_{ij}^2 + \mathbb{E}_{ji}^2 - 2\,(\mathbb{E}_{ii} + \mathbb{E}_{jj} - \mathbb{E}_{ij} - \mathbb{E}_{ji}) + \mathbb{E}_{ii}\,\mathbb{E}_{jj} - \mathbb{E}_{ii}\,\mathbb{E}_{ij} - \mathbb{E}_{ii}\,\mathbb{E}_{ji} \\ &\quad + \mathbb{E}_{jj}\,\mathbb{E}_{ii} - \mathbb{E}_{jj}\,\mathbb{E}_{ij} - \mathbb{E}_{jj}\,\mathbb{E}_{ji} - \mathbb{E}_{ij}\,\mathbb{E}_{ii} - \mathbb{E}_{ij}\,\mathbb{E}_{jj} + \mathbb{E}_{ij}\,\mathbb{E}_{ji} - \mathbb{E}_{ji}\,\mathbb{E}_{ii} - \mathbb{E}_{ji}\,\mathbb{E}_{jj} + \mathbb{E}_{ji}\,\mathbb{E}_{ij} = \{\mathbb{E}_{ij}\,\mathbb{E}_{kl} = \delta_{jk}\mathbb{E}_{il}\} = \\ &= \mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{ii} + \mathbb{E}_{jj} - 2\,\mathbb{E}_{ii} - 2\,\mathbb{E}_{jj} + 2\,\mathbb{E}_{ij} + 2\,\mathbb{E}_{ji} - \mathbb{E}_{ij} - \mathbb{E}_{ji} - \mathbb{E}_{ij} + \mathbb{E}_{ii} - \mathbb{E}_{ji} + \mathbb{E}_{jj} \\ &= \mathbb{I}_n, \end{aligned}$$

dakle $\mathbb{G}_{ij}^{-1} = \mathbb{G}_{ij}$, tj. $\mathbb{G}_{ij}$ je regularna matrica.

3.31. Dimenzija lineala. Kolika je dimenzija lineala razapetog vektorima:

$$b_1 = (1,0,0,2,5),\ b_2 = (0,1,0,3,4),\ b_3 = (0,0,1,4,7) \ \text{ i } \ b_4 = (2,-3,4,11,12).$$

Rešenje. Zadatak je ekvivalentan određivanju ranga matrice čije su kolone (vrste) dati vektori.

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&4\\2&3&4&11\\5&4&7&12\end{bmatrix} \sim \left\{\begin{array}{l} 1.\text{ kol.}\times(-2)+4.\text{ kol.}\\ 2.\text{ kol.},\times 3+4.\text{ kol.}\\ 3.\text{ kol.}\ \ \times(-4)+4.\text{ kol.}\end{array}\right\} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&3&4&0\\5&4&7&-14\end{bmatrix} \sim \left\{\begin{array}{l} 1.\text{ vrs.}\times(-2)+4.\text{ vrs.};\ 1.\text{ vrs.}\times(-5)+5.\text{ vrs.};\\ 2.\text{ vrs.}\times(-3)+4.\text{ vrs.};\ 2.\text{ vrs.}\times(-4)+5.\text{ vrs.};\\ 3.\text{ vrs.}\times(-4)+4.\text{ vrs.};\ 3.\text{ vrs.}\times(-7)+5.\text{ vrs.};\\ 5.\text{ vrs.}\times(-1/14).;\ 5.\text{ vrs.}\leftrightarrow 4.\text{ vrs.}.\end{array}\right\}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} = \mathbb{D}^4_{5\,4}.$$

Dakle dimenzija lineala je 4.

3.32. Rang matrice. Odredite rang sledećih matrica:

$$\text{(i1)}\quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{bmatrix}. \qquad \text{(i2)}\quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{bmatrix}. \qquad \text{(i3)}\quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{bmatrix}.$$

Rešenje. (i1)
$$\begin{bmatrix} 2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{bmatrix} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{1. kolonu}\\ \text{pomnožimo}\\ \text{sa } 1/2.\end{array}\right\} \sim \begin{bmatrix} 1&-1&3&-2&4\\2&-2&5&1&7\\1&-1&1&8&2\end{bmatrix} \sim \left\{\begin{array}{l} 1.\text{ kol. }+2.\text{ kol.};\ 1.\text{ kol.}\times(-3)+\\ 3.\text{ kol.};\ 1.\text{ kol.}\times(2)+4.\text{ kol.};\\ 1.\text{ kol.}\times(-4)\\ +5.\text{ kol.};\ 2.\text{ i } 4.\text{ kol.}\times(-1)\end{array}\right\}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\2&-1&5&-1&0\\1&-2&10&-2&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\2&1&5&1&0\\1&2&10&2&0\end{bmatrix} \sim \left\{\begin{array}{l} 2.\text{ kol.}\times(-2)+1.\text{ kol.};\\ 2.\text{ kol.}\times(-5)+3.\text{ kol.};\\ 2.\text{ kol.}\times(-1)+4.\text{ kol.};\\ 1.\text{ vrs.}\times(3)+3.\text{ vrs.};\\ 2.\text{ vrs.}\times(-2)+3.\text{ vrs.};\end{array}\right\} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\-3&2&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} = \mathbb{D}^2_{35}, \qquad \text{dakle } r(\mathcal{A}) = 2.$$

(i3)
$$\begin{bmatrix} 1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{bmatrix} \sim \left\{\begin{array}{l} 1.\text{ vrs.}\times(-2)+2.\text{ vrs.}\\ 1.\text{ vrs.}\times(-5)+3.\text{ vrs.}\\ 1.\text{ vrs.}\times(-7)+4.\text{ vrs.}\end{array}\right\} \sim \begin{bmatrix} 1&3&5&-1\\0&-7&-13&6\\0&-14&-26&12\\0&-14&-26&8\end{bmatrix} \sim \left\{\begin{array}{l} 2.\text{ v.}\times(-2)\\ \quad +3.\text{ v.};\\ 2.\text{ v.}\times(-2)\\ \quad +4.\text{ v.};\end{array}\right\} \sim \begin{bmatrix} 1&3&5&-1\\0&-7&-13&6\\0&0&0&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1&3&5&-1\\0&-7&-13&6\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \sim \left\{\begin{array}{l} 4.\text{ v.}\\ \quad +1.\text{ v.};\\ 4.\text{ v.}\times(-6)\\ \quad +2.\text{ v.};\end{array}\right\} \sim \begin{bmatrix} 1&3&5&0\\0&-7&-13&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \sim \left\{\begin{array}{l} 1.\text{ k.}\times(-3)\\ \quad +2.\text{ k.};\\ 1.\text{ k.}\times(-5)\\ \quad +3.\text{ k.};\end{array}\right\} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&-7&-13&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\sim \left\{\begin{array}{l} 2.\text{ k.}\times(-1/7)\\ \\ 3.\text{ k.}\times(-1/13)\end{array}\right\} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} = \mathbb{D}^3_{43}. \text{ Prema tome } r(\mathcal{C}) = 3.$$

3.33. Rang matrice. U zavisnosti o realnom parametru λ odredite rang matrica:

$$\text{(i1)}\ \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 3&1&1&4\\\lambda&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{bmatrix}, \ \text{(i2)}\ \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{bmatrix}, \ \text{(i3)}\ \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 5&-3&2&4&3\\4&-2&3&7&1\\8&-6&-1&-5&9\\7&-3&7&17&\lambda\end{bmatrix}, \ \text{(i4)}\ \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 2&5&1&3&2\\4&6&3&5&4\\4&14&1&7&4\\2&-3&3&\lambda&7\end{bmatrix}.$$

Rešenje. (i1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{1. k.} \leftrightarrow \text{2. k.}; \\ \text{2. k.} \leftrightarrow \text{3. k.}; \\ \text{3. k.} \leftrightarrow \text{2. 4.}; \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{1. k.} \times (-1) + \text{2. k.}; \\ \text{1. k.} \times (-4) + \text{3. k.}; \\ \text{1. k.} \times (-3) + \text{4. k.}; \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -15 & \lambda - 12 \\ 7 & 10 & -25 & -20 \\ 2 & 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{2. k.} \times 1/2 \\ \text{3. k.} \times 1/5 \\ \text{3. k.} + \text{3. k.} \\ \text{3. k.} \leftrightarrow \text{4. k.} \end{array} \right\}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & \lambda - 12 & 0 \\ 7 & 5 & -20 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{2. k.} \times (4) \\ \quad + \text{3. k.}; \\ \text{2. k.} \times (-2) \\ \quad + \text{4. k.}; \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & \lambda & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{1. v.} \times (2) + \text{2. v}; \\ \text{1. v.} \times (3) + \text{3. v}; \\ \text{4. v.} \times (-5) + \text{3. v}; \\ \text{4. v.} \times (-3) + \text{2. v}; \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{odakle sledi} \left\{ \begin{array}{l} \text{ako je } \lambda \neq 0, \text{ tada je } r(\mathcal{A}) = 3, \\ \text{ako je } \lambda = 0, \text{ tada je } r(\mathcal{A}) = 2. \end{array} \right.$$

(i2) $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{1. v.} \times (-2) \\ \quad + \text{2. v.} \\ \text{1. v.} \times (-1) \\ \quad + \text{3. v.} \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -2\lambda - 1 & \lambda + 2 & 1 \\ 0 & 10 - \lambda & -5 & -1 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{2. v.} \times (-2) + \text{1. v.} \\ \text{3. v.} \times (1) + \text{2. v.} \\ \text{3. v.} \times (-1) \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5\lambda + 2 & -2\lambda - 5 & 0 \\ 0 & -3\lambda + 9 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & \lambda - 10 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$

(i2a) Ako je $\lambda = 3$ onda je $r(\mathcal{B}) = 2$ jer je:

$$\begin{bmatrix} 1 & 17 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{1. k.} \times (-17) + \text{2. k.}; \\ \text{1. k.} \times (11) + \text{3. k.}; \\ \text{4. k.} \times (7) + \text{2. k.}; \\ \text{4. k.} \times (-5) + \text{3. k.}; \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i2b) Ako je $\lambda \neq 3$, onda je $r(\mathcal{B}) = 3$ jer je:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5\lambda + 2 & -2\lambda - 5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{1. k.} \times (-5\,\lambda + 2) + \text{2. k.}; \\ \text{1. k.} \times (2\,\lambda + 5) + \text{3. k.}; \\ \text{4. k.} \times (10 - \lambda) + \text{2. k.}; \\ \text{4. k.} \times (-5) + \text{3. k.}; \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{3. k.} \times (3) + \text{2. k.}; \\ \text{2. k.} \leftrightarrow \text{3. k.}; \\ \text{3. k.} \leftrightarrow \text{4. k.}; \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.34. Kroneker-Kapelijeva teorema. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ i b vektori u $\mathbb{R}^n$. Tada važi:

$$b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, a_i \quad \text{akko} \quad r[\,a_1, a_2, \ldots, a_k\,] = r[\,a_1, a_2, \ldots, a_k, b\,],$$

gde je $[\,a_1, a_2, \ldots, a_k\,]$ matrica čije su kolone redom vektori $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Dokaz. Ako je $b = 0$, zadatak je trivijalan, zato pretpostavimo $b \neq 0$.

Nužnost. Neka je b je linearna kombinacija vektora a_i, $(i = 1, \ldots, k)$. Tada je broj linearno nezavisnih vektora u matrici $[\,a_1, a_2, \ldots, a_k, b\,]$ jednak broju linearno nezavisnih vektora u matrici $[\,a_1, a_2, ..., a_k\,]$. Sada iz definicije ranga matrice odmah sledi da je $r[\,a_1, a_2, \ldots, a_k\,] = r[\,a_1, a_2, \ldots, a_k, b\,]$.

Dovoljnost. Neka je $r[\,a_1, a_2, \ldots, a_k\,] = l \leq k$, BSO možemo pretpostaviti da su $a_1, a_2, \ldots, a_l$ linearno nezavisni (ako nisu onda ih prenumerišemo). Kako je po pretpostavci $r[\,a_1, a_2, \ldots, a_k\,] = r[\,a_1, a_2, \ldots, a_k, b\,]$, sledi da je rang matrice $[\,a_1, a_2, \ldots, a_l, b\,]$ jednak l. Dakle jednačina,

$$\beta\, b + \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\, a_i = 0,$$

je zadovoljena za $\beta \neq 0$ (tada je i barem jedan $\alpha_i \neq 0$) jer u suprotnom, tj. kada bi $\beta = 0$ sledilo bi, zbog linearne nezavisnosti skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$, da su svi $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, l)$, a to je nemoguće (jer bi tada rang matrice $[\,a_1, a_2, \ldots, a_l, b\,]$ bio veći od ranga matrice $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$). Dakle, $\beta \neq 0$, pa iz gornje relacije sledi:

$$b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, a_i = 0, \qquad \text{gde je } \lambda_i = -\alpha_i/\beta, \quad i = 1, \ldots, l \quad \text{i} \quad \lambda_i = 0, \quad i = l+1, \ldots, k.$$

3.35. Rang matrice. Za koje je skalare, $\lambda \in \mathbb{R}$, vektor $b = (7, -2, \lambda)$ linearna kombinacija vektora $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$ i $a_3 = (1, -6, 1)$.

Rešenje. Primenimo prethodni zadatak, istovremeno tražeći rang matrica $[\,a_1, a_2, a_3\,]$ i $[\,a_1, a_2, a_3, b\,]$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{3. k.} \times (3) + \text{1. k.} \\ \text{3. k.} \times (-5) + \text{2. k.} \\ \text{3. k.} \times (-7) + \text{4. k.} \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 15 & 25 & -6 & 40 \\ 3 & 5 & 1 & \lambda - 7 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{1. k.} \times (1/3) \\ \\ \text{2. k.} \times (1/5) \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & -6 & 40 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda - 7 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{2. k.} \times (-1) + \text{1. k.} \\ \text{2. k.} \times (-1) + \text{3. k.} \\ \text{3. k.} \times (7 - \lambda) + \text{4. k.} \end{array} \right\}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & -5\lambda + 75 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{1. v.} \times (11) + \text{2. v.}; \\ \\ \text{3. v.} \times (-5) + \text{2. v.}; \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5\lambda + 75 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je $r[\,a_1, a_2, a_3\,] = 2$ i vektor b je linearna kombinacija vektora a_1, a_2 i a_3, akko je $r[\,a_1, a_2, a_3, b\,] = 2$, a to je ekvivalentno sa $-5\,\lambda + 75 = 0$, ili $\lambda = 15$. Ako $\lambda \neq 15$ vektor b nije linearna kombinacija vektora a_1, a_2 i a_3.

3.36. Rang matrice. U zavisnosti o $\xi \in \mathbb{R}$ odredite rang matrica.

$$\text{(i1)}\quad \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \xi \end{bmatrix}, \qquad \text{(i2)}\quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \xi & 7 \end{bmatrix}.$$

3.37. Inverz matrica. Nađite inverz sledećih matrica, ako postoji, sledećih matrica:

$$\text{(i1)}\ \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(i2)}\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(i3)}\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(i4)}\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(i5)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{(i6)}\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{(i7)}\ \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{(i8)}\ \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(i9)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Dajemo rešenja sledećih zadataka: (i4), (i7), (i5), (i8), (i3) i (i9).

$$\text{(i4)}\ \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 1.\ \text{v.} + \\ 2.\ \text{v.}\,; \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 2.\ \text{v.} + \\ 1.\ \text{v.}\,; \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]. \qquad \text{Dakle, } \mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(i7)}\ \left[\begin{array}{rr|rr} -3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{r} 2.\ \text{v.} + \\ 1.\ \text{v.}\,; \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{rr|rr} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{r} 1.\ \text{v.} \times (2) \\ +2.\ \text{v.}\,; \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{rr|rr} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{r} 2.\ \text{v.} \times (-2) \\ +2.\ \text{v.}\,; \end{array}\right\}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|rr} -1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 1.\ \text{v.} \times (-1)\,; \\ 2.\ \text{v.} \times (-1)\,; \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right]. \quad \text{Dakle, } \mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(i5)}\ \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 1.v. \times (-4) + 2.v. \\ 1.v. \times (-4) + 3.v. \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 2.v. + 1.v. \\ 2.v. \times (-1) \quad \sim \\ 2.v. \times (5) + 3.v. \end{array}\right\}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -5 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 3.v. + 1.v. \\ 3.v. \times (-1) + 2.v. \\ 3.v. \times (-1) \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 13 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 5 & -1 \end{array}\right].$$

Prema tome $\mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 1 \\ -12 & 4 & -1 \\ -16 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\text{(i8)}\ \left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 2.v. + 3.v. \\ 2.v. \times (-3) + 1.v. \\ 2.v. \leftrightarrow 1.v. \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 2.v. + 3.v. \\ \\ 2.v. \times -1/4 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Prema tome matrica $\mathcal{A}$ ima rang jednak dva, dakle ona nije maksimalnog ranga pa nije regularna i nema inverza.

$$\text{(i3)}\ \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} -2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 4.v. \times (2) + 1.v. \\ 4.v. \times (-3) + 2.v. \\ 4.v. \times (-1) + 3.v. \\ 4.v. \leftrightarrow 1.v. \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left\{\begin{array}{l} 3.v. \times (2) + 4.v. \\ 3.v. \times (-4) + 2.v. \\ 3.v. \times (2) + 1.v. \\ 3.v. \leftrightarrow 4.v. \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & -10 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 2.v. \times (-1/10) \\ \\ 2.v. \times (-2) + 1.v. \\ 2.v. \times (-5) + 3.v. \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 15/7 & 0 & 0 & 2/7 & 6/7 & -5/7 \\ 0 & 1 & 10/7 & 0 & 0 & -1/7 & 4/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & -1/7 & 0 & 1 & 5/7 & -6/7 & 5/7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 3.\,v.\ \times -7 \\ 3.\,v.\ \times (-10/7) + 2.\,v. \\ 3.\,v.\ \times (-15/7) + 1.\,v. \\ 3.\,v.\ \times (-2) + 4.\,v. \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & -12 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & 7 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 14 & 10 & -11 & 9 \end{array}\right]$$

odakle je, $\mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 11 & -12 & 10 \\ 10 & 7 & -8 & 7 \\ -7 & -5 & 6 & -5 \\ 14 & 10 & -11 & 9 \end{bmatrix}$.

(i9) $$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} 4.\,v.\ \times (-1) + 3.\,v. \\ 3.\,v.\ \times (-1) + 2.\,v. \\ 2.\,v.\ \times (-1) + 1.\,v. \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$ tako da je

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.38. Inverz matrice. Izračunajte inverzne matrice od sledećih matrica $n-$tog reda :

$$\text{(i1)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(i2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje.

(i1) $$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} n.\,v.\ \times (-1) + 1.\,v. \\ n.\,v.\ \times (-1) + 2.\,v. \\ \vdots \\ n.\,v.\ \times (-1) + (n-1).\,v. \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left\{\begin{array}{c} (n-1).\,v.\ \times (-1) + 1.\,v. \\ (n-1).\,v.\ \times (-1) + 2.\,v. \\ \vdots \\ (n-1).\,v.\ \times (-1) + (n-2).\,v. \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} \text{analogno dalje,} \\ \text{množimo } (n-2). \\ \text{vrstu sa } (-1) \text{ i} \\ \text{dodavanje svim} \\ \text{prethodnim vrstama} \\ \text{... itd. ...} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right]. \text{ Prema tome, } \quad \mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i2) Analogno, nalazimo da je

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n-1} & (-1)^{n} \\ 0 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.39. Neka je $A : V \longrightarrow V$ linearni operator takav da je $V = \mathsf{Ker}\, A \oplus \mathsf{Im}\, A$. Dokažite da je onda i $V = \mathsf{Ker}\, A^2 \oplus \mathsf{Im}\, A^2$.

Rešenje. Prvo primetimo da ako je $x \in \mathsf{Ker}\, A$ onda je $Ax = 0$, pa je i $A(Ax) = 0$ (jer je A linearni operator), tj. $x \in \mathsf{Ker}\, A^2$. Dakle, uvek važi da je $\mathsf{Ker}\, A \subseteq \mathsf{Ker}\, A^2$. Dokažimo sada i obratnu inkluziju: neka je $x \in \mathsf{Ker}\, A^2$ onda, zbog pretpostavke zadatka, imamo da je $x = y + z$, pri čemu je $y \in \mathsf{Ker}\, A$ i $z \in \mathsf{Im}\, A$. Kako je $y \in \mathsf{Ker}\, A \subseteq \mathsf{Ker}\, A^2$ sledi da je $x - y = z \in \mathsf{Ker}\, A^2$, (jer su x

i $y \in \mathsf{Ker}\, A^2$). Dakle, s jedne strane je $Az \in \mathsf{Ker}\, A$, dok je s druge strane $Az \in \mathsf{Im}\, A$, tako da je $Az = 0$. Prema tome $z \in \mathsf{Ker}\, A$ i $z \in \mathsf{Im}\, A$, pa je $z = 0$ i $x = y \in \mathsf{Ker}\, A$. Odavde je prvo $\mathsf{Ker}\, A^2 \subseteq \mathsf{Ker}\, A$, a zatim je $\mathsf{Ker}\, A = \mathsf{Ker}\, A^2$.

Primetimo prvo da ako je $y \in \mathsf{Im}\, A^2$, onda postoji $x \in V$ takav da je $y = A^2 x = A(Ax)$, pa je $y \in \mathsf{Im}\, A$ jer za $z = Ax$, nalazimo da je $y = Az$. Dakle, time je pokazano da uvek važi da je $\mathsf{Im}\, A^2 \subseteq \mathsf{Im}\, A$. Sada koristeći teoremu o rangu i defektu redom imamo:

$$\mathsf{dim}\,(\mathsf{Im}\, A^2) = r(A^2) = \mathsf{dim}\, V - d(A^2) = \mathsf{dim}\, V - d(A) = r(A) = \mathsf{dim}\,(\mathsf{Im}\, A),$$

i sada napokon iz $\mathsf{Im}\, A^2 \subseteq \mathsf{Im}\, A$ i $\mathsf{dim}\,(\mathsf{Im}\, A^2) = \mathsf{dim}\,(\mathsf{Im}\, A)$, zaključujemo da je $\mathsf{Im}\, A^2 = \mathsf{Im}\, A$.

3.40. Nađite primer operatora $A \in \mathsf{Hom}\, V$ takvog da $V \neq \mathsf{Ker}\, A \oplus \mathsf{Im}\, A$.

Rešenje. Neka je $V = \mathbb{R}^2$ i neka je operator A određen svojim dejstvom na nekoj bazi $(e) = (e_1, e_2)$, sledećom formulom: $Ae_1 = e_2$ i $Ae_2 = 0$, odakle vidimo da je $e_2 \in \mathsf{Ker}\, A, \cap \mathsf{Im}\, A$ pa $\mathsf{Ker}\, A \oplus \mathsf{Im}\, A$ ne može biti direktna.

3.41. Dokažite da su $A, B, C \in \mathsf{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, data formulama

$$A(x,y,z) = (x+y, x-2\,z), \quad B(x,y,z) = (x, 3\,y) \quad \text{i} \quad H(x,y,z) = (x+y-z, x-y),$$

linearno nezavisna preslikavanja.

Rešenje. Računamo,

$\lambda\, A(x,y,z) + \mu\, B(x,y,z) + \nu\, C(x,y,z) = 0$ odakle sledi $\lambda\,(x+y, x-2\,z) + \mu\,(x, 3\,y) + \nu\,(x+y-z, x-y) = (0,0,0)$ a zatim

$(0,0,0) = (\lambda x + \lambda y + \mu x + \nu\, x + \nu y - \nu z, \lambda x - 2\lambda z + 3\mu y + \nu x - \nu z) = (x(\lambda+\mu+\nu) + y(\lambda+\nu) - \nu z, x(\lambda+\nu) + 3\mu y + z(-2\lambda - \nu))$

odakle redom zaključujemo (jer zadnja formula važi za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$), $\lambda + \mu + \nu = 0$, $\lambda + \nu = 0$, $\lambda + \nu = 0$, $3\,\mu = 0$, $\nu = 0$, $-2\,\lambda - \nu = 0$, odakle je $\nu = \mu = \lambda = 0$. Prema tome F, G i H su linearno nezavisni.

3.42. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,(\mathsf{V},\mathsf{W})$ i $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Dokažite da je $\mathsf{Ker}\, A = \mathsf{Ker}(\alpha\, A)$ i $\mathsf{Im}\, A = \mathsf{Im}(\alpha\, A)$.

Rešenje. Prvo dokažimo da je $\mathsf{Ker}\, A = \mathsf{Ker}(\alpha A)$. Dokaz je posledica sledećeg niza ekvivalencija:

$$x \in \mathsf{Ker}\, A \iff Ax = 0 \iff 0 = \alpha\, A\, x = A(\alpha\, x) \iff x \in \mathsf{Ker}\,(\alpha\, A).$$

Neka je $x \in \mathsf{Im}\, A$, tada postoji $y \in V$ takav da je $A\,y = x$. Za vektor $z = y/\alpha$, vidimo da je $A(\alpha\, z) = A\,y = x$, dakle $x \in \mathsf{Im}\,(\alpha\, A)$.

Obratno, ako je $x \in \mathsf{Im}(\alpha\, A)$ onda postoji $y \in V$ takav da je $A(\alpha\, y) = x$. Za vektor $z = \alpha\, y$ vidimo da je $A(z) = A(\alpha\, y) = x$, dakle $x \in \mathsf{Im}\, A$.

3.43. Neka je $A \in \mathsf{Hom}(\mathbb{C}^3)$, dat formulom $A(x,y,z) = (x+y-z, y+z, 4z)$. Dokaži da je $A \in \mathsf{GL}(\mathbb{C}^3)$ i nađi A^{-1}.

Rešenje. Jasno, potrebno i dovoljno je naći A^{-1}. Ako je $A(x,y,z) = (a,b,c)$, onda je $A^{-1}(a,b,c) = (x,y,z)$, tako da imamo: $a = x+y-z$, $b = y+z$ i $c = 4\,z$. Rešavajući ovaj jednostavni linearni sistem nalazimo: $z = c/4\,, y = -c/4 + b\,, x = a + b - c/2\,.$ Dakle, imamo da je $A^{-1}(a,b,c) = (a+b-c/2, b-c/4, c/4)$.

Primedba. Ovaj zadatak moguće je rešiti tako što se operatoru A dodeli njegova matrica u kanonskoj bazi i zatim se nađe njen inverz.

3.44. Neka je $\mathcal{A} = [a_1, a_2, ..., a_n]$ regularna matrica $(r(\mathcal{A}) = n)$. Ako je matrica $\mathcal{A}(b) = [a_1, a_2, ..., a_{k-1}, b, a_{k+1}, ..., a_n]$ matrica ranga $n-1$, za svaki $k = 1, 2, ..., n$; dokažite da je onda $b = 0$.

3.45. Neka su $A, B \in \mathsf{Hom}\,(\mathbb{F}^n)$, gde je $n \in \mathbb{N}$, i neka je $A\,B = 0$.

(i1) Dokažite da je: $\mathsf{rang}(A) + \mathsf{rang}(B) \leq n$.

(i2) Dali za dati operator A i $\mathsf{rang}(A) \leq k \leq n$, postoji operator B takav da $A\,B = 0$ i $\mathsf{rang}(A) + \mathsf{rang}(B) = k$.

3.46. Pokažite da za svaka dva linearna operatora $A, B \in \mathsf{Hom}\,(\mathbb{R}^n)$ važi:

$$\mathsf{rang}\,(A\,B) \geq \mathsf{rang}\,(A) + \mathsf{rang}\,(B) - n.$$

3.47. Neka je V realni vektorski prostor i neka su $A,\ B \in \mathsf{Hom}_{\mathbb{R}} V$ linearni operatori na V za koje važi: $A^2 = B^2$ i $\mathsf{Ker}\, A \cap \mathsf{Ker}\, B = \{0\}$. Dokažite da za operatore A i B važi:

(i1) $A\ (\mathsf{Ker}\,B) \subseteq \mathsf{Ker}\,A$.

(i2) $\mathsf{dim}\,(A\ (\mathsf{Ker}\,B)\ ) = \mathsf{dim}\,(\mathsf{Ker}\,B)$.

(i3) ako je $A\,B = B\,A$ onda je $B\,(A\ (\mathsf{Ker}\,B)\ ) = \{0\}$.

3.48. Za dato $D \in \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}(V)$, definišemo preslikavanje $f : \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}(V) \longrightarrow \mathbb{C}$, formulom $f_D(A) = \mathsf{Tr}(A\,D)$, $A \in \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}(V)$. Dokažite da

(i1) je f_D linearni operator,

(i2) ako je $f_D(A) = 0,\ \forall\, A \in \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}(V)$ onda je $D = 0$,

(i3) $\forall\, g \in (\mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}(V))^*$ postoji neko $B \in \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}(V)$ tako da je $g = f_B$.

3.49. Linearni funkcionali i operatori. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ operator na unitarnom prostoru V za kojeg važi da je $\langle Av, v\rangle \in \mathbb{R}, \forall\, v \in V$. Pokažite da je A hermitski operator.

3.50. Dualno preslikavanje. Da li tvrđenje (i1) iz 3.11 Teorema važi i bez pretpostavke da su U i V konačnodimenzioni ?

3.51. Nađite matricu operatora transponovanja u kanonskoj bazi $(E) = (E_{11}, E_{12},\ E_{21}, E_{22})$ i u bazi $(F) = (E_{22}, E_{11}, E_{21}, E_{12})$.

Rešenje. $\quad {}^{\tau}(E) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \quad$ i $\quad {}^{\tau}(F) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}.$

3.52. Dati potpun dokaz Propozicije iz tačke 3.12.

3.53. Ako je $A(e) = \begin{bmatrix} -3 & 1\\ 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{F})$. Odredite $A(f)$ ako je $f_1 = e_2$ i $f_2 = e_1 + e_2$.

3.54. U prethodnom zadatku nađite koordinate vektora Ax u obe baze ako je $x = f_1 + f_2$.

3.55. Promena baze. Neka je linearni operator $A \in \mathsf{Hom}\,\mathbb{R}^4$ dat svojom matricom u kanonskoj bazi,

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1&2&0&1\\ 3&0&-1&2\\ 2&5&3&1\\ 1&2&1&3 \end{bmatrix}.$$

(i1) Za vektor $x(e) = (1, -1, 2, 1)$ odredi $(Ax)(e)$ i $(Ax)(f)$, pri čemu je f baza koja se sastoji od vektora $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2, f_3 = e_1 + e_2 + e_3$ i $f_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

(i2) Neka je $y(f) = [-1, -3, 6, -8]^{\tau}$. Odredite $(Ay)(e)$.

(i3) Neka je g baza koja se sastoji od vektora $g_1 = f_1, g_2 = -f_1 + f_2$, $g_3 = -f_3 + f_4$ i $g_4 = -f_2 + f_3$. Odredite matricu prelaska sa baze e u g kao i $A(g)$.

Rešenje. (i1) $(Ax)(e) = A(e)\,x(e) = \begin{bmatrix} 1&2&0&1\\ 3&0&-1&2\\ 2&5&3&1\\ 1&2&1&3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 2\\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 3\\ 4\\ 4 \end{bmatrix}.$ Kako je, $(Ax)(f) = [T_{ef}]^{-1}(Ax)(e)$, prvo nalazimo,

$T_{ef} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$, a zatim $T_{ef}^{-1} = \begin{bmatrix} 1&-1&0&0\\ 0&-1&-1&0\\ 0&0&-1&-1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$ i napokon $(Ax)(f) = \begin{bmatrix} 1&-1&0&0\\ 0&-1&-1&0\\ 0&0&-1&-1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\ 3\\ 4\\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\\ -1\\ 0\\ 4 \end{bmatrix}.$

(i2) $A(f) = T_{ef}^{-1}A(e)T_{ef} = \begin{bmatrix} 1&-1&0&0\\ 0&-1&-1&0\\ 0&0&-1&-1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&2&0&1\\ 3&0&-1&2\\ 2&5&3&1\\ 1&2&1&3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2&0&1&0\\ 1&-4&-8&-7\\ 1&4&6&4\\ 1&3&4&7 \end{bmatrix}$, tako da prvo imamo:

$(Ay)(f) = A(f)\,y(f) = \begin{bmatrix} -2&0&1&0\\ 1&-4&-8&-7\\ 1&4&6&4\\ 1&3&4&7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1\\ -3\\ 6\\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\\ 19\\ -9\\ -42 \end{bmatrix}$, i $(Ay)(e) = T_{ef}(Ay)(f) = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8\\ 19\\ -9\\ -42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24\\ -32\\ -51\\ -42 \end{bmatrix}.$

Drugi način: $y(f) = T_{ef}^{-1} y(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}$, i $(Ay)(e) = A(e)y(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -32 \\ -51 \\ -42 \end{bmatrix}$.

(i3) Kako važi formula: $T_{eg} = T_{ef}\, T_{fg}$,

nalazimo:

$$T_{eg} = T_{ef} T_{fg} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

i kako je očigledno, $T_{eg}^{-1} = T_{eg}$, dobijamo

$$A(g) = T_{eg}^{-1} A(e)\, T_{eg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.56. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,(U, V)$ linearni operator kojem u kanonskim bazama e i e' odgovara matrica

$$A(e', e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

te neka su f i f' baze od U i V, pri čemu je: $f_1 = (1,1,1,1)^\tau$, $f_2 = (1,2,2,2)^\tau$, $f_3 = (1,2,3,3)^\tau$, $f_4 = (1,2,3,4)^\tau$, i $f'_1 = (5,2,4,4,1)^\tau$, $f'_2 = (-1,3,1,-4,-3)^\tau$, $f'_3 = (-1,3,2,-5,5)^\tau$, $f'_4 = (-4,1,-4,-5,-5)^\tau$, i $f'_5 = (2,0,-2,3,1)^\tau$.

(i1) Odredite matricu operatora A u paru baza f i f'.

(i2) Odredite matricu operatora A^* u dualnom paru baza f^* i $(f')^*$.

(i3) Nađite neku bazu od $\mathsf{Ker}(A)$ i izrazite bazne vektore iste u bazama e i f.

(i4) Nađite neku bazu od $\mathsf{Im}(A)$ i izrazite bazne vektore iste u bazama e' i f'.

Rešenje. (i1) Da bismo iskoristili formulu, $A(f', f) = [T_{e'f'}]^{-1} A(e', e)\, T_{ef}$, prvo nalazimo matrice prelaska i njihove inverze:

$$T_{e'f'} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -4 & -2 \\ 4 & -4 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{e'f'}^{-1} = \begin{bmatrix} -500 & 340 & 75 & 371 & 37 \\ 674 & -458 & -101 & -500 & -50 \\ -147 & 100 & 22 & 109 & 11 \\ -581 & 395 & 87 & 431 & 43 \\ 352 & -239 & -53 & -261 & -26 \end{bmatrix}, \quad \text{i} \quad T_{ef} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

tako da je:

$$A(f', f) = \begin{bmatrix} -500 & 340 & 75 & 371 & 37 \\ 674 & -458 & -101 & -500 & -50 \\ -147 & 100 & 22 & 109 & 11 \\ -581 & 395 & 87 & 431 & 43 \\ 352 & -239 & -53 & -261 & -26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 859 & 1350 & 3100 & 3878 \\ -1157 & -1819 & -4178 & -5227 \\ 253 & 398 & 913 & 1142 \\ 997 & 1567 & 3600 & 4504 \\ -605 & -951 & -2183 & -2731 \end{bmatrix}.$$

(i2) Na osnovu ranije teorije znamo da je

$$A^*(f^*, f^{*\prime}) = A(f', f)^\tau = \begin{bmatrix} 859 & -1157 & 253 & 997 & -605 \\ 1350 & -1819 & 398 & 1567 & -951 \\ 3100 & -4178 & 913 & 3600 & -2183 \\ 3878 & -5227 & 1142 & 4504 & -2731 \end{bmatrix}.$$

(i3) Da bismo odredili $\mathsf{Ker}A$ potrebno je rešiti jednačinu $Ax = 0$, pri tome vodimo računa da su i matrica operatora A i vektor x dati svojim koordinatama u istoj bazi, tako da je $A(e', e)x(e) = 0(e')$. Sada lako nalazimo da $\mathsf{Ker}A = \{0\}$.

(i4) Slično kao i pod (i3) imamo: $\mathsf{Im}A = \mathcal{L}(\{v_i(e') = A(e', e)\, e_i,\ i = 1, \ldots, 4\})$, pri tome su kolone matrice A vektori $v_i(e')$, pa je potrebno naći maksimalan broj linearno nezavisnih vektora u skupu $\{v_i(e'),\ i = 1, \ldots, 4\}$. Iz (i3) i zbog teoreme o rangu i defektu znamo da je taj broj 4. Dakle u bazi e', imamo

$$\mathsf{Im}A = \mathcal{L}(\{v_1(e') = (1,2,3,0,-1)^\tau, v_2(e') = (2,0,1,-1,1)^\tau, v_3(e') = (0,1,2,1,3)^\tau, v_4(e') = (-2,0,1,-1,2)^\tau\}).$$

Kako je $\mathsf{Im}A = \mathcal{L}(\{v_1(f'), v_2(f'), v_3(f'), v_4(f')\})$ tada formula, $x(f') = [T_{e'f'}]^{-1} x(e')$, daje: $v_1(f') = (368, -495, 108, 427, -259)^\tau$, $v_2(f') = (-1259, 1697, -370, -1463, 886)^\tau$, $v_3(f') = (972, -1310, 286, 1129, -684)^\tau$, $v_4(f') = (778, -1049, 229, 904, -548)^\tau\}$.

3.57. Promena baze. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,(U, V)$ linearni operator kojem u kanonskim bazama e i e' odgovara matrica

$$A(e',e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

te neka su f i f' baze od U i V, redom, gde je: $f_1(e) = (1,1,-1)$, $f_2(e) = (2,3,-2)$, $f_3(e) = (-1,-2,-1)$ i $f'_1(e') = (1,1,1,-2)$, $f'_2(e') = (2,-1,1,2)$, $f'_3(e') = (2,0,1,-1)$, $f'_4(e') = (-1,2,1,0)$.

(i1) Dokažite da za matrice prelaska dualnih baza (baza u U^* i V^*) važi formula: $T_{e^*f^*} = [T_{ef}^{\tau}]^{-1}$.

(i2) Odredite $A(f',f), A(e',f)$ i $A(f',e)$.

(i3) Odredite $A^*(e^*,e'^*)$, $A^*(e^*,f'^*)$, $A^*(f^*,f'^*)$ i $A^*(f^*,e'^*)$.

(i4) Ako je $x(e) = (2,-3,7)$ izračunajte $x(f)$, $(Ax)(e'^*)$ i $(Ax)(f'^*)$.

(i5) Ako je $y^*(f'^*) = (1,0,5,-2)$ izračunajte $y(e'^*)$, $(A^*y)(e)$ i $(A^*y)(f)$.

3.58. Jedna specijalna baza. Dokažite da za operator $A = (\alpha_{ij}) \in \mathsf{Hom}\, V$ postoji baza $e = (e_1, \dots, e_n)$ takva da operator A u toj bazi ima matricu čiji su svi elementi ispod donje sporedne dijagonale jednaki 0, a donja sporedna dijagonala sastoji se od 0 i 1, tj. $\alpha_{ij} = 0$ kada je $i - j \geq 2$ i $\alpha_{i+1\,i} \in \{0,1\}$, $i = 1, \dots n-1$.

DETERMINANTE

1. Simetrična grupa $\mathbb{S}_n$

4.1. Grupa permutacija. Za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ definišemo skup $\mathbb{S}_n = \{1, 2, ..., n\}$. Bijekcije skupa $\mathbb{S}_n$ nazivamo permutacijama skupa $\mathbb{S}_n$. Jasno $(\mathbb{S}_n, \circ)$ je grupa koju nazivamo grupom permutacija ili simetričnom grupom $\mathbb{S}_n$. Kao što znamo[1], simetrična grupa ima $\|\mathbb{S}_n\| = n!$ elemenata. Elemente grupe $\mathbb{S}_n$ zapisujemo na sledeći način,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots\cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

U zapisu permutacije (4.1) gornja vrsta predstavlja elemente skupa $\mathbb{S}_n$, a donja njihove slike. S obzirom da je grupovna operacija u $\mathbb{S}_n$ kompozicija funkcija koristićemo notaciju,

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots\cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots\cdots & \tau(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & n \\ (\sigma\circ\tau)(1) & (\sigma\circ\tau)(2) & \cdots\cdots & (\sigma\circ\tau)(n) \end{pmatrix}$$

Primer 1. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 1 & 8 & 2 & 9 & 6 & 4 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 10 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 6 & 9 & 7 & 3 & 5 & 8 & 10 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Primer 2. Kejlijeva tablica grupe $(\mathbb{S}_3, \circ)$. Uvedimo oznake

$$\mathrm{id} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right), \quad \sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right), \quad \sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right),$$

$$\sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \sigma_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{i} \quad \sigma_5 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

$\circ$	id	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
id	id	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_1	σ_1	id	σ_4	σ_5	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	σ_3	id	σ_1	σ_5	σ_4
σ_3	σ_3	σ_2	σ_5	σ_4	id	σ_1
σ_4	σ_4	σ_5	σ_1	id	σ_3	σ_2
σ_5	σ_5	σ_4	σ_3	σ_3	σ_1	id

Sada na standardan način, računanjem kompozicije ovih preslikavanja dobijamo tablicu množenja (desno) grupe $(\mathbb{S}_3, \circ)$.

Iz same tablice možemo zaključiti da grupa $\mathbb{S}_3$ nije komutativna, jer tablica nije simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu.

Prethodna tablica množenja naziva se i Kejlijeva tablica[2] grupe $(\mathbb{S}_3, \circ)$.

4.2. Parnost permutacija. Inverzija permutacije σ je svaki uređeni par indeksa (i, j) takav da je $i < j$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$. Broj svih inverzija permutacije σ obeležavamo sa $I(\sigma)$. Permutacija σ je **parna** ako je $I(\sigma)$ paran broj, a **neparna** ako je $I(\sigma)$ neparan broj. Primetimo da bismo odredili broj inverzija permutacije potrebno je proveriti da li je svaki od $\binom{n}{2}$ uređenih parova (i, j), uz $i < j$ inverzija.

Primer. Odredimo parnost permutacije $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{S}_5$.
Potrebno je odrediti broj inverzija permutacije σ. U tu svrhu formirajmo sledeću tabelu, u kojoj se u drugoj vrsti nalazi $+$ ako je uređeni par iz iste kolone (i, j) inverzija, a $-$ ako nije. Tako dobijamo,

$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(4,5)$	$I(\sigma)$
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	7

Dakle, permutacija σ je neparna jer ima 7 inverzija.

Parnost i neparnost možemo karakterisati uvođenjem sledećeg preslikavanja: za $\sigma \in \mathbb{S}_n$ definišemo,

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<k} \frac{\sigma(k) - \sigma(i)}{k - i}.$$

Osnovna svojstva preslikavanja sgn data su u sledećoj teoremi.

[1] Vidi Uvod

[2] Cayley Arthur, 1821 – 1895, engleski matematičar.

Teorema. *(i1)* $\operatorname{sgn} : (\mathbb{S}_n, \circ) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \cdot)$ *je homomorfizam grupa.*
(i2) $\operatorname{Ker}\operatorname{sgn} = \mathbf{A}_n$ *je grupa koju nazivamo alternirajućom podgrupom*[3] *od* $\mathbb{S}_n$ *ili podgrupom parnih permutacija.*

(i3) $\|\mathbf{A}_n\| = \frac{1}{2}\, n!$.

Dokaz. (i1) Neka su $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_n$, tada imamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) &= \prod_{i<k} \frac{\sigma(\tau(k)) - \sigma(\tau(i))}{k-i} = \prod_{i<k} \frac{\sigma(\tau(k)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(k) - \tau(i)} \frac{\tau(k) - \tau(i)}{k-i} \\ &= \prod_{\tau(i)<\tau(k)} \frac{\sigma(\tau(k)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(k) - \tau(i)} \cdot \prod_{i<k} \frac{\tau(k) - \tau(i)}{k-i} = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau).\end{aligned}$$

(i2) Posledica opšte činjenice da je jezgro homomorfizma podgrupa.
(i3) Odredimo još red grupe $\|\mathbf{A}_n\|$. Obeležimo sa $\mathbf{N}_n$ skup neparnih permutacija i neka je $\sigma \in \mathbf{N}_n$ neparna permutacija tada za levu translaciju L_σ važi, $L_\sigma(\mathbf{N}_n) \subseteq \mathbf{A}_n$ i $L_\sigma(\mathbf{A}_n) \subseteq \mathbf{N}_n$ (zbog (i1)). Kako je L_σ bijekcija imamo,

$$\|\mathbf{A}_n\| \le \|\mathbf{N}_n\| \;\text{ i }\; \|\mathbf{N}_n\| \le \|\mathbf{A}_n\| \;\text{ dakle }\; \|\mathbf{A}_n\| = \|\mathbf{N}_n\|. \;\text{ Iz }\; \mathbf{N}_n \cup \mathbf{A}_n = \mathbb{S}_n,\; \mathbf{N}_n \cap \mathbf{A}_n = \emptyset \;\text{ i }\; \|\mathbb{S}_n\| = n!,$$

zaključujemo da je $\|\mathbf{A}_n\| = \frac{1}{2}\, n!$. □

Primedba. Primetimo da iz (i1) i (i2) sledi da je inverz parne (neparne) permutacije parna (neparna) permutacija i prozvod dve permutacije iste parnosti parna permutacija.

4.3. Ciklus. Neka je $\sigma \in \mathbb{S}_n$, neka permutacija. Permutacija σ je ciklus dužina k ako postoji uređena k-torka: $(i_1, i_2, ..., i_k)$, gde su $i_1, i_2, ..., i_k \in \mathbb{S}_n$ takvi da je,

$$\sigma(i_1) = i_2,\; \sigma(i_2) = i_3,\; \cdots\cdots\; \sigma(i_k) = i_1 \quad \text{i da je } \sigma(j) = j,\; \forall\, j \in \mathbb{S}_n \backslash \{i_1, i_2, ..., i_k\}.$$

Primedba. Ciklusi dužine dva zovu se transpozicije.

Primetimo da je proizvoljna transpozicija $\sigma = (ij)$, $i < j$ neparna permutacija, jer σ fiksira sve elemente skupa $\mathbb{S}_n \setminus \{i, j\}$, i tako su sve njene inverzije uređeni parovi: $(i, i+1)$, $(i, i+2), \ldots, (i, j-1), (i, j)$, $(i+1, j)$, $(i+2, j), \ldots (j-1, j)$. Dakle, ukupan broj inverzija transpozicije σ je neparan broj $j-i+j-i+1 = 2(j-i)+1$.

Primer. Predstavimo permutaciju $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&8&6&5&2&1&4&7 \end{smallmatrix}\right)$ kao proizvod ciklusa.

Uzmimo prvo $i = 1$, tada je $\sigma(1) = 3, \sigma^2(1) = \sigma(3) = 6$ i $\sigma^3(1) = \sigma(6) = 1$, time smo dobili jedan ciklus dužine 3. Sada uzmemo najmanji broj iz $\mathbb{S}_8 \setminus \{1, 6, 3\}$, tj. $i = 2$ i sa njim ponovimo istu proceduru, tj. računamo: $\sigma(2) = 8, \sigma^2(2) = \sigma(8) = 7$, $\sigma^3(2) = \sigma(7) = 4$, $\sigma^4(2) = \sigma(4) = 5$ i $\sigma^5(2) = \sigma(5) = 2$, tj. dobili smo ciklus dužine 5, tj. polaznu permutaciju možemo predstaviti u vidu proizvoda disjunktnih ciklus,

$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&8&6&5&2&1&4&7 \end{smallmatrix}\right) = (136)(28745)$.

Ideju iz ovog primera možemo uopštiti na proizvoljnu permutaciju iz $\mathbb{S}_n$.

Propozicija. *Svaka permutacija $\sigma \in \mathbb{S}_n$ može se predstaviti kao proizvod*

(i1) *disjunktnih ciklusa,*

(i2) *transpozicija.*

Dokaz. (i1) Neka je $\sigma \in \mathbb{S}_n$, posmatrajmo niz: $1, \sigma(1), \sigma^2(1), ..., \sigma^k(1), ..., \sigma^n(1)$ tada postoje $r, s \in \{1, 2, ..., n\}$, takvi da je npr. $r < s$ i $\sigma^r(1) = \sigma^s(1)$. Poslednja jednakost ekvivalentna je sa $\sigma^{s-r}(1) = 1$, i neka je d najmanji broj takav da je

$$\sigma^d(1) = 1,\; 1 \le d \le n \quad \text{i} \quad i_1 = 1, i_2 = \sigma(i_1), i_3 = \sigma(i_2), ..., i_d = \sigma^{d-1}(1).$$

Time smo konstruisali ciklus $(i_1, i_2, ..., i_d)$ i sada nastavljamo analogno dalje, tj. uzmemo j minimalni element skupa $\mathbb{S}_n \backslash \{i_1, i_2, ..., i_d\}$ i sa njim ponovimo istu proceduru kao i sa 1, itd. ...., i nakon konačno koraka dobijamo dekompoziciju permutacije σ kao proizvod ciklusa. Primetimo da su dobijeni ciklusi disjunktni jer je σ bijekcija, pa se neki broj može pojaviti najviše u jednom od ciklusa.

[3] Alternirajuće grupe igraju važnu ulogu u pitanjima rešivosti algebarskih jednačina pomoću korena.

(i2) Dovoljno je pokazati, zbog (i1), da se svaki cikus dužine $d \geq 2$, može prikazati kao proizvod $d-1$ transpozicije. Primetimo da je,

$$(i_1\, i_2 \ldots .\, i_d) = (i_1\, i_d)\,(i_1\, i_{d-1}) \ldots .\,(i_1\, i_2).$$

Time je pokazano da je grupa $\mathbb{S}_n$ generisana svim transpozicijama. □

Posledica 1. Kako je transpozicija neparna permutacija na osnovu 4.2 Teorema (i1) i prethodne propozicije zaključujemo da su ciklusi dužine $2k+1$ parne permutacije, a ciklusi dužine $2k$ neparne permutacije. Ova činjenica nam omogućuje da lakše odredimo da li je neka permutacija parna ili neparna, npr. za permutaciju iz gornjeg primera, $\sigma = (136)(28745)$, lako nalazimo da je ova permutacija parna jer je predstavljena kao proizvod dva ciklusa neparne dužine (3 i 5).

Posledica 2. Kako svaka $\sigma \in \mathbb{S}_n$ dopušta zapis kao proizvod disjuntktnih ciklusa, tj.

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k, \qquad \text{gde su } \tau_i \text{ ciklusi dužine } t_i,$$

i kako disjunktni ciklusi komutiraju, tj. važi $\tau_i \circ \tau_j = \tau_j \circ \tau_i\,, \forall\, i,j$ sledi da je $\sigma^j = {\tau_1}^j\, {\tau_2}^j\, \ldots\, {\tau_k}^j$, odakle sledi da je red permutacije σ, tj. *najmanji prirodni broj takav da je* $\sigma^j = \mathrm{id}$, jednak $\mathsf{NZS}(t_1, t_2, \ldots, t_k)$. Oznaka koja se koristi za red elementa je $|\,\sigma\,|$.

2. Determinanta

4.4. Definicija. Determinanta, $\det : \mathbb{M}_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$, je funkcija definisana formulom,

$$\det \mathcal{A} = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n n} (-1)^{I(\sigma)}\, \alpha_{1\sigma(1)}\, \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}, \quad \text{za } \mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F}) \tag{4.2}$$

gde je $\mathbb{S}_n$ grupa permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, a $I(\sigma)$ je broj inverzija permutacije σ. Podsetimo se da je inverzija permutacije σ svaki uređeni par indeksa (i,j) takav da je $i < j$, a $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Izračunajmo po definiciji determinantu matrice $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Kako je

$$\mathbb{S}_3 = \left\{ id = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} \right\}$$

imamo da je broj inverzija permutacija iz $\mathbb{S}_3$ redom,
$I(id) = 0$, $I(\sigma_1) = 1$, $I(\sigma_2) = 1$, $I(\sigma_3) = 2$, $I(\sigma_4) = 2$ i $I(\sigma_5) = 3$, tako da po definiciji nalazimo,

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} \;=\; & 3 \cdot 5 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot 2 - (-2) \cdot (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot (-1) \cdot 2 \\ & - (-4) \cdot 5 \cdot (-3) = 15 + 12 - 2 - 12 + 8 - 60 = -39. \end{aligned}$$

Primedba 1. Iz ovog računa, jasno je da traženje determinante matrice po definiciji nije praktično, jer već za $n \geq 4$ bilo bi potrebno sumirati $n!$ (*npr.*$4! = 24$) članova i pri tome treba naći i broj inverzija istog broja permutacija. Formula (4.2) ima više teoretski značaj, a za praktično računanje determinanti matrica nije pogodna.

Oznaka koju ćemo koristiti za determinantu matrice $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$ je $|\alpha_{ij}|$.

Neka je $\mathcal{A} = [\,a_1, a_2, \ldots, a_n\,] = [\,a^1, a^2, \ldots, a^n\,]$ pri čemu su $a_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj})$, i $a^j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{jn})$, $(j = 1, \ldots, n)$ redom kolone i vrste matrice $\mathcal{A}$. Koristeći definiciju lako se dokazuju sledeća svojstva determinante.

Propozicija. *Neka je $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_n$ neka matrica.*

(i1) *Ako je neka vrsta (kolona) matrice $\mathcal{A}$ nula vektor (tj. sastoji se od samih nula) onda je* $\det \mathcal{A} = 0$.

(i2) *Determinante matrice $\mathcal{A}$ i njoj transponovane matrice $\mathcal{A}^\tau$ su jednake, tj.*
$\det \mathcal{A} = \det [\,a_1, a_2, \ldots, a_n\,] = \det [\,a^1, a^2, \ldots, a^n\,] = \mathcal{A}^\tau$.

(i3) Ako je $\mathcal{A}$ trougaona matrica[4], tada je $\det \mathcal{A} = \alpha_{11}\, \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}$. Specijalno, $\det \mathbb{I}_n = 1$.

---

[4] tj. ima sve nule ispod ili iznad glavne dijagonale

Dokaz. (i1) Dovoljno je primetiti da opšti član iz (4.2), $\xi(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}$, proizvod n matričnih elemenata i to po jedan iz svake vrste i svake kolone matrice $\mathcal{A}$, pa i iz one vrste (kolone) koja se sastoji od samih 0, tako da su svi sabirci u sumi (4.2) jednaki 0.

(i2) Opštem članu u sumi (4.2), $\xi(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}$, možemo pridružiti član,

$$\zeta(\sigma^{-1}) = (-1)^{I(\sigma^{-1})} \beta_{\sigma(1)1} \beta_{\sigma(2)2} \cdots \beta_{\sigma(n)n} \quad \text{od } \det \mathcal{A}^\tau \text{ predstvaljene formulom (4.2).}$$

Kako je $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$ i kako je $I(\sigma^{-1}) = I(\sigma)$ (jer je $I : \mathbb{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\}$ homomorfizam grupa) zaključujemo da za svaku permutaciju $\sigma \in \mathbb{S}_n$, važi da je $\xi(\sigma) = \zeta(\sigma^{-1})$, tako da je

$$\det \mathcal{A} = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \xi(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \zeta(\sigma^{-1}) = \sum_{\sigma^{-1} \in \mathbb{S}_n} \zeta(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \zeta(\sigma) = \det \mathcal{A}^\tau.$$

(i3) Pretpostavimo da je matrica $\mathcal{A}$ donje trougaona, tj. $\alpha_{ij} = 0$ za sve $i < j$. Posmatrajmo sada opšti član $\xi(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}$ iz (4.2). Pretpostavimo da je $1 \neq \sigma(1)$, tada je $1 < \sigma(1)$, pa je $\alpha_{1\sigma(1)} = 0$ i $\xi(\sigma) = 0$. Drugim rečima svaki sabirak u sumi (4.2) se anulira ako $1 \neq \sigma(1)$. Zato posmatrajmo one permutacije, $\sigma \in \mathbb{S}_n$, za koje je $\sigma(1) = 1$, ali je $2 \neq \sigma(2)$. Tada je $2 < \sigma(2)$, tako da je $\alpha_{2\sigma(2)} = 0$ i $\xi(\sigma) = 0$. Time smo zapravo pokazali da ako je $\sigma(1) \neq 1$ i $\sigma(2) \neq 2$, da je onda $\xi(\sigma) = 0$. Nastavljajući analogno dalje, dobijamo je $\xi(\sigma) = 0$, za svako σ za koju je $\sigma(1) \neq 1, \sigma(2) \neq 2, \ldots, \sigma(n-1) \neq n-1$ i suma (4.2) redukuje se samo na član $\sigma = \mathrm{id}$, tj. $\det \mathcal{A} = \alpha_{11} \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}$.

Ako je $\mathcal{A}$ gornje trougaona, tada je $\mathcal{A}^\tau$ donje trougaona, tako da zbog (i2) imamo redom,

$\det \mathcal{A} = \det \mathcal{A}^\tau = \alpha_{11} \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}$. □

4.5. Multilinearnost determinante. Neka su $V_1, \ldots, V_n$ i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$ za preslikavanje

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

kažemo da je multilinearno ako, $\forall\, i = 1, \ldots, n;\ \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ i $a_i^1, a_i^2 \in V_i$, važi sledeći uslov,

$$\begin{aligned} \varphi[a_1, \ldots, a_{i-1}, \lambda_1 a_i^1 + \lambda_2 a_i^2, a_{i+1}, \ldots, a_n] &= \lambda_1 \varphi[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i^1, a_{i+1}, \ldots, a_n] \\ &+ \lambda_2 \varphi[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i^2, a_{i+1}, \ldots, a_n]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Svakom preslikavanju φ koje zadovoljava gornji uslov multilinearnosti (4.3) i svakoj $(n-1)-$torki vektora $a_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, \hat{k}, \ldots, \ldots, \ldots, n$, (pri čemu $\hat{k}$ znači da smo taj element izostavili) možemo pridružiti preslikavanje $\varphi^k_{a_1 \ldots \hat{a_k} \ldots a_n} : V_k \longrightarrow W$ formulom:

$$\varphi^k_{a_1 \ldots \hat{a_k} \ldots a_n}(v) = \varphi[a_1, \ldots, a_{k-1}, v, a_{k+1}, \ldots, a_n],$$

tako da uslov (4.3) zapravo znači da je preslikavanje $\varphi^k_{a_1 \ldots \hat{a_k} \ldots a_n}$ linearni operator. Budući ovo važi za svaki argument funkcije φ, vidimo da je multilinearno preslikavanje linearno po svakom argumentu. Multilinearna preslikavanja kod kojih je $W = \mathbb{F}$, zovu se multinearni funkcionali.

Multilinearno preslikavanje za koje važi da menja znak, ako zamenimo bilo koje dve vrste (kolone) zove se alternirajuće preslikavanje, tj. za svako $i < j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\varphi[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n] = -\varphi[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_n] \tag{4.4}$$

Pokažimo da je determinanta multilinearni alternirajući funkcional.

Teorema. *Neka je* $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) = [\,a_1, a_2, \ldots, a_n\,] = [\,a^1, a^2, \ldots, a^n\,] \in \mathbb{M}_n$. *Tada,*

(i1) $\det [\,a_1, a_2, \ldots, \lambda\, a_i, \ldots, a_n\,] = \det [\,a^1, a^2, \ldots, \lambda\, a^i, \ldots, a^n\,] = \lambda \det \mathcal{A}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ *i* $\lambda \in \mathbb{F}$.
Specijalno, vidimo da je $\det(\lambda\, \mathbb{I}_n) = \lambda^n$.

(i2) *ako je b proizvoljni vektor* $(\in \mathbb{F}^n)$ *tada za svaki* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *tj. za svaku vrstu važi*
$\det [\,a_1, a_2, \ldots, a_i + b, \ldots, a_n\,] = \det [\,a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\,] + \det [\,a_1, a_2, \ldots, b, \ldots, a_n\,]$.
Analogna tvrdnja važi i za kolone.

(i3) *Ako u nekoj matrici zamenimo dve susedne vrste (kolone) onda determinanta menja znak, ili preciznije* $\forall\, i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *važi,* $\det [\,a^1, a^2, \ldots, a^i, a^{i+1}, \ldots, a^n\,] = -\det [\,a^1, a^2, \ldots, a^{i+1}, a^i, \ldots, a^n\,]$.

Dokaz. (i1) Neka je $\mathcal{B} = (\beta_{ij}) = \det[\,a^1, a^2, \ldots, \lambda\, a^i, \ldots, a^n\,]$, i primetimo da se u opštem članu determinante matrice $\mathcal{B}$ (prema formuli (4.2))

$$\xi_{\mathcal{B}}(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}\, \beta_{1\sigma(1)}\, \beta_{2\sigma(2)} \cdots \beta_{n\sigma(n)},$$

pojavljuje tačno jedan element iz svake vrste i svake kolone, pa tako i iz $i-$te. U proizvodu $\xi(\sigma)$, pojavljuje se faktor $\beta_{i\sigma(i)}$ koji pripada $i-$toj vrsti tako da je $\beta_{i\sigma(i)} = \lambda\, \alpha_{i\sigma(i)}$. Prema tome, $\xi_{\mathcal{B}}(\sigma) = \lambda\, \xi_{\mathcal{A}}(\sigma)$, jer se svi ostali faktori koji učestvuju u proizvodu $\xi_{\mathcal{B}}(\sigma)$ i $\xi_{\mathcal{A}}(\sigma)$ podudaraju ($\beta_{j\sigma(j)} = \alpha_{j\sigma(j)}$, $j \neq i$). Dakle, na kraju imamo:

$$\det \mathcal{B} = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \xi_{\mathcal{B}}(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \lambda\, \xi_{\mathcal{A}}(\sigma) = \lambda \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \xi_{\mathcal{A}}(\sigma) = \det \mathcal{A}.$$

(i2) Slično dokazu (i1). Ako sa $\mathcal{C} = (\gamma_{ij})$ obeležimo matricu sa leve strane jednakosti, sa $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$ i $\mathcal{B} = (\beta_{ij})$ redom prvu i drugu matricu sa desne strane jednakosti i ako je $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Tada opšti član od $\det \mathcal{C}$ je

$$\xi_{\mathcal{C}}(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}\, \gamma_{1\sigma(1)}\, \gamma_{2\sigma(2)} \cdots \gamma_{n\sigma(n)},$$

a kako je $\gamma_{j\sigma(j)} = \alpha_{j\sigma(j)} = \beta_{j\sigma(j)}$, $j \neq i$ i $\gamma_{i\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)} + b_i = \alpha_{i\sigma(i)} + \beta_{i\sigma(i)}$. Tako da imamo, prvo $\xi_{\mathcal{C}}(\sigma) = \xi_{\mathcal{A}}(\sigma) + \xi_{\mathcal{B}}(\sigma)$, a zatim

$$\det \mathcal{C} = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \xi_{\mathcal{C}}(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \xi_{\mathcal{A}}(\sigma) + \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \xi_{\mathcal{B}}(\sigma) = \det \mathcal{A} + \det \mathcal{B}.$$

(i3) Neka je data matrica $\mathcal{A}$ i neka se matrica $\mathcal{B}$ iz $\mathcal{A}$ dobija tako što se zamenimo, recimo 1. i 2. vrstu[5] (BSO, a zbog jednostavnijeg zapisa). Kao u dokazu tvrđenja (i1) posmatramo opšti član od $\det \mathcal{B}$, tj. proizvod $\xi_{\mathcal{B}}(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}\, \beta_{1\sigma(1)}\, \beta_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}$. Budući da matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ imaju sve iste vrste osim 1.−ve i 2.−ge, koje su zamenile mesta imamo:

$$\begin{aligned} \xi_{\mathcal{B}}(\sigma) &= (-1)^{I(\sigma)}\, \beta_{1\sigma(1)}\, \beta_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} = (-1)^{I(\sigma)}\, \alpha_{1\sigma(2)}\, \alpha_{2\sigma(1)} \alpha_{3\sigma(3)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} \\ &= -(-1)^{I(\sigma\circ\tau_{12})}\, \alpha_{1\sigma(1)}\, \alpha_{2\sigma(2)} \alpha_{3\sigma(3)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} = -\,\xi_{\mathcal{A}}(\sigma \circ \tau_{12})\,. \end{aligned}$$

pri čemu je τ_{12} transpozicija $(1\,2)$, čiji je broj inverzija 1 što objašnjava pojavu znaka $-$ u gornjem izrazu. Dakle, sada imamo:

$$\det \mathcal{B} = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \xi_{\mathcal{B}}(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} -\,\xi_{\mathcal{A}}(\sigma \circ \tau_{12}) = -\sum_{\sigma\circ\tau_{12} \in \mathbb{S}_n} \xi_{\mathcal{A}}(\sigma \circ \tau_{12}) = -\sum_{\tau \in \mathbb{S}_n} \xi_{\mathcal{A}}(\tau) = -\det \mathcal{A}. \qquad \square$$

Sledeća svojstva determinante su posledica osnovnih svojstava datih u prethodnoj teoremi.

Posledica. *Neka je* $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) = [\,a_1, a_2, \ldots, a_n\,] = [\,a^1, a^2, \ldots, a^n\,] \in \mathbb{M}_n$.

- (i1) *Ako matrica $\mathcal{A}$ ima barem dve proporcionalne vrste (kolone) onda je* $\det \mathcal{A} = 0$.
- (i2) *Dodavanje linearne kombinacije vrsta (kolona) matrice $\mathcal{A}$, nekoj drugoj vrsti (koloni) matrice ne menja njenu determinantu ili preciznije, ako je $b = \sum_{j\neq i} \alpha_j\, a^j$, tada je*

$$\det[\,a^1, a^2, \ldots, a^i + b, \ldots, a^n\,] = \det[\,a^1, a^2, \ldots, a^i, \ldots, a^n\,] = \det \mathcal{A}.$$

Dokaz. (i1) Pokažimo prvo da se iz iskaza Teorema (i3) može izbaciti reč susedne, tj. da (za $j < k$, $j, k = 1, \ldots, n$) važi,

$$\det[\,a^1, a^2, \ldots, a^j, \ldots, a^k, \ldots, a^n\,] = -\det[\,a^1, a^2, \ldots, a^k, \ldots, a^j, \ldots, a^n\,].$$

Da bi vrste a^j i a^k zamenili mesta (a da se ništa drugo ne promeni u matrici $\mathcal{A}$), potrebno je izvršiti $k-j$ zamena susednih vrsta da bismo vektor a^j doveli na $k.-$to mesto ($j. \longleftrightarrow (j+1).$, $(j+1). \longleftrightarrow (j+2).$, $\cdots$, $(k-1). \longleftrightarrow k.$) i tada je vektor a^k na $(k-1).-$vom mestu, pa je potrebno još vektor a^k dovesti na $j.-$to mesto, za što je potrebno izvršiti još $k-j-1$ zamenu susednih vrsta ($(k-1). \longleftrightarrow (k-2).$, $(k-2). \longleftrightarrow (k-3).$, $\cdots$, $(j+1). \longleftrightarrow j.$). Dakle, ukupan broj zamena susednih vrsta potrebnih za zamenu $j.-$te i $k.-$te vrste jednak je $2\,(k-j)-1$. Kako je ovaj broj neparan, i kako se pri svakoj zameni susednih vrsta promeni znak determinante imamo:

$$\begin{aligned} \det[\,a^1, a^2, \ldots, a^j, \ldots, a^k, \ldots, a^n\,] &= (-1)^{2(k-j)-1} \det[\,a^1, a^2, \ldots, a^k, \ldots, a^j, \ldots, a^n\,] \\ &= -\det[\,a^1, a^2, \ldots, a^k, \ldots, a^j, \ldots, a^n\,]. \end{aligned}$$

[5] ili kolonu

Sada se vratimo na dokaz naše tvrdnje, neka su recimo proporcionalne $k.-$ta i $j.-$ta vrsta matrice $\mathcal{A}$ (tj. postoji $\lambda \neq 0$ takav da je $a^k = \lambda\, a^j$), tada je

$$\det\mathcal{A} = \lambda \det[\, a^1, a^2, \ldots, a^j, \ldots, \underbrace{a^j}_{k}, \ldots, a^n \,] = \lambda \det\mathcal{B}.$$

Kako matrica $\mathcal{B}$ ima jednaku $j.$-tu i $k.-$ tu vrstu njihovom zamenom neće se ona promeniti, ali prema upravo dokazanoj generalizaciji svojstva (i3) iz prethodne teoreme imamo redom:

$$\det\mathcal{B} = (-1)^{2\,(k-j)-1}\det\mathcal{B} = -\det\mathcal{B}, \quad \text{odakle je prvo } \det\mathcal{B} = 0, \text{ a zatim i } \det\mathcal{A} = 0.$$

(i2) Radi lakšeg zapisa (BSO) pretpostavimo da smo vektoru a^1 dodali neku linearnu kombinaciju preostalih vektora, tj. vektor $b = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i\, a^i$. Sada prvo zbog svojstva (i2) iz prethodne teoreme, a zatim iz multihomogenosti determinante (Teorema (i1)), imamo redom,

$$\begin{aligned}\det\mathcal{B} &= \det[a^1 + b, a^2, \ldots, a^n] = \det[a^1, a^2, \ldots, a^n] + \det[b, a^2, \ldots, a^n] = \det\mathcal{A} + \det[\sum_{i=2}^{n} \lambda_i\, a^i, a^2, \ldots, a^n] \\ &= \det\mathcal{A} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \det[a^i, a^2, \ldots, a^n] = \det\mathcal{A},\end{aligned}$$

budući se $\det[a^i, a^2, \ldots, a^n]$, $i = 2, \ldots, n$, poništavaju (zbog svojstva iz (i1)) jer matrica $[a^i, a^2, \ldots, a^n]$ ima jednake 1.-vu i $i.$-tu vrstu. $\square$

4.6. Induktivna definicija determinante i Laplasov[6] razvoj. Koristeći definiciju determinante za $n \leq 3$, možemo izračnati determinantu po definiciji.

Primetimo da ako je $n = 1$ i $\mathcal{A} = (\alpha_{11})$, tada je $\det\mathcal{A} = \alpha_{11}$. Slično, u slučaju $n = 2$ i $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, lako nalazimo da je

$$\det\mathcal{A} = \alpha_{11}\cdot\alpha_{22} - \alpha_{12}\cdot\alpha_{21} = \alpha_{11}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Nije teško videti da i u slučaju $n = 3$ možemo primeniti analognu ideju kao i slučaju $n = 2$, tj. preciznije važi,

$$\begin{aligned}\det\mathcal{A} &= \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,\alpha_{33} + \alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{31} + \alpha_{13}\,\alpha_{21}\,\alpha_{32} - \alpha_{13}\,\alpha_{22}\,\alpha_{31} - \alpha_{12}\,\alpha_{21}\,\alpha_{33} - \alpha_{11}\,\alpha_{23}\,\alpha_{32} \\ &= \alpha_{11}(\alpha_{22}\,\alpha_{33} - \alpha_{23}\,\alpha_{32}) - \alpha_{12}(\alpha_{21}\,\alpha_{33} - \alpha_{23}\,\alpha_{31}) + \alpha_{13}(\alpha_{21}\,\alpha_{32} - \alpha_{22}\,\alpha_{31}) \\ &= \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Ova pravilnost nije slučajna i može se iskoristiti za induktivnu definiciju determinante, tj. pretpostavljajući da znamo izračunati determinantu proizvoljne kvadratne matrice reda $(n-1)$, determinantu kvadratne matrice reda n sledećom formulom,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} &= \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}\alpha_{1n}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \\ (4.5) \qquad &= \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n3} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}\,\alpha_{1n}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n-1} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \ldots & \alpha_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn-1} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

svodimo na izračunavanje n determinanti matrica reda $(n-1)$.

Da bismo pokazali formulu (4.5), poznatiju i kao Laplasov razvoj determinante po 1. vrsti, dokazaćemo opštiju teoremu, čiji će specijalni slučaj biti formula (4.5).

[6] Pierre-Simon Laplace, 1749 – 1827, čuveni francuski matematičar, mehaničar, fizičar i astronom.

Pre samog dokaza pomenute teoreme uvedimo neke važne oznake inspirisani gornjim primerima.

Neka je $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ kvadratna matrica reda n sa koeficijentima u polju $\mathbb{F}$. Tada posmatrajmo determinantu matrice $\Delta_{ij}(\mathcal{A})$, koja se dobije iz matrice $\mathcal{A}$ ispuštanjem $i.-$te vrste i $j.-$te kolone, tj.

$$\Delta_{ij}(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\,j-1} & \alpha_{1\,j+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\,j-1} & \alpha_{2\,j+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{i-1\,1} & \alpha_{i-1\,2} & \dots & \alpha_{i-1\,j-1} & \alpha_{i-1\,j+1} & \dots & \alpha_{i-1\,n} \\ \alpha_{i+1\,1} & \alpha_{i+1\,2} & \dots & \alpha_{i+1\,j-1} & \alpha_{i+1\,j+1} & \dots & \alpha_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n\,j-1} & \alpha_{n\,j+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

Broj $\Delta_{ij}(\mathcal{A})$ nazivamo minora matrice $\mathcal{A}$ određena elementom α_{ij}. Broj,

$$\mathsf{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}(\mathcal{A}) \tag{4.7}$$

zove se algebarski komplement (kofaktor) elementa α_{ij}. Sada možemo formulisati sledeću teoremu

Teorema (Laplasov razvoj). *Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Tada za svako $i, r \in \{1, 2, \dots, n\}$ važi,*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\,\mathsf{A}_{rj} = \delta_{ir}\,\operatorname{det}\mathcal{A}, \tag{4.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\,\mathsf{A}_{ir} = \delta_{jr}\,\operatorname{det}\mathcal{A}. \tag{4.9}$$

Napomena. U slučaju kada je u formuli (4.8) $i = r$, tada dobijena sumu nazivamo Laplasovim razvojem determinante po $i.-$toj vrsti, a u slučaju kada je u (4.9) $j = r$, druga suma predstavlja Laplasov razvoj determinante po $j.-$toj koloni.

Dokaz. Kako je $\operatorname{det}\mathcal{A} = \operatorname{det}\mathcal{A}^\tau$ (4.3 Propozicija (i2)) dovoljno je pokazati formulu (4.8). Prvo pretpostavimo da je $i = r$, tj. pokažimo Laplasov razvoj po $i.-$toj vrsti. Proizvoljni član $\xi(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}\,\alpha_{1\sigma(1)}\,\alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}$, sadrži tačno jedan faktor iz i.-te vrste $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$ matrice $\mathcal{A}$, tako da iz formule (4.2) imamo

$$\operatorname{det}\mathcal{A} = \alpha_{i1}\,\mathsf{A}^*_{i1} + \alpha_{i2}\,\mathsf{A}^*_{i2} + \dots, \alpha_{in}\,\mathsf{A}^*_{in}.$$

Jasno, A^*_{ij} je zbir proizvoda u kojima nema elemenata iz $i.-$te vrste matrice $\mathcal{A}$. Da bismo dokazali teoremu, potrebno je pokazati da je

$$\mathsf{A}^*_{ij} = \mathsf{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}(\mathcal{A}).$$

Prvo posmatrajmo slučaj kada je $i = j = n$, tada je zbir članova u $\operatorname{det}\mathcal{A}$ koji sadrže α_{nn} jednaka

$$\begin{aligned} \alpha_{nn}\,\mathsf{A}^*_{nn} &= \alpha_{nn} \sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{S}_n \\ \sigma(n) = n}} (-1)^{I(\sigma)}\alpha_{1\sigma(1)}\,\alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n-1\sigma(n-1)} \\ &= \alpha_{nn} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} (-1)^{I(\sigma)}\alpha_{1\sigma(1)}\,\alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n-1\sigma(n-1)} = \alpha_{nn}\,\Delta_{nn}(\mathcal{A}) = (-1)^{n+n}\,\alpha_{nn}\,\Delta_{nn}(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

tj. $\mathsf{A}^*_{nn} = \mathsf{A}_{nn}$. Sada ispitajmo opšti slučaj za proizvoljne i i j. Posmatrajmo sada determinantu matrice koju smo dobili iz polazne tako što smo $i.-$tu vrstu doveli zamenama susednih vrsta do poslednje vrste, a zatim $j.-$tu kolonu doveli zamenama susednih kolona do poslednje kolone. Primetimo da se pri tim zamenama minora $\Delta_{ij}(\mathcal{A})$ nije promenila jer pomenute zamene nisu uticale na redosled njenih vrsta i kolona. Jasno, pri tim zamenama promenio se znak $\operatorname{det}\mathcal{A}$, pa time i A^*_{ij}, i to $n - i$ puta nakon zamena susednih vrsta i još $n - j$ puta nakon zamena susednih kolona. Tako da imamo,

$$\mathsf{A}^*_{ij} = (-1)^{n-i+n-j}\,\Delta_{ij}(\mathcal{A}) = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}(\mathcal{A}) = \mathsf{A}_{ij}.$$

Time je pokazan slučaj kada je $r = i$. Da bismo pokazali i preostali slučaj, tj. kada je $r \neq i$. U tu svrhu posmatrajmo matricu $\mathcal{B}$ koja se dobije tako što zamenimo $i-$tu vrstu matrice $\mathcal{A}$ vektorom $b = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{in})$.

Primenjujući upravo dokazani Laplasov razvoj po $i.$−toj vrsti matrice $\mathcal{B} = (\beta_{ij})$ dobijamo,

$$\det \mathcal{B} = \beta_{i1}\,\mathsf{B}_{i1} + \beta_{i2}\,\mathsf{B}_{i2} + \cdots + \beta_{in}\,\mathsf{B}_{in}.$$

Kako B_{ij} ne zavisi o $i.$−toj vrsti matrice $\mathcal{B}$, dobijamo da je $\mathsf{B}_{ij} = \mathsf{A}_{ij}$, za sve $j = 1, 2, \ldots, n$. Tako da je

$$\det \mathcal{B} = \beta_{i1}\,\mathsf{A}_{i1} + \beta_{i2}\,\mathsf{A}_{i2} + \cdots + \beta_{in}\,\mathsf{A}_{in}. \tag{4.10}$$

Ako sada za vektor b izaberemo $j.$−tu vrstu matrtice $\mathcal{A}$, biće $\det \mathcal{B} = 0$, jer matrica $\mathcal{B}$ ima dve jednake vrste: $i.$−tu i $j.$−tu. Time jednakost (4.10) postaje,

$$0 = \det \mathcal{B} = \alpha_{j1}\,\mathsf{A}_{i1} + \alpha_{j2}\,\mathsf{A}_{i2} + \cdots + \alpha_{jn}\,\mathsf{A}_{in} = \sum_{k=1} \alpha_{jk}\,\mathsf{A}_{ik}.$$

Time je u potpunosti dokazana teorema. □

Primer. Izračunajmo sada determinantu matrice iz tačke 4.4 koristeći Laplasov razvoj.
Računamo determinantu matrice $\mathcal{A}$ razvojem po 1. koloni.

$$\det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (5+4) + 2 \cdot (-1-6) - 4 \cdot (-2+15) = 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-7) + (-4) \cdot 13 = 27 - 14 - 52 = -39.$$

Primetimo da je izračunavanje determinante Laplasovim razvojem znatno kraće nego računanje determinante po definiciji.

Adjungovana matrica. Ako malo pažljivije pogledamo formule (4.8) i (4.9) vidimo da se one mogu zapisati u matričnom obliku,

$$\mathcal{A} \cdot \tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{A} = (\det \mathcal{A})\,\mathbb{I}_n, \quad \text{gde je} \quad \tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{11} & \mathsf{A}_{21} & \ldots & \mathsf{A}_{n1} \\ \mathsf{A}_{12} & \mathsf{A}_{22} & \ldots & \mathsf{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathsf{A}_{1n} & \mathsf{A}_{2n} & \ldots & \mathsf{A}_{nn} \end{bmatrix} = [\mathsf{A}_{ij}]^{\tau}. \tag{4.11}$$

Matrica $\tilde{\mathcal{A}}$ je transponovana matrica matrice algebarskih komplemenata $([\mathsf{A}_{ij}])$ od $\mathcal{A}$ i naziva se adjungovana matrica od $\mathcal{A}$. Ponekad ćemo za adjungovanu matricu koristiti oznaku $\mathsf{adj}\,(\mathcal{A})$.

4.7. Determinanta matrice i elementarne transformacije. Ako pogledamo sledeća svojstva koja smo već dokazali kao što su: 4.5 Teorema (i1),(i3) i Posledica (i2), vidimo da se ona mogu realizovati množenjem sa elementarnim matricama sa leva (vrste) i desna (kolone). Nije se teško ubediti da važi sledeća propozicija.

Propozicija. *Neka je $\mathbb{E}$ neka elementarna matrica reda n, tada za proizvoljnu matricu $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ važi da je* $\det(\mathbb{E}\,\mathcal{A}) = \det \mathbb{E} \det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}\,\mathbb{E})$.

Dokaz. Neka je $\mathbb{E}$ proizvoljna elementarna matrica reda n, i neka je $\mathcal{A}$ neka matrica reda n. Tada je $\mathbb{E} \in \{\mathbb{E}'_{ij}, \mathbb{F}_{k,\lambda}, \mathbb{G}_{ij} \mid \lambda \neq 0,\ i, j, k = 1, 2, \ldots, n, i \neq j\}$, i iz prethodne glave znamo da matrica:

- (e1) $\mathbb{F}_{i,\lambda}\,\mathcal{A}$ ima sve jednake vrste, osim $i.$−te, kao i matrica $\mathcal{A}$, a $i.$−ta vrsta matrice $\mathbb{F}_{i,\lambda}\,\mathcal{A}$ jednaka je proizvodu $i.$−te vrste matrice $\mathcal{A}$ sa λ.
- (e2) $\mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{A}$ ima sve jednake vrste, osim $i.$−te i $j.$−te, kao i matrica $\mathcal{A}$, a $i.$−ta vrsta matrice $\mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{A}$ jednaka je $j.$−toj vrsti matrice $\mathcal{A}$ i $j.$−te vrste matrice $\mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{A}$ jednaka je $i.$−toj vrsti matrice $\mathcal{A}$.
- (e3) $\mathbb{E}'_{ij}\,\mathcal{A}$ ima sve jednake vrste, osim $i.$−te, kao i matrica $\mathcal{A}$, a $i.$−ta vrsta matrice $\mathbb{E}'_{ij}\,\mathcal{A}$ jednaka je zbiru $i.$−te i $j.$−te vrste matrice $\mathcal{A}$.

Kako je matrica $\mathbb{F}_{i,\lambda} = \mathrm{diag}[1, \ldots, 1, \overset{i}{\lambda}, 1 \ldots, 1]$ dijagonalna, njena determinanta je proizvod dijagonalnih elemenata, tj. $\det \mathbb{F}_{i,\lambda} = \lambda \neq 0$. Matrica $\mathbb{G}_{ij}$ se dobija iz jedinične matrice $\mathbb{I}_n$ zamenom $i.$−te i $j. - te$ vrste, tako da je na osnovu, 4.4 Propozicija (i3) i 4.5 Teorema (i3), $\det \mathbb{G}_{ij} = -1$. I na kraju primetimo da je $\mathbb{E}'_{ij} = \mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{ij}$ gornje trougaona matrica, koja na glavnoj dijagonali ima sve 1, tako da je (4.4 Propozicija (i3)) $\det \mathbb{E}'_{ij} = 1$.

Ako množimo matricu $\mathcal{A}$ s desna elementarnim matricama $\mathbb{E}'_{ij}, \mathbb{F}_{k,\lambda}, \mathbb{G}_{ij}$ onda u iskazima (e1), (e2) i (e3) treba zameniti reč vrsta sa reči kolona, tj. tada vršimo elementarne transformacije nad kolonama.

Sada na osnovu svojstva 4.5 Teorema (i1),(i3) i 4.5 Posledica (i2) , imamo redom (e1) $\det \mathbb{F}_{i,\lambda}\,\mathcal{A} = \det\,[a^1,\ldots,a^{i-1},\lambda\,a^i,a^{i+1},\ldots,a^n] = \lambda\det\,[a^1,\ldots,a^i,\ldots a^n] = \det \mathbb{F}_{i,\lambda}\det \mathcal{A}$.

(e2) $\det \mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{A} = -\det\mathcal{A} = \det\mathbb{G}_{ij}\det\mathcal{A}$.

(e3) $\det \mathbb{E}'_{ij}\,\mathcal{A} = \det\,[a^1,\ldots,a^{i-1},a^i+a^j,a^{i+1},\ldots,a^n] = \det\,[a^1,\ldots,a^{i-1},a^i,a^{i+1},\ldots,a^n] = \det\mathbb{E}'_{ij}\det\mathcal{A}$.

Analogno se tretira množenje elementarnom matricom $\mathbb{E}$ matrice $\mathcal{A}$ s desna, jer tada vršimo elementarne transforrmacije nad kolonama matrice $\mathcal{A}$. □

Praktično izračunavanje determinante matrice. U tački 4.6 posvećenoj Laplasovom razvoju videli smo da determinantu neke matrice možemo lakše izračunati korišćenjem Laplasovog razvoja. Nažalost i Laplasov razvoj zahteva, u opštem slučaju, mnogo računanja i nije ekonomičan, zato tražimo bolju metodu.

Posmatrajući opšti član determinante matrice, $\xi_{\mathcal{A}}(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}\,\alpha_{1\sigma(1)}\,\alpha_{2\sigma(2)}\cdots\alpha_{n\sigma(n)}$, zaključujemo da ako u nekoj vrsti ili koloni (ili u više njih) ima mnogo 0 računanje determinante matrice se pojednostavljuje. Sve metode za praktično računanje determinante matrice svode se na to da se korišćenjem svojstava determinantne funkcije, opisanih u prethodnim tačkama 4.4-4.6, determinanta polazne matrice svede na neki specijalni oblik (tj. takav da matrica ima mnogo 0) iz kojeg je lakše odrediti determinantu.

Osnovna metoda za izračunavanje determinante matrice je svođenje na trougaoni oblik (gornje ili donje trougaone matrice) korišćenjem svojstava determinante. Prethodna propozicija omogućuje da korišćenjem elementarnih transformacija pojednostavnimo polaznu determinantu, tj. da nakon primene konačnog broja elementarnih transformacija dovedemo u vezu determinantu polazne matrice i determinantu neke trougaone matrice, čija je determinanta proizvod dijagonalnih elemenata. Pri tome prethodna propozicija daje i vezu između determinante polazne matrice i dobijene trougaone matrice, tj. preciznije ako je $\mathbb{T}$ trougaona matrica takva da je $\mathbb{T} = \mathbb{E}_1\,\mathbb{E}_2\ldots\mathbb{E}_k\,\mathcal{A}\,\mathbb{E}_{k+1}\,\ldots\,\mathbb{E}_m$, pri čemu su $\mathbb{E}_i$, $i = 1,2\ldots,m$ elementarne matrice, tada je

$$\det\mathbb{T} = \det\mathcal{A}\prod_{i=1}^{m}\det\mathbb{E}_i, \quad \text{odakle je, jer je } \det\mathbb{E}_i \neq 0, i = 1,\ldots,m, \quad \det\mathcal{A} = \frac{\det T}{\prod_{i=1}^{m}\det\mathbb{E}_i}\,.$$

Koristeći ideju opisanu za praktično određivanje matrica možemo iskoristiti za dobijanje kriterijuma regularnosti kvadratnih matrica.

Teorema. *Neka je $\mathcal{A}$ proizvoljna kvadratna matrica reda n. Tada su ekvivalentna sledeća tvrđenja,*

(i1) *$\mathcal{A}$ je regularna,*

(i2) $\det\mathcal{A} \neq 0$.

Dokaz. Dokaz provodimo korišćenjem elementarnih transformacija (Gausovim algoritmom). Znamo, da je svaka regularna matrica ekvivalentna po vrstama[7] jediničnoj matrici $\mathbb{I}_n$. Tako da je

(4.12) $\qquad \mathbb{I}_n = \mathbb{E}_1\,\mathbb{E}_2\ldots\mathbb{E}_k\,\mathcal{A}$, $\quad$ gde su $\mathbb{E}_i$, $i = 1,2\ldots,k$ elementarne matrice.

Ako na relaciju (4.12) primenimo determinantu i iskoristimo prethodnu propoziciju, vodeći računa da je $\det\mathbb{I}_n = 1$ i $\det\mathbb{E}_i \neq 0$ $i = 1,2\ldots,k$, sledi da je $\det\mathcal{A}\neq 0$.

Obratno, ako $\mathcal{A}$ nije regularna, tada je ona ekvivalentna po vrstama nekoj matrici $\mathcal{D}$ koja ima barem jednu vrstu koja se sastoji iz 0, tj. važi

(4.13) $\qquad \mathcal{D} = \mathbb{E}'_1\,\mathbb{E}'_2\ldots\mathbb{E}'_l\,\mathcal{A}$, $\quad$ gde su $\mathbb{E}'_i$, $i = 1,2\ldots,l$ elementarne matrice.

Kako je $\det\mathcal{D} = 0$ i $\det\mathbb{E}'_i \neq 0$, $i = 1,2\ldots,l$, iz (4.13) sledi da je $\det\mathcal{A} = 0$. □

Iz relacije (4.11), uz pretpostavku da je $\det\mathcal{A}\neq 0$, sledi da inverz matrice $\mathcal{A}$ u grupi $\mathsf{GL}(n)$ možemo izraziti preko njene adjungovane matrice. Kako je, na osnovu prethodne teorme, uslov regularanosti matrice $\mathcal{A}$ ekvivalentan sa $\det\mathcal{A}\neq 0$, dobijamo sledeću posledicu.

Posledica. *Neka je $\mathcal{A}$ regularna matrica reda n, tada je*

(4.14) $$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathcal{A}}\,adj\,\mathcal{A}.$$

Dokaz. Kako je inverz u svakoj grupi jedinstven iz relacije (4.11) sledi tražena formula. □

[7] tj. može se svesti na jediničnu matricu primenom samo elementarnih transformacija nad vrstama polazne matrice ili ekvivalentno množenjem polazne matrice samo sa leva elementarnim matricama.

Primer. Odredimo inverz matrice (ako postoji), $\mathcal{A}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4\\ 4 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

Proverimo, Laplasovim razvojem po 1. vrsti, da li je data matrica regularna.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4\\ 4 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1.$$

Dakle, radi se o regularnoj matrici, i nađimo sada koristeći adjungovanu matricu njen inverz.

$$\tilde{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 4\\ 4 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} 4 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4\\ 4 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} 4 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1\\ 4 & 4\end{vmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -15\\ -1 & -4 & 16\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix},$$

tako da je:

$$\mathcal{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathcal{A}}\,\tilde{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -15\\ -1 & -4 & 16\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}.$$

Prethodni primer pokazuje da formula (4.14) nije od neke veće praktične vrednosti, jer uključuje računanje n^2 determinanti reda $n-1$. Dakle, kad je $n\geq 5$ računanje inverza matrica opisanom metodom postaje Sizifov posao.

4.8. Primer: Vandermondova[8] **determinanta.** Neka su dati skalari $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$, tada determinantu

$$\text{(4.15)}\qquad \mathsf{V}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_{n-1}^2 & \alpha_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_n^{n-2}\\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} & \alpha_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

nazivamo Vandermondova determinanta određena brojevima $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Izračunajmo sada $\mathsf{V}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$.

$$\mathsf{V}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_{n-1}^2 & \alpha_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_n^{n-2}\\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} & \alpha_n^{n-1}\end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix} n.\,vr. + (-\alpha_1)\times(n-1).\,vr.\\ (n-1).\,vr. + (-\alpha_1)\times(n-2).\,vr.\\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\\ 3.\,vr. + (-\alpha_1)\times 2.\,vr.\\ 2.\,vr. + (-\alpha_1)\times 1.\,vr.\end{matrix}\right\}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 0 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_1 & \ldots & \alpha_n-\alpha_1\\ 0 & \alpha_2^2-\alpha_1\,\alpha_2 & \alpha_3^2-\alpha_1\,\alpha_3 & \ldots & \alpha_n^2-\alpha_1\,\alpha_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \alpha_2^{n-1}-\alpha_1\,\alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-1}-\alpha_1\,\alpha_3^{n-2} & \ldots & \alpha_n^{n-1}-\alpha_1\,\alpha_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

Razvijemo dobijenu determinantu po 1.–oj koloni, a zatim iz i.-te kolone izvučemo $\alpha_{i+1}-\alpha_1$. Tako dobijamo,

$$=\prod_{i_1=2}^{n}(\alpha_{i_1}-\alpha_1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_n\\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \ldots & \alpha_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \alpha_4^{n-2} & \ldots & \alpha_n^{n-2}\end{vmatrix} = \prod_{i_1=2}^{n}(\alpha_{i_1}-\alpha_1)\cdot\mathsf{V}(\alpha_2,\ldots,\alpha_n).$$

Sada primenimo istu proceduru na determinantu $\mathsf{V}(\alpha_2,..,\alpha_n)$, a zatim na $\mathsf{V}(\alpha_3,..,\alpha_n)$, itd. Na kraju dobijamo,

[8] Vandermonde, Alexandre-Théophile, 1735 -– 1796, francuski matematičar, muzičar i hemičar.

$$(4.16) \qquad \mathsf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \prod_{i_1=2}^{n} (\alpha_{i_1} - \alpha_1) \cdot \prod_{i_2=3}^{n} (\alpha_{i_2} - \alpha_2) \cdot \mathsf{V}(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = \ldots\ldots\ldots$$

$$= \prod_{i_1=2}^{n} (\alpha_{i_1} - \alpha_1) \cdot \prod_{i_2=3}^{n} (\alpha_{i_2} - \alpha_2) \cdot \cdots \cdot \prod_{i_{n-2}=n-1}^{n} (\alpha_{i_{n-2}} - \alpha_{n-2}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i_1=2}^{n} (\alpha_{i_1} - \alpha_1) \cdot \prod_{i_2=3}^{n} (\alpha_{i_2} - \alpha_2) \cdot \cdots \cdot \prod_{i_{n-1}=n}^{n} (\alpha_{i_{n-1}} - \alpha_{n-1}) = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Primedba. Primetimo da ako su brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ međusobno različiti da je onda $\mathsf{V}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. Zbog ovog važnog svojstva Vandermondova determinanta se često primenjuje u raznim teoretskim razmatranjima i primenama.

4.9. Jedna metoda za računanje determinanti: Rekurentne relacije. Primetimo da je ključna stvar u rešenju Vandermondove determinante $n.-$tog reda njena veza (rekurentna, rekurzivna) sa Vandermondovom determinantom (istog oblika) ali reda $(n-1)$. Jedna od čestih metoda kojom se ponekad izračunavaju determinante zasniva se na rekurentnim relacijama koje povezuju datu determinantu $n.-$tog reda, $\mathcal{D}_n$ sa nekoliko determinanti istog oblika, a manjeg reda tj. sa $\mathcal{D}_{n-1}, \mathcal{D}_{n-2}, \ldots$. Ovde ćemo opisati metodu za računanje determinanti tkz. trodijagonalih matrica tj. matrica oblika

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c & a & b & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c & a \end{bmatrix}.$$

Laplasovim razvojem ove determinante po prvoj vrsti, a zatim po prvoj koloni (ili obratno) dobijamo sledeću rekurentnu relaciju ($\forall\, n \in \{2, 3, \ldots\}$):

$$(4.17) \qquad \mathcal{D}_n = p\,\mathcal{D}_{n-1} + q\,\mathcal{D}_{n-2}.$$

Analogna metoda može se primeniti i ako se dobije rekurentna relacija višeg reda tj. ako umesto (4.17) dobije relacija koja povezuje $\mathcal{D}_n$ sa više susednih članova niza sa manjim indeksima, tj. $(\mathcal{D}_k)_{k<n}$. Sada se vratimo na relaciju (4.17). Razlikujemo dva slučaja: (l) $q = 0$ i (k) $q \neq 0$.

(l) Ako je $q = 0$ onda iz (4.17) dobijamo:

$$\mathcal{D}_n = p\,\mathcal{D}_{n-1} = p^2\,\mathcal{D}_{n-2} = \ldots = p^{n-1}\,\mathcal{D}_1.$$

Kako je lako izračunati $\mathcal{D}_1$ jer se radi o matrici reda 1, iz gornje relacije lako nalazimo $\mathcal{D}_n$.

(k) Ako je $q \neq 0$, onda pretpostavimo da je opšte rešenje oblika $\mathcal{D}_n = \xi\, x^n$, $\xi \neq 0$. Kada ovaj izraz uvrstimo u (4.17) i dobijenu relaciju skratimo sa $\xi\, x^{n-2}$ dobijamo karakterističnu jednačinu

$$x^2 - p\,x + q = 0.$$

Neka su α i β njeni koreni, tada Vijeteove[9] formule daju, $p = \alpha + \beta$ i $q = -\alpha\,\beta$. Nakon uvrštavanja α i β u (4.17) dobijamo relacije

$$(4.18) \qquad \mathcal{D}_n - \alpha\,\mathcal{D}_{n-1} = \beta\,(\mathcal{D}_{n-1} - \alpha\,\mathcal{D}_{n-2}),$$

$$(4.19) \qquad \mathcal{D}_n - \beta\,\mathcal{D}_{n-1} = \alpha\,(\mathcal{D}_{n-1} - \beta\,\mathcal{D}_{n-2}).$$

Sada, imamo dva slučaja: (a) $\alpha \neq \beta$ i (b) $\alpha = \beta$.

Slučaj (a): $\alpha \neq \beta$.

Sada iz (4.19) imamo redom:

$$\mathcal{D}_n - \alpha\,\mathcal{D}_{n-1} = \beta\,(\mathcal{D}_{n-1} - \alpha\,\mathcal{D}_{n-2}) = \beta^2\,(\mathcal{D}_{n-2} - \alpha\,\mathcal{D}_{n-3}) = \ldots = \beta^{n-2}\,(\mathcal{D}_2 - \alpha\,\mathcal{D}_1),$$

analogno dobijamo jednačinu:

$$\mathcal{D}_n - \beta\,\mathcal{D}_{n-1} = \alpha^{n-2}\,(\mathcal{D}_2 - \beta\,\mathcal{D}_1).$$

[9] Viete, Francois, 1540-—1603, francuski matematičar.

Tako da dobijamo linearni sistem:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n - \alpha\,\mathcal{D}_{n-1} &= \beta^{n-2}\,(\mathcal{D}_2 - \alpha\,\mathcal{D}_1) \\ \mathcal{D}_n - \beta\,\mathcal{D}_{n-1} &= \alpha^{n-2}\,(\mathcal{D}_2 - \beta\,\mathcal{D}_1). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ako prvu jednačinu ovog sistema pomnožimo sa $-\beta$, a drugu sa α i onda saberemo jednačine, a zatim ih podelimo sa $\alpha-\beta \neq 0$, dobijamo rešenje:

$$\mathcal{D}_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha-\beta}\,(\mathcal{D}_2 - \beta\,\mathcal{D}_1) + \frac{\beta^{n-1}}{\beta-\alpha}\,(\mathcal{D}_2 - \alpha\,\mathcal{D}_1). \tag{4.21}$$

Slučaj (b): $\alpha = \beta$.

U ovom slučaju umesto dve jednačine u (4.20) imamo samo jednu:

$$\mathcal{D}_n - \alpha\,\mathcal{D}_{n-1} = \alpha^{n-2}\,(\mathcal{D}_2 - \alpha\,\mathcal{D}_1). \tag{4.22}$$

Nakon zamene n sa $n-1$ u ovoj jednačini, dobijamo jednačinu: $\mathcal{D}_{n-1} - \alpha\,\mathcal{D}_{n-2} = \alpha^{n-3}\,(\mathcal{D}_2 - \alpha\,\mathcal{D}_1)$. Nakon množenja prethodne relacije sa α imamo,

$$\alpha\,\mathcal{D}_{n-1} = \alpha^2\,\mathcal{D}_{n-2} + \alpha^{n-2}\,(\mathcal{D}_2 - \alpha\,\mathcal{D}_1). \tag{4.23}$$

Nakon zamene $\alpha\,\mathcal{D}_{n-1}$ iz (4.23) u jednakost (4.22) i kraćeg sređivanja, dobijamo,

$$\mathcal{D}_n = 2\,\alpha^{n-2}\,(\mathcal{D}_2 - \alpha\,\mathcal{D}_1) + \alpha^2\,\mathcal{D}_{n-2}. \tag{4.24}$$

Ako u jednakosti (4.22) zamenimo n sa $n-2$ dobijamo,

(4.25) $\quad \mathcal{D}_{n-2} - \alpha\,\mathcal{D}_{n-3} = \alpha^{n-4}\,(\mathcal{D}_2 - \alpha\,\mathcal{D}_1),\quad$ koju nakon množenja sa α^2 možemo zapisati kao:

(4.26) $\quad \alpha^2\,\mathcal{D}_{n-2} = \alpha^3\,\mathcal{D}_{n-3} + \alpha^{n-2}\,(\mathcal{D}_2 - \alpha\,\mathcal{D}_1).$

Dakle, ako sada zamenimo $\alpha^2\,\mathcal{D}_{n-2}$ iz (4.26) u (4.24) dobijamo:

$$\mathcal{D}_n = 3\,\alpha^{n-2}\,(\mathcal{D}_2 - \alpha\,\mathcal{D}_1) + \alpha^3\,\mathcal{D}_{n-2}.$$

Nastavljajući analogno dalje, napokon (nakon odgovarajućeg broja koraka) dolazimo do jednakosti,

$$\mathcal{D}_n = (n-1)\,\alpha^{n-2}\,(\mathcal{D}_2 - \alpha\,\mathcal{D}_1) + \alpha^{n-1}\,\mathcal{D}_1. \tag{4.27}$$

Iz jednačina (4.21) i (4.27) lako nalazimo $\mathcal{D}_n$ jer je $\mathcal{D}_n$ funkcija korena karakteristične jednačine i determinanti $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ koje je lako izračunati.

Primetimo da ako su u jednačini (4.17) $p, q, \mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2 \in \mathbb{Z}\,(\mathbb{Q},\,\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ da je onda: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ i $\mathcal{D}_n \in \mathbb{Z}\,(\mathbb{Q},\,\mathbb{R},\,\mathbb{C})$.

Primer. Izračunajmo determinantu $n.-$tog reda:

$$\mathcal{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{razvijmo} \\ \text{determi-} \\ \text{nantu po} \\ 1.\text{–oj} \\ \text{vrsti.} \end{matrix} \right\} = \mathcal{D}_{n-1} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{razvijmo} \\ \text{determi-} \\ \text{nantu po} \\ 1.\text{–oj} \\ \text{koloni.} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \mathcal{D}_{n-1} + \mathcal{D}_{n-2}.$$

Sada formiramo karakterističnu jednačinu: $x^2 - x - 1 = 0$, koja ima korene

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{i} \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \tag{4.28}$$

a kako su $\mathcal{D}_1 = 1$ i $\mathcal{D}_2 = 2$ iz formule (4.21) nalazimo:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n \;&=\; \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) = \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) \\ &\quad - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\Big(\big(1+\sqrt{5}\big)^{n-1}(3+\sqrt{5}) - \big(1-\sqrt{5}\big)^{n-1}(3-\sqrt{5})\Big). \end{aligned}$$

Zbog toga što su $p = q = \mathcal{D}_1 = 1$ i $\mathcal{D}_2 = 2$, znamo da je $\mathcal{D}_n \in \mathbb{N}$, a ovi brojevi poznati su kao Fibonačijevi[10] brojevi: $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89\,\dots$.

[10] Leonardo Bonacci, poznat kao Fibonacci, oko 1170—1250, italijanski matematičar.

4.10. Bine[11] – Košijeva[12] teorema. Sada se postavlja prirodno pitanje, da li formulu iz 4.7 Propozicija možemo generalisati na proizvoljne dve matrice, pogotovo jer je proizvoljna matrica $\mathcal{A}$ ekvivalentna po vrstama (kolonama) nekoj gornje trougaonoj matrici, čiju determinantu lako nalazimo. Odgovor na ovo pitanje je potvrdan i važi sledeća važna teorema.

Teorema (Bine-Koši). *Neka su $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{M}_n(F)$ dve kvadratne matrice, tada je*

$$\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det\mathcal{A}\det\mathcal{B} \tag{4.29}$$

Dokaz. Ako matrica $\mathcal{A}$ nije regularna[13], tada i $\mathcal{A}\mathcal{B}$ takođe nije regularna, tada se, na osnovu 4.7 Teorema, obe strane jednakosti (4.29) poništavaju i formula važi. Zato pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ regularna matrica, tada je $\mathcal{A} = \mathbb{E}_1\,\mathbb{E}_2\,\ldots\,\mathbb{E}_m$ neki proizvod elementarnih matrica (vidi (4.12)), tako da indukcijom, uz korišćenje formule iz 4.7 Propozicija dobijamo,

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{A}\,\mathcal{B}) &= \det((\mathbb{E}_1\,\mathbb{E}_2\,\ldots\,\mathbb{E}_m)\,\mathcal{B}) = \det(\mathbb{E}_1(\mathbb{E}_2\,\ldots\,\mathbb{E}_m\,\mathcal{B})) = \det(\mathbb{E}_1)\det(\mathbb{E}_2(\mathbb{E}_3\,\ldots\,\mathbb{E}_m\,\mathcal{B})) \\ &= \cdots = (\det(\mathbb{E}_1)\det(\mathbb{E}_2)\cdots\det(\mathbb{E}_m))\det\mathcal{B} = \cdots = \det\mathcal{A}\det\mathcal{B}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

$\square$

Primedba. Važnost prethodne formule za koju ćemo i kasnije videti (vidi karakterizacije determinante) da je jedno od osnovnih svojstava determinante, i ono pokazuje da je determinanta homomorfizam multiplikativnih grupa $\det : (\mathsf{GL}(n,\mathbb{F}),\cdot) \longrightarrow (\mathbb{F},\cdot)$.

4.11. Lema o množenju blok matrica. Matrice čiji su elementi matrice zovu se blok matrice. Zanimljivo je da se pri množenje blok matrice ponašaju kao obične matrice, preciznije važi:

Lema 1 (o množenju blok matrica). *Neka su $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{M}_n$ i neka su $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{B}_{11} \in \mathbb{M}_l$, $\mathcal{A}_{12}, \mathcal{B}_{12} \in \mathbb{M}_{l\,n-l}$, $\mathcal{A}_{21}, \mathcal{B}_{21} \in \mathbb{M}_{n-l\,l}$ i $\mathcal{A}_{22}, \mathcal{B}_{22} \in \mathbb{M}_{n-l}$, tako da je $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix}$ i $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} \end{bmatrix}$. Tada je*

$$\mathcal{A}\,\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}\,\mathcal{B}_{11} + \mathcal{A}_{12}\,\mathcal{B}_{21} & \mathcal{A}_{11}\,\mathcal{B}_{12} + \mathcal{A}_{12}\,\mathcal{B}_{22} \\ \mathcal{A}_{21}\,\mathcal{B}_{11} + \mathcal{A}_{22}\,\mathcal{B}_{21} & \mathcal{A}_{21}\,\mathcal{B}_{12} + \mathcal{A}_{22}\,\mathcal{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Direktno iz definicije množenja matrica, samo što pri tom množenju vodimo računa da su elementi matrica $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ raspoređeni na dati način. $\square$

Primedba. Primetimo da je jedina razlika između običnog množenja matrica i množenja blok matrica u tome što u matričnim elementima matrice $\mathcal{A}\,\mathcal{B}$ množenja odgovarajućih "matričnih" elemenata (koji su ovde matrice) nisu komutativna. Tako npr. $\mathcal{A}_{11}\,\mathcal{B}_{11}$ ne mora biti jednako $\mathcal{B}_{11}\,\mathcal{A}_{11}$.

Lema 2. *Neka je data blok matrica $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{C} \\ \mathcal{O} & \mathcal{D} \end{bmatrix}$ tada je $\det\mathcal{A} = \det\mathcal{B}\det\mathcal{D}$.*

Dokaz. Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije po redu matrice $\mathcal{A}$.

(bi) Ako je taj red 1 onda nemamo što dokazivati, a ako je red 2 onda je jasno da tvrdnja važi jer se svodi na običnu determinantu.

(ki) Zato pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sve matrice čiji red ne premašuje $n-1$ $(n \geq 2)$ i posmatrajmo matricu $\mathcal{A}$ reda n koja ima traženi oblik,

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1\,r} & \alpha_{1\,r+1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \ldots & \alpha_{r\,r} & \alpha_{r\,r+1} & \ldots & \alpha_{rn} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & \alpha_{r+1\,r+1} & \ldots & \alpha_{r+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n\,r+1} & \ldots & \alpha_{n\,n} \end{array}\right].$$

Laplasov razvoj po 1.–oj vrsti daje:

$$\det\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i}\alpha_{1i}\,\Delta(\mathcal{A})_{1i}. \tag{4.31}$$

Za indekse $i = 1, \ldots, r$, na minore $\Delta(\mathcal{A})_{1i}$ možemo primeniti pretpostavku indukcije tako da je:

$$\Delta(\mathcal{A})_{1i} = \Delta(\mathcal{B})_{1i}\det\mathcal{D}.$$

---

[11] Binet, Jacques Philippe Marie, 1786 –– 1856, francuski matematičar, fizičar i astronom.

[12] Cauchy, Augustin-Louis, 1789 –– 1857, poznati francuski matematičar.

[13] tj. singularna je

Istom metodom, uz korišćenje pretpostavke indukcije, vidimo da se minore $\Delta(\mathcal{A})_{1i}$ za indekse $i = r+1, \ldots, n$ poništavaju jer kvadratne matrice koje se pojave u desnom gornjem uglu imaju jednu vrstu koja se sastoji od samih 0. Zaista, pri Laplasovom razvoju po 1.−oj vrsti matrice $\mathcal{A}$, iz matrice $\mathcal{A}$ izbacimo 1.−vu vrstu, a ne izbacimo niti jednu kolonu, pa da bismo na njenom mestu dobili kvadratnu matricu moramo dodati deo $(r+1)$.−vrste koji se sastoji od samih nula. Uverimo se da je to tako npr. za $i = r+1$ (radi jednostavnijeg zapisa).

$$\Delta(\mathcal{A})_{1\,r+1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2\,r} & \alpha_{2\,r+2} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \ldots & \alpha_{r\,r} & \alpha_{r\,r+2} & \ldots & \alpha_{rn} \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{r+1\,r+2} & \ldots & \alpha_{r+1\,n} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & \alpha_{r+2\,r+2} & \ldots & \alpha_{r+2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n\,r+2} & \ldots & \alpha_{n\,n} \end{array}\right|.$$

Izračunali smo sve minore koje odgovaraju razvoju determinante $\mathcal{A}$ po 1.−oj vrsti tako da (4.31) postaje,

$$\det \mathcal{A} = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{1+i}\, \Delta(\mathcal{B})_{1i} \det \mathcal{D} = \left(\sum_{i=1}^{r} (-1)^{1+i}\, \Delta(\mathcal{B})_{1i}\right) \cdot \det \mathcal{D} = \det \mathcal{B} \det \mathcal{D}.$$

Analogno se može pokazati [14] da važi ista formula ako u matrici $\mathcal{A}$ blokovi $\mathcal{O}$ i $\mathcal{C}$ zamene mesta. □

Prethodni rezultat možemo iskoristiti za jedan konstruktivni dokaz Bine-Košijeve teoreme, tako što ćemo koristeći elementarne transformacije pokazati jednakost

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{O}_n \\ -\mathbb{I}_n & \mathcal{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathcal{A}\mathcal{B} & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{B} & -\mathbb{I}_n \end{vmatrix},$$

iz koje, primenom prethodne Leme 2, lako sledi Bine-Košijeve teorema.

Primer. Ilustrujmo primenu Leme 2 na sledećem primeru: neka su $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ kvadratne matrice reda n, pokažimo da je,

$$\begin{vmatrix} \mathbb{I}_n & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{vmatrix} = \det(\mathcal{D} - \mathcal{C}\,\mathcal{B}).$$

Primetimo da je,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & -\mathcal{B} \\ \mathcal{O}_n & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & -\mathcal{B}+\mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{C} & \mathcal{D}-\mathcal{C}\,\mathcal{B} \end{bmatrix}.$$ Sada primenom BKT dobijamo,

$$\det \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{C} & \mathcal{D}-\mathcal{C}\,\mathcal{B} \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & -\mathcal{B} \\ \mathcal{O}_n & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & -\mathcal{B} \\ \mathcal{O}_n & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

Budući da je $\det \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{C} & \mathcal{D}-\mathcal{C}\,\mathcal{B} \end{bmatrix} = \det \mathbb{I}_n \det(\mathcal{D}-\mathcal{C}\,\mathcal{B})$ i $\det \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & -\mathcal{B} \\ \mathcal{O}_n & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} = 1$,

sada, iz jednakosti (4.32) sledi tvrdnja.

4.12. Karakterizacija determinante. Postavlja se pitanje, analogno kao u sličnim situacijama, pronalaženja najmanjeg skupa svojstava koje karakterišu determinantnu funkciju. Tako imamo.

Teorema 1. *Neka je $d : \mathbb{M}_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$, funkcija koja ima svojstva:*

(ml) *d je multilinearni funkcional kolona matrice,*

(a) *d je alternirajuće preslikavanje kolona, tj. ako u matrici $\mathcal{A} = [a_1, \ldots, a_n]$ postoje dve jednake kolone onda je $d(\mathcal{A}) = 0$ ili formalnije: $i \neq j$, $a_i = a_j$ tada je $d(\mathcal{A}) = 0$,*

(n) *$d(\mathbb{I}_n) = 1$,*

tada je $d = \det$.

Digresija. Drugim rečima determinanta je jedinstveno određena sa tri svojstva (ml), (a) i (n).

[14] ili jednostavnije, transponovanjem polazne matrice.

Dokaz. Iz (n), tj. iz $d(\mathbb{I}_n) = 1$ zaključujemo da je $d\,[e_1, \ldots, e_n] = 1$, pri čemu je $(e_1, \ldots, e_n)$ kanonska baza. Pokažimo prvo, da zamenom kolona a_i i a_j $(i < j)$ d menja znak.

$$0 \overset{(a)}{=} d[a_1, .., a_{i-1}, \overset{i}{a_i + a_j}, a_{i+1}, ..a_{j-1}, \overset{j}{a_i + a_j}, .., a_n] \overset{(ml)}{=} d[a_1, .., \overset{i}{a_i}, a_{i+1}, .., \overset{j}{a_i}, .., a_n] + d[a_1, .., \overset{i}{a_j}, a_{i+1}, .., \overset{j}{a_j}, .., a_n]$$

$$+ \, d[a_1, .., a_i, a_{i+1}, .., a_j, .., a_n] + d[a_1, .., \overset{i}{a_j}, a_{i+1}, .., \overset{j}{a_i}, .., a_n]$$

$$= \, d[a_1, .., a_i, a_{i+1}, .., a_j, .., a_n] + d[a_1, .., \overset{i}{a_j}, a_{i+1}, .., \overset{j}{a_i}, .., a_n],$$

jer se prva dva sumanda anuliraju zbog alterniranosti. Dobijenu jednakost možemo prepisati kao:

$$d[a_1, .., a_i, a_{i+1}, .., a_j, .., a_n] = -\, d[a_1, .., \overset{i}{a_j}, a_{i+1}, .., \overset{j}{a_i}, .., a_n].$$

Neka je $\sigma \in \mathbb{S}_n$ proizvoljna permutacija, kao što znamo permutaciju σ možemo zapisati kao proizvod transpozicija, tj. $\sigma = \tau_k \cdots \tau_2 \cdot \tau_1$, i pri tome je $I(\sigma) \cong k \; mod\,(2)$. Dakle, ako pođemo od identičke permuatacije id i na nju redom primenjujemo transpozicije $\tau_1, \ldots, \tau_k$ dobićemo na kraju permutaciju σ. Prema tome ako pođemo od jedinične matrice $\mathbb{I}_n$ i ako redom vršimo zamene kolona definisane transpozicijama $\tau_i = (i_1\, i_2)$ [15] , $i = 1, \ldots, k$, tj. u $i.$−tom koraku zamenimo kolone i_1 i i_2, nakon $k.$−tog koraka dobićemo matricu $[e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}]$, a kako pri svakoj zameni izlazi faktor (-1) vidimo da važi:

$$d\,[e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}] = (-1)^k\, d\,[e_1, \ldots, e_n] = (-1)^{I(\sigma)}\, d\,[e_1, \ldots, e_n] = (-1)^{I(\sigma)}. \tag{4.33}$$

Neka je $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) = [a_1, \ldots, a_n]$ proizvoljna matrica, takva da je $a_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, e_i$, onda koristeći prvo multilinearnost nalazimo:

$$\begin{aligned} d\,[a_1, a_2, \ldots, a_n] \; &= d\,\Big[\sum_{i_1=1}^{n} \alpha_{1i_1}\, e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} \alpha_{2i_2}\, e_{i_2}, \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \alpha_{ni_n}\, e_{i_n}\Big] \\ &\overset{(ml)}{=} \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} \alpha_{1i_1}\, \alpha_{2i_2} \cdots \alpha_{ni_n}\, d[e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}]. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Zbog svojstva (a), $d[e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}] = 0$ ako postoje barem dva indeksa i_j i i_k koja se podudaraju, u sumi (4.34) možemo preći (sa sume u kojoj ima n^n članova) na sumu po simetričnoj grupi $\mathbb{S}_n$, (u kojoj ima $n!$ članova) tj. imamo

$$\begin{aligned} d\,[a_1, a_2, \ldots, a_n] \; &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \alpha_{1\sigma(1)}\, \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}\, d\,[e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{n\sigma(n)}] = \{(4.33)\} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} (-1)^{I(\sigma)}\, \alpha_{1\sigma(1)}\, \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}\, d\,[e_1, e_2, \ldots, e_n] = \mathsf{det}\,[a_1, a_2, \ldots, a_n]. \end{aligned}$$

Dokaz je gotov jer funkcije d i det jednako deluju na proizvoljnoj matrici $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. □

Primedba. Iz gornjeg dokaza jasno je da su uslovi (ml) i (a) esencijalni jer oni impliciraju osnovne osobine determinante, a da uslov (n) predstavlja neku vrstu normiranosti.

Dakle, ako u prethodnoj teoremi ispustimo uslov normiranosti (n), tada je funkcija d određena do na konstantu, tj. tada bi važilo da je $d = \lambda\, \mathsf{det}$, za $\lambda = d(\mathbb{I}_n) \in \mathbb{F}$.

Postoje još neke prirodne karakterizacije determinantne funkcije, sa nešto slabijim pretpostavkama, koje navodimo u nastavku, a dokaze ostavljamo za vežbu.

[15] Prisetimo se da se zamena $i_1.$−ve i $i_2.$−ge kolone date matrice $\mathcal{A}$ realizuje množenjem matrice $\mathcal{A}$ elementarnom matricom $G_{i_1 i_2}$ sa desne strane.

3. Zadaci, vežbanja i dopune

4.12. Znamo, da grupa $\mathbb{S}_3$ ima red 6. Pokažite da su sve grupa reda manjeg od 6 komutativne.

4.13. Kejlijeva Teorema. Važnost grupe permutacije otkriva sledeća teorema, jer ona izučavanje grupa svodi na izučavanje simetričnih grupa [16] i njihovih podgrupa.

Teorema (Kejli). *Svaka grupa izomorfna je nekoj podgrupi svoje grupe permutacija.*

Dokaz. Neka je $(G,\cdot)$ proizvoljna grupa tada je leva translacija, $L_a(x) = a \cdot x$ za neki $a \in G$, bijekcija (permutacija) skupa G. Formulom $\Phi(a) = L_a$ definisano je preslikavanje, $\Phi : G \longrightarrow \mathfrak{B}(G)$, gde smo sa $\mathfrak{B}(G)$ označili grupu svih bijekcija (permutacija) skupa G, Da bismo dokazali teoremu dovoljno je pokazati da je Φ monomorfizam, jer je tada $G \cong \Phi(G) \subseteq \mathfrak{B}(G)$.

Φ je homomorfizam jer je

$$\Phi(a\cdot b)(x) = L_{a\,b}(x) = L_a(L_b(x)) = (L_a \circ L_b)(x) = (\Phi(a)\circ\Phi(b))(x),$$

odakle dobijamo, $\Phi(a\cdot b) = \Phi(a)\circ\Phi(b)$.

Φ je '1-1'. Neka je $\Phi(a) = \Phi(b)$ tada je $\Phi(a)(x) = \Phi(b)(x), \forall\, x \in G$, i za izbor $x = e$ sledi da je $L_a(e) = L_b(e)$ ili $a\cdot e = a = b\cdot e = b$. □

4.14. Prezentacija grupe $\mathbb{S}_n$. Koristeći rezultate tačke 4.3, sada nalazimo jednu od najvažnijih i najjednostavnijih prezentacija [17] grupe $\mathbb{S}_n$. U tu svrhu prvo primetimo da važi $(a\,b) = (1\,a)\,(1\,b)\,(1\,a)$, odakle sledi da je $\mathbb{S}_n$ generisana samo transpozicijama iz $\mathcal{G}_1 = \{(1\,2), (1\,3)\ \ldots\ (1\,n)\}$. Kako nam za predstavljanje grupe $\mathbb{S}_n$ trebaju i relacije koje važe među generatorima i kako su one za elemente skupa $\mathcal{G}_1$ relativno komplikovane, tražimo skup generatora $\mathcal{G}$ čiji elementi zadovoljavaju jednostavnije relacije. Budući da za svaku transpoziciju oblika $(1\,a) \in \mathcal{G}_1$ važi

$$(1\,a) = (a-1\,a)\,(a-2\,a-1)\,\cdots\,(2\,3)\,(12)\,(2\,3)\,\cdots\,(a-2\,a-1)\,(a-1\,a),$$

zaključujemo da je i skup $\mathcal{G} = \{\sigma_1 = (1\,2), \sigma_2 = (2\,3), \ldots, \sigma_{n-1} = (n-1\,n)\}$ skup generatora grupe $\mathbb{S}_n$. Primetimo da važe relacije

$$\sigma_i^2 = e, \qquad \text{za } i = 1,2,\ldots,n-1. \tag{4.35}$$

$$\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i, \qquad \text{za } i,j = 1,2,\ldots,n-1, \quad |i-j| > 1\,. \tag{4.36}$$

$$\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i = \sigma_{i+1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,, \qquad \text{za } i = 1,2,\ldots,n-2. \tag{4.37}$$

Lako se ubediti da je svaka relacija među generatorima grupe $\mathbb{S}_n$ posledica relacija (4.35)-(4.37). Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. *Jedno predstavljanje grupe $\mathbb{S}_n$ je*

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_n =<\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1}\,;\,\sigma_p^2 = e\,, \quad \sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i, \quad p,i,j = 1,2,\ldots,\,n-1,\\ \textit{gde je } |i-j| > 1 \ \ i \ \ \sigma_k\,\sigma_{k+1}\,\sigma_k = \sigma_{k+1}\,\sigma_k\,\sigma_{k+1}, \ \ k = 1,\,\ldots,\,n-2 >.\end{aligned}$$

Primedba. Prethodna teorema primenjena na slučaj $n = 3$ daje prezentaciju grupe $\mathbb{S}_3$,

$$\mathbb{S}_3 =<\tau_1 = \sigma_3, \tau_2 = \sigma_2\,;\,\tau_1^2 = \tau_2^2 = e\,,\ \tau_1\,\tau_2\,\tau_1 = \tau_2\,\tau_1\,\tau_2 > \ .$$

Primetimo da ovo predstavljanje nije jedinstveno, jer ako uzmemo $a = \sigma_4$, $b = \sigma_2$ tada iz Kejlijeve tablice (3.1) vidimo da je druga prezentacija od $\mathbb{S}_3$ data sa

$$\mathbb{S}_3 =<\ a,b\,;a^3 = e,\ b^2 = e,\ a\,b = b\,a^2 > \ .$$

4.15. Izračunavanje determinante matrica Laplasovim razvojem.

$$\text{(i1)}\ \begin{bmatrix} 12 & -5 & -4\\ -2 & 1 & 3\\ -7 & 10 & 6\end{bmatrix} \qquad \text{(i2)}\ \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{bmatrix} \qquad \text{(i3)}\ \begin{bmatrix} x & x & a+x\\ x & b+x & x\\ c+x & x & x\end{bmatrix}.$$

[16] Ovo je posebno važno kada je grupa G konačna i tada se mnoge činjenice mogu proveriti uz pomoć računara.

[17] Grupe mogu imati više različitih prezentacija – predstavljanja popisivanjem svih generatora i relacija, koje ju jednoznačno određuju.

Rešenje. (i2) izračunajmo determinantu date matrice Laplaseovim razvojem po prvoj vrsti

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} - \beta \cdot \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} + \gamma \cdot \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= \alpha \cdot (\alpha^2 - \beta\,\gamma) - \beta \cdot (\gamma\,\alpha - \beta^2) + \gamma \cdot (\gamma^2 - \alpha\,\beta)\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\,\alpha\,\beta\,\gamma.$$

(i3) računamo determinantu razvojem po 3. koloni

$$\begin{vmatrix} x & x & a+x \\ x & b+x & x \\ c+x & x & x \end{vmatrix} = (a+x) \cdot \begin{vmatrix} x & b+x \\ c+x & x \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} x & x \\ c+x & x \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} x & x \\ x & b+x \end{vmatrix}$$

$$= (a+x) \cdot (x^2 - (b+x)\,(c+x)) - x \cdot (x^2 - x\,(c+x)) + x \cdot (x\,(b+x) - x^2) = \cdots$$

$$= -a\,b\,c - x\,(a\,b + a\,c + b\,c).$$

4.16. Izračunajte sledeće determinante.

$$\text{(i1)} \quad \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}, \qquad \text{(i2)} \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \text{(i3)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 9 & -4 \\ 1 & 8 & -1 & 27 & 12 \\ 1 & 16 & -1 & 81 & -32 \end{vmatrix}.$$

4.17. Nađite članove determinante $\begin{vmatrix} 7\,x & 1 & 2 & 3 \\ 2\,x & 3\,x & 3 & -1 \\ 2 & 2\,x & x & 1 \\ 3\,x & 2 & 4 & 5\,x \end{vmatrix}$, koji sadrže x^4 i x^3 bez njenog računanja.

Rešenje. Koristeći formulu (4.2) vidimo da se u opštem članu pojavljuje iz svake vrste i svake kolone tačno jedan matrični element, kao i to da je taj član proizvod četiri matrična elementa. Budući da se x pojavljuje sa stepenom 0 ili 1 u svakom matričnom elementu, da bismo odredili član uz x^4 potrebno je da se u svakom članu proizvoda pojavljuje x. Ako primetimo da u 1. vrsti, 3. i 4. koloni postoji samo jedan matrični element u kojem se pojavljuje x, onda se x^4 može dobiti samo kao proizvod dijagonalnih elemenata, tako da je traženi član jednak: $7 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 = 105$.

Odredimo član uz x^3. Ovde je situacija dosta komplokovanija, pa je potrebno naći one permutacije $\sigma \in \mathbb{S}_4$ takve da u skupu $\{\alpha_{1\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \alpha_{\sigma(3)}, \alpha_{\sigma(4)}\}$ postoje tačno tri člana koja sadrže x. Tako prvo nalazimo permutacije: $\sigma_1 = \binom{1234}{1324}$, $\sigma_2 = \binom{1234}{3124}$, $\sigma_3 = \binom{1234}{2134}$ i $\sigma_4 = \binom{1234}{4231}$, a zatim odredimo parnost ovih permuacija: $I(\sigma_1) = 1, I(\sigma_2) = 2, I(\sigma_3) = 1$ i $I(\sigma_4) = 5$. Na kraju dobijamo da je traženi koeficijent: $-7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = -210 + 40 - 10 - 27 = -207$.

4.18. Inverzna matrica. Odredite inverzne matrice, ako postoje, korišćenjem adjungovane matrice.

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.19. Determinanta matrica. Izračunajte determinantu datih matrica.

$$\text{(i1)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n-1\,2} & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_{n1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(i2)} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\,n-1} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \alpha_{n-1\,2} & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_{n1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Rešenje u oba slučaja, (i1) i (i2), jednako je

$$(-1)^{\frac{n\,(n-1)}{2}}\,\alpha_{1n}\,\alpha_{2\,n-1} \cdots \alpha_{n1}.$$

U slučaju (i1) ovo je jasno, jer u svim preostalim sabircima oblika,

$$(-1)^{I(\sigma)}\,\alpha_{1\sigma(1)}\,\alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)},$$

barem jedan faktor je 0, pa je i taj sabirak 0. Samo permutacija $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ može dati nešto različito od 0, a kako je njen broj inverzija jednak

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2}\,n\,(n-1),$$

dobijamo traženi rezultat.

(i2) sledi analogno samo je potrebno primetiti da u svim članovima osim pomenutog postoji faktor $\alpha_{i\sigma(i)}$ takav da je $\sigma(i) > 1$, koji je jednak 0, te se tako taj sabirak poništava.

4.20. Determinanta matrica. Izračunajte determinante sledećih matrica $n-$tog reda.

(i1) $\mathcal{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & \dots & 1-n & 0 \end{bmatrix}$ (i2) $\mathcal{B}_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{bmatrix}$

(i3) $\mathcal{C}_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & x & x & \dots & x & x \\ x & \alpha_2 & x & \dots & x & x \\ x & x & \alpha_3 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots\dots & \\ x & x & x & \dots & \alpha_{n-1} & x \\ x & x & x & \dots & x & \alpha_n \end{bmatrix}$, pri čemu je,

(a) $x \neq \alpha_i,\ i = 1, 2, \dots, n.$

(b) postoji tačno jedan $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ takav da je $x = \alpha_i$.

(c) postoje barem dva indeksa i, j takva da je $x = \alpha_i = \alpha_j$.

Rešenje. (i1)

$$\det \mathcal{A}_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & \dots & 1-n & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} i.\text{–tu} \\ \text{kolonu} \\ \text{pomno-} \\ \text{žimo} \\ \text{sa } 1/i. \end{array} \right\} = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{zadnju} \\ \text{kolonu} \\ \text{dodamo} \\ \text{ostalim} \\ \text{kolonama.} \end{array} \right\}$$

$$= n!\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{prvu} \\ \text{vrstu} \\ \text{množimo} \\ \text{sa } 1/2 \text{ i} \\ \text{dodamo} \\ \text{zadnjoj.} \end{array} \right\} = n!\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = n! \cdot 2 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{1}{2} = n!$$

(i2)

$$\det \mathcal{B}_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} 1.\text{–vu vrstu} \\ \text{množimo sa } -1 \text{ i} \\ \text{dodamo ostalim.} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-n+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-n+1).$$

(i3) Uradimo slučaj (a). (b) i (c) rešavaju se analogno.

$$\det \mathcal{C}_n = \begin{vmatrix} \alpha_1 & x & x & \dots & x \\ x & \alpha_2 & x & \dots & x \\ x & x & \alpha_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & x & \dots & \alpha_n \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} 1.\text{–vu} \\ \text{vrstu} \\ \text{množimo} \\ \text{sa } -1 \text{ i} \\ \text{dodamo} \\ \text{ostalim.} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & x & x & \dots & x \\ x-\alpha_1 & \alpha_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ x-\alpha_1 & 0 & \alpha_3 - x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x-\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n - x \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{iz } i.\text{–te} \\ \text{kolone} \\ \text{izvučemo} \\ \alpha_i - x, \text{ za} \\ i = 1, \dots, n. \end{array} \right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - x) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{x-\alpha_1} & \frac{x}{x-\alpha_2} & \frac{x}{x-\alpha_3} & \dots & \frac{x}{x-\alpha_n} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{sve vrste} \\ (2., \dots, n.) \\ \text{dodamo} \\ \text{prvoj.} \end{array} \right\} = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - x) \cdot \begin{vmatrix} \beta & \frac{x}{x-\alpha_2} & \frac{x}{x-\alpha_3} & \dots & \frac{x}{x-\alpha_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \beta \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - x) = \Big(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{\alpha_i - x}\Big) \cdot \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - x), \qquad \text{jer je } \beta = \tfrac{\alpha_1}{\alpha_1 - x} + \tfrac{x}{\alpha_2 - x} + \dots + \tfrac{x}{\alpha_n - x} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{x}{\alpha_i - x}.$$

4.21. Determinanta matrica. Izračunajte determinante matrica $n.-$tog reda ako je:

(i1) $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$, gde je $\alpha_{ij} = min\,\{i, j\}$. (i2) $\mathcal{B} = (\beta_{ij})$, gde je $\beta_{ij} = |i - j|$.

Rešenje. (i1)

$$\det \mathcal{A}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{c} \text{od svake} \\ \text{vrste} \\ \text{oduzmemo} \\ \text{prethodnu,} \\ \text{počevši} \\ \text{od pretposlednje.} \end{array}\right\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(i2)

$$\det \mathcal{B}_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{c} n.\text{–tu vrstu} \\ \text{dodamo prvoj,} \\ \text{a zatim iz 1.} \\ \text{izvučemo} \\ \text{faktor } n-1 \end{array}\right\} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-3 & n-4 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \text{od svake} \\ \text{vrste} \\ \text{oduzmemo} \\ \text{prethodnu,} \\ \text{počevši} \\ \text{od n.-te} \end{array}\right\} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{c} 3., 4., \dots, n.\text{–toj} \\ \text{vrsti} \\ \text{dodamo} \\ 2.\text{–gu vrstu .} \end{array}\right\}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\, 2^{n-2}\, (n-1).$$

4.22. Izračunajte determinantu $n.$–tog reda.

$$\text{(i1)} \quad \mathcal{D}_n = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{(i2)} \quad \mathcal{E}_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Rešenje. (i1) Slično kao u 4.9 Primer razvojem ove determinante po prvoj vrsti, a zatim po prvoj koloni dobijamo:

$$\mathcal{D}_n = 5\,\mathcal{D}'_{n-1} - 14\,\mathcal{D}'_{n-2}, \tag{4.38}$$

gde je

$$\mathcal{D}'_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Determinantu $\mathcal{D}'_n$ računamo analognom kombinacijom razvoja po 1.–oj koloni, a zatim po 1.–oj vrsti i na kraju dobijamo rekurentnu relaciju:

$$\mathcal{D}'_n = 3\,\mathcal{D}'_{n-1} - 2\,\mathcal{D}'_{n-2}. \tag{4.39}$$

Kako je karakteristična jednačina od (4.39) jednaka $x^2 - 3\,x + 2 = 0$, dobijamo da su njeni koreni $\alpha = 2$ i $\beta = 1$, i kako je $\mathcal{D}'_1 = 3$ i $\mathcal{D}'_2 = 7$ onda iz (4.21) dobijamo:

$$\mathcal{D}'_n = \frac{2^{n-1}}{2-1}\,(7-3) + \frac{1^{n-1}}{1-2}\,(7 - 2\cdot 3) = 2^{n+1} - 1.$$

Budući da je, $\mathcal{D}'_n = 2^{n+1} - 1$, onda nakon zamene u (4.38) dobijamo:

$$\mathcal{D}_n = 5\cdot(2^{(n-1)+1} - 1) - 14\cdot(2^{(n-2)+1} - 1) = 5\cdot 2^n - 7\cdot 2^n - 1 - 5 + 14 = 9 - 2^{n+1}.$$

4.23. Izračunajte determinante $n-$tog reda.

$$\text{(i1)}\quad \mathcal{A}_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \dots & \beta & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \dots & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \dots & \beta & \alpha \end{vmatrix}, \quad \text{(i2)}\quad \mathcal{B}_n = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \beta & 0 & \alpha & \dots & \alpha \\ \beta & \beta & 0 & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{(i3)}\quad \mathcal{C}_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$$

4.24. Izračunajte determinante $n-$tog reda.

$$\text{(i1)}\quad \mathcal{D}_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 & \dots & \alpha & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha & \alpha & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha & \dots & \alpha & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{(i2)}\quad F_n = \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^n \\ \alpha_{11} & 1 & \dots & x^{n-1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \alpha_{n-1\,2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

4.25. Izračunajte sledeće determinante.

$$\text{(i1)}\quad \mathcal{A}_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 1 & 4 & 9 & \dots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix} \quad \text{(i2)}\quad \mathcal{B}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1+1 & \alpha_2+1 & \alpha_3+1 & \dots & \alpha_{n+1}+1 \\ \alpha_1^2+\alpha_1 & \alpha_2^2+\alpha_2 & \alpha_2^3+\alpha_3 & \dots & \alpha_{n+1}^2+\alpha_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n+\alpha_1^{n-1} & \alpha_2^n+\alpha_2^{n-1} & \alpha_3^n+\alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_{n+1}^n+\alpha_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\text{(i3)}\quad \mathcal{C}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 & 2\,\alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-2} & (n-2)\,\alpha_{n-1}^{n-3} \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} & (n-1)\,\alpha_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}, \quad \text{(i4)}\quad \mathcal{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \dots & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-1} & \dots & \binom{2n-4}{n-2} & \binom{2n-3}{n-2} \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \dots & \binom{2n-3}{n-1} & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}.$$

4.26. Ako je $a_i\,b_j \neq 0, \forall\, i,j = 1,...,n,$ izračunajte determinantu $n.-tog$ reda $(n \geq 2)$

$$\text{(i1)}\quad \mathcal{D}_n = \begin{vmatrix} a_1\,b_1 & a_1\,b_2 & a_1\,b_3 & \dots\dots\dots & a_1\,b_{n-1} & a_1\,b_n \\ a_1\,b_2 & a_2\,b_2 & a_2\,b_3 & \dots\dots\dots & a_2\,b_{n-1} & a_2\,b_n \\ a_1\,b_3 & a_2\,b_3 & a_3\,b_3 & \dots\dots\dots & a_3\,b_{n-1} & a_3\,b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1\,b_{n-1} & a_2\,b_{n-1} & a_3\,b_{n-1} & \dots\dots\dots & a_{n-1}\,b_{n-1} & a_n\,b_n \\ a_1\,b_n & a_2\,b_n & a_3\,b_n & \dots\dots\dots & a_{n-1}\,b_n & a_n\,b_n \end{vmatrix}, \quad \text{(i2)}\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots\dots\dots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

4.27. Izračunajte determinantu $n.$-tog reda

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \dots\dots & b_1 & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots\dots & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3+b_3 & \dots\dots & b_3 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-1} & b_{n-1} & \dots\dots & a_{n-1}+b_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & b_n & b_n & \dots\dots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

4.28. Determinante blok matrica. Uopštite lemu o množenju blok matrica na slučaj kada se matrice $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})$ i $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{ij})$ koje množimo sastoje od k^2 matrica odgovarajućih dimenzija.

4.29. Determinante blok matrica. Neka su $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}\in\mathbb{M}_n$. Dokažite da važi:

$$\text{(i1)}\quad \begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{A}^2 \\ \mathcal{A}^2 & \mathcal{A}^3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{(i2)}\quad \begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathbb{I}_n \end{vmatrix} = \det(\mathcal{A}-\mathcal{B}\,\mathcal{C}).$$

Rešenje. U dokazu ovih tvrdnji koristimo 4.11., lemu o množenju blok matrica i Bine-Košijevu teoremu (kraće BKT).

(i1) Primetimo prvo da je, $\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{A}^2 \\ \mathcal{A}^2 & \mathcal{A}^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & -\mathcal{A} \\ \mathcal{O}_n & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{A}^2+\mathcal{A}^2 \\ \mathcal{A}^2 & -\mathcal{A}^3+\mathcal{A}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{A}^2 & \mathcal{O}_n \end{bmatrix}$, i nakon primene BKT imamo,

$$\det\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{A}^2 & \mathcal{O}_n \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{A}^2 \\ \mathcal{A}^2 & \mathcal{A}^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & -\mathcal{A} \\ \mathcal{O}_n & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{A}^2 \\ \mathcal{A}^2 & \mathcal{A}^3 \end{bmatrix}\cdot\det\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & -\mathcal{A} \\ \mathcal{O}_n & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}. \tag{4.40}$$

Kako je, $\det\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{A}^2 & \mathcal{O}_n \end{bmatrix} = \det\mathcal{A}\det\mathcal{O}_n = 0$ i $\det\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & -\mathcal{A} \\ \mathcal{O}_n & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} = \det\mathbb{I}_n\det\mathbb{I}_n = 1$, i tvrdnja sledi iz jednakosti (4.40).

(i2) Vidi primer u tački 4.11.

4.30. Determinante blok matrica. Neka su $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}\in\mathbb{M}_n$ i neka je $\mathcal{A}$ regularna matrica. Dokažite

(i1) ako matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ komutiraju onda je $\det\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} = \det(\mathcal{D}\,\mathcal{A}-\mathcal{C}\,\mathcal{B})$,

(i2) ako matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ komutiraju onda je $\det\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} = \det(\mathcal{A}\,\mathcal{D}-\mathcal{B}\,\mathcal{C})$.

Rešenje. Zadatak je sličan prethodnom, pa je i takvo rešenje. Budući su obe relacije, (i1) i (i2), simetrične, dokažimo npr. (i2). Prvo, primetimo da je:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{C} & \mathcal{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}\,\mathcal{A}-\mathcal{A}\mathcal{C} & \mathcal{A}\mathcal{D}-\mathcal{C}\,\mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{O}_n & \mathcal{A}\mathcal{D}-\mathcal{B}\mathcal{C} \end{bmatrix},$$

zatim imamo:

$$\det\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{O}_n & \mathcal{A}\mathcal{D}-\mathcal{B}\mathcal{C} \end{bmatrix} = \det\mathcal{A}\det(\mathcal{A}\mathcal{D}-\mathcal{B}\mathcal{C}) \quad \text{i}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{C} & \mathcal{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{C} & \mathcal{A} \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} = \det\mathbb{I}_n\det\mathcal{A}\det\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} = \det\mathcal{A}\det\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}.$$

Iz prethodne dve relacije odmah dobijamo da je

$$\det\mathcal{A}\cdot\det(\mathcal{A}\mathcal{D}-\mathcal{B}\mathcal{C}) = \det\mathcal{A}\cdot\det\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix},\ \text{ ili ekvivalentno, jer je } \det\mathcal{A}\neq 0,\ \det(\mathcal{A}\mathcal{D}-\mathcal{B}\mathcal{C}) = \det\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}.$$

4.31. Blok matrice. Ako kvadratne matrice $\mathcal{A}_{11}$, $\mathcal{A}_{12}$, $\mathcal{A}_{21}$ i $\mathcal{A}_{22}$ komutiraju, dokažite da je

$$\det\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix} = \det[\mathcal{A}_{11}\,\mathcal{A}_{22}-\mathcal{A}_{12}\,\mathcal{A}_{21}].$$

4.32. Karakteristični polinom. Neka je $\mathcal{A}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Pokažite da postoji najviše n skalara $\lambda\in\mathbb{F}$ za koje je $\det(\mathcal{A}-\lambda\,\mathbb{I}_n)=0$.

4.33. Karakteristični polinom. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Pokažite da ako je $\mathcal{B}$ invertibilna matrica da tada postji najviše n skalara $\lambda\in\mathbb{F}$ takvih da matrica $\mathcal{A}+\lambda\,\mathcal{B}$ nije invertibilna.

4.34. Bine – Košijeva teorema. Dokažite Bine – Košijevu teoremu korišćenjem 4.11 Lema 2.

Dokaz. Primenjujući pomenutu Lemu 2 iz tačke 4.11, imamo redom:

$$\mathsf{det}\,\mathcal{A}\,\mathsf{det}\,\mathcal{B}=\begin{vmatrix}\mathcal{A} & \mathcal{O}_n\\ -\mathbb{I}_n & \mathcal{B}\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|ccc}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\,n} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n\,n} & 0 & \dots & 0\\ \hline -1 & \dots & 0 & \beta_{11} & \dots & \beta_{1\,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & -1 & \beta_{n\,1} & \dots & \beta_{n\,n}\end{array}\right|=\left\{\begin{array}{c}(n+1).,\\ (n+2).,\dots,\\ 2n.\text{–tu vr-}\\ \text{ste množimo}\\ \text{redom sa } \alpha_{11},\\ \alpha_{12},\dots,\alpha_{1n}\\ \text{i dodajemo}\\ 1.\text{–oj}\\ \text{vrsti.}\end{array}\right\}=$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|cccc}0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{1i}\,\beta_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{1i}\,\beta_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{1i}\,\beta_{in}\\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n\,n} & 0 & 0 & \dots & 0\\ \hline -1 & \dots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1\,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & -1 & \beta_{n\,1} & \beta_{n\,2} & \dots & \beta_{n\,n}\end{array}\right|$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{sada na isti način, prvo, pomožimo } (n+1).,(n+2).,\dots,2n.\text{–tu}\\ \text{vrstu redom sa } \alpha_{21},\alpha_{22},\dots,\alpha_{2n} \text{ i dodamo 2.–oj vrsti, a zatim}\\ \text{istu proceduru ponavljamo množeći } (n+1).,(n+2).,\dots,2n.\text{–tu}\\ \text{vrstu redom elementima } 3.,4.,\dots,n.\text{–te vrste}\\ \text{matrice } A \text{ i njihovim dodavanjem redom } 3.,4.,\dots,n.\text{–toj}\\ \text{vrsti polazne matrice, tako da na kraju dobijamo:}\end{array}\right\}=$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|cccc}0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{1i}\,\beta_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{1i}\,\beta_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{1i}\,\beta_{in}\\ 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{2i}\,\beta_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{2i}\,\beta_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ni}\,\beta_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ni}\,\beta_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ni}\,\beta_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ni}\,\beta_{in}\\ \hline -1 & \dots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1\,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & -1 & \beta_{n\,1} & \beta_{n\,2} & \dots & \beta_{n\,n}\end{array}\right|=\left\{\begin{array}{l}\text{Primetimo da su sume}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\,\beta_{ij} \text{ koje se}\\ \text{pojavljuju u ovoj}\\ \text{matrici zapravo ma-}\\ \text{trični elementi matrice}\\ \mathcal{AB}\text{, tako da imamo:}\end{array}\right\}=\begin{vmatrix}\mathcal{O}_n & \mathcal{AB}\\ -\mathbb{I}_n & \mathcal{B}\end{vmatrix}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{zamenimo } i.\text{–tu}\\ \text{kolonu sa } (n+i).\\ \text{-tom kolonom}\\ (i=1,\dots,n)\end{array}\right\}=(-1)^n\begin{vmatrix}\mathcal{AB} & \mathcal{O}_n\\ \mathcal{B} & -\mathbb{I}_n\end{vmatrix}=(-1)^n\,\mathsf{det}\,(\mathcal{AB})\,\mathsf{det}\,(-\mathbb{I}_n)=(-1)^n\,\mathsf{det}\,(\mathcal{AB})\,(-1)^n=\mathsf{det}\,(\mathcal{AB}).\qquad\square$$

4.35. Bine – Košijeva teorema. Dokažite Bine-Košijevu teoremu, koristeći sledeću karakterizaciju determinante (vidi **4.12** Teorema 1): *Ako je $d:\mathbb{M}_n(\mathbb{F})\longrightarrow\mathbb{F}$, funkcija koja je multilinearni funkcional kolona matrice i alternirajuće preslikavanje kolona, tada je $d=\mathsf{det}\,(\mathbb{I}_n)\cdot\mathsf{det}$.*

4.36. Karakterizacija determinante II. dokažite sledeću teoremu:

Teorema 2. *Neka je $d:\mathbb{M}_n(\mathbb{F})\longrightarrow\mathbb{F}$ funkcija koja ima svojstva:*

(mh) *d je multilihomogeni funkcional kolona matrice, tj. $\forall\, i\in\{1,\dots,,n\}$, $\lambda\in\mathbb{F}$ i $a_i\in\mathbb{F}^n$, važi:*

$$d[a_1,..,a_{i-1},\lambda\,a_i,a_{i+1},..,a_n]=\lambda\,d[a_1,..,a_i,..,a_n],$$

(dv) *d se ne menja ako nekoj koloni dodamo bilo koju drugu kolonu tj. $(\forall\, i,j\in\{1,..,n\},\ i\neq j)$*

$$d[a_1,..,a_{i-1},a_i\overset{i}{+}a_j,a_{i+1},..,a_n]=d[a_1,..,a_i,..,a_n],$$

(n) $d(\mathbb{I}_n)=1$.

Tada je $d=\mathsf{det}$.

Digresija. Dakle, determinanta je jedinstveno određena i sa tri svojstva (mh), (dv) i (n), koju su 'na prvi pogled' slabija nego svojstva (ml), (a) i (n) iz 4.12 Teoreme (Karakterizacije I determinante).

Dokaz. Mi ćemo u ovom dokazu pokazati da svojstva (mh), (dv) i (n) impliciraju pretpostavke (ml), (a) i (n) prethodne teoreme, ili preciznije pokazaćemo da (ml), (a) i (n) impliciraju multiaditivnost i alterniranost. Prema tome dokaz se svodi na pokazivanje sledeće dve osobine $(\forall\, i,j \in \{1,\dots,n\},\ a_i^1,\ a_j^2 \in \mathbb{F}^n)$:

(ma) $d\,[a_1,..,a_{i-1},a_i^1+a_i^2,a_{i+1},..,a_n] = d\,[a_1,..,a_i^1,..,a_n] + d\,[a_1,..,a_i^1,..,a_n]$,

(a) $i<j,\ \ a_i = a_j,$ tada je $d\,[a_1,..,\overset{i}{a_i},..,\overset{j}{a_i},..,a_n] = 0.$

Prvo iz (mh) imamo da je

$$d\,[a_1,...,0,...,a_n] = d\,[a_1,...,0\cdot a_i,...,a_n] = 0\cdot d\,[a_1,...,a_i,...,a_n] = 0. \tag{4.41}$$

Pretpostavimo (BSO [18], radi jednostavnijeg zapisa) da su prve dve kolone matrice $\mathcal{A}$ jednake onda redom nalazimo

$$d\,[a_1,a_1,a_3,...,a_n] \overset{(mh)}{=} -d\,[a_1,-a_1,a_3,...,a_n] \overset{(dv)}{=} -d\,[a_1-a_1,-a_1,a_3,...,a_n] \overset{(4.41)}{=} d\,[0,a_1,a_3,...,a_n] = 0.$$

Time je pokazana osobina (a).

Pokažimo sada još i (ma). Prvo, koristeći (mh) i (dv) pokažimo da se d ne menja ako se nekoj koloni doda linearna kombinacija preostalih kolona. Dokaz ove činjenice provodimo indukcijom po broju vektora koji učestvuju u linearnoj kombinaciji. Radi jednostavnijeg zapisa (BSO) pretpostavimo da pomenutu linearnu kombinaciju kolona dodajemo 1.-voj koloni.
(bi) za $n=1$, uz $\lambda \neq 0$ [19] i $i_1 \in \{2,\dots,n\}$, imamo:

$$\begin{aligned} d\,[a_1+\lambda\, a_{i_1},a_2,...,a_n] &= d[\lambda\,(\frac{1}{\lambda}\,a_1 + a_{i_1}),a_2,...,a_n] \overset{(mh)}{=} -\lambda\, d[\frac{a_1}{\lambda}+a_{i_1},a_2,..,-a_{i_1},..,a_n] \\ &\overset{(dv)}{=} -\lambda\cdot d[\frac{1}{\lambda}\,a_1+a_{i_1}-a_{i_1},a_2,..,-a_{i_1},..,a_n] = -\lambda\cdot d[\frac{1}{\lambda}\,a_1,a_2,..,-a_{i_1},..,a_n] \\ &\overset{(mh)}{=} d\,[a_1,a_2,..,a_{i_1},..,a_n]. \end{aligned}$$

(ki) Sada pretpostavimo da je:

$$d\,[a_1+\sum_{j=1}^{k}\lambda_{i_j}\,a_{i_j},a_2,a_3,...,a_n] = d\,[a_1,a_2,\dots,a_n] \tag{4.42}$$

za sve $k\geq 1$ i $i_1,\dots,i_k \in \{2,\dots,n\}$. Sada redom imamo,

$$\begin{aligned} d\,[a_1+\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_{i_j}\,a_{i_j},a_2,...,a_n] &= d\,[(a_1+\sum_{j=1}^{k}\lambda_{i_j}\,a_{i_j})+\lambda_{i_{k+1}}\,a_{i_{k+1}},a_2,...,a_n] \overset{(bi)}{=} d\,[a_1+\sum_{j=1}^{k}\lambda_{i_j}\,a_{i_j},a_2,...,a_n] \\ &\overset{(4.42)}{=} d\,[a_1,a_2,...,a_n]. \end{aligned}$$

Ako je $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) < n$ onda neku od kolona matrice $\mathcal{A}$ recimo 1.-vu možemo zapisati kao linearnu kombinaciju preostalih, tj. $a_1 = \sum\limits_{i=2}^{n}\lambda_i\,a_i$, pa imamo:

$$d\,[a_1,a_2,...,a_n] = d\,[a_1-\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\,a_i,a_2,...,a_n] = d\,[0,a_2,...,a_n] \overset{(4.41)}{=} 0.$$

Dakle, ako je $\operatorname{rang}\mathcal{A} < n$ onda je $d(\mathcal{A}) = 0$. Završimo sada dokaz osobine (ma) za 1.-vu komponentu (jasno radi jednostavnijeg zapisa). Posmatrajmo determinantu, $d[a_1^1+a_1^2,a_2,\dots,a_n]$, tada imamo dve mogućnosti:

(i1) $\operatorname{rang}[a_2,\dots,a_n] < n-1$

(i2) $\operatorname{rang}[a_2,\dots,a_n] = n-1$.

(i1) Kako je $\operatorname{rang}[a_2,\dots,a_n] < n-1$, onda matrice:

$$[a_1^1,a_2,\dots,a_n],\quad [a_1^2,a_2,\dots,a_n]\quad \text{i}\quad [a_1^1+a_1^2,a_2,\dots,a_n]$$

imaju rang manji od n tako da je

$$d[a_1^1+a_1^2,a_2,\dots,a_n] = d[a_1^1,a_2,\dots,a_n] = d[a_1^2,a_2,\dots,a_n] = 0,$$

i (ma) u ovom slučaju važi.

(i2) Ako matrice $[a_1^1,a_2,\dots,a_n]$, $[a_1^2,a_2,\dots,a_n]$ i $[a_1^1+a_1^2,a_2,\dots,a_n]$ imaju rang manji od n onda kao u (i1) tvrdnja važi. Budući da je rang skupa $\{a_1^1,a_1^2,a_1^1+a_1^2\}$ manji ili jednak 2 preostaje da dokažemo traženu formulu kada je npr.

$$\operatorname{rang}[a_1^1,a_2,\dots,a_n] = n. \tag{4.43}$$

Slučaj, $\operatorname{rang}[a_1^2,a_2,\dots,a_n] = n$, je analogan. Ako je

$$\operatorname{rang}[a_1^1+a_1^2,a_2,\dots,a_n] = n,$$

[18] Bez smanjenja opštosti.
[19] jer ako je $\lambda = 0$ nemamo što dokazivati

onda je barem jedna od matrica $[a_1^1, a_2, \dots, a_n]$ i $[a_1^2, a_2, \dots, a_n]$ ranga n, te se svodi na slučaj (4.43) (ili njemu analogan). Dakle, neka je ispunjeno (4.43), tada je uređeni skup $(a_1^1, a_2, \dots, a_n)$ baza vektorskog prostora $\mathbb{F}^n$, pa je $a_1^2 = \lambda_1 a_1^1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i a_i$ za neke skalare $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Tako da sada imamo,

$$\begin{aligned} d[a_1^1 + a_1^2, a_2, \dots, a_n] \;&=\; d[a_1^1 + \lambda_1 a_1^1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i a_i, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n] = d[(1+\lambda_1)a_1^1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i a_i, a_2, ..., a_n] \\ &\stackrel{(4.42)}{=} d[(1+\lambda_1)\, a_1^1, a_2, ..., a_n] \stackrel{(mh)}{=} (1+\lambda_1)\, d[a_1^1, a_2, ..., a_n] \\ &= d[a_1^1, a_2, ..., a_n] + d[\lambda\, a_1^1, a_2, ..., a_n] \stackrel{(4.42)}{=} d[a_1^1, a_2, ..., a_n] + d[\lambda_1 a_1^1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i a_i, a_2, ..., a_n] \\ &= d[a_1^1, a_2, ..., a_n] + d[a_1^2, a_2, ..., a_n]. \end{aligned}$$

Time je dokaz završen. □

4.37. Karakterizacija determinante III. Dokažite sledeću teoremu:

Teorema 3. *Neka je $\mathbb{F}$ algebarski zatvoreno polje i neka je $d : \mathbb{M}_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$, funkcija koja ima svojstva:*

(nn) $d(\lambda\, \mathbb{I}_n) = \lambda^n$.

(bc) $d(\mathcal{A}\,\mathcal{B}) = d(\mathcal{A})\, d(\mathcal{B})$.

tada je $d = \det$.

Digresija. Dakle, determinanta je karakterisana sa ova dva jednostavna svojstva, koja na prvi pogled izgledaju da su "slabija svojstva" od onih iz prethodnih karakterizacija, pa je dokaz relativno komplikovaniji i u njemu ćemo koristiti rezultate prethodne dve karakterizacije.

Dokaz. Pokazaćemo da pretpostavke ove karakterizacije impliciraju pretpostavke prethodne Teoreme 2. Da bismo to dokazali pokažimo prvo tri jednostavne leme, koje impliciraju da se svojstva (mh) i (dv) iz te karakterizacije mogu realizovati množenjem sa leva ili sa desna polazne matrice (uz korišćenje Bine-Košijeve teoreme (BKT)) sa specijalnim matricama (vidi elementarne transformacije) čije ćemo determinante izračunati u sledećim lemama. Pre lema, primetimo da uvrštavanjem $\lambda = 1$ u (nn) jednostavno sledi (n) iz prethodne karakterizacije.

Lema 1. *Za $i \neq j$ posmatrajmo matricu $\mathbb{E}_{ij}^\lambda = \mathbb{I}_n + \lambda\, \mathbb{E}_{ij} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ tada je $d(\mathbb{E}_{ij}^\lambda) = 1$.*

Podsetimo se da je $\mathbb{E}_{ij}$ matrica koja na preseku $i.-$te vrste i $j.-$te kolone ima 1, a na svim ostalim mestima 0.

Dokaz. Iz (bc) i (nn) imamo:

$$1 = d(\mathbb{I}_n) = d(\mathcal{A}\,\mathcal{A}^{-1}) = d(\mathcal{A}) \cdot d(\mathcal{A}^{-1}), \text{ odakle je } d(\mathcal{A}^{-1}) = \frac{1}{d(\mathcal{A})}. \tag{$*$}$$

Sada ćemo naći matrice $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ takve da je $\mathbb{E}_{ij}^\lambda = \mathcal{C}\,\mathcal{D}\,\mathcal{C}^{-1}\,\mathcal{D}^{-1}$. Prvo pretpostavimo da je $n \geq 3$ i uzmimo da je $\mathcal{C} = \mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{pj}$, $p \neq j$ i $\mathcal{D} = \mathbb{I}_n + \lambda\, \mathbb{E}_{ip}$, $i \neq p$, tada je $\mathcal{C}^{-1} = \mathbb{I}_n - \mathbb{E}_{pj}$ i $\mathcal{D}^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda\, \mathbb{E}_{ip}$. Kako znamo od ranije, važi i formula:

$$\mathbb{E}_{ij}\, \mathbb{E}_{kt} = \delta_{jk}\, \mathbb{E}_{it}. \tag{4.44}$$

Koristeći ovu formulu imamo redom,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{D}^{-1} \;&=\; (\mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{pj})\,(\mathbb{I}_n + \lambda\, \mathbb{E}_{ip})\,(\mathbb{I}_n - \mathbb{E}_{pj})\,(\mathbb{I}_n - \lambda\, \mathbb{E}_{ip}) = (\mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{pj} + \lambda\, \mathbb{E}_{ip} + \lambda\, \mathbb{E}_{pj}\, \mathbb{E}_{ip}) \\ &\times(\mathbb{I}_n - \mathbb{E}_{pj} - \lambda\, \mathbb{E}_{ip} + \lambda\, \mathbb{E}_{pj}\, \mathbb{E}_{ip}) \stackrel{(4.44)}{=} (\mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{pj} + \lambda\, \mathbb{E}_{ip})\,(\mathbb{I}_n - \mathbb{E}_{pj} - \lambda\, \mathbb{E}_{ip}) \stackrel{(4.44)}{=} \mathbb{I}_n - (\mathbb{E}_{pj} + \lambda\, \mathbb{E}_{ip})^2 \\ &= \mathbb{I}_n - (\mathbb{E}_{pj}\, \mathbb{E}_{pj} + \lambda^2\, \mathbb{E}_{ip}\, \mathbb{E}_{ip} + \lambda\, \mathbb{E}_{ip}\, \mathbb{E}_{pj} + \lambda\, \mathbb{E}_{pj}\, \mathbb{E}_{ip}) \\ &\stackrel{(4.44)}{=} \mathbb{I}_n - \lambda\, \mathbb{E}_{ij} = \mathbb{E}_{ij}^\lambda\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Ako je $n = 2$ onda imamo samo dve mogućnosti za $\mathbb{E}_{ij}^\lambda$ i to: $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ili $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$. U prvom slučaju nije se teško uveriti da za

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{važi:} \quad \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{C}\,\mathcal{D}\,\mathcal{C}^{-1}\,\mathcal{D}^{-1}.$$

Slično se vidi (npr. transponovanjem) da se i matrica $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$ može zapisati u istom obliku.

Dakle, u svakom slučaju važi da je $\mathbb{E}_{ij}^\lambda = \mathcal{C}\,\mathcal{D}\,\mathcal{C}^{-1}\,\mathcal{D}^{-1}$ za neke matrice $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$, tako da sada, koristeći formulu $(*)$ redom imamo:

$$d(\mathbb{E}_{ij}^\lambda) = d(\mathcal{C}) \cdot d(\mathcal{D}) \cdot d(\mathcal{C}^{-1}) \cdot d(\mathcal{D}^{-1}) = \big(d(\mathcal{C}) \cdot d(\mathcal{C}^{-1})\big) \cdot \big(d(\mathcal{D}) \cdot d(\mathcal{D}^{-1})\big) = 1.$$

Lema 2. *Za $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ i $\lambda \neq 0$ neka je $H_{ij}^\lambda = \operatorname{diag}[1, .., \overset{i}{\lambda}, 1, .., \overset{j}{\lambda^{-1}}, 1 \dots, 1]$. Tada je $d(H_{ij}^\lambda) = 1$.*

Dokaz. Neka je $\lambda \neq 1$, posmatrajmo matricu $\mathcal{D} = \operatorname{diag}[1, \dots, \overset{i}{1 - 1/\lambda}, 1, \dots, \overset{j}{\lambda - 1}, 1 \dots, 1]$. Elementarna matrica $\mathbb{G}_{ij}$, $i \neq j$, (vidi elementarne transformacije) koje se iz $\mathbb{I}_n$ dobije zamenom $i.-$te i $j.-$te vrste ima osobinu da je $\mathbb{G}_{ij}^{-1} = \mathbb{G}_{ij}$. Kako je $\mathcal{D}^{-1} =$

$\operatorname{diag}[1,\ldots,\lambda/(\lambda-1),1,\ldots,1/(\lambda-1),1\ldots,1]$, tako da je matrica $\mathbb{G}_{ij}\,\mathcal{D}\,\mathbb{G}_{ij} = \operatorname{diag}[(1,\ldots,\lambda-1,1,\ldots,(\lambda-1)/\lambda,1\ldots,1]$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{-1}\mathbb{G}_{ij}\mathcal{D}\mathbb{G}_{ij}^{-1} = \mathcal{D}^{-1}(\mathbb{G}_{ij}\mathcal{D}\mathbb{G}_{ij}^{-1}) &= \operatorname{diag}[1,..,\overset{i}{\frac{\lambda}{\lambda-1}},1,..,\overset{j}{\frac{1}{\lambda-1}},1,..,1]\operatorname{diag}[1,..,\overset{i}{\lambda-1},1,..,\overset{i}{\frac{\lambda-1}{\lambda}},1,..,1]\\ &= \operatorname{diag}[1,..,\overset{i}{\lambda},1,..,\overset{i}{\frac{1}{\lambda}},1,..,1] = H_{ij}^{\lambda},\end{aligned}$$

odakle na isti način, primenom funkcije d na prethodnu jednakost uz korišćenje (bc), kao i u dokazu prethodne leme zaključujemo da je $d(H_{ij}^{\lambda}) = 1$. □

Lema 3. *Za* $\lambda \neq 0$ *neka je* $\mathbb{F}_{i,\lambda} = \operatorname{diag}[1,\ldots,\lambda,1,\ldots,1]$ *tada je* $d(F_{i,\lambda}) = \lambda$.

Digresija. Pre samog dokaza primetimo da je, za $i \neq j$, $H_{ij}^{\lambda} = F_{i,\lambda}\,F_{j,\lambda^{-1}}$.

Dokaz. Posmatrajmo jednakost dijagonalnih matrica,

$$\lambda\,\mathbb{I}_n = H_{1i}^{\lambda}\,H_{2i}^{\lambda}\ldots H_{i-1\,i}^{\lambda}\,H_{i+1\,i}^{\lambda}\,\ldots H_{n\,i}^{\lambda}\,F_{i,\lambda^n}. \tag{4.45}$$

Ako sada na (4.45) primenimo funkciju d onda korišćenjem svojstava (nn), (bc) i Leme 2. dobijamo,

$$\lambda^n = d(\lambda\,\mathbb{I}_n) = d(H_{1i}^{\lambda}\,H_{2i}^{\lambda}\ldots H_{i-1\,i}^{\lambda}\,H_{i+1\,i}^{\lambda}\,\ldots H_{n\,i}^{\lambda}\,F_{i,\lambda^n}) = d(H_{1i}^{\lambda})\,d(H_{2i}^{\lambda})\,\ldots\,d(H_{n-1\,i}^{\lambda})\,d(F_{i,\lambda^n}) = d(F_{i,\lambda^n}).$$

Dakle, imamo da je $d(F_{i,\lambda^n}) = \lambda^n$, a kako je polje algebarski zatvoreno postoji $\eta \in \mathbb{F}$ takav da je $\eta^n = \lambda$ (jer je rešenje polinomijalne jednačine $f(x) = x^n - \lambda = 0$). Na kraju imamo:

$$d(\mathbb{F}_{i,\lambda}) = d(F_{i,\eta^n}) = \eta^n = \lambda$$

i dokaz ove leme je gotov. □

Nastavak dokaza **Teoreme 3**. Prvo pokažimo da pretpostavke ove karakterizacije impliciraju svojstvo (dv) iz Teoreme 2. Ako u Lemi 1 uvrstimo $\lambda = 1$, vidimo da matrica $\mathcal{A}\mathbb{E}_{ij}^{1}$ ima sve kolone iste kao i matrica $\mathcal{A}$ osim $i.-$te kolone kojoj je dodata $j.-$ta kolona. Tako da sada imamo:

$$d(\mathcal{A}\mathbb{E}_{ij}^{1}) = d(\mathcal{A})\,d(\mathbb{E}_{ij}^{1}) = d(\mathcal{A}).$$

Dakle, dodavanjem neke vrste matrice $\mathcal{A}$ nekoj drugoj vrsti determinanta se ne menja.

Slično se dokazuje i (mh). Zaista, dovoljno je primetiti da matrica $\mathcal{A}\mathbb{F}_{i,\lambda}$ ima sve jednake kolone kao i matrica $\mathcal{A}$ osim $i.-$te koja je pomnožena sa λ. Ako sada iskoristimo Lemu 3 i (bc) imamo redom:

$$d[a_1,\ldots,a_{i-1},\lambda\,a_i,a_{i+1},\ldots,a_n] = d(\mathcal{A}\mathbb{F}_{i,\lambda}) \overset{(bc)}{=} d(\mathcal{A})\,d(\mathbb{F}_{i,\lambda}) = \lambda\,d(\mathcal{A}).$$

Time je u potpunosti završen dokaz ove karakterizacije. □

4.37. Karakterizacija determinante. Pokažite kontraprimerom da se uslov algebarske zatvorenosti ne može ispustiti iz pretpostavki Karakterizacije III ako je n paran. Da li se može ispustiti u slučaju da je n neparan?

GLAVA 5

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

5.1. Definicija. Neka je dat skup $F = \{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathbb{F}[x_1, \dots, x_m]$ linearnih polinoma u promenljivima $x_1, \dots x_m$. Skup F definiše sledeći **sistem linearnih jednačina**:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, \dots, x_m) &= \alpha_{11}\, x_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \cdots + \alpha_{1m}\, x_m - \beta_1 = 0, \\
f_2(x_1, \dots, x_m) &= \alpha_{21}\, x_1 + \alpha_{22}\, x_2 + \cdots + \alpha_{2m}\, x_m - \beta_2 = 0, \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
f_n(x_1, \dots, x_m) &= \alpha_{n1}\, x_1 + \alpha_{n2}\, x_2 + \cdots + \alpha_{nm}\, x_n - \beta_n = 0,
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

koji kraće zapisujemo kao

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\, x_k = \beta_i, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{5.2}$$

Sistem (5.1) možemo zapisati još u kompaktnijem matričnom obliku, tj. kao $\mathcal{A}X = B$,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Matricu $\mathcal{A}$ iz matričnog zapisa nazivamo **matricom sistema**. Sistemu (5.1) dodeljujemo sledeću matricu:

$$\mathcal{A}_p = \left[\ \mathcal{A} \,\middle|\, b\ \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} & \beta_n \end{array}\right], \tag{5.4}$$

koja nazivamo **proširenom matricom sistema.**

Rešenje sistema (5.1) je svaka uređena $m-$torka $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ iz $\mathbb{F}^m$ koja zamenom: $x_i = \gamma_i$, $i = 1, \dots, m$, u sistemu (5.1) daje identitete u polju $\mathbb{F}$.

Primetimo da u slučaju kada je $m = n$ i kada je $\mathcal{A}$ invertibilna matrica, onda iz matrične jednačine $\mathcal{A}\,X = B$ dobijamo da je rešenje dato formulom:

$$X = \mathcal{A}^{-1}\, B.$$

5.2. Geometrijska interpretacija. Ako su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, pri čemu je $\dim U = m$ i $\dim V = n$ i ako u tim prostorima izaberemo baze e i f, tada matrica $\mathcal{A}$ predstavlja matricu linearnog operatora $A : U \longrightarrow V$. Prema tome, rešavanje sistema (5.1) svodi se na određivanje vektora $x \in U$ takvog da je $A\,x = b$. Matricu, ili bolje reći kolonu, koja odgovara vektorima $x \in U$ i $b \in V$ obeležavaćemo redom sa X i B.

Štaviše možemo uzeti da je $U = \mathbb{F}^m$ i $V = \mathbb{F}^n$ i da je $\mathcal{A}$ matrica operatora u kanonskom paru baza e od U i f od V. Sve ono što smo naučili do sada o linearnim operatorima, omogućuje nam mnogo jednostavniji pogled na linearne sisteme jednačina. Tako da su imamo sledeću teoremu.

Teorema 1. *Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, pri čemu je $\dim U = m$ i $\dim V = n$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*

(i1) *sistem (5.1) ima rešenja.*

(i2) $b \in \mathsf{Im}\, A$.

(i3) $\mathsf{rang}\, \mathcal{A} = \mathsf{rang}\, \mathcal{A}_p$.

Digresija. Ekvivalencija uslova (i1) i (i3) poznata je kao Kroneker[1]–Kapelijeva[2] teorema

Dokaz. Ekvivalentnost iskaza (i1) i (i2) je očigledna, jer je (i2) samo reformulacija činjenice da sistem ima rešenja na jeziku linearnih operatora.

Pokažimo ekvivalentnost iskaza (i2) i (i3). Ako je $b \in \mathsf{Im}\, A$ i kako kolone matrice $\mathcal{A}$ predstavljaju skup generatora potprostora $\mathsf{Im}\, A$, sledi da je $b \in \mathcal{L}(Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_m)$, tj. $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}_p)$. Obratno, neka je $r = r(\mathcal{A})$, tada postoje indeksi $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ takvi da su vektori (kolone matrice $\mathcal{A}$) $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ linearno nezavisni, a preostale kolone matrice $\mathcal{A}$ su njihove linearne kombinacije. Kako je i $r = r(\mathcal{A}_p)$, tada je i poslednja kolona te matrice, a ta je b, linearna kombinacija kolona $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, drugim rečima $b \in \mathsf{Im}\, A$. □

Odavde odmah dobijamo jednostavnu posledicu.

Posledica. *Ako je* $\mathsf{rang}\, \mathcal{A} = n$, *tj. ako je* $\mathsf{Im}\, A = V$ *onda sistem* (5.1) *ima rešenja.*

Kramerov sistem[3]. Sistem jednačina (5.2) zove se Kramerov ako je:

(i1) $m = n$,

(i2) ako je $\mathsf{rang}\, \mathcal{A} = n$.

Teorema 2. *Kramerov sistem jednačina uvek ima jedinstveno rešenje, koje je dato formulom*

$$x_k = \frac{\mathcal{D}_k}{\mathcal{D}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.5}$$

gde je $\mathcal{D} = \det \mathcal{A} = \det[a_1, a_2, ..., a_n]$ *determinanta matrice sistema, i gde su* $\mathcal{D}_k = \det[a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n]$, *determinante matrica koje se dobijaju iz matrice* $\mathcal{A}$ *zamenom njene* $k.-$*te kolone vektorom* b,

$$\mathcal{D}_k = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1\,k-1} & \boxed{\beta_1} & \alpha_{1\,k+1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2\,k-1} & \beta_2 & \alpha_{2\,k+1} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{n\,k-1} & \beta_n & \alpha_{n\,k+1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Dokaz. Primetimo da je uslov $\mathsf{rang}\, \mathcal{A} = n$ ekvivalentan sa uslovom $\det \mathcal{A} \neq 0$, tako da Kramerov sistem uvek ima jedinstveno rešenje, koje je dato formulom $X = \mathcal{A}^{-1} b$. U **4.7** Posledica dokazali smo formulu,

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \mathsf{adj}\, \mathcal{A},$$

tako da je

$$X = \mathcal{A}^{-1} b = \frac{1}{\det \mathcal{A}} (\mathsf{adj}\, \mathcal{A})\, b \quad \text{ili koordinatno} \quad x_k = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \mathsf{A}_{jk}\, \beta_j, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.7}$$

Koristeći Laplasov razvoj matrice $\mathcal{D}_k$ po $k-$toj koloni vidimo da je

$$\mathcal{D}_k = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \mathsf{A}_{jk}\, \beta_j$$

tako da iz (5.7) odmah sledi tražena formula. □

5.3. Homogeni sistem. Za linearni sistem jednačina (5.1) kažemo da je **homogen** ako je

$b = 0$, ili ekvivalentno, ako su sve komponente vektora b jednake 0, tj. $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$.

Ako se setimo geometrijske interpretacije linearnih sistema datih u tački **5.2.** onda vidimo da je rešavanje homogenogog sistema ekvivalentno rešavanju jednačine $A\,x = 0$, tj. nalaženju jezgra linearnog operatora A. Preciznije, imamo sledeću teoremu.

Teorema. *Neka je dat homogeni sistem* $\mathcal{A}X = 0$, *takav da je rang od* $\mathcal{A}$ *jednak* r *i defekt od* $\mathcal{A}$ *jednak je* $d = m - r$.

---

[1] Kronecker Leopold, 1823 -– 1891 nemački matematičar

[2] Capelli Alfredo, 1855 -– 1910 italijanski matematičar.

[3] Gabriel Cramer, 1704 -– 1752, švajcarski matematičar

(i1) *Skup rešenja homogenog sistema je jezgro linearnog operatora* A. *Tada postoji baza* $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ *potprostora* Ker A *takva* da *je svako rešenje sistema oblika*

(5.8) $$x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i \qquad \text{za neki izbor parametara } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d.$$

(i2) *Homogeni sistem uvek ima barem trivijalno rešenje* $X = 0$, *tj.* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, *tako da je uvek konzistentan (ne protivrečan).*

(i3) *Homogeni Kramerov sistem ima samo trivijalno rešenje.*

(i4) *Homogeni sistem u kojem je broj jednačina* m *manji od broja nepoznatih* n *uvek ima netrivijalno rešenje.*

Dokaz. (i1) primetimo da na jeziku linearnih operatora sistem jednačina $\mathcal{A}X = 0$, zapravo tvrdi da je vektor x rešenje sistema akko $x \in$ Ker A. Pri tome operatoru A odgovara matrica $\mathcal{A}$, a vektoru $x \in U$ kolona X. Dakle, ako je $\mathsf{rang}(A) = \mathsf{rang}(\mathcal{A}) = r$, tada je, zbog teoreme o rangu i defektu linearnog operatora, $d = \mathsf{defekt}(A) = \dim U - r = m - r$, i postoji neka baza $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ od Ker A takva da je svako rešenje sistema oblika

(5.9) $$x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i \qquad \text{za neki izbor parametara } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d.$$

(i2) sledi iz (i1) jer je u nula vektor uvek u jezgru linearnog operatora A.

(i3) Prema Teorema 5.2 svaki Kramerov sistem ima jedinstveno rešenje, a prema (i2) znamo da je 0 uvek rešenje svakog homogenog sistema (pa tako i Kramerovog), koje se onda mora podudarati sa tim koje pomenuta teorema[4] daje.

(i4) Ako je $\dim V = n < m$ tada iz teoreme o rangu i defektu linearnog operatora, sledi da je $d(A) \geq 1$, i postoji $0 \neq x \in$ Ker A. □

Primedba 1. Ako uzmemo u obzir da smo na početku izabrali baze e i f, u prostorima U i V i ako označimo sa $W_i = v_i(e)$, $i = 1, 2, \dots, d$, koordinatne matrice $(m \times 1)$ vektora baze v_i s obzirom na bazu e, onda skup $\{W_1, W_2, \dots, W_d\}$ zovemo **fundamentalnim skupom rešenja** homogenog sistema. Dakle, svaki vektor X koji je rešenje ovog homogenog sistema može se zapisati u obliku,

(5.10) $$X = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \cdots + \lambda_d W_d.$$

Rezimirajmo, homogeni sistem za koji je $d = \mathsf{defekt}\,\mathcal{A} = m - \mathsf{rang}\,\mathcal{A} \neq 0$, ima tačno d fundamentalnih rešenja i svako drugo rešenje sistema je njihova linearna kombinacija.

Primedba 2. Napomenimo da pojam vektorskog prostora, kao fundamentalni pojam Linearne algebre, možemo uvesti posmatrajući svojstva skupa rešenja homogenog sistema linearnih jednačina. U mnogim knjigama posvećenim Linearnoj algebri tako se i radi. Taj pristup ima prednosti, jer na početku čitaocu praktički nije potrebno nikakvo predznanje o osnovnim algebarskim strukturama, ali ima i određenih mana jer zahteva više vremena i neke teme je potrebno više puta ponavljati. U pristupu prezentovanom u ovom tekstu, ako dobro razumemo linearne operatore, priča o sistemima linearnih jednačina je direktna posledica onoga što smo naučili u prethodnim glavama.

5.4. Nehomogeni sistem. Za sistem (5.1) kažemo da je **nehomogen** ako je vektor $B \neq 0$, tj. ako barem jedan od β_i nije 0. Svakom nehomogenom sistemu $\mathcal{A}\,X = B$ pridružen je homogeni sistem $\mathcal{A}\,X = 0$.
Zbog **5.2** Teorema 1, ako nehomogeni sistem ima rešenja onda je dobro definisan broj, $r = r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}_p)$, kojeg zovemo rang sistema.

Da bismo rešili nehomogeni sistem, koristimo interpretaciju datu u **5.2.**. Dakle, neka je $A : U \longrightarrow V$, linearni operator kojem u paru izabranih baza e (od U) i f (od V) odgovara matrica $\mathcal{A}$. Ako pretpostavimo da je nehomogeni sistem konzistentan, onda skup

$$A^{-1}(b) = \{x \in U \mid A\,x = b\}$$

nije prazan. Izaberimo sada neko partikularno rešenje, v_0, nehomogenog sistema i ako je v bilo koje drugo rešenje nehomogenog sitema, tada imamo (jer su $v, v_0 \in A^{-1}(b)$):

[4] Drugi način da se u to ubedimo jeste da u rešenje Kramerovog sistema dato u Teorema 5.2 uvrstimo da je $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$.

$$A(v - v_0) = A(v) - A(v_0) = b - b = 0,$$

odakle zaključujemo da je vektor $v - v_0$ rešenje pripadnog homogenog sistema. Prema tome, $v - v_0 \in \mathsf{Ker}\, A$, tj. $v \in v_0 + \mathsf{Ker}\, A$, ili ekvivalentno imamo da je $A^{-1}(b) \subseteq v_0 + \mathsf{Ker}\, A$. Očigledo važi i druga inkluzija, tako da je $A^{-1}(b) = v_0 + \mathsf{Ker}\, A$. Dakle, rešenje nehomogenog sistema je linearna mnogostrukost, određena nekim partikularnim rešenjem v_0 i paralelna je potprostoru $\mathsf{Ker}\, A$. Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. *Neka je $\mathcal{A}X = B \neq 0$, nehomogeni sistem takav da je $r = r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}_p)$ rang sistema, i defekt od $\mathcal{A}$ jednak je $d = m - r$. Tada je skup rešenja sistema $\mathcal{A}X = B$ linearna mnogostrukost, tj.*

$$x = v_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, v_i, \tag{5.11}$$

gde je v_0 neko partikularno rešenje sistema, $(v_1, v_2, \ldots, v_d)$ baza potprostora $\mathsf{Ker}\, A$ i gde su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{F}$ slobodni parametri[5].

Primedba 1. Ako sada sa W_0 označimo vektor (matricu tipa $m \times 1$) koji odgovara vektoru v_0 u bazi e, tj. $W_0 = v_0(e)$ i slično $X = x(e)$ i ako su W_i, $i = 1, \ldots, d$ fundamentalna rešenja pridruženog homogenog sistema (vidi **5.3.**), onda vidimo da postoje skalari λ_i, $i = 1, \ldots, d$ takvi da je

$$X - W_0 = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, W_i \qquad \text{ili ekvivalentno,} \qquad X = W_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, W_i, \tag{5.12}$$

odakle sledi da je opšte rešenje nehomogenog sistema suma bilo kojeg partikularnog rešenja tog sistema i opšteg rešenja pridruženog homogenog sistema.

Primedba 2. Prethodni zaključak sugeriše i metodu za rešavanje nehomogenih sistema, a ona se sastoji u tome da se prvo reši pridruženi homogeni sistem, a zatim se "pogodi" jedno partikularno rešenje, te je opšte rešenje sistema dato formulom (5.12).

Posledica. *Neka je $\mathcal{A}X = B$ linearni sistem jednačina nad poljem $\mathbb{F}$. Tada skup rešenja ovog sistema može biti*

(i1) *ako je $\mathsf{char}\, \mathbb{F} = 0$: prazan skup, jednočlan i beskonačan.*

(i2) *ako je $\mathsf{char}\, \mathbb{F} = p$ (p prost broj): prazan skup, jednočlan i stepen broja* p.

Dokaz. Ako je dati linearni sistem konzistentan, tj. ima rešenja, tada je skup rešenje linearnog sistema $\mathcal{A}X = B$ linearna mnogostrukost dimenzije d. U slučaju da je $d = 0$ u oba slučaja postoji samo jedno rešenje. Ako je $d > 0$ i $\mathsf{char}\, \mathbb{F} = 0$ (tj. polje je beskonačno), tada je skup rešenja beskonačan, a ako je $d > 0$ i $\mathsf{char}\, \mathbb{F} = p > 0$ (p prost broj) tada je broj rešenja stepen broja p. □

5.5. Gausova metoda eliminacije. Za praktično određivanje rešenja sistema (5.1) postoje razne metode, od kojih smo već neke spomenuli u slučaju kada je matrica $\mathcal{A}$ kvadratna i regularna. Tada je opšte rešenje sistema (5.1) dato formulom $X = \mathcal{A}^{-1} B$ tj. komponente vektora X mogu se izračunati tako što se odredi inverz matrice $\mathcal{A}$ ili se primene Kramerove formule $x_k = \mathcal{D}_k / \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ove metode osim očigledne manjkavosti, koja se odnosi na primenjivost samo u specijalnim slučajevima, uključuju i računanje determinante matrice sistema koje zahteva mnogo vremena i mnogo računskih operacija, što predstavlja drugu veliku manjkavost ove metode. Zbog ove činjenice rešavanje linearnih sistema ovom metodom (i kada je primenjiva) treba izbegavati, posebno ako je $n \geq 4$. Problemi u ovoj metodi nastaju ako matrica sistema nije regularna, tj. kada je $\det \mathcal{A} = 0$. U tom slučaju prvom metodom ne možemo ni zaključiti da li je sistem konzistentan, a da bismo zaključili Kramerovom metodom da sistem nije konzistentan morali bismo izračunati determinante $\mathcal{D}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ i ako se barem jedna od njih ne poništava sistem nema rešenja, ali i ako se sve poništavaju opet ništa ne znamo o skupu rešenja polaznog sistema.

Metoda koja je dobra, mora biti primenjiva u svim slučajevima i mora davati odgovore na sledeća pitanja: *da li je sistem konzistentan i kako izgleda skup rešenja.* Pri tome metoda mora biti i ekonomična, tj. broj potrebnih operacija ne sme biti isuviše veliki, npr. treba biti sličan broju operacija kao i pri određivanju ranga matrice sistema. Naravno, odmah se pitamo da li možemo i za ovu namenu primeniti metodu zasnovanu na elementarnim transformacijama. Odgovor na ovo pitanje je potvrdan i ova metoda zove se **Gausova metoda eliminacije** i zasniva se na elementarnim transformacijama koje vršimo nad vrstama proširene matrice sistema

[5] njihova 'sloboda' ogleda se u tome da svakom izboru brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{F}$ odgovara jedno rešenje polaznog sistema.

$\mathcal{A}_p$. Podsetimo se da smo kod određivanja ranga proizvoljne matrice $\mathcal{A}$, čiji rang ne možemo odrediti pogledom na datu matricu, vršili elementarne transformacije (koje ne menjaju rang !) nad polaznom matricom dok je nismo sveli na neku od kanonskih matrica $\mathbb{D}^r_{nm}$, čiji je rang jednak broju r, tj. jednak je broju jedinica duž glavne dijagonale. Ideja koja stoji iza Gausove metode je analogna. Dakle, ako je data proširena matrica sistema $\mathcal{A}_p$ tada jednim pogledom na nju obično ne možemo odrediti skup rešenja polaznog sistema, već je potrebno transformisati matricu $\mathcal{A}_p$, korišcenjem nekih transformacija koje ne menjaju skup rešenja polaznog sistema, do matrice $\mathcal{A}'_p$ iz koje odmah (jednim pogledom) znamo napisati njen skup rešenja. Primetimo da sledeće elementarne transformacije sistema linearnih jednačina (ETLSJ) ne menjaju skup rešenja polaznog sistema:

(el1) množenje neke jednačine skalarom različitim od 0,

(el2) zamena redosleda bilo koje dve jednačine,

(el3) dodavanje neke jednačine nekoj drugoj jednačini.

Ako samo malo razmislimo vidimo da su (ETLSJ) one iste elementarne transformacije (ET) **nad vrstama matrice** $\mathcal{A}_p$, koje smo koristili kod određivanja ranga matrice. Pri tome, na kraju dolazimo do transformisane proširene matrice sistema $\mathcal{A}'_p$, i gde se matrica $\mathcal{A}$ transformisala u matricu $\mathcal{A}'$ koja ima $r = \mathsf{rang}(\mathcal{A})$ kolona i u svakoj od tih kolona nalazi se jedna 1 i svi ostali elementi su 0 (tj. te kolone su ustvari vektori kanonske baze prostora $\mathbb{F}^n$). Kako te kolone matrice $\mathcal{A}'$ ne moraju biti prvih r kolona kanonske baze, na kraju je eventualno potrebno prenumerisati promenljive tako da pomenute kolone (vektori kanonske baze) matrice $\mathcal{A}'$ postanu prvih r kolona matrice $\mathcal{A}'$.
Ova poslednja transformacija u suštini predstavlja niz elementarnih transformacija zamene kolona i ona ne utiče na slobodni član tj, na transformisani vektor B'.

Preciznije, ako je $\mathsf{rang}\,\mathcal{A} = r$ onda nam upravo opisana metoda, prvo primena elementarnih transformacija nad vrstama matrice $\mathcal{A}_p$ (ETLSJ) i na kraju po potrebi prenumeracijom promenljivih, daje:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki}\, x_i = \beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, n \qquad \xrightarrow{\mathsf{Gaus}} \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha'_{ki}\, x_i = \beta'_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

ili matrično

$$\mathcal{A}_p = [\ \mathcal{A} \mid B\ ] \qquad \xrightarrow{\mathsf{Gaus}} \qquad \mathcal{A}'_p = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{I}_r & \mathcal{C} & B'_r \\ \mathcal{O}_{n-r,r} & \mathcal{O}_{n-r\,m-r} & B'_{n-r} \end{array}\right],$$

pri čemu je $\mathbb{I}_r$ jedinična matrica reda r, $\mathcal{O}_{n-r,r}$ i $\mathcal{O}_{n-r\,m-r}$ nula matrica naznačenih tipova i $B'_r = (\beta'_1, \ldots, \beta'_r)^\tau$ i $B'_{n-r} = (\beta'_{r+1}, \ldots, \beta'_n)^\tau$. Preciznije, matrica sistema je:

$$\text{(5.13)} \qquad \mathcal{A}'_p = \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha'_{1\,r+1} & \ldots & \alpha'_{1m} & \beta'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha'_{2\,r+1} & \ldots & \alpha'_{2m} & \beta'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha'_{r\,r+1} & \ldots & \alpha'_{rm} & \beta'_r \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta'_n \end{array}\right],$$

i njoj odgovara sistem:

$$\text{(5.14)} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 1 \cdot x_1 + & 0 \cdot x_2 + & \ldots + & 0 \cdot x_r + & \alpha'_{1\,r+1} \cdot x_{r+1} + & \ldots + & \alpha'_{1m} \cdot x_m & = & \beta'_1 \\ 0 \cdot x_1 + & 1 \cdot x_2 + & \ldots + & 0 \cdot x_r + & \alpha'_{2\,r+1} \cdot x_{r+1} + & \ldots + & \alpha'_{2m} \cdot x_m & = & \beta'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdot x_1 + & 0 \cdot x_2 + & \ldots + & 1 \cdot x_r + & \alpha'_{r\,r+1} \cdot x_{r+1} + & \ldots + & \alpha'_{rm} \cdot x_m & = & \beta'_r \\ 0 \cdot x_1 + & 0 \cdot x_2 + & \ldots + & 0 \cdot x_r + & 0 \cdot x_{r+1} & + \ldots + & 0 \cdot x_m & = & \beta'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdot x_1 + & 0 \cdot x_2 + & \ldots + & 0 \cdot x_r + & 0 \cdot x_{r+1} & + \ldots + & 0 \cdot x_m & = & \beta'_n \end{array}.$$

Odavde odmah sledi da ako je vektor $B'_{n-r} \neq 0$, tj. ako je barem jedan od skalara $\beta'_j \neq 0$, $j = r+1, \ldots, n$ onda sistem nema rešenja (nije konzistentan). Ako sistem ima rešenja tj. ako je $B'_{n-r} = 0$, onda u prethodnom sistemu prvo možemo zaboraviti zadnjih $n-r$ jednačina, a zatim vidimo da je opšte rešenje:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \beta'_1 - (\alpha'_{1\,r+1}\cdot t_1 + \alpha'_{1\,r+2}\cdot t_2 + \cdots + \alpha'_{1m}\cdot t_d),\\
x_2 &= \beta'_2 - (\alpha'_{2\,r+1}\cdot t_1 + \alpha'_{2\,r+2}\cdot t_2 + \cdots + \alpha'_{2m}\cdot t_d),\\
\vdots & \qquad\qquad \vdots\\
x_r &= \beta'_r - (\alpha'_{r\,r+1}\cdot t_1 + \alpha'_{r\,r+2}\cdot t_2 + \cdots + \alpha'_{rm}\cdot t_d),\ .\\
x_{r+1} &= t_1,\\
\vdots\ & \ \vdots\\
x_m &= t_d
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Primetimo da su $t_1, t_2, \ldots, t_d$ slobodni parametri, tako da je dimenzija skupa rešenja ovog sistema jednaka d. Kao što znamo svako rešenje sistema (5.1) možemo zapisati u obliku $X = W_0 + W_h$, pri čemu je W_0 neko partikularno rešenje, a W_h rešenje pripadnog homogenog sistema.

U našem slučaju partikularno rešenje dobijamo ako u rešenje sistema datog formulama (5.15), uvrstimo $t_1 = = t_2 = \cdots = t_d = 0$, a fundamentalna rešenja, W_i, $i = 1, \ldots, d$, dobijamo ako npr. u rešenju sistema (5.15) izaberemo parametre tako da je $t_i = 1$, i $t_j = 0$, $j = 1, \ldots, \hat{i}, \ldots d$. Prema tome, imamo da je:

$$
W_0 = \begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \vdots \\ \beta'_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\quad
W_1 = \begin{bmatrix} -\alpha'_{1\,r+1} \\ -\alpha'_{2\,r+1} \\ \vdots \\ -\alpha'_{r\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\quad
W_2 = \begin{bmatrix} -\alpha'_{1\,r+2} \\ -\alpha'_{2\,r+2} \\ \vdots \\ -\alpha'_{r\,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \ldots,\
W_d = \begin{bmatrix} -\alpha'_{1\,m} \\ -\alpha'_{2\,m} \\ \vdots \\ -\alpha'_{r\,m} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.
\tag{5.16}
$$

Očigledo, izborom parametara u definisanju fundamentalnih vektora W_i, dobija se linearno nezavisan skup tako da je $\{W_1, \ldots, W_d\}$ fundamentalan skup vektora (tj. baza skupa rešenja pridruženog homogenog sistema). Dakle, opšte rešenje sistema (5.1) je

$$
X = W_0 + \underbrace{\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \cdots + \lambda_d W_d}_{W_h \in \mathsf{Ker}\,\mathcal{A}}, \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{F}.
\tag{5.17}
$$

Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. *Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{F})$ neka matrica ranga r, i neka je $X \in \mathbb{F}^n$ neki vektor, takvi da je njima određen linearni sistem $\mathcal{A}X = B$. I neka je*

$$
\mathcal{A}'_p = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{I}_r & \mathcal{C} & B'_r \\ \mathcal{O}_{n-r,r} & \mathcal{O}_{n-r\,m-r} & B'_{n-r} \end{array}\right],
$$

transformisana proširena matrica sistema dobijena iz proširene matrice sistema $\mathcal{A}_p$ primenom (ETLSJ). Tada

- (nk) *linearni sistem, $\mathcal{A}X = B$, nema rešenja ako je vektor $B'_{n-r} \neq 0$.*
- (k) *linearni sistem, $\mathcal{A}X = B$, ima rešenja ako je vektor $B'_{n-r} = 0$. I skup rešenja dat je formulom (5.17), gde je W_0 neko partiklarno rešenje sistema i gde su fundamentalna rešenja pridruženog homogenog sistema $W_1, W_2, \ldots, W_d$ data u (5.16).*

Primedba 1. Gausova metoda eliminacije je dobra metoda jer daje odgovor na pitanje da li polazni sistem ima rešenja, daje eksplicitan opis skupa rešenja i najekonomičnija je metoda.

Primedba 2. Primetimo da se ovom metodom mogu rešavati sistemi nad poljem proizvoljne karakteristike. U slučaju kada je $\mathsf{char}\,\mathbb{F} = p$ prost broj, pri elementarnim transformacijama (el1) i (el3) treba obratiti pažnju na tablicu množenja u tom polju.

5.6. Primeri. U ovoj tački dajemo nekoliko karakterističnih primera linearnih sistema, koje rešavamo Gausovom metodom.

1. Rešimo sledeći homogeni sisteme jednačina nad poljem karakteristike 0.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2\,x_1 & + & x_2 & + & 4\,x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & - & 6\,x_4 & = & 0, \\ 7\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & 6\,x_3 & - & 5\,x_4 & = & 0, \\ x_1 & & & + & 8\,x_3 & + & 7\,x_4 & = & 0. \end{array}$$

Kako je sistem homogen, iz proširene matrice sistema možemo ispustiti poslednju nula kolonu, jer ne ona ne menja pri elementarnim transformacijama.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 7 & 4 & 6 & -5 \\ \boxed{1} & 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{c} 4.\,v. \times (-2) + 1.\,v. \\ 4.\,v. \times (-3) + 2.\,v. \\ 4.\,v. \times (-7) + 3.\,v. \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & -12 & -13 \\ 0 & 2 & -25 & -27 \\ 0 & 4 & -50 & -54 \\ \boxed{1} & 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{c} 1.\,v. \times (-2) + 2.\,v. \\ 1.\,v. \times (-4) + 3.\,v. \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & -12 & -13 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ \boxed{1} & 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{c} 2.\,v. \times (-12) + 1.\,v. \\ 2.\,v. \times (-1) + 3.\,v. \\ 2.\,v. \times 8 + 4.\,v. \\ 2.\,v. \times (-1) \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{c} \text{ispustimo 3.–ću vrstu} \\ 3.\,v. \longleftrightarrow 1.\,v. \\ 3.\,v. \longleftrightarrow 2.\,v. \end{array} \right\}$$

$$\sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{odakle je} \qquad x_1 = x_4,\ x_2 = x_4,\ x_3 = -x_4.$$

Prema tome postoji samo jedno fundamentalno rešenje i ono je $W_1 = (1, 1, -1, 1)$ tako da je opšte rešenje oblika: $X = t\,W_1$, $\quad t \in \mathbb{F}$.

2. Pokažimo da sledeći sisteme linearnih jednačina nad poljem $\mathbb{R}$ nema rešenja.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 105\,x_1 & - & 175\,x_2 & - & 315\,x_3 & + & 245\,x_4 & = & 84, \\ 90\,x_1 & - & 150\,x_2 & - & 270\,x_3 & + & 210\,x_4 & = & 72, \\ 75\,x_1 & - & 125\,x_2 & - & 225\,x_3 & + & 175\,x_4 & = & 59. \end{array}$$

Sistem rešavamo Gausovom metodom eliminacije vršeći elementarne transformacija nad vrstama proširene matrice sistema.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 105 & -175 & -315 & 245 & 84 \\ 90 & -150 & -270 & 210 & 72 \\ 75 & -125 & -225 & 175 & 59 \end{array}\right] \sim \left\{ \begin{array}{c} 1.\,v. \times 1/7 \\ 2.\,v. \times 1/6 \end{array} \right\} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{15} & -25 & -45 & 35 & 12 \\ 15 & -25 & -45 & 35 & 12 \\ 75 & -125 & -225 & 175 & 59 \end{array}\right] \sim \left\{ \begin{array}{c} 1.\,v. \times (-1) + 2.\,v. \\ 1.\,v. \times (-5) + 3.\,v. \end{array} \right\}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 15 & -25 & -45 & 35 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

odakle odmah sledi da sistem nema rešenja jer treća vrsta implicira da je $0 = -1$.

3. U zavisnosti o parametru λ rešimo sledeći sistem, nad poljem $\mathbb{Z}_{11}$.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ 7\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 5\,x_3 & = & \lambda, \\ 5\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 2, \end{array}$$

Kada rešavamo neki sistem nad konačnim poljem karakterisitike p prvo moramo naći ostatak pri deljenju svih koeficijentata, koji se pojavljuju u jednačinama sa p, a zatim primeniti isti postupak kao i pri rešavanju sistema u polju karakterisitke 0 vodeći računa o tablici množenja i sabiranja koje važi u datom polju. Metoda koju koristimo za rešavanje je Gausova metoda.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 7 & 6 & 5 & \lambda \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left\{ \begin{array}{c} \text{Kako su svi matrični ele-} \\ \text{menti u } \mathbb{Z}_{11}\text{, osim } -1\text{, i} \\ -1 \cong 10\ mod\,(11) \text{ imamo:} \end{array} \right\} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & \boxed{1} & 10 \\ 7 & 6 & 5 & \lambda \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left\{ \begin{array}{c} 1.\,v. \times 6 + 2.\,v. \\ 1.\,v. \times 8 + 3.\,v. \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 25 & 18 & 11 & \lambda+60 \\ 29 & 20 & 11 & 82 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} \text{Sve koeficijen-} \\ \text{te uzimamo} \\ \text{modulo 11.} \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 3 & 7 & 0 & \lambda+5 \\ \boxed{7} & 9 & 0 & 5 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} 3.\,v. \times 9 + 2.\,v. \\ 2.\,v. \leftrightarrow 3.\,v. \\ 2.\,v. \times 8 \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & \boxed{1} & 10 \\ \boxed{56} & 72 & 0 & 40 \\ 66 & 88 & 0 & \lambda+50 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} \text{Sve koeficijen-} \\ \text{te uzimamo} \\ \text{modulo 11.} \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & \boxed{1} & 10 \\ \boxed{1} & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+6 \end{array}\right].$$

Sada iz poslednje jednačine vidimo, da sistem nema rešenja ako je $\lambda+6 \neq 0$, tj. ako je $\lambda \neq 5$.

Zato pretpostavimo da je $\lambda = 5$. Tada prvo izostavimo treću vrstu, a zatim pomnožimo drugu vrstu sa 8 i dodamo prvoj, i dobijamo,

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 11 & 50 & \boxed{1} & 66 \\ \boxed{1} & 6 & 0 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 6 & 0 & 7 \end{array}\right] \quad \text{odakle, imamo:} \quad \begin{array}{l} x_1 = 7 + 5\,x_2, \\ x_3 = 5\,x_2. \end{array}$$

Tako da je opšte rešenje oblika

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+5\,x_2 \\ x_2 \\ 5\,x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{Z}_{11}\,.$$

4. U zavisnosti od realnog parametra α rešimo sledeći sistem linearnih jednačina nad poljem $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x_1 & - & x_2 & + & 3\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & 5, \\ 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & 5\,x_3 & + & 6\,x_4 & = & 7, \\ 6\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & 7\,x_3 & + & 8\,x_4 & = & 9, \\ \alpha\,x_1 & - & 4\,x_2 & + & 9\,x_3 & + & 10\,x_4 & = & 11. \end{array}$$

Primenjujući elementarne transformacije nad vrstama proširene matrice sistema redom imamo,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & \boxed{-1} & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ \alpha & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} 1.\,v. \times (-2) + 2.\,v. \\ 1.\,v. \times (-3) + 3.\,v. \\ 1.\,v. \times (-4) + 4.\,v. \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & \boxed{-1} & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ \alpha-8 & 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right]$$

$$\sim \left\{\begin{array}{c} 2.\,v. \times (-2) + 3.\,v. \\ 2.\,v. \times (-3) + 4.\,v. \\ 2.\,v. \times (-1) \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & \boxed{-1} & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha-8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Iz poslednje jednačine dobijamo dva slučaja: (a) $\alpha = 8$ i (b) $\alpha \neq 8$.

U slučaju (a) možemo ispustiti poslednje dve nula vrste, a zatim drugu vrstu pomnožimo sa (-3) i dodamo prvoj, tako da imamo:

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right], \quad \text{odakle je odmah:} \quad \begin{array}{l} x_3 = 3 - 2\,x_4, \\ x_2 = 4 + 2\,x_1 - 2\,x_4. \end{array}$$

Odavde vidimo da je prostor rešenja dvodimenzionalan i da je opšte rešenje:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 4+2\,x_1-2\,x_4 \\ 3-2\,x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1,\, x_4 \in \mathbb{R}.$$

U slučaju (b) možemo ispututi samo treću (nula) vrstu, a zatim drugu vrstu pomnožimo sa (-3) i dodamo prvoj, i na kraju poslednju vrstu pomnožimo sa $1/(\alpha-8)$ tako da konačno dobijamo:

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \text{odakle je odmah,} \quad \begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = 4 - 2\,x_4, \\ x_3 = 3 - 2\,x_4. \end{array}$$

Odavde vidimo da je prostor rešenja jednodimenzion i da je njegovo rešenje:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 - 2\,x_4 \\ 3 - 2\,x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

5.7. Primene linearnih sistema. U ovoj tački dajemo nekoliko tipičnih primena linearnih sistema jednačina. Kako je jedna od osnovnih metoda u matematici linearizacija polaznog problema za očekivati je da će se linearni sistemi pojavljivati često.

1. Neka su p, q dva polinoma stepena nad poljem karakteristike 0, stepena ne većeg od nekog prirodnog broja n, takva da postoji $m > n$ različitih tačaka $a_1, a_2, \dots, a_m$ polja $\mathbb{F}$ takvih da je $p(a_i) = q(a_i)$, $i = 1, \dots, m$. Tada se polinomi p i q podudaraju, tj. $p(x) = q(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{F}$.

Specijalno, ako je p polinom stepena $n \geq 1$ nad poljem $\mathbb{F}$, koji se poništava u $n+1$ različitih tačaka polja $\mathbb{F}$. Tada je p nul polinom.

Pokažimo ovu tvrdnju. Neka je $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, x^i$ i $q(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i\, x^i$ i neka polinomi p i q zadovoljavaju pretpostavke iz iskaza ovog primera. Kako je $m > n$ jednakosti,

$$\alpha_n\, a_i^n + \cdots + \alpha_1\, a_i + \alpha_0 = \beta_n\, a_i^n + \cdots + \beta_1\, a_i + \beta_0, \quad i = 1, \dots, n+1 \qquad \text{možemo prepisati kao}$$

$$\gamma_n\, a_i^n + \cdots + \gamma_1\, a_i + \gamma_0 = 0, \quad i = 1, \dots, n+1, \qquad \text{gde je } \gamma_j = \alpha_j - \beta_j, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

tako da definišu sledeći homogeni sistem u $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$

$$\begin{array}{c} \gamma_n\, a_1^n + \gamma_{n-1}\, a_1^{n-1} + \cdots + \gamma_1\, a_1 + \gamma_0 = 0, \\ \gamma_n\, a_2^n + \gamma_{n-1}\, a_2^{n-1} + \cdots + \gamma_1\, a_2 + \gamma_0 = 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\ \vdots \\ \gamma_n\, a_{n+1}^n + \gamma_{n-1}\, a_{n+1}^{n-1} \cdots + \gamma_1\, a_{n+1} + \gamma_0 = 0. \end{array} \tag{5.18}$$

Primetimo da je matrica ovog sistema Vandermondova, tako da imamo redom:

$$\det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1} & \dots & a_1 & 1 \\ a_2^n & a_2^{n-1} & \dots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1} & \dots & a_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon \prod_{i<j} (\, a_j - a_i\,) \neq 0, \qquad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Kako je ovaj sistem Kramerov ($\det \mathcal{A} \neq 0$) i homogen zaključujemo da ima samo trivijalno rešenje, tj. da je $\gamma_j = 0$, $j = 0, \dots, n$, što implicira da je

$$\alpha_j = \beta_j, \quad j = 0, \dots, n, \qquad \text{i konačno} \qquad p \equiv q.$$

2. Neka je dat Kramerov sistem $n \times n$ i neka su slobodni članovi diferencijabilne funkcije u $t \in \mathbb{R}$, tj. neka je $B = (b_1(t), \dots, b_n(t))$ i neka su elementi matrice sistema, α_{ij}, konstante. Pokažimo da su rešenja ovog sistema $x_1, \dots, x_n$ diferencijabilne funkcije u t i da je:

$$x_i'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\,i-1} & b_1'(t) & \alpha_{1\,i+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2\,i-1} & b_2'(t) & \alpha_{2\,i+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n\,i-1} & b_n'(t) & \alpha_{n\,i+1} & \dots & \alpha_{n\,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\,i-1} & \alpha_{1i} & \alpha_{1\,i+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2\,i-1} & \alpha_{2\,i} & \alpha_{2\,i+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n\,i-1} & \alpha_{n\,i} & \alpha_{n\,i+1} & \dots & \alpha_{n\,n} \end{vmatrix}}.$$

Zaista, budući da je sistem Kramerov imamo da su njegova rešenja x_i, $i = 1, \dots, n$ data formulom (5.2 Teorema),

$$x_i(t) = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\,i-1} & b_1(t) & \alpha_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2\,i-1} & b_2(t) & \alpha_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n\,i-1} & b_n(t) & \alpha_{n\,i+1} & \dots & a_{n\,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\,i-1} & a_{1i} & \alpha_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2\,i-1} & \alpha_{2\,i} & \alpha_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n\,i-1} & \alpha_{n\,i} & \alpha_{n\,i+1} & \dots & a_{n\,n} \end{vmatrix}} = \left\{\begin{matrix} \text{Laplaceov} \\ \text{razvoj} \\ \text{po } i.\text{–toj} \\ \text{koloni} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{n} b_j(t)\, \mathsf{A}_{ij}\,. \tag{5.19}$$

Budući da su algebarski komplementi A_{ij} konstante, i kako je i $\det \mathcal{A}$ takođe konstanta, tvrdnja sledi diferenciranjem relacije (5.19), uz uzimanje u obzir da je operator diferenciranja linearan.

3. Neka su $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, glatke funkcije, takve da je $f(t) = g(t)/h(t)$. Dokažimo da za svako t iz domena funkcije f važi formula:

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{[\,h(t)]^n} \begin{vmatrix} h(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & g(t) \\ h'(t) & h(t) & 0 & \dots & 0 & g'(t) \\ h''(t) & \binom{2}{1} h'(t) & 0 & \dots & 0 & g''(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h^{(n)}(t) & \binom{n}{1} h^{(n-1)}(t) & \binom{n}{2} h^{(n-2)}(t) & \dots & \binom{n}{n-1} h'(t) & g^{(n)}(t) \end{vmatrix}.$$

Prvo primetimo da je za svako t iz domena funkcije f, $h(t) \neq 0$, tako da je $f(t)\,h(t) = g(t)$. Radi kraćeg zapisa iz daljnjih oznaka ispuštamo oznaku promenljive t. Sada koristeći Lajbnicovu[6] formulu, možemo se indukcijom uveriti da važi

$$(f \cdot h)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} \cdot h^{(k-i)}\,. \tag{5.20}$$

Primetimo da (5.20), za $k = 0, 1, 2, \dots, n$ definiše linearni sistem od $(n+1)$ jednačine sa $(n+1)$ nepoznatom $f, f', \dots, f^{(n)}$,

$$\begin{array}{ccccccccccccc} h\,f & + & 0 \cdot f' & + & 0 \cdot f'' & + & \dots & + & 0 \cdot f^{(n)} & = & g, \\ h'\,f & + & h\,f' & + & 0 \cdot f'' & + & \dots & + & 0 \cdot f^{(n)} & = & g', \\ h''\,f & + & \binom{2}{1} h'\,f' & + & h\,f'' & + & \dots & + & 0 \cdot f^{(n)} & = & g'', \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h^{(n)}\,f & + & \binom{n}{1} h^{(n-1)}\,f' & + & \binom{n}{2} h^{(n-2)}\,f'' & + & \dots & + & h\,f^{(n)} & = & g^{(n)}. \end{array} \tag{5.21}$$

Determinantu matrice sistema (5.21), lako nalazimo, jer je matrica sistema trougaona,

$$D = \begin{vmatrix} h & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h' & h & 0 & \dots & 0 \\ h'' & \binom{2}{1} h' & h & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{(n)} & \binom{n}{1} h^{(n-1)} & \binom{n}{2} h^{(n-2)} & \dots & h \end{vmatrix} = [\,h\,]^{\,n+1}.$$

Kako je $D = [\,h\,]^{\,n+1} \neq 0$ ovaj sistem je Kramerov. Da bismo odredili $f^{(n)}$ potrebno je izračunati $\mathcal{D}_{n+1}$. Kako se determinante $\mathcal{D}_{n+1}$ dobije tako što se u D zadnja vrsta zameni sa vrstom slobodnih članova sistema (5.21), tvrdnja sledi.

[6] Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646 -– 1716, čuveni nemački matematičar i filosof, nezavisno od I. Newtona razvio diferencijalni račun.

4. Neka je data elipsa u prostoru svojim jednačinama, $2x^2+y^2-4=0$ i $x+y+z=0$. Odredimo tačke te elipse koje su:

(i1) najbliže (najdalje) od koordinatnog početka.

(i2) najbliže (najdalje) od y–ose.

Za (i2) posmatrajmo funkciju rastojanja neke tačke $M(x,y,z)$ elipse do y–ose,

$$f(x,y,z,\alpha,\beta)=x^2+z^2-\alpha\,(2x^2+y^2-4)-\beta\,(x+y+z).$$

Poznato je da ekstremalne tačke funkcije f zadovoljavaju jednačinu:

$$\nabla f=0, \qquad \text{ili koordinatno,} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial \alpha}=\frac{\partial f}{\partial \beta}=0.$$

Ove jednačine definišu sledeći sistem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}&=(2-4\alpha)\,x-\beta=0,\\
\frac{\partial f}{\partial y}&=-2\alpha\,y-\beta=0,\\
\frac{\partial f}{\partial z}&=2z-\beta=0,\\
\frac{\partial f}{\partial \alpha}&=2x^2+y^2-4=0,\\
\frac{\partial f}{\partial \beta}&=x+y+z=0.
\end{aligned}$$

Iz geometrijskih razloga znamo da postoji rešenje ovog sistema i neka je to tačka $(x_0,y_0,z_0,\alpha_0,\beta_0)$. Sada prve tri jednačine ovog sistema možemo prepisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
2x\cdot 1+(-4x)\cdot\alpha+(-1)\cdot\beta&=0,\\
0\cdot 1+(-2y)\cdot\alpha+(-1)\cdot\beta&=0,\\
2z\cdot 1+0\cdot\alpha+(-1)\cdot\beta&=0.
\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da $(1,\alpha_0,\beta_0)$ zadovoljava ovaj sistem, pa je $\det\mathcal{A}=0$, tj. sistem nije Kramerov.

Prema tome imamo:

$$\det\mathcal{A}=\begin{vmatrix}2x & -4x & -1\\ 0 & -2y & -1\\ 2z & 0 & -1\end{vmatrix}=0, \qquad \text{odakle je} \qquad \begin{aligned}4xy+2z\,(4x-2y)&=0 \quad \text{ili nakon deljenja sa 4,}\\ xy+z\,(2x-y)&=0.\end{aligned}$$

Kako tražena tačka pripada elipsi biće $z=-x-y$ i nakon zamene u gornju jednakost dobijamo,

$$0=xy+(-x-y)\,(2x-y)=xy-2x^2+xy-2xy+y^2=-2x^2+y^2.$$

Dakle, sada imamo dve kvadratne jednačine,

$$\begin{aligned}2x^2-y^2&=0,\\ 2x^2+y^2&=4.\end{aligned} \qquad \text{oduzimanjem i sabiranjem ovih jednačina, dobijamo} \quad y^2=2,\ x^2=1,$$

$$\text{odakle je prvo} \quad \begin{aligned}y&=\pm\sqrt{2}\\ x&=\pm 1\end{aligned} \qquad \text{a zatim i} \qquad \begin{aligned}z_1&=1+\sqrt{2}, & z_3&=-1-\sqrt{2},\\ z_2&=1-\sqrt{2}, & z_4&=-1+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Dakle vidimo da postoje četiri tačke kao moguća rešenja:

$$T_1=(1,\sqrt{2},-1-\sqrt{2}),\quad T_2=(1,-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}),\quad T_3=(-1,\sqrt{2},1-\sqrt{2}) \quad \text{i} \quad T_4=(-1,-\sqrt{2},1+\sqrt{2}).$$

Ako je $T_0=(x_0,y_0,z_0,\alpha_0,\beta_0)$ neko rešenje ovog sistema, primetimo da je

$$f(x_0,y_0,z_0,\alpha_0,\beta_0)=d^2(T_0,y_{\text{osa}})=x_0^2+z_0^2.$$

Kako su tačke T_1,T_2,T_3 i T_4 rešenja datog sistema, funkcija f mora (iz geometrijskih i analitičkih razloga) dostizati ekstremalne vrednosti u nekima od tih tačaka. Sada lako nalazimo da je

$$d^2(T_1,y_{\text{osa}})=d^2(T_4,y_{\text{osa}})=4+2\sqrt{2} \qquad \text{i} \qquad d^2(T_2,y_{\text{osa}})=d^2(T_3,y_{\text{osa}})=4-2\sqrt{2}.$$

Prema tome, tačke T_1 i T_4 date elipse su najudaljenije od y–ose, a tačke T_2 i T_3 su najbliže y–osi.

Primedba. Opisana metoda rešavanja ekstremalnih problema funkcija više promenljivih zove se metoda Lagranžovih[7] multiplikatora. Lagranžovi multiplikatori u ovom slučaju su promenljive α i β, kojima se množe relacije koje definišu geometrijski skup na kojem tražimo ekstremne vrednosti polazne funkcije. U našem slučaju polazna funkcija je kvadrat rastojanja neke tačke do y–ose, tj. $d^2(T,y_{\text{osa}})$, a geometrijski skup je elipsa data svojim jednačinama.

[7] Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813, čuveni francuski matematičar, teorijski mehaničar i astronom.

Zadaci za samostalni rad

5.9. Homogeni sistem. Rešimo sledeće homogene sisteme jednačina nad poljem karakteristike 0

$$
\text{(i1)}\qquad
\begin{array}{rcrcrcrcl}
4\,x_1 & - & 9\,x_2 & + & 8\,x_3 & + & 5\,x_4 & = & 0,\\
-\,3\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 5\,x_3 & + & 3\,x_4 & = & 0,\\
2\,x_1 & - & 5\,x_2 & + & 4\,x_3 & - & 3\,x_4 & = & 0,\\
3\,x_1 & - & 4\,x_2 & + & 7\,x_3 & + & 5\,x_4 & = & 0.
\end{array}
$$

$$
\text{(i2)}\qquad
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & + & x_5 & = & 0,\\
-\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0,\\
2\,x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0,\\
4\,x_1 & + & x_2 & - & 5\,x_3 & - & 5\,x_4 & - & 5\,x_5 & = & 0,\\
x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0.
\end{array}
$$

Rešenje. Sistemi su slični, pa zato rešimo npr. (i2). Sistem rešavamo Gausovom metodom eliminacije vršeći elementarne transformacija nad vrstama matrice sistema.

$$
\begin{bmatrix}
\boxed{1} & 1 & 1 & 2 & 1\\
-1 & 2 & -1 & -1 & -1\\
2 & -1 & -1 & -1 & -1\\
4 & 1 & -5 & -5 & -5\\
1 & 1 & 2 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\sim
\left\{\begin{array}{c}
1.\,v.\times 1 + 2.\,v.\\
1.\,v.\times(-2)+3.\,v.\\
1.\,v.\times(-4)+4.\,v.\\
1.\,v.\times(-1)+5.\,v.
\end{array}\right\}
\sim
\begin{bmatrix}
\boxed{1} & 1 & 1 & 2 & 1\\
0 & \boxed{3} & 0 & 1 & 0\\
0 & -3 & -3 & -5 & -3\\
0 & -3 & -9 & -13 & -9\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0
\end{bmatrix}
\sim
\left\{\begin{array}{c}
2.\,v.\times 1 + 3.\,v.\\
2.\,v.\times 1 + 4.\,v.\\
2.\,v.\times(-1/3)+1.\,v.\\
2.\,v.\times(1/3)
\end{array}\right\}
$$

$$
\sim
\begin{bmatrix}
\boxed{1} & 0 & 1 & 5/3 & 1\\
0 & \boxed{1} & 0 & 1/3 & 0\\
0 & 0 & -3 & -4 & -3\\
0 & 0 & -9 & -12 & -9\\
0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0
\end{bmatrix}
\sim
\left\{\begin{array}{c}
5.\,v.\times(-1)+1.\,v.\\
5.\,v.\times 3+3.\,v.\\
5.\,v.\times 9+4.\,v.
\end{array}\right\}
\sim
\begin{bmatrix}
\boxed{1} & 0 & 0 & 8/3 & 1\\
0 & \boxed{1} & 0 & 1/3 & 0\\
0 & 0 & 0 & \boxed{-7} & -3\\
0 & 0 & 0 & -21 & -9\\
0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0
\end{bmatrix}
\sim
$$

$$
\sim
\left\{\begin{array}{c}
5.\,v.\longleftrightarrow 3.\,v.\\
4.\,v.\times(-3)+5.\,v.\\
\text{ispustimo 4.–tu v. jer su}\\
\text{svi njeni elementi 0}\\
4.\,v.\times(-1/7)
\end{array}\right\}
\sim
\begin{bmatrix}
\boxed{1} & 0 & 0 & 8/3 & 1\\
0 & \boxed{1} & 0 & 1/3 & 0\\
0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3/7
\end{bmatrix}
\sim
\left\{\begin{array}{c}
4.\,v.\times(-8/3)+1.\,v.\\
4.\,v.\times(-1/3)+2.\,v.\\
4.\,v.\times 1+3.\,v.
\end{array}\right\}
\sim
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & -1/7\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1/7\\
0 & 0 & 1 & 0 & 3/7\\
0 & 0 & 0 & 1 & 3/7
\end{bmatrix}.
$$

Odakle odmah sledi da je $x_1 = 1/7\,x_5$, $x_2 = 1/7\,x_5$, $x_3 = -\,3/7\,x_5$, $x_4 = -\,1/7\,x_5$. Prema tome postoji samo jedno fundamentalno rešenje, kojeg dobijamo ako izaberemo da je $x_5 = 7$, tj. $W_1 = (1, 1, -\,3, -\,3, 7)^\tau$, tako da je opšte rešenje oblika: $X = t\,W_1, \quad t \in \mathbb{F}$.

5.10. Nehomogeni sistem. Rešite sledeće sisteme linearnih jednačina nad poljem $\mathbb{R}$:

$$
\text{(i1)}\qquad
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4\,x_4 & =1 & 0,\\
7\,x_1 & + & 14\,x_2 & + & 20\,x_3 & + & 27\,x_4 & = & 0,\\
5\,x_1 & + & 10\,x_2 & + & 16\,x_3 & + & 19\,x_4 & = & -2,\\
3\,x_1 & + & 5\,x_2 & + & 6\,x_3 & + & 13\,x_4 & = & 5.
\end{array}
\qquad
\text{(i2)}\qquad
\begin{array}{rcrcrcrcr}
7\,x_1 & - & 5\,x_2 & -2 & x_3 & - & 4\,x_4 & = & 8,\\
-\,3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & 2 & 2\,x_4 & = & -\,3,\\
2\,x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2\,x_4 & = & 1,\\
-\,x_1 & & & + & x_3 & - & 2\,x_4 & = & 1,\\
 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & = & 3.
\end{array}
$$

Rešenje. Sistem rešavamo Gausovom metodom eliminacije vršeći elementarne transformacija nad vrstama proširene matrice sistema.

$$
\text{(i1)}\qquad
\left[\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 0\\
7 & 14 & 20 & 27 & 0\\
5 & 10 & 16 & 19 & -2\\
3 & 5 & 6 & 13 & 5
\end{array}\right]
\sim
\left\{\begin{array}{c}
1.\,v.\times(-7)+2.\,v.\\
1.\,v.\times(-5)+3.\,v.\\
1.\,v.\times(-3)+4.\,v.
\end{array}\right\}
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 0\\
0 & 0 & -1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & -2\\
0 & \boxed{-1} & -3 & 1 & 5
\end{array}\right]
\sim
\left\{\begin{array}{c}
4.\,v.\times 2+1.\,v.\\
4.\,v.\leftrightarrow 2.\,v.\\
3.\,v.\leftrightarrow 4.\,v.\\
2.\,v.\times(-1)
\end{array}\right\}
$$

$$
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & 0 & -3 & 6 & 10\\
0 & \boxed{1} & 3 & -1 & -5\\
0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -2\\
0 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{array}\right]
\sim
\left\{\begin{array}{c}
3.\,v.\times 3+1.\,v.\\
3.\,v.\times(-3)+2.\,v.\\
3.\,v.+4.\,v.
\end{array}\right\}
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 4\\
0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 1\\
0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -2\\
0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & -2
\end{array}\right]
\sim
\left\{\begin{array}{c}
4.\,v.\times(-1/2)\\
4.\,v.\times(-3)+1.v.\\
4.\,v.\times(-2)+2.v.\\
4.\,v.\times(-1)+3.v.
\end{array}\right\}
$$

$$\sim\sim\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right].$$ Odavde odmah zaključujemo da postoji jedinstveno rešenje: $X = (1, -1, -1, 1)^{\tau}$.

(i2) $$\left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -5 & -2 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} 4.\,v. \longleftrightarrow 1.\,v. \\ 1.\,v. \times (-3) + 2.\,v. \\ 1.\,v. \times 2 + 3.\,v. \\ 1.\,v. \times 7 + 4.\,v. \\ 1.\,v. \times (-1) \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} 3.\,v. \longleftrightarrow 2.\,v. \\ 2.\,v. \times 2 + 3.\,v. \\ 2.\,v. \times 5 + 4.\,v. \\ 2.\,v. \times 1 + 5.\,v. \\ 2.\,v. \times (-1) \end{array}\right\}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ Dakle, rešenje je: $$\begin{array}{rcl} x_1 &=& -1 + x_3 + 2\,x_4 \\ x_2 &=& 3 + x_3 + 2\,x_4 \end{array}.$$

Slobodne promenljive su x_3 i x_4, tako da je dimenzija skupa rešenja dva. Partikularno rešenje, W_0, dobijamo za izbor parametara $x_3 = x_4 = 0$, a fundamentalne vektore W_1 i W_2 redom dobijamo za $x_3 = 1, x_4 = 0$ i $x_3 = 0, x_4 = 1$. Drugim rečima imamo, $W_0 = (-1, 3, 0, 0)^{\tau}$, $W_1 = (1, 1, 1, 0)^{\tau}$, i $W_2 = (2, 2, 0, 1)^{\tau}$. Tako da je opšte rešenje dato sa:

$$X = w_0 + t_1\,W_1 + t_2\,W_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

5.11. Sistemi sa parametrom. U zavisnosti od realnog parametra α rešite sledeće sisteme linearnih jednačina nad poljem $\mathbb{R}$:

(i1) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x_1 &+& x_2 &-& x_3 &+& 2\,x_4 &=& 1, \\ -2\,x_1 &+& x_2 &+& x_3 &+& 4\,x_4 &=& -3, \\ 5\,x_1 &-& x_2 &+& 2\,x_3 &+& 3\,x_4 &=& -2, \\ 3\,x_1 &-& 4\,x_2 &+& 3\,x_3 &-& 5\,x_4 &=& \alpha. \end{array}$$

(i2) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x_1 &+& 5\,x_2 &+& x_3 &+& 3\,x_4 &=& 2, \\ 4\,x_1 &+& 6\,x_2 &+& 3\,x_3 &+& 5\,x_4 &=& 4, \\ 4\,x_1 &+& 14\,x_2 &+& x_3 &+& 7\,x_4 &=& 4, \\ 2\,x_1 &-& 3\,x_2 &+& 3\,x_3 &+& \alpha\,x_4 &=& 7. \end{array}$$

Rešenje. (i1)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 5 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 3 & -5 & \alpha \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} 1.\,v. \times (-1) + 2.\,v. \\ 1.\,v. \times 1 + 3.\,v. \\ 1.\,v. \times 4 + 4.\,v. \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 7 & 0 & \boxed{1} & 5 & -1 \\ 11 & 0 & -1 & 3 & \alpha + 4 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} 3.\,v. \times 1 + 1.\,v. \\ 3.\,v. \times (-2) + 2.\,v. \\ 3.\,v. \times 1 + 4.\,v. \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 9 & \boxed{1} & 0 & 7 & 0 \\ \boxed{-18} & 0 & 0 & -8 & -2 \\ 7 & 0 & \boxed{1} & 5 & -1 \\ 18 & 0 & 0 & 8 & \alpha + 3 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} 2.\,v. \times 1 + 4.\,v. \\ 2.\,v. \times (-1/18). \\ 2.\,v. \times (-9) + 1.\,v. \\ 2.\,v. \times (-7) + 3.\,v. \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \boxed{1} & 0 & 3 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 17/9 & -16/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha + 1 \end{array}\right].$$

Iz poslednje jednačine sistema odmah sledi, da za $\alpha \neq -1$ sistem nema rešenja. Zato pretpostavimo da je $\alpha = -1$, tako da u tom slučaju imamo: $x_1 = 1/9 - 4/9\,x_4$, $x_2 = -1 - 3\,x_4$ i $x_3 = -16/9 - 17/9\,x_4$. Tako da je opšte rešenje ovog sistema:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} - \frac{4}{9}x_4 \\ -1 - 3\,x_4 \\ -\frac{16}{9} - \frac{17}{9}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -4 \\ -27 \\ -17 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i3) $$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \alpha & 7 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} 1.\,v. \times (-2) + 2.\,v. \\ 1.\,v. \times (-2) + 3.\,v. \\ 1.\,v. \times (-1) + 4.\,v. \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & \alpha - 3 & 5 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{c} 2.\,v. \times (-1) + 1.\,v. \\ 2.\,v. \times 1 + 3.\,v. \\ 2.\,v. \times (-2) + 4.\,v. \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 9 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\alpha - 1} & 5 \end{array}\right].$$ Iz poslednje jednačine odmah sledi da sistem nema rešenja za $\alpha = 1$. Zato pretpostavimo da je $\alpha \neq 1$, izbacimo treću vrstu iz poslednje matrice, a zatim poslednju vrstu te matrice pomnožimo sa $1/(\alpha - 1)$,

i na kraju ovako izmenjenu treću vrstu dodamo drugoj vrsti, a zatim je pomnožimo sa (-4) i dodamo prvoj, i na kraju prvu vrstu podelimo sa 2, tako da napokon imamo:

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & \frac{9}{2} & 0 & 0 & \frac{2\alpha-22}{2\alpha-2} \\ 0 & -4 & \boxed{1} & 0 & \frac{5}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{5}{\alpha-1} \end{array}\right] \quad \text{odakle, odmah sledi:} \quad \begin{array}{l} x_1 = \frac{\alpha-11}{\alpha-1} - \frac{9}{2}x_2, \\ x_3 = \frac{5}{\alpha-1} + 4x_2, \\ x_4 = \frac{5}{\alpha-1}, \end{array}$$

tako da je opšte rešenje ovog sistema:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha-11}{\alpha-1} - \frac{9}{2}x_2 \\ x_2 \\ \frac{5}{\alpha-1} + 4x_2 \\ \frac{5}{\alpha-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha-1}\begin{bmatrix} \alpha-11 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.12. Sistem sa parametrom. U zavisnosti o parametru λ rešite sledeći sistem,

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & = & \lambda, \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 2, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(i1)} & \text{nad } \mathbb{R}. \\ \text{(i2)} & \text{nad } \mathbb{Z}_{13}. \\ \text{(i3)} & \text{nad } \mathbb{Z}_{17}. \end{array}$$

Rešenje. (i1)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & \boxed{1} & -1 \\ 7 & 6 & 5 & \lambda \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left\{ \begin{array}{c} 1.v. \times (-5) + 2.v. \\ 1.v. \times (-3) + 3.v. \end{array} \right\} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & \boxed{1} & -1 \\ -8 & -4 & 0 & \lambda+5 \\ -4 & \boxed{-2} & 0 & 5 \end{array}\right] \sim \left\{ \begin{array}{c} 3.v. \times (-2) + 2.v. \\ 2.v. \longleftrightarrow 3.v. \\ 2.v. \times (-1) \end{array} \right\}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & \boxed{1} & -1 \\ -4 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{array}\right], \quad \text{odakle odmah sledi, da za } \lambda \neq 5 \text{ sistem nema rešenja.}$$

Zato pretpostavimo da je $\lambda = 5$. U tom slučaju zadnja vrsta matrice sastoji se od samih nula (zadnja jednačina je linearna kombinacija preostalih), pa je izostavljamo i dodamo drugu vrstu prvoj imamo:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right] \sim \left\{ 2.v. \times 1/(-2) \right\} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -5/2 \end{array}\right].$$

Dakle imamo: $x_3 = 4 + x_1,\ x_2 = -5/2 - 2x_1$, tako da je opšte rešenje oblika:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -5/2 - 2x_1 \\ 4 + x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5/2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

5.13. Sistemi sa parametrom. U zavisnosti o parametru α rešite sledeće sisteme linearnih jednačina redom nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_7$, i $\mathbb{Z}_{23}$,

$$\text{(i1)} \quad \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 13x_4 & - & 12x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & - & 13x_4 & - & 10x_5 & = & \alpha \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 6x_5 & = & 3 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 10x_4 & - & 16x_5 & = & -1 \end{array}$$

$$\text{(i2)} \quad \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & -4 \\ \alpha x_1 & & & - & x_3 & & & + & 4x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & -1 \end{array}$$

$$\text{(i3)} \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & & & = & \alpha \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}$$

5.14. Sistem sa parametrom. U zavisnosti o realnom parametru ξ rešite sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & (3-\xi)\,y & + & z & = & 1-\xi, \\ (\xi-1)\,x & + & (\xi-2)\,y & + & z & = & 2\,\xi-2, \\ (4\,\xi-1)\,x & + & (2\,\xi-3)\,y & + & (\xi+3)\,z & = & 2\,\xi+1. \end{array}$$

5.15. Sistemi sa parametrom. U zavisnosti o realnim parametrima α, β rešite sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & (2\,\beta-2)\,y & + & z & = & 4, \\ (\alpha+1)\,x & + & y & + & z & = & 4, \\ x & + & (\beta-1)\,y & + & z & = & 3. \end{array}$$

5.16. Sistemi sa parametrima. U zavisnosti o parametrima α i β rešite sistem,

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & \beta\,x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2\,\beta\,x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{(i1) u } \mathbb{R}. \\ \text{(i2) u } \mathbb{Z}_5. \\ \text{(i3) u } \mathbb{Z}_7. \end{array}$$

5.17. Sistemi sa parametrom. U zavisnosti o realnom parametru λ rešite sistem:

$$\begin{array}{rcrcccl} \lambda\,x_1 & + & x_2 & + & \dots & x_n & = & a_1, \\ x_1 & + & \lambda\,x_2 & + & \dots & x_n & = & a_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & + & x_2 & + & \dots & \lambda\,x_n & = & a_n. \end{array}$$

5.18. Odredite realni polinom p najmanjeg stepena takav da je

$$p(1)=-1, \quad p(2)=3, \quad p(3)=19 \quad \text{i} \quad p(1)=53.$$

5.19. Neka je $p \in \mathcal{P}_{2\,n}(\mathbb{R})$, polinom stepena ne većeg od $2\,n$ za kojeg važi:

(i1) $p(a_i)=p(-a_i)$, $i=1,\dots,n$,

(i2) $a_i \neq 0$, $i=1,\dots,n$,

i3) $a_i^2 \neq a_j^2$, $i \neq j$.

Dokažite da je tada p parna funkcija tj. $p(x)=p(-x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Neka je $p(x)=\sum_{i=0}^{2\,n} \alpha_i\, x^i$ i neka za p važe pretpostavke (i1)-(i3). Sada iz (i1) dobijamo niz jednakosti za $i=1,2\dots,n$:

$$\alpha_{2\,n}\,a_i^{2\,n}+\cdots+\alpha_1\,a_i+\alpha_0=\alpha_{2\,n}\,(-a_i)^{2\,n}+\cdots+\alpha_1\,(-a_i)+\alpha_0$$

nakon kraćenja članova uz parne stepene i deljenja jednačina sa 2 dobijamo n linearnih jednačina:

$$\alpha_1\,a_i+\alpha_3\,a_i+\cdots+\alpha_{2\,n-1}\,a_i^{2\,n-1}=0, \quad i=1,\dots,n, \tag{5.22}$$

koje definišu homogeni sistem u $\alpha_1,\alpha_3,\dots,\alpha_{2\,n-1}$. Nađimo sada determinantu matrice ovog sistema:

$$\det\mathcal{A}=\begin{vmatrix} a_1 & a_1^3 & \dots & a_1^{2\,n-3} & a_1^{2\,n-1} \\ a_2 & a_2^3 & \dots & a_2^{2\,n-3} & a_2^{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n^3 & \dots & a_n^{2\,n-3} & a_n^{2\,n-1} \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix}\text{iz } i.-\text{ te} \\ \text{vrste} \\ \text{izvučemo} \\ a_i\end{matrix}\right\} = \prod_{i=1}^{n} a_i \begin{vmatrix} 1 & a_1^2 & \dots & a_1^{2\,n-4} & a_1^{2\,n-2} \\ 1 & a_2^2 & \dots & a_2^{2\,n-4} & a_2^{2\,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n^2 & \dots & a_n^{2\,n-3} & a_n^{2\,n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{determinanta ove matrica} \\ \text{je Vandermondova} \\ \text{u } a_i^2,\ i=1,\dots,n\end{matrix}\right\} = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i<j}(\,a_j^2-a_i^2\,) = \{\text{zbog (i2) i (i3)}\} \neq 0.$$

Kako je ovaj sistem Kramerov ($\det\mathcal{A} \neq 0$) i homogen, zaključujemo da ima samo trivijalno rešenje, tj. da je $\alpha_j=0$, $j=1,3,\dots,2\,n+1$, tj. svi koeficijenti polinom p sa neparnim indeksima se poništavaju, odakle sledi tvrdnja.

5.20. Izračunajte $f^{(7)}(-1)$, ako je
$$f(t) = \frac{(t+1)^7}{43\,t^8 + 25\,t^7 + 50\,t^4 - 32\,t^3 - 2\,t^2 - 12\,t + 10}\quad .$$

Rešenje. Primenjujući primer 3 iz tačke **5.7**, vidimo da je
$$g(t) = (t+1)^7 \quad \text{i} \quad h(t) = 43\,t^8 + 25\,t^7 + 50\,t^4 - 32\,t^3 - 2\,t^2 - 12\,t + 10,$$
a kako je $h(-1) = 120$, $g^{(i)}(-1) = 0$, za $i = 0, 1, \ldots, 6$ i $g^{(7)}(-1) = 7\,! = 5040$, sada lako nalazimo da je

$$f^{(7)}(-1) = \frac{1}{h(-1)^7}\begin{vmatrix} h(-1) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ h'(-1) & h(-1) & \ldots & 0 & 0 \\ h''(-1) & \binom{2}{1}\,h'(-1) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h^{(7)}(-1) & \binom{7}{1}\,h^{(6)}(-1) & \ldots & \binom{7}{6}\,h'(-1) & g^{(7)}(-1) \end{vmatrix} = \frac{h(-1)^6\,g^{(7)}(-1)}{h(-1)^7} = \frac{g^{(7)}(-1)}{h(-1)} = \frac{5040}{120} = 42\,.$$

GLAVA 6

REDUKCIJA LINEARNOG OPERATORA NA KONAČNODIMENZIONIM PROSTORIMA

6.1. Prsten polinoma. Kako su nam za razumevanje ove glave potrebna neka znanja o polinomima, uvod ove glave posvećujemo njima.

Izraz

$$f(x) = \alpha_n\, x^n + \alpha_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + \alpha_1\, x + \alpha_0\,, \quad \alpha_i \in \mathbb{F},\ \alpha_n \neq 0, \tag{6.1}$$

zove se **polinom nad** poljem $\mathbb{F}$ [1]. Skalari $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nazivaju se koeficijenti polinoma f. Stepen polinoma f je broj $n \in \mathbb{N}_0$. Oznake koje koristimo za stepen polinoma su $\deg f$ i ∂f. Za ne-nula polinom f stepena n kažemo da je moničan ako je $\alpha_n = 1$.

Primetimo da na polinome možemo gledati i kao na beskonačne nizove elemenata iz $\mathbb{F}$, tj. na elemente iz $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$, u kojima su sve komponente osim njih konačno jednake 0.

Mi ćemo obično uzimati da je $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i tada govorimo o polinomima sa racionalnim, realnim, kompleksnim ili celobrojnim (celim) koeficijentima. Skup svih polinoma nad $\mathbb{F}$ obično se označava sa $\mathbb{F}[x]$, a mi ćemo često koristiti i kraću oznaku $\mathcal{P} = \mathbb{F}[x]$.

Kao što znamo skup svih polinoma $\mathbb{F}[x]$ je vektorski prostor $\mathbb{F}[x] = (\mathbb{F}[x], \mathbb{F}, +, \cdot)$ uz uobičajene operacije sabiranja polinoma i množenja polinoma sa skalarom, tj. za $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ i $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j\, x^j \in \mathcal{P}$, uz $k = \max\{n, m\}$ definišemo

(s) $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i)\, x^i$, pri čemu su $a_i = 0$ za $i = n+1, \ldots, k$ ako je $n < k$ ili $b_j = 0$ za $j = m+1, \ldots, k$, ako je $m < k$.

(m) $\lambda \cdot f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (\lambda\, a_i)\, x^i.$

Na skupu $\mathcal{P}$ defininisana je još i operacija množenja polinoma formulom

(mp) $f(x)\, g(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m+n} c_i\, x^i$ gde je $c_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} a_j\, b_{i-j}.$

Lako se proverava da je $(\mathcal{P}, +, \cdot)$ komutativan, asocijativan prsten sa $\mathbb{1}$. Invertibilni elementi nalaze se samo među polinomima stepena 0, a to su svi elementi skupa $\mathbb{F}^*$. Kako je množenje polinoma kompatibilno sa sabiranjem polinoma i množenjem polinoma sa skalarima vidimo da je $\mathbb{F}[x]$ asocijativna, komutativna $\mathbb{F}-$algebra sa $\mathbb{1}$. Lako se proverava da važe svojstva iz sledeće propozicije.

Propozicija. *Neka su $f, g, h \in \mathbb{F}[x]$, polinomi različiti od nula polinoma. Tada*

(i1) $f\, g \neq 0$,

(i2) $\partial\,(f\, g) = \partial\, f + \partial\, g$,

(i3) *$f\, g$ je moničan ako su oba polinoma f i g monična,*

(i4) *$f\, g$ je skalar akko f i g skalari,*

(i5) *ako je $\partial\,(f+g) \neq 0$, tada je $\partial\,(f+g) \leq max(\partial f, \partial g)$,*

(i6) *ako je $f\, g = f\, h$, tada je $g = h$.*

Primetimo da na polinom možemo gledati kao na funkciju sa $\mathbb{F}$ u $\mathbb{F}$ tretirajući x kao promenljivu iz $\mathbb{F}$, ili generalnije kao funkciju sa $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ u $\mathbb{M}_n(F)$, gde x tretiramo kao promenljivu iz $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$.

---

[1] umesto polja može se uzeti i komutativni prsten sa 1.

6.2. Teorema o deljenju polinoma. Najvažnija osobina polinoma sadržana je u teoremi o deljenju polinoma.

Teorema (o deljenju polinoma). *Za svaka dva polinoma $f, g \in \mathbb{F}[x]$ postoje jedinstveni polinomi $q, r \in \mathbb{F}[x]$ takvi da je:*

(i1) $f(x) = q(x)\, g(x) + r(x)$,

(i2) $0 \le \partial\, r < \partial\, g$.

Dokaz. Jedinstvenost. Pretpostavimo da postoje dva para polinoma q, r i q_1, r_1 za koje važi:

$$f = q\, g + r = q_1\, g + r_1 .$$

Ako oduzmemo ove dve jednakosti dobijamo:

$$g\,(q - q_1) = r_1 - r\,. \tag{6.2}$$

Odavde vidimo da ako je $q - q_1 \neq 0$, onda je stepen leve strane jednakosti (6.2) veći ili jednak stepenu od g i strogo je veći od stepena desne strane iste. Kako je to nemoguće mora biti $q - q_1 = 0$, pa je onda i $r_1 - r = 0$. Time je dokazana jedinstvenost.

Egzistencija. Neka su dati polinomi $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ i $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j\, x^j$. Ako je $n < m$ onda stavimo da je $q(x) = 0$ i $r(x) = f(x)$ i dokaz je gotov. Zato pretpostavimo da je $n \ge m$ i imamo:

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m}\, g(x) = f_1(x), \quad n_1 = \partial\, f_1 < n, \tag{6.3}$$

ako je $n_1 \ge m$ onda sa $a^1_{n_1}$ označimo vodeći koeficijent od $f_1(x)$, i imamo:

$$f_1(x) - \frac{a^1_{n_1}}{b_m}\, x^{n_1-m}\, g(x) = f_2(x), \quad n_2 = \partial\, f_2 < n_1, \tag{6.4}$$

i nastavimo analogno dalje, itd.

Kako stepeni polinoma $f, f_1, f_2, \ldots$ opadaju, jer je $n > n_1 > n_2 > \ldots$, nakon konačno mnogo koraka dolazimo do polinoma f_{k-1} i f_k takvih da je:

$$f_{k-1}(x) - \frac{a^{k-1}_{n_{k-1}}}{b_m}\, x^{n_{k-1}-m}\, g(x) = f_k(x) \tag{6.5}$$

i pri tome je $\partial\, f_k < m$. Sada iz relacija (6.3)-(6.5) dobijamo:

$$f(x) - \underbrace{\Big(\frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} + \frac{a^1_{n_1}}{b_m}\, x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a^{k-1}_{n_{k-1}}}{b_m}\, x^{n_{k-1}-m}\Big)}_{q(x)}\, g(x) = f_k(x) = r(x)\,.$$

Iz gonje konstrukcije sledi da polinomi $q(x)$ i $r(x)$ zadovoljavaju oba tražena uslova (i1) i (i2), čime je završen i dokaz egzistencije. ☐

Posledica (Bezuova[2] lema). *Neka je $f \in \mathbb{F}[x]$ polinom. Ako je $f(a) = 0$ onda $x - a \big| f(x)$. Važi i obrat.*

Dokaz. Koristeći teoremu o deljenju polinoma imamo,

$$f(x) = (x - a)\, q(x) + r(x), \qquad \text{i} \qquad 0 \le r < 1,$$

odakle sledi da r mora biti polinom nultog stepena, tj. broj. Ako sada u ovu relaciju uvrstimo $x = a$ i iskoristimo da je $f(a) = 0$ dobijamo da je $r = 0$, što je ekvivalentno sa $x - a \big| f$.
Obrat je trivijalan. ☐

Primer. Odredimo ostatak pri deljenju $f(x) = x^{100} + 3\, x^{99} + x^2 - 3\, x + 9$ sa $g(x) = x^2 + 2\, x - 3$.

Zbog teoreme o deljenju polinoma znamo da je $f = g\, q + r$ i $\partial r < \partial\, g = 2$. Dakle, $r(x) = a\, x + b$, za neke $a, b \in \mathbb{R}$. Sada je najbolje naći nule polinoma g, koje se zatim redom uvrste u relaciju iz teoreme o deljenju polinoma, koje se onda svode na neki linearni sistem. U našem slučaju to su brojevi: $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = -3$. Sada imamo:

$$f(1) = 11 = g(1)\, q(1) + r(1) = a + b = 11,$$
$$f(-3) = 27 = r(-3) = -3\, a + b = 27.$$

[2] Etienne Bezout, 1730 -– 1783, francuski matematičar.

Rešenje ovog sistema je: $a=-4$ i $b=15$, tako da je $r(x)=-4\,x+15$.

Najveći zajednički delitelj (NZD). Neka je $\mathbb{F}$ polje. Polinom $g\in\mathbb{F}[x]$ je delitelj (divizor) polinoma $f\in\mathbb{F}[x]$ ako i samo ako postoji polinom $h\in\mathbb{F}[x]$ takav da je $f=g\,h$, što zapisujemo $g\mid f$ i čitamo g deli f.

Deljivost polinoma je relacija na skupu $\mathbb{F}[x]$ i njene osnovne osobine sadržaj su sledeće propozicije.

Propozicija. *Relacija deljivosti polinoma ima sledeće osobine:*

(i1) *tranzitivnost: ako $g\mid f$ i $h\mid g$ sledi $h\mid f$,*

(i2) *ako $g\mid f$ i $g\mid h$ onda $g\mid f\pm h$,*

(i3) *ako $g\mid f$ tada $g\mid f\,h$, za svaki polinom $h\in\mathbb{F}[x]$,*

(i4) *ako $g\mid f_1,f_2,\ldots,f_k$ tada $g\mid f_1\,g_1+f_2\,g_2+\cdots+f_k\,g_k$, za sve polinome $g_1,g_2,\ldots,g_k\in\mathbb{F}[x]$,*

(i5) *ako je $g(x)=c\neq 0$ [3] onda $g\mid f$, za svaki polinom $f\in\mathbb{F}[x]$,*

(i6) *ako $g\mid f$ tada i $c\,g\mid f$, za svaki skalar $c\in\mathbb{F}$,*

(i7) *$g\mid f$ i $\partial\,g=\partial\,f$ ako i samo ako je $g=c\,f$ za neko $c\in\mathbb{F}^*=\mathbb{F}\setminus\{0\}$.*

Dokazi ovih jednostavnih činjenica direktno slede iz definicija o ostavljamo iz za vežbu.

Polinom $d(x)$ je najveći zajednički delitelj polinoma $f(x)$ i $g(x)$ ako i samo ako $d(x)$ ima sledeće osobine:

(NZD1) $d\mid f$ i $d\mid g$,

(NZD2) ako $d_1\mid f$ i $d_1\mid g$ onda $d_1\mid d$,

(NZD3) vodeći koeficijent polinoma d je 1.

Oznaka koju koristimo za najveći zajednički deljitelj je NZD $(f(x),g(x)))$.

Primetimo da zbog uslova (NZD3), NZD $(f(x),g(x))$ je jedinstveno određen, a ako ispustimo taj uslov onda je NZD $(f(x),g(x))$ određen do na proizvod sa skalarom $c\neq 0$, tj. tada je određen samo njegov stepen.

Ako je NZD $(f,g)=1$, kažemo da su polinomi f i g uzajamno prosti.

6.3. Posledice teoreme o deljenju polinoma. Iz teoreme o deljenju polinoma slede sva najvažnija svojstva prstena polinoma, na sličan način kao što iz teoreme o deljenju celih brojeva slede sva najvažnija svojstva prstena celih brojeva. Ta činjenica dovela je i do definicije pojma Euklidove funkcije f na nekom prstenu R kao funkcije $f:R\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{N}_0$ za koju važi svojstvo:

(EF1) *Ako su $0\neq a,b\in R$ tada postoje q i $r\in R$ takvi da je: $a=b\,q+r$, gde je ili $r=0$ ili $f(r)<f(b)$.*

Primetimo da u prstenu celih brojeva $\mathbb{Z}$ ulogu Euklidove funkcije igra apsolutna vrednost, a u prstenu polinoma ulogu Euklidove funkcije igra stepen polinoma. Komutativni prsten snabdeven Euklidovom funkcijom nazivamo euklidski prsten.

U ovoj tački dajemo najvažnije posledice teoreme o deljenju polinoma, i prva od njih je Euklidov algoritam, kojim određujmo NZD $(f(x),g(x))$.

Teorema 1 (Euklidov algoritam). *Neka su $f,g\in\mathbb{F}[x]$ polinomi takvi da je $\partial\,f\geq\partial g$. Tada je dobro definisan konačan niz jednakosti,*

$$
\begin{aligned}
f&=g\,q_1+r_1,\\
g&=r_1\,q_2+r_2,\\
r_1&=r_2\,q_3+r_3,\\
&\vdots\\
r_{k-3}&=r_{k-2}\,q_{k-1}+r_{k-1},\\
r_{k-2}&=r_{k-1}\,q_k+r_k,\\
r_{k-1}&=r_k\,q_{k+1}.
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

Tada je NZD $(f,g)=c\,r_k$, gde je $c\in\mathbb{F}^*$ jednak recipročnoj vrednosti vodećeg koeficijenta od r_k.

Dokaz. Iz poslednje relacije u (6.6) imamo da je $r_k\mid r_{k-1}$, i ako to iskoristimo u pretposlednjoj jednakosti u (6.6) kao i osobinu (i4), iz **6.2** Propozicija dobijamo da $r_k\mid r_{k-2}$. Analogno nastavljamo dalje, od poslednje ka prvoj jednakosti u (6.6), tj. sada iz $r_k\mid r_{k-1},r_{k-2}$ zaključujemo da $r_k\mid r_{k-3}$, itd. i na kraju dobijamo $r_k\mid g$ i $r_k\mid f$.

[3] $\partial\,g=0$, $g\neq 0$.

Pretpostavimo da $d \mid f, g$ onda iz 1. relacije u (6.6), koristeći osobinu (i4) iz **6.2** Propozicija, sledi da $d \mid r_1$. Sada iz 2. relacije u (6.6) i iz $d \mid g, r_1$ na sličan način dobijamo da $d \mid r_2$. Nastavljajući analogno, od prve do pretposlednje relacije dobijamo da $d \mid r_2, r_3, \ldots, r_{k-1}$ i na kraju iz pretposlednje relacije, jer $d \mid r_{k-2}$ i r_{k-1}, implicirada $d \mid r_k$. Time smo pokazali da svaki delitelj polinoma f i g ujedno deli i polinom r_k. Drugim rečima od svih delitelje polinoma f i g, polinom r_k ima najveći stepen. Dakle, NZD $(f, g) = c\, r_k$, gde je c recipročna vrednost vodećeg koeficijenta polinoma r_k. □

Primer 1. Nađimo, koristeći Euklidov algoritam, NZD polinoma $f(x) = 3\,x^4 + 5\,x^3 + x^2 + 5\,x - 2$ i $g(x) = 3\,x^4 + 11\,x^3 + 23\,x^2 + 21\,x - 10$.

Koristeći Euklidov algoritam redom nalazimo: $q_1(x) = 1$, $r_1(x) = -6\,x^3 - 22\,x^2 - 16\,x + 8$, $q_2(x) = -\frac{1}{2}\,x$, $r_2(x) = 5\,(3\,x^2 + 5\,x - 2)$, i napokon $q_3(x) = -\frac{2}{5}\,(x + 2)$ i $r_3(x) = 0$.

Prema tome, NZD $(f, g) = x^2 + \frac{5}{3}\,x - \frac{2}{3}$.

Teorema 2 (o NZD). *Neka su $f, g \in \mathbb{F}[x]$ polinomi, i neka je NZD $(f, g) = d$, onda postoje polinomi $u, v \in \mathbb{F}[x]$ takvi da je: $f\,u + g\,v = d$.*

Ako su stepeni polinoma f, g veći od 0 onda možemo izabrati u i v tako da stepen polinoma u bude manji od stepena polinoma g i stepen polinoma v bude manji od stepena polinoma f.

Dokaz. Ako predzadnju jednakost u (6.6) zapišemo u obliku,

$$r_k = r_{k-2}\,u_1 + r_{k-1}\,v_1, \qquad \text{gde je} \qquad u_1 = 1 \quad \text{i} \quad v_1 = -q_k, \tag{6.7}$$

i sada iz relacije koja prethodi pretposlednjoj relaciji u (6.6) izrazimo r_{k-1}, ubacimo u (6.7), napokon dobijamo:

$$r_k = r_{k-3}\,u_2 + r_{k-2}\,v_2, \qquad \text{gde je} \qquad u_2 = v_1 \quad \text{i} \quad v_2 = u_1 - v_1\,q_{k-1}. \tag{6.8}$$

Nastavljajući ovu proceduru zamenjujući u (6.8) izraz za r_{k-2}, iz (6.6), itd. na kraju dobijamo da je $r_k = f\,u' + g\,v'$. Kako za neki $0 \neq c \in \mathbb{F}$ važi $d = c\,r_k$, iz prethodne relacije konačno dobijamo, $d = f\,u + g\,v$, gde je $u = u'\,c$ i $v = v'\,c$.

Kada bi $\partial\,u \geq \partial\,g$ imali bismo da je $u = q\,g + r$ za neke polinome q i r, pa ako ovo zamenimo u jednakost iz iskaza ove teoreme dobijamo:

$$f\,r + g\,(v + f\,q) = d.$$

Kako je $\partial\,r < \partial\,g$ onda je i $\partial\,(v + f\,q) < \partial\,f$, jer bi u suprotnom stepen drugog sumanda leve strane bio barem $\partial\,(f\,g)$, i leva strana jednakosti imala bi stepen barem $\partial\,(f\,g)$ što je nemoguće jer desna strana ima stepen manji od $\partial\,f$. Analogno se dokazuje i druga relacija između stepena polinoma v i f. □

Primer 2. Odredite u i v tako da je $f\,u + g\,v = d =$ NZD (f, g), za f i g iz prethodnog Primera 1.

Koristeći postupak opisan u prethodnoj teoremi nalazimo: $r_2 = g - r_1\,q_2$ i $r_1 = f - g\,q_1$, pa ako 2. relaciju zamijenimo u 1. dobijamo da je $r_2 = f\,(-q_2) + g\,(1 + q_1\,q_2)$. Kako je r_2 proporcionalan sa d, potrebno ga je normirati, tj. podeliti sa 15. Tako nalazimo, je $u = -\frac{1}{15}\,q_2$ i $v = \frac{1}{15}\,(1 + q_1\,q_2)$. Uvrštavanjem konkretnih polinoma iz pomenutog primera, konačno dobijamo: $u(x) = x/30$ i $v(x) = (2 - x)/30$.

6.3. O nulama polinoma.

Pronalaženje nula realnih polinoma je jedan od osnovnih zadataka u teoriji polinoma. Postoje formule, za pronalaženje nula polinoma do stepena 4, i one se, osim za linearne polinome, izražavaju pomoću korena. Za polinome većeg stepena od 4 ne postoje takve formule za proizvoljni polinom. Početkom 19. veka E. Galoa[4] je doneo nove i duboke ideje[5] kojima je dao odgovor kada se polinomijalne jednačine mogu rešiti pomoću korena. Sa praktične tačke za određivanje nula realnih polinoma koriste se numeričke metode. Mi se ovde nećemo baviti problemima određivanja nula polinoma, ali zato navodimo neka tvrđenja koja ćemo koristiti u nastavku.

Propozicija (o kompleksnim nulama realnog polinoma). *Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $z \in \mathbb{C}, z \notin \mathbb{R}$ takav da je $f(z) = 0$ onda je i $f(\overline{z}) = 0$.*

---

[4] Évariste Galois, 1811 – 1832, francuski matematičar.

[5] od kojih je nastala i Galoaova teorija.

Dokaz. Neka je $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ takav da je $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, z^n = 0$. Ako ovu relaciju konjugujemo i iskoristimo da je konjugovanje automorfizam polja $\mathbb{C}$ [6] dobijamo,

$$0 = \overline{0} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i\, z^i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i\, z^i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\, \overline{(z^i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i\, \overline{(z)}^{\,i} = f(\overline{z})\,. \qquad \square$$

Poznato je da polinomi sa realnim, pa pogotovo i sa racionalnim koeficijentima ne moraju imati nule u $\mathbb{R}$, ni u $\mathbb{Q}$, redom. I postavlja se pitanje da li postoje polja, koja imaju osobinu da svi polinomi sa koeficijentima u tim poljima imaju sve nule u tom polju. Prvo polje sa takvom osobinom je polje kompleksnih brojeva, i taj stav poznat je kao osnovni stav algebre.

Teorema (Osnovna teorema algebre). *Za svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ stepena barem 1, postoji $z_0 \in \mathbb{C}$ takav da je $f(z_0) = 0$.*

Dokaz ove teoreme je isuviše komplikovan za ovaj kurs pa ga preskačemo. Ali zato navodimo njegove najvažniju posledicu.

Posledica. *Ako je $f \in \mathbb{C}[x]$ i ako je $\partial f = n \in \mathbb{N}$, onda je*

$$f(x) = a_n\,(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n),$$

gde su $\alpha_i \in \mathbb{C},\ i = 1, \dots, n$ i gde je a_n vodeći koeficijent polinoma $f(x)$. Među nulama polinoma, tj. među brojevima $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ može biti istih.

Dokaz. Osnovna teorema algebre (skraćeno OTA) daje egzistenciju broja $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ takvog da je $f(\alpha_1) = 0$. Primenimo li sada Bezuovu lemu dobijamo: $f(x) = (x - \alpha_1)\, q_1(x)$ gde je opet $q_1(x) \in \mathbb{C}[x]$, zatim opet primenimo OTA na polinom $q_1(x) \in \mathbb{C}[x]$ i dobijamo egzistenciju njegove nule $\alpha_2 \in \mathbb{C}$, a ponovna primena Bezuove leme daje $q_1(x) = (x - \alpha_2)\, q_2(x)$. Nastavljajući analogno dalje dobijamo tvrdnju.

Primetimo da faktor a_n dobijamo tako što uporedimo vodeće koeficijente polinoma $f(x)$ i proizvoda lineranih članova sa desne strane jednakosti. $\square$

Definicija. Polja koja imaju osobinu kao $\mathbb{C}$ u OTA nazivaju se **algebarski zatvorena polja**. Poznato je da za svako polje $\mathbb{F}$ postoji polje $\overline{\mathbb{F}}$, takvo da je $\mathbb{F} \subseteq \overline{\mathbb{F}}$ i da je $\overline{\mathbb{F}}$ algebarski zatvoreno i ono se naziva algebarsko zatvorenje polja $\mathbb{F}$ [7].

6.4. Ireducibilnost (nesvodljivost) polinoma. Razlaganje polinoma na proste faktore. Kažemo da je polinom $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ **reducibilan (svodljiv)** nad $\mathbb{F}$ ako postoje polinomi $g(x)$ i $h(x) \in \mathbb{F}[x]$, tako da je:

(i1) $f(x) = g(x)\, h(x)$,

(i2) $\partial\, g \geq 1$ i $\partial\, h \geq 1$.

Ako takvi polinomi ne postoje kažemo da je polinom $f(x)$ **ireducibilan ili nesvodljiv**. Ireducibilni polinom stepena barem jedan nazivamo **prostim polinomom** nad $\mathbb{F}$.

Posledica ove definicije, i osobina množenja polinoma, je činjenica da je svaki polinom stepena 1 (linearan polinom) ireducibilan nad bilo kojim poljem $\mathbb{F}$, tj. linearni polinomi su uvek ireducibilni.

Primetimo da definicija ireducibilnosti zavisi o polju $\mathbb{F}$, kao što pokazuje sledeći primer. Polinom

$$f(x) = x^2 + 1 = (x - i)\,(x + i)$$

je svodljiv nad $\mathbb{C}$, ali je nesvodljiv nad $\mathbb{R}$.

Sada ćemo pokazati da ireducibilni polinomi u euklidovom prstenu $\mathbb{F}[x]$, gde je $\mathbb{F}$ polje, igraju istu ulogu kao i prosti brojevi u euklidovom prstenu $\mathbb{Z}$. U nekoliko narednih tvrđenja pretpostavljamo da je $\mathbb{F}$ polje.

Propozicija. *Neka su $p, f, g \in \mathbb{F}[x]$ polinomi, takvi da je p prost polinom koji deli proizvod $f\,g$. Tada p deli f ili p deli g.*

Dokaz. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je p moničan. Kako je p prost, on je deljiv samo sa moničnim polinomima 1 i p. Sada $d =$NZD (p, f), jer je p prost, može biti ili 1 ili p. Ako je $d = p$ onda smo gotovi, zato pretpostavimo da je $d = 1$, tj. f i p su relativno prosti. Primena teoreme o NZD na polinome f i

[6] $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ i $\overline{a} = a$, za $a \in \mathbb{R}$.

[7] Dokaz egzistencije algebarskog zatvorenja polja $\mathbb{F}$ trebalo bi da bude jedna od tema predmeta Algebra I.

p daje egzistenciju polinoma u i v takvih da je $1 = f\,u + p\,v$, i množeći ovu relaciju sa g dobijamo,

$$g = g\,(f\,u + p\,v) = (f\,g)\,u + p\,(g\,v).$$

Budući da p deli oba sumanda sa desne strane znaka jednakosti, deliće i levu stranu, tj. i polinom g. □

Posledica. *Ako je $p \in \mathbb{F}[x]$ prost polinom koji deli proizvod $f_1\,f_2\,\dots\,f_m$, tada p deli barem jedan od polinoma $f_1, f_2, \dots f_m$.*

Dokaz. Indukcijom. □

Teorema 1. *Neka je $f \in \mathbb{F}[x]$ polinom stepena barem jedan tada postoji skalar $a_n \in \mathbb{F}$, i različiti prosti monični polinomi $p_1, p_2, \dots, p_m$ i prirodni brojevi $r_1, r_2, \dots, r_k$ takvi da je*

$$f(x) = a_n\,p_1^{r_1}\,p_2^{r_2}\,\dots\,p_m^{r_m}. \tag{6.9}$$

Dekompozicija (6.9) je jedinstvena do na permutaciju polinoma $p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, \dots, p_m^{r_m}$.

Dokaz. Primetimo da polinom $f(x)$ možemo napisati u obliku $f(x) = a_n\,\hat{f}(x)$, gde je $\hat{f}$ monični polinom, tako da je potrebno pokazati da se *svaki monični polinom može napisati kao proizvod prostih moničnih polinoma, tj.* $\hat{f} = q_1\,q_2\,\cdots, q_n$, pri čemu među prostim moničnim polinomima q_i može biti istih, i zbog komutativnosti u prstenu $\mathbb{F}[x]$ možemo grupisati iste i dobiti traženu dekompoziciju.

Dokaz provodimo indukcijom po stepenu polinoma $\hat{f}$. Ako je $\partial\,\hat{f} = 1$ nemamo što dokazivati, jer je $\hat{f}$ prost polinom. Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za sve monične polinome čiji je stepen manji od $k > 1$. Neka je $\partial\,\hat{f} = k > 1$. Ako je $\hat{f}$ prost on je već u traženom obliku $(m = 1, r_1 = 1)$. Ako $\hat{f}$ nije prost, on je reducibilan i postoje polinomi g i h stepena barem jedan takvi da je $\hat{f} = g\,h$. Kako su stepeni polinoma g i h manji od k na njih možemo primeniti pretpostavku indukcije, tj. oni se mogu faktorisati u proizvode prostih moničnih polinoma u $\mathbb{F}[x]$, tako da je onda i $\hat{f}$ proizvod prostih moničnih polinoma. Time smo pokazali egzistenciju.

Pretpostavimo da imamo dva rastava polinoma $\hat{f}$ u proizvod prostih moničnih polinoma

$$\hat{f} = q_1\,q_2\,\cdots\,q_n = h_1\,h_2\,\cdots\,h_l, \tag{6.10}$$

gde su $q_1, q_2, \dots, q_n, h_1, h_2, \dots h_l \in \mathbb{F}[x]$ prosti monični polinomi. Tada q_1 deli proizvod $h_1\,h_2\,\cdots\,h_l$, i prema gornjoj posledici q_1 deli neki od polinoma h_j. Kako su q_1 i h_j prosti monični polinomi to je moguće samo ako je $q_1 = h_j$. Primetimo da smo time pokazali i jedinstvenost u slučaju kada je $n = 1$ ili $l = 1$ jer jednakost

$$\partial\,\hat{f} = \sum_{i=1}^{n} \partial\,q_i = \sum_{j=1}^{l} \partial\,h_j$$

implicira u oba slučaja da je $n = l = 1$. Zato pretpostavimo da je $n > 1$, tada je i $l > 1$ i nakon eventualne prenumeracije polinoma h_i možemo pretpostaviti da je $q_1 = h_1$, tako da će biti

$$\hat{f} = q_1\,q_2\,\cdots\,q_n = q_1\,h_2\,\cdots\,h_l, \quad \text{odakle je} \quad q_2\,q_3\,\cdots\,q_n = h_2\,h_3\,\cdots\,h_l. \tag{6.11}$$

Budući da polinom $q_2\,q_3\,\cdots\,q_n$ ima stepen manji od k pretpostavka indukcije implicira da je niz $h_2, h_3, \dots h_l$ samo permutacija niza $q_2\,q_3\,\cdots\,q_n$, i kako je $q_1 = h_1$ sledi tvrdnja. □

Ireducibilni polinomi nad $\mathbb{C}$. Posledica OTA pokazuje da su samo linearni polinomi ireducibilni nad poljem $\mathbb{C}$. Naravno, ovo je tačno za svako algebarski zatvoreno polje. Važi i obrat, pa se algebarski zatvorena polja mogu karakterisati kao ona polja nad kojima su svi ireducibilni polinomi linearni. Primetimo da je ovo najjednostavniji slučaj, s obzirom na jednostavnost ireducibilnih polinoma, iz kojeg vidimo da što bolja algebarska svojstva ima polje, ireducibilni polinomi nad njim su jednostavniji.

Ireducibilni polinomi nad $\mathbb{R}$. Budući da polje $\mathbb{R}$ nije algebarski zatvoreno, skup ireducibilnih polinoma nad $\mathbb{R}$ ne može se sastojati samo od linearnih polinoma. Polje $\mathbb{R}$ je *prilično dobro* jer među ireducibilnim polinomima osim linearnih polinoma postoje još samo kvadratni polinomi, kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 2. *Ireducibilni polinomi nad $\mathbb{R}$ su oblika:*

(l) $x - \alpha\,;\ \alpha \in \mathbb{R}$ *ili*
(k) $x^2 + p\,x + q\,;\ p, q \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $p^2 - 4\,q < 0$.

Dokaz. Neka je $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, neki realni polinom stepena barem jedan. Kako je polinom $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ zbog Posledice OTA znamo da polinom $f(x)$ ima tačno n nula u $\mathbb{C}$, računajući višestrukost.

Realne nule označimo sa $\alpha_1, \ldots, \alpha_j,\ j \le n$ i primena Bezouve leme implicira

$$f(x) = a_n\,(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_j)\,g(x),$$

i pri tome polinom $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ nema više realnih nula. Ako je $g(x) \ne 1$ tada $g(x)$ ima kompleksnu nulu, recimo $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, i zbog **6.3.** Propozicija, imamo da je i $g(\overline{z_1}) = 0$, a zatim primena Bezuove leme daje,

$$g(x) = (x-z_1)\,(x-\overline{z_1})\,g_1(x).$$

Kako je $z_1 = a_1 + i\,b_1$ imamo da je

$$(x-z_1)\,(x-\overline{z_1}) = x^2 + \underbrace{(-2\,a_1)}_{p_1\in\mathbb{R}}\,x + \underbrace{a_1^2 + b_1^2}_{q_1\in\mathbb{R}}$$

i pri tome je $p_1^2 - 4\,q_1 = 4\,a_1^2 - 4\,a_1^2 - 4\,b_1^2 = -4\,b_1^2 < 0$, jer je $b_1 \ne 0$. Sada primenimo isto na polinom $g_1(x)$. Ako je $g_1(x) \ne 1$ postoji (zbog OTA) $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ takav da je: $g_1(z_2) = g_1(\overline{z_2}) = 0$, pa zbog Bezuove leme opet imamo

$$g_1(x) = (x-z_2)\,(x-\overline{z_2})\,g_2(x),$$

itd. Nakon konačno mnogo koraka dobijamo,

$$f(x) = a_n\,(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_j)\,(x^2+p_1\,x+q_1)\cdots(x^2+p_k\,x+q_k),$$

pri čemu je $j + 2\,k = n$. □

Ireducibilnost nad $\mathbb{Q}$. Budući da je polje $\mathbb{Q}$ "manje savršeno" od polja $\mathbb{R}$, a pogotovo od polja $\mathbb{C}$ za očekivati je da ima mnogo više ireducibilnih polinoma i da ne možemo kontrolisati čak niti njihov stepen. Naime, ovde važi:

Ajzenštajov[8] kriterijum. Neka je $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i \in \mathbb{Z}[x]$ i neka postoji prost broj p takav da

(i1) *p deli a_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$,*

(i2) *p ne deli a_n,*

(i3) *p^2 ne deli a_0.*

Tada je polinom $f(x)$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$.

Dakle, polinom $x^n - p$, pri čemu je p proizvoljan prost broj, ispunjava pretpostavke Ajzenštajnovog kriterijuma, pa je ireducibilan nad $\mathbb{Q}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time je pokazano da nad $\mathbb{Q}$ postoje ireducibilni polinomi bilo kojeg stepena (većeg od 1).

6.5. Redukcija linearnog operatora. Problem redukcije linearnog operatora $A \in \mathsf{Hom}\,V$ sastoji se u traženju baze prostora V u kojem je matrica operatora najjednostavnija, a to znači što sličnija dijagonalnoj matrici. Ovaj problem zavisi od polja nad kojim je V vektorski prostor i najlepši rezultati dobijaju se u slučaju kada polje ima najbolja algebarska svojstva, tj. kada je algebarski zatvoreno. U ovoj glavi pretpostavljamo da je polje $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

6.6. Invarijantni potprostori. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ linearni operator i neka je $L \subseteq V$ potprostor od V. Kažemo da je L **invarijantan potprostor** operatora A ako je $A(L) \subseteq L$[9]

Ako je L invarijantan potprostor od A onda je dobro definisana restrikcija operatora A na vektorski potprostor L od V, tj. preslikavanje, $A_1 = A_L : L \longrightarrow L$, definisano formulom, $A_1 x = Ax$, je linearni operator.

Primer. Uvek postoje trivijalni[10] invarijantni potprostori. Dakle, svaki linearni operator $A \in \mathsf{Hom}\,V$ ima invarijantne potprostore, nezavisno od polja nad kojim je V vektorski prostor, i to su: $L = \{0\}$ i $L = V$. Invarijantne potprostore linearnog operatora A koji nisu trivijalni nazivamo pravim ili netrivijalnim invarijantnim potprostorima operatora A.

Postoje linearni operatori koji osim trivijalnih invarijantnih potprostora nemaju drugih, takav je npr. linearni operator $A \in \mathsf{Hom}\,\mathbb{R}^2$ koji je definisan svojim dejstvom na kanonskoj bazi $e = (e_1, e_2)$ na sledeći način: $Ae_1 = e_2$ i $Ae_2 = -e_1$.

[8] Ferdinand Gotthold Max Eisenstein, 1823–1852, nemački matematičar.

[9] ili ekvivalentno: $Ax \in L,\ \forall\, x \in L$.

[10] Jedan od 'najomiljenijih' termina studentata 1. godine.

Zaista, kada bi postojao pravi invarijantni potprostor L od A on bio morao biti jednodimenzion, i kao takav imao bi jedan bazni vektor $0 \neq x = \alpha e_1 + \beta e_2$ i tada bi moralo da važi da je $Ax = \xi x$, za neki $\xi \in \mathbb{R}$. Sada računamo, $Ax = A(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha A(e_1) + \beta A(e_2) = \alpha e_2 - \beta e_1 = \xi\alpha e_1 + \xi\beta e_2$, odakle, odmah sledi da je $-\beta = \xi\alpha$ i $\alpha = \xi\beta$. Zamenjujući β iz prve jednačine u drugu, dobijamo $\alpha = -\xi^2\alpha$, tako da je ova jednakost moguća samo u dva slučaja $\alpha = 0$ i $\alpha \neq 0$, $\xi^2 = -1$.

Slučaj $\alpha = 0$, implicira da je i $\beta = 0$ i tada je $x = 0$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je L pravi invarijantni potprostor od A.

Slučaj $\alpha \neq 0$, implicira da je $\xi^2 = -1$, što je nemoguće jer je ξ realan broj. Dakle, i taj slučaj je nemoguć.

Primetimo da smo pretpostavili da je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathbb{C}^2$ tada isti račun pokazuje da A ima pravi invarijantni potprostor $L = \mathcal{L}(e_1 + i\,e_2)$.

Propozicija. *Neka je* $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ *linearni operator. Tada*

(i1) *su* $\mathsf{Ker}\,A$ *i* $\mathsf{Im}\,A$ *invarijantni potprostori od* A,

(i2) *za svaki prirodan broj* j *važi* $\mathsf{Ker}\,A^j \subseteq \mathsf{Ker}\,A^{j+1}$,

(i3) *za svaki prirodan broj* j *važi* $\mathsf{Im}\,A^j \supseteq \mathsf{Im}\,A^{j+1}$.

Dokaz. (i1) Neka je $x \in \mathsf{Ker}\,A$, tada je $Ax = 0$, tako da sada lako nalazimo, $A(Ax) = A(0) = 0$, tj. za svaki vektor $x \in \mathsf{Ker}\,A$ i vektor $Ax \in \mathsf{Ker}\,A$. Drugim rečima $\mathsf{Ker}\,A$ je invarijantan potprostor od A.

Neka je $y \in \mathsf{Im}\,A$, tada postoji $z \in V$ takav da je $y = Az$. Sada odmah iz relacije $w = Ay \in \mathsf{Im}\,A$, sledi da je i vektor $Ay \in \mathsf{Im}\,A$.

(i2) Neka je $j \in \mathbb{N}$ i za $x \in \mathsf{Ker}\,A^j$ imamo $A^j x = 0$ ali onda je i

$$A^{j+1}(x) = A(A^j x) = 0 \qquad \text{odakle sledi} \qquad \mathsf{Ker}\,A^j \subseteq \mathsf{Ker}\,A^{j+1}.$$

(i3) Slično ako je $y \in \mathsf{Im}\,A^{j+1}$ tada je $y = A^{j+1}x$ za neki $x \in V$, ali onda je

$$y = A^{j+1}(x) = A^j(Ax) = A^j(z), \quad z = Ax \qquad \text{odakle sledi} \qquad \mathsf{Im}\,A^j \supseteq \mathsf{Im}\,A^{j+1},$$

time je dokaz gotov. □

6.7. Dekompozabilni i ireduciblini operatori. Ako operator $A \in \mathsf{Hom}\,V$ ima netrivijalni invarijantni potprostor kažemo da je reducibilan ili svodljiv, ako A nema netrivijalnih invarijantih potprostora kažemo da je **ireducibilan ili nesvodljiv** na V. Za operator koji ima invarijantne netrivijalne potprostore L i M takve da je $V = L \oplus M$ kažemo da je dekompozabilan. Ako zahtevamo 'malo' više, tj. da za svaki netrivijalni invarijanti potprostor L postoji invarijanti potprostor M takav da je $V = L \oplus M$ tada kažemo da je operator A potpuno reducibilan ili potpuno svodljiv. Jasno, ako je operator potpuno reducibilan tada je i dekompozabilan.

Ako je operator A dekompozabilan onda je A potpuno određen svojim restrikcijama $A_1 = A_{|L}$ i $A_2 = A_{|M}$, jer važi: $\forall\, x \in V$, postoje jedinstveni vektori $l \in L$ i $m \in M$ takvi da je $x = l + m$, i imamo

$$A(x) = A(l + m) = A(l) + A(m) = A_1(l) + A_2(m).$$

U ovakvom slučaju kažemo da je operator A direktna suma operatora A_1 i A_2 i pišemo: $A = A_1 \oplus A_2$ (pri tome se podrazumeva da A_1 deluje na L, a A_2 na M). Takođe, sada se možemo pitati da li su operatori A_1 i A_2 reducibilni ili ireducibilni na L, odnosno M.

Neka je operator A reducibilan, tada on ima netrivijalni invarijantni potprostor L, i onda izaberemo bazu e u V tako da prvih $k\,(= \mathsf{dim}\,L)$ vektora obrazuju bazu e_L invarijantnog potprostora L, a preostalih $n - k$ vektora baze e su baza e_M, nekog direktnog komplementa M od L u V. U bazi e matrica operatora A ima oblik,

$$A(e) = \begin{bmatrix} A_1(e_L) & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \tag{6.12}$$

gde je $A_1(e_L)$ matrica restrikcije A_1 operatora A na L u bazi e_L.

Ako je još i potprostor M invarijantan, tj. A je dekompozabilan, onda je u istoj bazi matrica operatora A kvazidijagonalna tj. oblika,

$$A(e) = \begin{bmatrix} A_1(e_L) & 0 \\ 0 & A_2(e_M) \end{bmatrix}, \tag{6.13}$$

pri čemu je $A_1(e_L)$ matrica restrikcije A_1 operatora A na L u bazi e_L, a $A_2(e_M)$ je matrica restrikcije A_2 operatora A na M u bazi e_M.

Primetimo da ako je A barem reducibilan da je onda

$$\det A(e) = \det A_1(e_L) \det A_2.$$

Očigledno važi sledeća propozicija.

Propozicija. *Linearni operator $A \in \mathrm{Hom}\, V$ je reducibilan (dekompozabilan)* ***akko*** *postoji baza u V takva da je matrica operatora A u toj bazi oblika (6.12) ((6.13)).*

Gornja razmatranja mogu se generalisati u slučaju kada je operator A potpuno reducibilan na sledeći način: neka je L_1 netrivijalni invarijantan potprostor od A, tada postoji, jer je A potpuno reducibilan, invarijantan potprostor L_2 od A, takav da je $V = L_1 \oplus L_2$. I sada se pitamo da li su L_1 i L_2 ireducibilni potprostori restrikcija A_1 i A_2, na L_1 odnosno L_2. Ako su oba ireducibilna onda smo gotovi, a ako nisu imamo dva slučaja: tačno jedan od njih je ireducibilan, a drugi nije; i oba su reducibilna. U prvom slučaju, ako je npr. L_2 ireducibilan, a L_1 reducibilan, tada postoji netrivijalni invarijantni potprostor $L_3 \subseteq L_1$ za koji, opet zbog potpune reducibilnosti od A (ali i restrikcije A_1), postoji invarijantni potpostor L_5 takav da je $L_1 = L_3 \oplus L_5$. Sada se pitamo da li su L_3 i L_5 ireducibilni potprostori restrikcija A_3 i A_5 redom na L_3 i L_5. U drugom slučaju, osim invarijantnog potprostora L_3, postoji i netrivijalni invarijantni potprostor $L_4 \subseteq L_2$ za koji postoji invarijantni potpostor L_6 takav da je i $L_2 = L_4 \oplus L_6$ i pitamo se da li su L_3, L_4, L_5, L_6 ireducibilni potprostori restrikcija A_3, A_4, A_5 i A_6, operatora A redom na L_3, L_4, L_5 i L_6. Na onim potprostorima na kojima su restrikcije operatora A reducibilne, analogno nastavimo dalje, a ako su ireducibilne, ti potprostori su sumandi koji ulaze u konačnu dekompoziciju. Kako u svakom koraku smanjujemo dimenzije netrivijalnih invarijantnih potprostora, i kako su jednodimenzioni potprostori očigledno ireduciblni, zbog konačne dimenzije prostora V, ovaj algoritam će stati kada u nekom koraku sve restrikcije operatora A na invarijantnim potprostorima budu ireducibilne. Dakle, pokazali smo sledeću teoremu.

Teorema 1. *Neka je $A \in \mathrm{Hom}\, V$ potpuno reducibilan linearni operator, tada postoje ne-nula potprostori $L_1, L_2, \ldots, L_m$ takvi da je*

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_m,$$

i pri tome su za svako $i = 1, \ldots, m$ restrikcije $A_i = A_{|L_i}$ ireducibilni linearni operatori na L_i, redom.

Primedba. (i1) Svaka matematička teorija teži za tim da opiše njene najjednostavnije objekte i načine kako da proizvoljni objekt te teorije rastavimo na ove najjednostavnije. Prethodna teorema pokazuje da su ireducibilni operatori i potprostori takvi najjednostavniji objekti. Naravno, ako uzmemo samo jedan operator onda prethodna teorema ne daje mnogo, ali upravo uvedeni pojmovi kao što su invarijantni potprostori, ireducibilni operatori, potpuno ireducibilni operatori i sl. mogu se direktno uopštiti na čitave skupove linearnih operatora. Od posebnog interesa je slučaj kada ti skupovi linearnih operatora imaju dodatnu algebarsku strukturu, kao što je npr. grupa (algebra) u teoriji reprezentacija grupa (algebri i sl.).

(i2) Dakle, ako imamo dekompoziciju, kao iz prethodne teoreme, tj. ako su $L_1, \ldots, L_m$ netrivijalni invarijantni potprostori operatora A takvi da je

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_m$$

i ako su $A_i = A_{|L_i}$, $i = 1, \ldots, m$ restrikcije operatora A na invarijantne potprostore L_i onda je

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m.$$

Ako sada izaberemo bazu $e = (e_{L_1}, e_{L_2}, \ldots, e_{L_m})$ od V tako da je e_{L_i} baza potprostora L_i onda u toj bazi matrica operatora A je kvazidijagonalna tj. oblika:

$$A(e) = \begin{bmatrix} \boxed{A_1(e_{L_1})} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2(e_{L_2})} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \boxed{A_m(e_{L_m})} \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

i važi npr. formula,

$$\det A(e) = \det A_1(e_{L_1}) \det A_2(e_{L_2}) \cdots \det A_m(e_{L_m}).$$

Nalaženje invarijantnih potprostora je prvi korak u redukciji linearnog operatora, kao što se vidi iz upravo izloženog, jer se izučavanje linearnog operatora A svodi na izučavanje njegovih restrikcija A_i koje deluju na prostorima manje dimenzije, pa su jednostavnije za proučavanje.

Problem. Videli smo u glavi 2, posvećenoj linearnim operatorima da operator projektovanja, $P \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ i $P^2 = P$, dozvoljava dekompoziciju,

$$V = \mathsf{Ker}\, P \oplus \mathsf{Im}\, P, \tag{6.15}$$

pri čemu je ova suma netrivijalna ako $P \neq \mathsf{id}_V$. Tada je bio dat primer linearnog operatora koji ne dozvoljavaja dekompoziciju oblika (6.15). Sada se pitamo da li ipak za proizvoljni operator $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ postoji neki prrrodan broj m, koji zavisi o operatoru A, takav da je

$$V = \mathsf{Ker}\, A^m \oplus \mathsf{Im}\, A^m. \tag{6.16}$$

Da bismo odgovorili na to pitanje, prvo primetimo da svojstva (i2) i (i3) iz **6.6** Propozicija impliciraju da za linearni operator $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ postoje sledeća dva niza invarijantnih potprostora,

$$\{0\} = \mathsf{Ker}\, A^0 \subseteq \mathsf{Ker}\, A \subseteq \mathsf{Ker}\, A^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{Ker}\, A^k \subseteq \ldots \tag{6.17}$$

$$V = \mathsf{Im}\, A^0 \supseteq \mathsf{Im}\, A \supseteq \mathsf{Im}\, A^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathsf{Im}\, A^k \supseteq \ldots \tag{6.18}$$

gde smo uzeli da je $A^0 = \mathsf{id}_V$.

Zbog konačne dimenzije vektorskog prostora V, dimenzije potprostora u nizovima (6.17) i (6.18) ne obrazuju strogo rastući niz. Dokažimo da se ovaj niz stabilizuje tj. kada se prvi put desi da je $\mathsf{Ker}\, A^p = \mathsf{Ker}\, A^{p+1}$ onda za svaki $j \in \mathbb{N}$ važi, $\mathsf{Ker}\, A^p = \mathsf{Ker}\, A^{p+j}$. Neka je p najmanji indeks takav da je $\mathsf{Ker}\, A^p = \mathsf{Ker}\, A^{p+1}$ i pretpostavimo da za neki $j \in \mathbb{N}$ je $\mathsf{Ker}\, A^{p+j} \subsetneqq \mathsf{Ker}\, A^{p+j+1}$. Tada postoji vektor $v \in \mathsf{Ker}\, A^{p+j+1}$ i $v \notin \mathsf{Ker}\, A^{p+j}$, drugim rečima

$$A^{p+j+1} v = 0 \quad \text{i} \quad A^{p+j} v \neq 0. \tag{6.19}$$

Neka je $w = A^j v$ tada iz (6.19) sledi da je $w \in \mathsf{Ker}\, A^{p+1} = \mathsf{Ker}\, A^p \not\ni w$ što je nemoguće.

Slično niz (6.18) se takođe stabilizuje kao i niz (6.17), uz analogan dokaz, tj. neka je $\mathsf{Im}\, A^l = \mathsf{Im}\, A^{l+1} = \ldots$.

Sada definišemo $L = \mathsf{Ker}\, A^p$ i $M = \mathsf{Im}\, A^l$. Invarijantnost ovih potprostora sledi iz tvrdnje (i1) **6.6** Propozicija. Pokažimo da je suma $L + M$ direktna. Neka je $x \in L \cap M$ tj. $A^p x = 0$ i postoji $y \in M$ takav da je $x = A^p y$. Tada je

$$0 = A^{2p} x = A^p x = A^{2p} y, \quad \text{drugim rečima} \quad y \in L \quad \text{tako da je} \quad 0 = A^p y = x\,.$$

Dakle, kako je presek potprostora L i M trivijalan suma je direktna. Da je $L \oplus M = V$ sledi iz teoreme o rangu i defektu, jer postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $L = \mathsf{Ker}\, A^m$, i $M = \mathsf{Im}\, A^m$. Iz činjenica da se nizovi (6.17) i (6.18) stabilizuju odmah sledi da je A_L nilpotentan na L, jer je $A_L^m = 0$, i da je A_M regularan na M. Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema 2. (Fitingova[11] dekompozicija). *Neka je $A : V \longrightarrow V$, linearni operator i $\dim V < \infty$. Tada postoje prirodan broj m i jedinstveni invarijantni potprostori $L = \mathsf{Ker}\, A^m$ i $M = \mathsf{Im}\, A^m$ od A takvi da je*

(i1) $V = L \oplus M$,

(i2) $B = A_{|M}$ *regularan operator, i* $C = A_{|L}$ *je nilpotentan operator.*

Primetimo da za proizvoljan linearni operator $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ uvek možemo uzeti da je $m = \dim V$, a razlog leži u činjenici da broj p za koji se stabilizuje niz potprostora $(\mathsf{Ker}\, A^j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ iz dokaza prethodne teoreme, ne može biti veći od $\dim V$. Naravno, postoje linearni operatori za koje je taj broj manji, kao što su npr. projektori ($m = 1$).

6.8. Karakteristični polinom i invarijante sličnosti. Karakteristični polinom matrice. Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ proizvoljna matrica, tada matricu $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \lambda\, \mathbb{I}_n$, gde je λ promenljiva, nazivamo karakteristična matrica od $\mathcal{A}$, a njenu determinantu tj. polinom u λ:

$$\det \mathcal{C} = \det\,(\mathcal{A} - \lambda\, \mathbb{I}_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \ldots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) \tag{6.20}$$

nazivamo karakterističnim polinom matrice $\mathcal{A}$. Jednačinu,

$$\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0, \tag{6.21}$$

[11] Hans Fitting, 1906 – 1938, nemački matematičar.

nazivamo karakteristična jednačina matrice $\mathcal{A}$.
Koristeći definiciju determinante vidimo da je $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)$ polinom $n-$tog stepena u λ, tj. uz $\mathcal{C}=(\gamma_{ij})$ imamo,

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) &= \det\mathcal{C} = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n}(-1)^{I(\sigma)}\gamma_{1\sigma(1)}\,\gamma_{2\sigma(2)}\cdots\gamma_{n\sigma(n)} = (\alpha_{11}-\lambda)(\alpha_{22}-\lambda)\cdot(\alpha_{nn}-\lambda)+q(\lambda)\\ &= k_n\lambda^n+k_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+k_1\lambda+k_0,\quad k_i\in\mathbb{F},\end{aligned}\tag{6.22}$$

pri čemu je $q(\lambda)$ polinom stepena ne većeg od $n-2$.[12]
Ako sve upravo rečeno uzmemo u obzir onda lako nalazimo da je $k_n=(-1)^n$, $k_{n-1}=(-1)^{n-1}\,\mathsf{Tr}\mathcal{A}$, jer je polinom $q(\lambda)$ stepena najviše $n-2$. Takođe, nalazimo da je $k_0=\kappa(0)=\det\mathcal{A}$.

Primer 1. Neka je $\mathcal{A}=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. Nađimo karakteristični polinom matrice $\mathcal{A}$.
Računamo,

$$\begin{aligned}0=\det\mathcal{C} &= \det(\mathcal{A}-\lambda\,\mathbb{I}_2)=\begin{vmatrix} a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=(a-\lambda)(d-\lambda)-b\,c=\lambda^2-\lambda(a+d)+a\,d-b\,c\\ &=\lambda^2-\mathsf{Tr}(\mathcal{A})\,\lambda+\det\mathcal{A}\end{aligned}$$

Primetimo,

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) &= \mathcal{A}^2-\mathsf{Tr}(\mathcal{A})\,\mathcal{A}+(\det\mathcal{A})\,\mathbb{I}_2=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}-(a+d)\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a\,d-b\,c & 0\\ 0 & a\,d-b\,c\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} a^2+b\,c-(a+d)a+a\,d-b\,c & a\,b+b\,d-(a+d)b\\ c\,a+d\,c-(a+d)c & c\,b+d^2-(a+d)d+a\,d-b\,c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathcal{O}_2.\end{aligned}$$

Činjenica, da je $\kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{O}$ nije slučajna i važi za sve matrice nad poljem $\mathbb{F}$ i zove se Hamilton-Kejlijeva teorema.
Ako je matrica $\mathcal{A}\in\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$ singularna, tj. $\det\mathcal{A}=0$, onda iz $\mathcal{O}_2=\kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{A}^2-\mathsf{Tr}(\mathcal{A})\,\mathcal{A}$, sledi da je ona proporcionalna svom kvadratu.

U glavi posvećenoj linearnim operatorima uveli smo relaciju sličnosti matrica na sledeći način: kažemo da su matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}\in\mathbb{M}_n$ slične i pišemo $\mathcal{A}\sim\mathcal{B}$, ako i samo ako postoji regularna matrica $\mathcal{T}$ takva da je $\mathcal{B}=\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\,\mathcal{T}$.
Pokazali smo da je sličnost matrica relacija ekvivalencije na $\mathbb{M}_n$. Kao što smo videli ranije, u istoj glavi, relacija koja povezuje matrice proizvoljnog linearnog operatora A u bazama e i e' je

$$A(e')=[T_{ee'}]^{-1}\,A(e)\,T_{ee'}\,.\tag{6.23}$$

Iz (6.23) i definicije sličnosti matrica odmah sledi da slične matrice predstavljaju zapis istog linearnog operatora u različitim bazama pri čemu je matrica $\mathcal{T}$ matrica prelaska sa prve baze u drugu.
Invarijante sličnosti su svojstva linearnog operatora $A\in\mathsf{Hom}\,V$ koja ne zavise od njegovog matričnog zapisa, tj. mogu se pročitati iz matrice operatora u bilo kojoj bazi, jer su ista u svakoj bazi. Ispostavlja se da važi jednostavna, ali veoma važna činjenica.

Teorema. *Karakteristični polinom je invarijanta sličnosti.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ slične matrice, tada postoji regularna matrica $\mathcal{T}$ takva da je $\mathcal{B}=\mathcal{T}^{-1}\,\mathcal{A}\,\mathcal{T}$, tako da sada nalazimo,

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathcal{B}}(\lambda) &= \det(\mathcal{B}-\lambda\,\mathbb{I}_n)=\det(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\,\mathcal{T}-\lambda\,\mathbb{I}_n)=\det\left(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\,\mathcal{T}-\mathcal{T}^{-1}(\lambda\,\mathbb{I}_n)\mathcal{T}\right)=\det(\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{A}-\lambda\,\mathbb{I}_n)\mathcal{T})\\ &= \det(\mathcal{T}^{-1})\,\det(\mathcal{A}-\lambda\mathbb{I}_n)\,\det(\mathcal{T})=\det(\mathcal{A}-\lambda\mathbb{I}_n)=\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda),\end{aligned}$$

tj. slične matrice imaju isti karakteristični polinom. □

---

[12] Primetimo da se λ pojavljuje samo u dijagonalnim elementima matrice $\mathcal{C}$ i to sa stepenom 1. S druge strane ako u opštem elementu, $\xi(\mathcal{C})$ od $\det\mathcal{C}$ izbacimo neki dijagonalni element, moramo izbaciti barem još jedan (jer se iz svake vrste i kolone matrice $\mathcal{C}$ nalazi tačno jedan faktor u $\xi(\mathcal{C})$), tako da je $q(\lambda)$ suma polinoma u λ čiji stepen ne premašuje $n-2$.

Definicija. Tvrdnja prethodne teoreme, tj. činjenica da se karakteristični polinomi sličnih matrica podudaraju, omogućuje da definišemo **karakteristični polinom** linearnog operatora $A \in \mathsf{Hom}\, V$ formulom:

$$\kappa_A(\lambda) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \kappa_{A(e)}(\lambda),$$

gde je e neka baza vektorskog prostora V.

Kako je karakteristični polinom invarijanta sličnosti, svi koeficijenti karakterističnog polinoma su takođe invarijante sličnosti matrice $\mathcal{A}$. Specijalno, $\mathsf{Tr}\mathcal{A}$ i $\det\mathcal{A}$ su invarijante sličnosti, i možemo, na analogan način, definisati trag i determinantu linernog operatora $A \in \mathsf{Hom}\, V$ formulom:

$$\mathsf{Tr} A \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathsf{Tr} A(e), \qquad \det A \stackrel{\mathsf{def}}{=} \det A(e),$$

gde je e neka baza vektorskog prostora V.

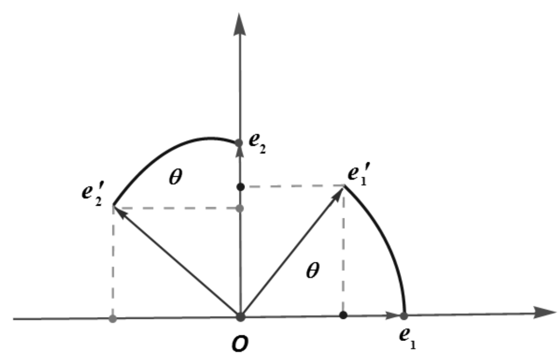
Primer 2. Neka je R operator rotacije u ravni za ugao $\theta \in [$ Kako karakteristični polinom ne zavisi o izabranoj bazi, nađimo matricu operatora R u standardnoj ortonormiranoj bazi $e = (e_1, e_2)$. Operator R deluje na sledeći način, vidi Sliku 1,

$$R(e_1) = (\cos\,\theta)\, e_1 + (\sin\,\theta)\, e_2,$$
$$R(e_2) = (-\sin\,\theta)\, e_1 + (\cos\,\theta)\, e_2,$$

tako da je $R(e) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Odakle nalazimo,

$$\kappa_R(\lambda) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\,(\cos\,\theta)\,\lambda + 1.$$



Slika 1. Rotacija u ravni

6.9. Hamilton-Kejlijeva teorema. Budući da je množenje matrica asocijativna operacija, za proizvoljnu matricu $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ dobro su definisani njeni stepeni, $\mathcal{A}^0 = \mathbb{I}_n, \mathcal{A}^1 = \mathcal{A}, \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}\cdot\mathcal{A}, \dots,\ \mathcal{A}^{n+1} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}$, a onda i linearne kombinacije istih. Drugim rečima, za bilo koji polinom $p \in \mathbb{F}[\lambda]$ ima smisla posmatrati matricu $p(\mathcal{A})$ koju dobijemo tako što promenljivu u polinomu $p(\lambda)$ zamenimo matricom $\mathcal{A}$. Štaviše, nije teško videti da vredi sledeća propozicija.

Propozicija. *Za proizvoljnu matricu $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ postoji polinom $p(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ takav da je $p(\mathcal{A}) = 0$.*

Dokaz. Posmatrajmo skup $\mathsf{E} = \{\mathbb{I}_n, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^{n^2}\} \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Kako skup E ima n^2+1 element i kako je $\dim \mathbb{M}_n(\mathbb{F}) = n^2$, zaključujemo da je skup E linearno zavisan, tj. postoje skalari $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{n^2} \in \mathbb{F}$, od kojih barem jedan nije 0, takvi da je:

$$\alpha_0\ \mathbb{I}_n + \alpha_1\ \mathcal{A} + \alpha_2\ \mathcal{A}^2 + \ \dots\ + \alpha_{n^2}\ \mathcal{A}^{n^2} = 0,$$

odakle sledi da je traženi polinom,

$$p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\ \lambda + \alpha_2\ \lambda^2 + \dots + \alpha_{n^2}\ \lambda^{n^2}.$$

I dokaz je gotov. □

Prethodna propozicija, za proizvoljnu matricu $\mathcal{A}$, daje egzistenciju polinoma kojeg poništava data matrica $\mathcal{A}$, i koji je stepena ne većeg od n^2. Sada se postavlja pitanje da li za proizvoljnu matricu $\mathcal{A}$ postoji polinom manjeg stepena koji ju poništava. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan, i pre samog dokaza te važne činjenice dokazujemo sledeću lemu, koja je generalizacija Bezuove leme[13] za polinome sa matričnim koeficijentima.

Lema. *Neka je dat polinom $p(\lambda) = \alpha_n\,\lambda^n + \alpha_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\,\lambda + \alpha_0 \in \mathbb{F}[\lambda]$, i neka za neku matricu $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ važi*

$$p(\lambda)\,\mathbb{I}_n = (\mathcal{A} - \lambda\,\mathbb{I}_n)\,q(\lambda) \tag{6.24}$$

gde je $q(\lambda) = \mathcal{C}_{n-1}\lambda^{n-1} + \mathcal{C}_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + \mathcal{C}_1\lambda + \mathcal{C}_0$ polinom čiji su koeficijenti matrice $\mathcal{C}_i$ $(i = 0, \dots, n-1)$ sa konstantnim koeficijentima. Tada je $p(\mathcal{A}) = 0$.

[13] Ako je $f \in \mathbb{F}[X]$ neki polinom, tada je $f(a) = 0$ akko $X - a \mid f(X)$.

Dokaz. Desna strana jednakosti (6.24) je,

$$(6.25) \qquad (\mathcal{A}-\lambda\,\mathbb{I}_n)\,q(\lambda)=\mathcal{A}\mathcal{C}_0+(\mathcal{A}\mathcal{C}_1-\mathcal{C}_0)\lambda+(\mathcal{A}\mathcal{C}_2-\mathcal{C}_1)\lambda^2+\cdots(\mathcal{A}\mathcal{C}_n-\mathcal{C}_{n-1})\lambda^{n-1}-\mathcal{C}_n\lambda^n\,.$$

Ako sada uporedimo koeficijente uz stepene od λ sa leve i desne strane jednakosti (6.24), dobijamo niz veza

$$(6.26) \qquad \begin{array}{lcccl} \mathcal{A}\mathcal{C}_0 & & & = & \alpha_0\,\mathbb{I}_n \\ \mathcal{A}\mathcal{C}_1 & - & \mathcal{C}_0 & = & \alpha_1\,\mathbb{I}_n \\ \mathcal{A}\mathcal{C}_2 & - & \mathcal{C}_1 & = & \alpha_2\,\mathbb{I}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}\mathcal{C}_n & - & \mathcal{C}_{n-1} & = & \alpha_{n-1}\,\mathbb{I}_n \\ & - & \mathcal{C}_n & = & \alpha_n\,\mathbb{I}_n \end{array}$$

Ako sada prvu od jednačina (6.26) pomnožimo sa $\mathbb{I}_n$, drugu sa $\mathcal{A}$, treću sa $\mathcal{A}^2$, itd. i poslednju sa $\mathcal{A}^n$, i zatim ih saberemo, dobićemo da je desna strana jednaka $p(\mathcal{A})$, dok je leva jednaka 0. Dakle, dobili smo da je $p(\mathcal{A})=0$, što je i trebalo. □

Teorema (Hamilton – Kejli). *Neka je $\mathcal{A}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ proizvoljna matrica, tada je $\kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=0$, tj. svaka matrica poništava svoj karakteristični polinom.*

Dokaz. Kako je polje $\mathbb{F}$ beskonačno, postoji beskonačno mnogo $\lambda\in\mathbb{F}$ takvih da je matrica $\mathcal{A}-\lambda\,\mathbb{I}_n$ invertibilna, i znamo da je

$$(\mathcal{A}-\lambda\,\mathbb{I}_n)^{-1}=\frac{1}{\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)}\,\mathcal{C}(\lambda)\,,$$

gde je $\mathcal{C}(\lambda)$ matrica sastavljena od algebarskih komplemenata matrice $\mathcal{A}-\lambda\,\mathbb{I}_n$, odakle sledi

$$(6.27) \qquad (\mathcal{A}-\lambda\,\mathbb{I}_n)\,\mathcal{C}(\lambda)=\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)\,\mathbb{I}_n\,.$$

Primetimo da ova relacija važi za sve $\lambda\in\mathbb{F}$, jer na svakom matričnom mestu, matrica sa leve i desne strane znaka jednakosti (6.27), imamo jednakost polinoma u beskonačno mnogo tačaka, pa se oni podudaraju kao funkcije. Kako su elementi matrice $\mathcal{C}(\lambda)$ minore matrice $\mathcal{A}-\lambda\,\mathbb{I}_n$, tj. polinomi u λ čiji stepen nije veći od $n-1$ primena generalizacije Bezuove leme daje $\kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=0$. □

Primedba. Ova teorema predstavlja značajno jače tvrđenje od prethodne propozicije, jer je stepen polinoma koji poništava datu matricu spušten sa n^2 na n. Postoje matrice kod kojih se taj stepen ne može sniziti npr. matrica $\mathcal{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ ima karakteristični polinom $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)=\lambda\,(\lambda-1)$ i očigledno ne postoji polinom prvog stepena kojeg bi poništavala matrica $\mathcal{A}$, jer $\mathcal{A}$ nije proporcionalna jediničnoj matrici.

6.10. Minimalni polinom matrice. U mnogim slučajevima postoji polinom manjeg stepena od reda matrice kojeg data matrica $\mathcal{A}$ poništava. **Minimalni polinom** matrice $\mathcal{A}$, u oznaci $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)\in(\mathbb{F})$, je monični polinom najmanjeg stepena kojeg poništava matrica $\mathcal{A}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ tj. važi

$$(6.28) \qquad \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=0\,.$$

Primetimo, da je minimalni polinom određen do na množenje sa ne-nula skalarom, i da bismo dobili njegovu jedinstvenost potrebno ga je normirati, npr. zahtevom da je vodeći koeficijent tog polinoma jednak 1. Osnovna svojstva minimalnog polinoma sadržana su u sledećoj teoremi.

Teorema 1. *Neka je $\mathcal{A}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$.*

(i1) *Ako je $p\in\mathbb{F}[\lambda]$ takav da je $p(\mathcal{A})=0$ tada $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)\mid p(\lambda)$. Specijalno, minimalni polinom matrice $\mathcal{A}$ deli njen karakteristični polinom.*

(i2) *Minimalni polinom je invarijanta sličnosti.*

Dokaz. (i1) Prema teoremi o deljenju polinoma postoje $q,r\in\mathbb{F}[\lambda]$ takvi da

$$p(\lambda)=\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)\,q(\lambda)+r(\lambda)\quad \text{i}\quad \partial\ r<\partial\,\mu_{\mathcal{A}}\,.$$

Kada bi $r\neq 0$, onda bismo nakon uvrštavanja $\lambda=\mathcal{A}$ u gornji izraz dobili da je $r(\mathcal{A})=0$, što je nemoguće zbog minimalnosti polinoma $\mu_{\mathcal{A}}$. Dakle, $r\equiv 0$, odakle sledi tvrdnja.

(i2) Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ slične matrice, tada postoji regularna matrica $\mathcal{T}$ takva da je $\mathcal{B} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}$, tako da sada za proizvoljni $j \in \mathbb{N}$ računamo,

$$\begin{aligned}(6.29)\qquad \mathcal{B}^j &= (\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T})^j = \underbrace{(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T})\cdots(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T})}_{j-\text{primeraka}} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}(\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1})\mathcal{A}(\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1})\cdots\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1} \\ &= \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathbb{I}_n\mathcal{A}\mathbb{I}_n\cdots\mathbb{I}_n\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}^j\mathcal{T}.\end{aligned}$$

Neka je: $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$, sada računamo:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) &= \mathcal{B}^m + \alpha_{m-1}\mathcal{B}^{m-1} + \cdots + \alpha_1\mathcal{B} + \alpha_0\mathbb{I}_n = (\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T})^m + \alpha_{m-1}(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T})^{m-1} + \dots \\ &\quad + \alpha_1(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}) + \alpha_0(\mathcal{T}^{-1}\mathbb{I}_n\mathcal{T}) = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{A}^m + \alpha_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \cdots + \alpha_1\mathcal{A}^1 + \alpha_0\mathbb{I}_n)\mathcal{T} \\ &= \mathcal{T}^{-1}\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\mathcal{T} = \mathcal{T}^{-1}0\mathcal{T} = 0,\end{aligned}$$

odakle je zbog (i1) $\partial\mu_{\mathcal{B}} \le \partial\mu_{\mathcal{A}}$. Zamenom uloga matrica $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ u prethodnim računima, dobijamo i $\partial\mu_{\mathcal{A}} \le \partial\mu_{\mathcal{B}}$. Kako su $\mu_{\mathcal{A}}$ i $\mu_{\mathcal{B}}$ monični, sledi da je $\partial\mu_{\mathcal{B}} = \partial\mu_{\mathcal{A}}$. □

Primedba 1. Tvrđenje (i2) prethodne teoreme, tj. činjenica da je $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = \mu_{\mathcal{B}}(\lambda)$ za slične matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, omogućuje da definišemo **minimalni polinom** linearnog operatora $A \in \mathsf{Hom}\, V$ formulom:

$$\mu_A(\lambda) \overset{\mathsf{def}}{=} \mu_{A(e)}(\lambda),$$

gde je e neka baza vektorskog prostora V.

Videli smo u Primedbi na kraju tačke **6.9** da postoje matrice reda 2 čiji karakteristični polinom je stepena 2, i koje ne poništavaju polinomi prvog stepena, tj. tada se minimalni i karakteristični polinom podudaraju. Sada se pitamo da li je to tvrđenje tačno za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. za dati monični polinom p stepena n postoji matrica $\mathcal{A}_p \in \mathbb{F}[\lambda]$ takva da je $p(\lambda) = \mu_{\mathcal{A}_p}$. Odgovor na ovo pitanje je potvrdan i dajemo ga u sledećoj teoremi.

Teorema 2. *Neka je* $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \in \mathbb{F}[\lambda]$ *monični polinom stepena* $n > 0$. *Tada je minimalni polinom matrice,*

$$(6.30)\qquad \mathcal{A} = A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix},$$

jednak $p(\lambda)$.

Dokaz. Neka je $e = (e_1, \dots, e_n)$ baza od $\mathbb{F}^n$ i definišimo operator $A \in \mathsf{Hom}\,\mathbb{F}^n$ svojim dejstvom na bazi e:

$$(6.31)\qquad Ae_i = e_{i+1},\ i = 1, \dots, n-1 \qquad \text{i} \qquad Ae_n = -(\alpha_{n-1}e_n + \cdots + \alpha_1 e_2 + \alpha_0 e_1).$$

Iz (6.31) lako sledi,

$$(6.32)\qquad e_i = Ae_{i-1} = A(Ae_{i-2}) = A^2 e_{i-2} = \cdots = A^{i-1}e_1, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Kada bi stepen minimalnog polinoma μ_A bio manji od n tada bismo imali: $\mu_A(\lambda) = \sum_{i=0}^k \beta_i\lambda^i$, $k < n$, a zatim iz $\mu_A(A) = 0$ sledilo bi da je $\mu_A(A)x = 0$ za svaki $x \in \mathbb{F}^n$. Tako da lako nalazimo,

$$0 = \mu_A(A)\,e_1 = \sum_{i=0}^k \beta_i\, A^i e_1 = \sum_{i=0}^k \beta_i\, e_{i+1},$$

odakle odmah sledi da je $\beta_i = 0$, za $i = 0, 1, \dots, k$ jer je skup $\{e_1, \dots, e_{k+1}\}$ linearno nezavisan kao podskup linearno nezavisnog skupa e. Dakle, pretpostavka da je $\partial\mu_A = k < n$ dovela nas je do kontradikcije jer $\mu_A \ne 0$. Dakle, zbog Hamilton-Kejlijeve teoreme sledi da je $\partial\mu_A = n = \kappa_A$. Pokažimo još da je $p(A) = 0$, tj. $p = \mu_A$. Da bismo ovo pokazali nađimo dejstvo operatora $p(A)$ na bazi (e) koristeći (6.31) i (6.32):

$$p(A)\,e_1 = \Big(\sum_{i=0}^n \alpha_i A^i\Big)e_1 = A^n e_1 + \cdots + \alpha_1 Ae_1 + \alpha_0 e_1 = A\,e_n + (\alpha_{n-1}\,e_n + \cdots + \alpha_1\,e_2 + \alpha_0\,e_1) = 0,$$

$$p(A)\,e_j = \Big(\sum_{i=0}^n \alpha_i A^i\Big)e_j = \Big(\sum_{i=0}^n \alpha_i A^i\Big)A^{j-1}e_1 = A^{j-1}\Big(\sum_{i=0}^n \alpha_i A^i\Big)e_1 = A^{j-1}(p(A)\,e_1) = 0, \quad j = 2, \dots, n.$$

Budući da operator $p(A)$ sve vektore baze preslikava u nula vektor, sledi da je $p(A) = 0$. Time je pokazano da je p minimalni polinom operatora A. Matrica operatora A u bazi e je $\mathcal{A}$, vidi (6.31). $\square$

Definicija. Linearni operator A koji je definisan svojim dejstvom na bazi kao u (6.31) naziva se ciklički operator.

Primedba 2. Primetimo, da za matricu $\mathcal{A}$ iz prethodne teoreme važi $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-1)^n \mu_{\mathcal{A}}(\lambda)$.

Primena minimalnog i karakterističnog polinoma: invertiranje matrice. Ako je data neka matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ i ako je dat polinom $p \in \mathbb{F}[x]$, takav da je $p(A) = 0$, a takvi su npr. karakteristični i minimalni polinom matrice $\mathcal{A}$, može se iskoristiti pod nekim uslovima da nađemo inverz matrice $\mathcal{A}$, kao što pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija. *Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ matrica i $p(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ polinom takav da je $p(\mathcal{A}) = 0$. Ako je*

(i1) $\alpha_0 \neq 0$, *tada je $\mathcal{A}$ invertibilna matrica,*

(i2) *ako je $p = \mu_{\mathcal{A}}$, tada je $\mathcal{A}$ invertibilna matrica* akko *je $\alpha_0 \neq 0$.*

Dokaz. (i1) Neka je $p(\lambda) = \alpha_k \lambda^k + \alpha_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$, tako da imamo,

$$0 = p(\mathcal{A}) = \alpha_k \mathcal{A}^k + \cdots + \alpha_1 \mathcal{A} + \alpha_0 \mathbb{I}_n \quad \text{odakle je} \quad \mathbb{I}_n = \Big(-\frac{1}{\alpha_0} (\alpha_k \mathcal{A}^{k-1} + \cdots + \alpha_1 \mathbb{I}_n) \Big) \mathcal{A},$$

odavde zbog jedinstvenosti inverzne matrice nalazimo,

$$\mathcal{A}^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0} (\alpha_k \mathcal{A}^{k-1} + \cdots + \alpha_1 \mathbb{I}_n). \tag{6.33}$$

Time je pokazano (i1).

(i2) Dovoljnost. Dokazana je u (i1) za sve polinome koje poništava matrica $\mathcal{A}$, pa i za minimalni polinom matrice $\mathcal{A}$.

Nužnost. Pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ invertibilna matrica i da je $\alpha_0 = 0$, tada imamo

$$0 = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \alpha_1 \mathcal{A} + \alpha_2 \mathcal{A}^2 + \cdots + \mathcal{A}^n = \mathcal{A} \, (\alpha_1 \mathbb{I}_n + \alpha_2 \mathcal{A} + \cdots + \mathcal{A}^{n-1}) \,,$$

množeći ovu jednakost sa $\mathcal{A}^{-1}$ sa leve strane dobijamo da matrica $\mathcal{A}$ poništava i polinom

$$\nu(\lambda) = \alpha_1 + \alpha_2 \lambda + \cdots + \lambda^{n-1},$$

što je nemoguće jer je stepen polinoma ν manji od stepena minimalnog polinoma matrice $\mathcal{A}$. $\square$

Primedba 3. Naravno iz (6.33) vidimo da je za nalaženje inverza matrice najekonomičnije koristiti minimalni polinom, jer je najmanjeg stepena.

Primer. Primenom upravo opisane metode u prethodnoj propoziciji, nađimo inverz matrice $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Prvo nađimo karakteristični polinom matrice $\mathcal{A}$. Računamo

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) &= \det(\mathcal{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1+\lambda \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 2 - 2\lambda) \\ &= -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2. \end{aligned}$$

Formula (6.33) primenjena na naš slučaj daje,

$$\mathbb{I}_3 = \frac{1}{2} (\mathcal{A}^2 - 4\mathcal{A} + 5\mathbb{I}_3) \mathcal{A}, \qquad \text{tako da je} \qquad \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{2} (\mathcal{A}^2 - 4\mathcal{A} + 5\mathbb{I}_3),$$

i nakon kraćeg računa nalazimo,

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{2} (\mathcal{A}^2 - 4\mathcal{A} + 5\mathbb{I}_3) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & -2 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

6.11. Sopstvene vrednosti linearnog operatora. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ zove se sopstvena (svojstvena, karakteristična) vrednost linearnog operatora $A \in \operatorname{Hom} V$

$$\text{ako postoji} \quad 0 \neq x \in V \quad \text{takav da je} \quad A\,x = \lambda\,x.$$

Vektor x iz gornje definicije zovemo sopstvenim (svojstvenim, karakterističnim) vektorom koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ.[14] Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori sadrže najvažnije informacije o linearnom operatoru. Skup svih sopstvenih vrednosti linearnog operatora zove se spektar operatora A i obeležavaćemo ga sa $\mathsf{Sp}\,(A)$. Posmatrajmo skup $V_\lambda^A = V_\lambda = \{x \in V \mid A\,x = \lambda\,x\}$, koji se sastoji od sopstvenih vektora koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ i nula vektora. U sledećoj propoziciji otkrivamo algebarsku strukturu skupa V_λ^A.

Propozicija. *V_λ^A je potprostor od V.*

Skup V_λ^A nazivamo sopstveni potprostor sopstvene vrednosti λ operatora A.

Dokaz. Potrebno je proveriti jedan od ekvivalentnih uslova iz karakterizacije vektorskog potprostora. Dakle, neka su $x, y \in V_\lambda^A$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Sada nalazimo,

$$A(\alpha\,x + \beta\,y) = \alpha\,Ax + \beta\,Ay = \lambda\,\alpha\,x + \lambda\,\beta\,y = \lambda\,(\alpha\,x + \beta\,y),$$

odakle odmah vidimo da je $\alpha\,x + \beta\,y \in V_\lambda^A$, tj. V_λ^A je potprostor od V. □

Postavlja se pitanje šta su nule karakterističnog polinoma i kakva je njihova veza sa sopstvenim vrednostima. Odgovor na to pitanje dat je u sledećoj jednostavnoj, ali važnoj teoremi.

Teorema 1 (Karakterizacija sopstvenih vrednosti linearnog operatora). *Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ linearni operator. Tada je λ_0 sopstvena vrednost linearnog operatora A akko $\kappa_A(\lambda_0) = 0$.*

Dokaz. Neka je λ_0 sopstvena vrednost operatora A, tada postoji $0 \neq x \in V$, takav da je $Ax = \lambda_0\,x$. Odakle sledi da je $(A - \lambda_0\,I_n)(x) = 0$, tj. operator $A - \lambda_0\,I_n$ je singularan, jer je njegovo jezgro netrivijalno. Kako se determinanta singularnog operatora poništava, biće $\mathsf{det}\,(A - \lambda\,I_n) = 0$. Budući da je $\kappa_A(\lambda_0) = \mathsf{det}\,(A - \lambda I_n) = 0$, tj. λ_0 nula karakterističnog polinoma operatora A.

Za obrat je dovoljno krenuti u prethodnom nizu implikacija od poslednje ka prvoj. □

Primedba 1. Kako je karakteristični polinom invarijanta sličnosti, prethodna teorema pokazuje da je pojam sopstvene vrednosti dobro definisan i ne zavisi od baze u kojoj posmatramo matricu operatora A.

Primedba 2. Primetimo da definicija sopstvene vrednosti bitno zavisi o polju nad kojim je V vektorski prostor, kao što pokazuje sledeći primer: neka je A operator kojem u nekoj bazi odgovara matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Karakteristični polinom od A je $\mu_A(\lambda) = (\lambda^2 + 1)$. Prema prethodnoj teoremi sopstvene vrednosti su nule karakterističnog polinoma, dakle ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ onda A nema sopstvenih vrednosti, a ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ onda operator A ima dve sopstvene vrednosti $\lambda_{1,2} = \pm\,i$.

Prethodna Primedba 2. otvara pitanje koliko najviše sopstvenih vrednosti može imati linearni operator. Odgovor na to pitanje dat je u sledećoj teoremi, koja je posledica onoga što smo naučili o ireducibilnim polinomima nad algebarski zatvorenom polju.

Teorema 2. *Linearni operator koji deluje na $n-$dimenzionom vektorskom prostoru nad algebarski zatvorenim poljem ima tačno $n-$sopstvenih vrednosti (među kojima može biti istih).*

Dokaz. Kako je $\mathbb{F}$ algebarski zatvoreno polje (kao što je npr. $\mathbb{C}$) onda su samo linearni polinomi ireducibilni, i svaki polinom, pa i karakterištični polinom od A dopušta faktorizaciju

$$\kappa_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + \alpha_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\,\lambda + \alpha_0 = (-1)^n\,(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,\cdots(\lambda - \lambda_n), \tag{6.34}$$

gde su $\lambda_i \in \mathbb{F}$, za sve $i = 1, \ldots, n$. Kako su nule karakterističnog polinoma operatora A njegove sopstvene vrednosti, tvrdnja odmah sledi. □

Primedba 3. Prethodna teorema pokazuje da linearni operator A koji deluje na $n-$dimenzionom vektorskom prostoru V može imati najviše $n = \partial\,\kappa_A$ sopstvenih vrednosti, tj. potrebno je da važi faktorizacija (6.34) karakterističnog polinoma κ_A (pri čemu su $\lambda_i \in \mathbb{F}$). Ona uvek važi ako je polje algebarski zatvoreno, a ponekad može da važi i ako polje nije algebarski zatvoreno.

Znamo da minimalni polinom nekog operatora deli njegov karakteristični polinom, ali važi i više: karakteristični i minimalni polinom operatora imaju iste ireducibilne faktore, kao što je pokazano u narednoj teoremi.

---

[14] Obratite pažnju da je **sopstveni vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.**

Teorema 3. *Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$.*

(i1) *Svaki ireducibilni faktor karakterističnog polinoma matrice $\mathcal{A}$ ujedno je i ireducibilni faktor minimalnog polinoma iste.*

(i2) *Ako karakteristični polinom $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)$ nema višestrukih nula onda je $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = \mu_{\mathcal{A}}(\lambda)$.*

Dokaz. (i1) Neka se karakteristični polinom faktoriše kao,

$$\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = \mathsf{det}\,(\mathcal{A} - \lambda\,\mathbb{I}_n) = (-1)^n\, p_1(\lambda)^{r_1} \cdot p_2(\lambda)^{r_2} \cdots p_k(\lambda)^{r_k},$$

gde su $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_k(\lambda)$, ireducibilni monični polinomi nad poljem $\mathbb{F}$.
Pokažimo sada da je

$$\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = p_1(\lambda)^{s_1} \cdot p_2(\lambda)^{s_2} \cdots p_k(\lambda)^{s_k}, \qquad \text{pri čemu je} \qquad s_i \le r_i,\ i = 1, \dots, k.$$

Kako je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{M}_n(\overline{\mathbb{F}})$, gde je $\overline{\mathbb{F}}$ algebarsko zatvorenje polja $\mathbb{F}$ [15]. Kako je polje $\overline{\mathbb{F}}$ algebarski zatvoreno, u njemu se svaki od ireducibilnih polinoma p_i razlaže u proizvod linearnih faktora (sa višestrukostima koje mogu biti i veće od 1) Ako sa $\mathcal{N}_p$ označimo skup svih nula polinoma p, u polju $\overline{\mathbb{F}}$ onda naš problem svodimo na tvrđenje: $\mathcal{N}_{\mu_{\mathcal{A}}} = \mathcal{N}_{\kappa_{\mathcal{A}}}$. Očigledno važi da je $\mathcal{N}_{\mu_{\mathcal{A}}} \subseteq \mathcal{N}_{\kappa_{\mathcal{A}}}$, pa nam preostaje da pokažemo i drugu inkluziju. Dakle, neka je

$$\lambda_0 \in \mathcal{N}_{\kappa_{\mathcal{A}}} \text{ odakle sledi da je } \lambda_0 \text{ sopstvena vrednost i postoji } 0 \ne v \in \overline{\mathbb{F}}^n$$

takav da je $\mathcal{A}v = \lambda_0\, v$, i neka je $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j \lambda^j$. Budući da je $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$, imamo redom,

$$\begin{aligned} 0 = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(v) \ &= \ \Big(\sum_{j=0}^{l} \alpha_j \mathcal{A}^j\Big)\, v = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j (\mathcal{A}^j v) = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j \lambda_0^j v \\ &= \Big(\sum_{j=0}^{l} \alpha_j \lambda_0^j\Big) v = \mu_{\mathcal{A}}(\lambda_0) v \text{ odakle sledi da je } \mu_{\mathcal{A}}(\lambda_0) = 0, \text{ jer } v \ne 0. \end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da je $\lambda_0 \in \mathcal{N}_{\mu_{\mathcal{A}}}$ tj. $\mathcal{N}_{\kappa_{\mathcal{A}}} \subseteq \mathcal{N}_{\mu_{\mathcal{A}}}$. Time je pokazan slučaj (i1).
(i2) Direktno sledi iz (i1). □

6.11. O dijagonalizaciji linearnog operatora. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ linearni operator koji je zadat u nekoj bazi e svojom matricom $A(e) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. U skladu sa onim što je rečeno u tački **6.6** posvećenoj invarijantnim potprostorima, prvo pokušavamo da nađemo invarijantne potprostore dimenzije 1. Naravno, ako operator A ima $n = \dim V$ jednodimenzionih invarijantnih potprostora tada postoji baza f od V u kojoj je matrica operatora $A(f)$ dijagonalna. To je ono prema čemu stremimo, jer je tada matrica operatora najjednostavnija i najlakše je izučavati takve linearne operatore ili matrice. Proces nalaženja baze, ako takva postoji, u kojoj je matrica polaznog operatora dijagonalna zove se dijagonalizacija linearnog operatora. Za operator A kažemo da je dijagonalizabilan ako postoji baza f u kojoj je matrica operatora $A(f)$ dijagonalna. Naravno, dijagonalizabilnost zavisi o polju $\mathbb{F}$, jer su u procesu dijagonalizacije važne sopstvene vrednosti operatora, a kao što znamo one zavise o polju $\mathbb{F}$ nad kojim je V vektorski prostor.

Ipak postoje operatori koje se ne mogu svesti na dijagonalni oblik niti nad jednim poljem, takav je npr. operator A kojem u nekoj bazi e odgovara matrica

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je matrica $A(e)$ nilpotentna.

Sada je potrebno ispitati u kakvom su odnosu sopstveni vektori operatora A koji pripadaju različitim sopstvenim vrednostima.

Lema. *Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ međusobno različite sopstvene vrednosti linearnog operatora $A \in \mathsf{Hom}\, V$ i neka su redom $v_1, v_2, \dots, v_k$ odgovarajući sopstveni vektori. Tada je skup vektora $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ linearno nezavisan.*

Dokaz. Posmatrajmo jednačinu linearne nezavisnosti,

$$\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + \cdots + \alpha_k\, v_k = 0\,. \tag{6.35}$$

[15] za svako polje $\mathbb{F}$ postoji njegovo algebarsko zatvorenje, tj. polje takvo da je $\mathbb{F} \subseteq \overline{\mathbb{F}}$ i $\overline{\mathbb{F}}$ je algebarski zatvoreno.

Ako na jednakost (6.35) delujemo redom operatorima $A, A^2, \dots, A^{k-1}$ i iskoristimo da je $Av_i = \lambda_i v_i,\ i = 1, \dots, k$, dobijamo vektorski sistem jednačina u $(\alpha_i v_i,\ i = 1, 2, \dots, k)$,

$$\lambda_1^j (\alpha_1 v_1) + \lambda_2^j(\alpha_2 v_2) + \cdots + \lambda_k^j (\alpha_k v_k) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1. \tag{6.36}$$

Izaberimo neku bazu e od V, tada se u toj bazi vektorski sistem jednačina (6.36) po $(\alpha_i v_i)$ raspada se $n (= \mathsf{dim}\, V)$ skalarnih sistema $k \times k$ jednačina koje dobijamo po koordinatama (kojih ima tačno n). Svaki od tako dobijenih n sistema je homogen, a determinanta tih sistema je Vandermondeova determinanta,

$$\mathsf{V}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0,$$

jer su po pretpostvci $\lambda_i,\ i = 1, \dots, k$ međusobno različite. Dakle, svaki od n dobijenih linearnih sistema ima trivijalno rešenje, sledi da sistem (6.36) ima samo trivijalno rešenje: $\alpha_i v_i = 0,\ i = 1, \dots, k$, odakle sledi da su $\alpha_i = 0,\ i = 1, \dots, k$, jer su $v_i \neq 0,\ i = 1, \dots, k$. Dakle, skup $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ je linearno nezavisan. ☐

Teorema (o karakterizaciji dijagonalizabilnosti). *Neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ linearni operator nad poljem $\mathbb{F}$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni,*

(i1) *A je dijagonalizabilan.*

(i2) *Postoji baza e od V koja se sastoji od sopstvenih vektora.*

(i3) *$\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)$ je proizvod međusobno različitih linearnih faktora oblika $\lambda - \lambda_i$, pri čemu su $\lambda_i \in \mathbb{F}$.*

Dokaz. Sada ćemo dokazati ekvivalentnost iskaza (i1) i (i2), kao i implikaciju iz (i2) sledi (i3). Da iz (i3) sledi (i1) dokazaćemo kasnije.

Ako je A dijagonazabilna onda postoji baza $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ od V u kojoj je matrica operatora A dijagonalna, tj. $A(e) = \mathsf{diag}\,[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$. Ako se setimo kako se linearnom operatoru dodeljuje matrica u datoj bazi, tada je $A\, e_i = \lambda_i\, e_i$ za svaki $i = 1, 2, \dots, n$, a to znači da su svi vektori baze e sopstveni vektori.

Obratno, ako postoji baza $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ koja se sastoji od sopstvenih vektora operatora A, tada je očigledno matrica operatora u toj bazi $A(e) = \mathsf{diag}\,[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, a to je (i1).

U ovom slučaju lako nalazimo da je karakteristični polinom matrice $A(e) = \mathsf{diag}\,[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, jednak

$$\kappa_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

Primetimo da među sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ može biti istih, zato je potrebno karakteristični polinom zapisati u obliku

$$\kappa_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_{i_1})^{r_1} (\lambda - \lambda_{i_2})^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_{i_k})^{r_k},$$

pri čemu je $\lambda_{i_j} \neq \lambda_{i_l}$ kada je $j \neq l$, tj. u poslednjoj faktorizaciji nema istih ireducibilnih faktora. Tvrdimo da je $\mu_A = (\lambda - \lambda_{i_1})(\lambda - \lambda_{i_2}) \cdots (\lambda - \lambda_{i_k})$, jer karakteristični i minimalni polinom od A imaju jednake sve ireducibilne faktore $\lambda - \lambda_{i_j}$. Sada, za svako $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ postoji indeks $s(j) \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ takav da je $A\, e_j = \lambda_{s(j)}\, e_j$, jer je vektor e_j sopstveni za sopstvenu vrednost $\lambda_{s(j)}$, tako da imamo

$$\begin{aligned} \mu_A(e_j) &= (A - \lambda_{i_1}\mathbb{I}_n)(A - \lambda_{i_2}\mathbb{I}_n) \cdots (A - \lambda_{i_k}\mathbb{I}_n)(e_j) = \Big(\prod_{s(j) \neq l = 1}^{k} (A - \lambda_{i_l}\mathbb{I}_n) \Big) ((A - \lambda_{s(j)}\mathbb{I}_n)\, e_j) \\ &= \Big(\prod_{s(j) \neq l = 1}^{k} (A - \lambda_{i_l}\mathbb{I}_n) \Big) \underbrace{(Ae_j - \lambda_{s(j)}\, e_j)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Dakle, operator $\mu_A(A) = \mathbb{O}_n$, jer sve vektore baze e od V preslika u 0. ☐

Posledica 1. *Ako je operator A dijagonalizabilan, tada u bazi u kojoj je predstavljen dijagonalnom matricom, na glavnoj dijagonali nalaze se sopstvene vrednosti operatora A.*

Dokaz. Očigledno, vidi dokaz prethodne teoreme. ☐

Posledica 2. *Ako operator A ima $n = \dim\, V$ međusobno različitih sopstvenih vrednosti onda je on dijagonalizabilan.*

Dokaz. Ako operator A ima $n = \dim\, V$ međusobno različitih sopstvenih vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, tada su odgovarajući sopstveni vektori $e_1, e_2, \dots, e_n$ linearno nezavisni prema prethodnoj lemi, a kako ih ima tačno kolika je dimenzija prostora V, oni čine jednu bazu vektorskog prostora V, i tada prethodna teorema implicira dijagonalizabilnost operatora A. $\square$

Proces dijagonalizacije. Sada imamo sve potrebne elemente da sastavimo algoritam za dijagonalizaciju datog lineranog operatora A, ako je on dijagonalizabilan. Taj algoritam ima sledeće korake:

(i1) nađu se sve sopstvene vrednosti operatora A,

(i2) formira se polinom $p(\lambda)=\prod_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)$, pri čemu je $\mathsf{Sp}\,(A)=\{\lambda_i,\ i=1,\dots,k\}$ skup svih sopstvenih vrednosti operatora A,

(i3) proveri se da li je $p(A)=0$, ako jeste A je dijagonalizabilan; ako nije A nije djagonalizabilan,

(i4) ako je A dijagonalizabilan nađemo odgovarajuće sopstvene vektore u polaznoj bazi e, tj. vektore $v_i(e)=(t_{1i},\dots,t_{ni})$, $i=1,\dots n$, i formiramo matrica prelaska T_{ev},

(i5) ako linerani operator A u bazi e ima matricu $A(e)$, matrica $A(v)=T_{ev}^{-1}A(e)\,T_{ev}$ je dijagonalna.

Primer. Odredimo karakteristični i minimalni polinom kao i sopstvene vrednosti i sopstvene vektore date matrice, a zatim ispitajmo da li je matrica dijagonalizabilna nad $\mathbb{R}$, gde je $\mathcal{A}$ sledeća matrica,

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix}4&-4&2\\2&-2&1\\-4&4&-2\end{bmatrix}.$$

Nalaženje sopstvenih vektora za sopstvenu vrednost λ_0 svodi se na rešavanje homogenog sistema:

$$(\mathcal{A}-\lambda_0\,\mathbb{I}_n)\,x=0.$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)\ &=\ \det(\mathcal{A}-\lambda\,I_4)=\begin{vmatrix}4-\lambda&-4&2\\2&-2-\lambda&1\\-4&4&-2-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda&1\\4&-2-\lambda\end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix}2&1\\-4&-2-\lambda\end{vmatrix}\\ &\quad+2\begin{vmatrix}2&-2-\lambda\\-4&4\end{vmatrix}=(4-\lambda)\,((\lambda+2)^2-4)+4\,(-4-2\lambda+4)+2\,(8-8-4\lambda)\\ &=\ \lambda(16-\lambda)-8\,\lambda-8\,\lambda=-\lambda^3.\end{aligned}$$

Kako $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)$, ima samo jedan trostruki ireducibilni faktor λ, kandidati za minimalni polinom $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)$ su: λ,λ^2 i λ^3. Očigledno, $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)\neq\lambda$, jer je $\mathcal{A}\neq 0$. Dakle, sada je potrebno samo još izračunati $\mathcal{A}^2$ da bismo odredili minimalni polinom. Lako se proverava da je $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)=\lambda^2$.

Dakle, iz gornjeg računa vidimo da $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)$ ima trostruku nulu $\lambda_0=0$, tako da je 0 jedina sopstvena vrednost matrice $\mathcal{A}$. Odredimo sopstvene vektore: neka je x traženi vektor onda je: $0=(\mathcal{A}-\lambda_0)x=\mathcal{A}\,x$. Ovaj homogeni sistem rešavamo na standardan način:

$$\begin{bmatrix}4&-4&2\\2&-2&1\\-4&4&-2\end{bmatrix}\sim\left\{\begin{array}{l}\text{2. vrstu pomnožimo}\\ \text{sa -2 i dodamo 1. i}\\ \text{sa 2 i dodamo 3.}\end{array}\right\}\sim\begin{bmatrix}0&0&0\\2&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Odavde lako nalazimo sopstvene vektore: $v_1=(-1,0,2)^\tau$ i $v_2=(1,1,0)^\tau$.

Vidimo da postoje dva linearno nezavisna sopstvena vektora za sopstvenu vrednost $\lambda_0=0$, tj. ne postoji baza koja se sastoji od sopstvenih vektora, tako da polazna matrica nije dijagonalizabilna. Ovo možemo da zaključimo i iz minimalnog polinoma $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)$ koji nije proizvod linearnih međusobo različitih ireducibilnih faktora.

Algebarska i geometrijska višestrukost sopstvene vrednosti. Neka je $A\in\mathsf{Hom}\,V$ linearni operator i neka je λ_0 neka njegova sopstvena vrednost. Tada za operator A i njegovu sopstvenu vrednost λ_0 definišemo:

(a) algebarska višestrukost sopstvene vrednosti λ_0 je višestrukost λ_0 kao nule karakterističnog polinoma $\kappa_A(\lambda)$, i

(g) geometrijska višestrukost sopstvene vrednosti λ_0 je dimenzija njenog sopstvenog potprostora V_{λ_0}.

Odnos geometrijske i algebarske višestrukosti sopstvene vrednosti λ_0 nekog linernog operatora A dat je u sledećoj propoziciji.

Propozicija. *Neka je $A\in\mathsf{Hom}\,V$ linearni operator i neka je λ_0 njegova sopstvena vrednost. Algebarska višestrukost sopstvene vrednosti λ_0 veća je ili jednaka od njene geometrijske višestrukosti.*

Dokaz. Neka je r algebarska višestrukost sopstvene vrednosti λ_0, a q njena geometrijska višestrukost. S obzirom da je $q=\dim V_{\lambda_0}$, neka je $e_{\lambda_0}=(e_1,\dots,e_q)$ neka baza od V_{λ_0} i nju nadopunimo vektorima e_{q+1},

$e_{q+2} \dots, e_n$ do baze e prostora V. Matrica operatora A u bazi e je: $A(e) = \begin{bmatrix} \lambda_0 \mathbb{I}_q & \mathcal{B} \\ 0 & \mathcal{C} \end{bmatrix}$, pri čemu su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ neke matrice. Sada računamo

$$\kappa_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda_0 - \lambda)\,\mathbb{I}_q & B \\ 0 & \mathcal{C} - \lambda \mathbb{I}_{n-q} \end{vmatrix} = (\lambda_0 - \lambda)^q\, \kappa_{\mathcal{C}}(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^r p(\lambda),$$

pri čemu je $p(\lambda_0) \neq 0$. Odavde odmah sledi, da je $q \leq r$, jer λ_0 može biti sopstvena vrednost matrice $\mathcal{C}$. □

6.12. Svođenje matrice operatora na trougaoni oblik. U prethodnoj tački videli smo da ne možemo, niti nad jednim poljem, sve matrice svesti na najjednostavniji oblik – dijagonalni oblik, tj. u opštem slučaju za dati operator ne postoji baza u kojoj je matrica tog operatora dijagonalna. Ali ako je polje algebarski zatvoreno ($\mathbb{C}$) možemo naći bazu u kojoj je matrica gornje trougaona, kao što pokazuje sledeće teorema. U tom slučaju, ako je matrica nekog operatora u nekoj bazi predstavljena trougaonom matricom, na dijagonali se nalaze sopstvene vrednosti i karakteristiňi polinom možemo lako odrediti.

Teorema. *Neka je V vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem i neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ onda postoji baza u kojoj je operator A predstavljen gornje trougaonom matricom.*

Dokaz. Neka je $\lambda_1 \in \mathsf{Sp}\,(A)$ neka sopstvena vrednost koja uvek postoji, jer je $\mathbb{F}$ algebarski zatvoreno polje i karakteristični polinom od A ima u $\mathbb{F}$ koren, i neka je e_1 odgovarajući sopstveni vektor tj.

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1. \tag{6.37}$$

Neka je $L_1 = \mathcal{L}(\{e_1\})$, a zatim posmatramo faktor prostor $V_1 = V/L_1$, na kojem definišemo preslikavanje $A_1 : V_1 \longrightarrow V_1$ formulom $A_1([x]_{L_1}) = [Ax]_{L_1}$. Pokažimo da je A_1 dobro definisano preslikavanje. Dakle, ako je $[x]_{L_1} = [y]_{L_1}$, biće $x - y \in L_1$, i kako vektor e_1 čini bazu od L_1 imaćemo, $x - y = \nu\, e_1$. Sada računamo

$$A\,x - A\,y = A\,(x-y) = A(\nu\, e_1) = \nu\, A\, e_1 = (\nu \lambda_1 e_1) \in L_1,$$

odakle sledi, $A_1([x]_{L_1}) = [Ax]_{L_1} = [Ay]_{L_1} = A_1([y]_{L_1})$, što pokazuje da je A_1 dobro definisano, jer ne zavisi o izboru predstavnika klase. A_1 je linearan jer

$$A_1([\alpha\, x + \beta\, y]_{L_1}) = [A(\alpha\, x + \beta\, y)]_{L_1} = [\alpha\, A\, x + \beta\, A\, y]_{L_1} = \alpha\, [A\, x]_{L_1} + \beta\, [A\, y]_{L_1} = \alpha\, A_1([x]_{L_1}) + \beta\, A_1([y]_{L_1}).$$

Dakle, A_1 je linearni operator na vektorskom prostoru V_1 nad $\mathbb{F}$, i na njega možemo primeniti isto rezonovanje, koju smo primenili na operator A. Dakle, neka je $\lambda_2 \in \mathsf{Sp}\,(A_1)$ neka sopstvena vrednost koja postoji jer je $\mathbb{F}$ algebarski zatvoreno i neka je $[e_2]_{L_1}$ njen sopstveni vektor, tj. $A_1[e_2]_{L_1} = \lambda_2 [e_2]_{L_1}$, ili ekvivalentno, $[A\, e_2 - \lambda_2\, e_2]_{L_1} = [0]_{L_1}$, odakle nalazimo

$$A\, e_2 - \lambda_2\, e_2 = \alpha_{12}\, e_1 \quad \text{tj.} \quad A\, e_2 = \alpha_{12}\, e_1 + \lambda_2\, e_2. \tag{6.38}$$

Označimo sada sa $L_2 = \mathcal{L}(\{e_1, e_2\})$, a zatim sa $V_2 = V/L_2$ faktor prostor na kojem definišemo preslikavanje $A_2 : V_2 \longrightarrow V_2$ formulom $A_2([x]_{L_2}) = [Ax]_{L_2}$. Na isti način kao i za A_1 vidimo da je A_2 dobro definisan linearni operator na V_2. Analogno nastavimo i nakon $n-1$ koraka definišemo operator $A_{n-1} : V_{n-1} \longrightarrow V_{n-1}$ formulom $A_{n-1}([x]_{L_{n-1}}) = [Ax]_{L_{n-1}}$, pri čemu je $L_{n-1} = \mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_{n-1}\})$ i $V_{n-1} = V/L_{n-1}$. Neka je $\lambda_n \in \mathsf{Sp}\,(A_{n-1})$ sopstvena vrednost, koja postoji kao i sve prethodne, i neka je $[e_n]_{L_{n-1}}$ odgovarajući sopstveni vektor, tj. $A_{n-1}[e_n]_{L_{n-1}} \lambda_n [e_n]_{L_{n-1}}$, ili ekvivalentno, $[A\, e_n - \lambda_n\, e_n]_{L_{n-1}} = [0]_{L_{n-1}}$, odakle konačno dobijamo

$$A\, e_n - \lambda_n\, e_n = \alpha_{1n}\, e_1 + \alpha_{2n}\, e_2 + \cdots + \alpha_{n-1n}\, e_{n-1}, \qquad \text{ili ekvivalentno,}$$

$$A\, e_n = \alpha_{1n}\, e_1 + \alpha_{2n}\, e_2 + \cdots + \alpha_{n-1n}\, e_{n-1} + \lambda_n\, e_n\,. \tag{6.39}$$

Sada iz formula (6.37), (6.38),(6.39) vidimo da je matrica operatora A u bazi e gornje trougaona. □

Primedba 1. Ako je V *realan* vektorski prostor onda tvrđenje ne važi kao što pokazuje sledeći primer. Neka je operator A predstavljen u nekoj bazi matricom $A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Za ovaj operator ne postoji baza u kojoj bi on bio predstavljen gornje trougaonom matricom, jer su njene sopstvene vrednosti brojevi i i $-i$. Ako bi postojala takva baza onda bi se u matrici operatora u toj bazi na dijagonali morali nalaziti sopstvene vrednosti, koje su realni brojevi, a takvih ovaj operator nema.

Primedba 2. Napomenimo da tvrđenje teoreme važi i u slučaju kada polje $\mathbb{F}$ nije algebarski zatvoreno, ali je karakteristični operator κ_A oblika,

$$\kappa_A(\lambda) = (-1)^n\, (\lambda - \lambda_1)^{r_1}\, (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}.$$

6.12. Ireducibilni faktori karakterisitčnog polinoma i invarijantni potprostori. Ako primenimo tvrđenje iz **6.4** Teorema 1 na karakteristični i minimalni polinom, uzimajući u vidu i Teoremu 3 iz tačke **6.11** imamo,

$$\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-1)^n\, p_1(\lambda)^{r_1} \cdot p_2(\lambda)^{r_2} \cdots p_k(\lambda)^{r_k},$$
$$\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = p_1(\lambda)^{s_1} \cdot p_2(\lambda)^{s_2} \cdots p_k(\lambda)^{s_k}, \qquad \text{pri čemu je} \qquad s_i \le r_i,\ i = 1, \ldots, k. \tag{6.40}$$

gde su $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda), \ldots, p_k(\lambda)$, ireducibilni monični polinomi nad poljem $\mathbb{F}$.

Pokažimo sada nekoliko važnih tvrđenja koja su veoma važna za pronalaženje invarijantnih potprostora i svođenja linearnog operatora na kvazidijagonalni oblik.

Teorema 1. *Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ linearni operator i neka su $f, g, h \in \mathbb{F}[x]$ polinomi takvi da je,*

(i1) $f = g\,h$,

(i2) $f(A) = 0$,

(i3) *g i h su relativno prosti polinomi.*

Tada je $V = \mathsf{Ker}\, g(A) \oplus \mathsf{Ker}\, h(A)$.

Dokaz. Pokažimo prvo da su $L = \mathsf{Ker}\, g(A)$ i $M = \mathsf{Ker}\, h(A)$ invarijantni potprostori od A. Dovovoljno je pokazati da ako je $p(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ proizvoljni polinom, tada je $\mathsf{Ker}\, p(A)$ invarijantan potprostor od A. Neka je $x \in \mathsf{Ker}\, p(A)$, tada je $p(A)x = 0$, i neka je $y = Ax$. Potrebno je pokazati da je i $y \in \mathsf{Ker}\, p(A)$. Tako da sada računamo,

$$p(A)y = p(A)(Ax) = (p(A)A)x = (Ap(A))x = A(p(A)x) = A(0) = 0.$$

Kako su L i M jezgra nekih linearnih operatora oni su invarijantni potprostori od A, tj. $AL \subseteq L$ i $AM \subseteq M$.

Budući da su g i h relativno prosti, tada na osnovu teoreme o NZD postoje polinomi u i v takvi da je

$$u(\lambda)\, g(\lambda) + v(\lambda)\, h(\lambda) = 1, \quad \text{odakle je} \quad u(A)\, g(A) + v(A)\, h(A) = \mathsf{id}_V. \tag{6.41}$$

Ako sada poslednju relaciju primenimo na proizvoljni vektor $x \in V$, dobićemo

$$x = u(A)\, g(A)(x) + v(A)\, h(A)(x).$$

Primetimo da prvi član desne strane jednakosti, $z = u(A)\, g(A)(x)$ pripada M, jer

$$h(A)\,(u(A)\, g(A)(x)) = u(A)\,(h(A)\, g(A)(x)) \overset{(i1)}{=} u(A)\,(f(A)(x)) \overset{(i2)}{=} u(A)(\mathbb{O}x) = u(A)0 = 0.$$

Analogno i vektor $y = v(A)\, h(A)(x)$ pripada L. Kako svaki $x \in V$ možemo zapisati u obliku $x = y + z$, gde je $y \in L$ i $z \in M$ sledi $V = L + M$. Pokažimo sada da je ova suma direktna, za to je dovoljno da svaki $x \in V$ ima jedinstven prikaz u obliku $x = y + z$, gde je $y \in L$ i $z \in M$. Primenjujući operator $u(A)\, g(A)$ na y koristeći da je $g(A)y = 0$, dobićemo

$$u(A)\, g(A)(x) = u(A)\, g(A)(y + z) = u(A)\, g(A)(y) + u(A)\, g(A)(z) = u(A)\, g(A)(z). \tag{6.42}$$

S druge strane ako primenimo (6.41) na vektor z, koristeći da je $h(A)z = 0$, imamo

$$z = (u(A)\, g(A) + v(A)\, h(A))z = u(A)\, g(A)z + v(A)\, h(A)z = u(A)\, g(A)z. \tag{6.43}$$

Dakle, obe formule (6.42) i (6.43) daju $z = u(A)\, g(A)x$, a ova relacija pokazuje da je z jednoznačno određena sa x. Slično se pokazuje da je i $y = v(A)\, h(A)x$, tj, i y je jednoznačno određen sa x. Dakle, $V = L \oplus M$. □

Posledica 1. *Uz pretpostavke kao u prethodnoj teoremi na polinome f, g, i h, ako je još f minimalan polinom od A, uz uslov da su g, h monični polinomi. Tada su g i h minimalni polinomi restrikcija $A_1 = A_{|L}$ i $A_2 = A_{|M}$.*

Dokaz. Neka su μ_1 i μ_2 minimalni polinomi operatora A_1 i A_2, redom. Kako je $L = \mathsf{Ker}\, g(A)$, biće i $g(A_1) = 0$ i slično $h(A_2) = 0$, tako da

$$\mu_1 \,\big|\, g \qquad \text{i} \qquad \mu_2 \,\big|\, h. \tag{6.44}$$

Sada iz prethodne teoreme sledi, jer su g i h uzajamno prosti da su i μ_1 i μ_2 uzajamno prosti i $f =$NZS (μ_1, μ_2), tako da je $f = \mu_1\, \mu_2$. Ali kako je $f = g\,h$ i kako su svi polinomi monični zbog relacija (6.44) sledi da je $g = \mu_1$ i $h = \mu_2$. □

Ako sada prethodne dve činjenice primenimo na faktorizaciju minimalnog polinoma μ_A u proizvod ireducibilnih faktora (6.40), dobijamo sledeću važnu teoremu.

Teorema 2. *Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ linearni operator čiji je minimalni polinom,*

$$\mu_A = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k},$$

gde su p_i različiti monični prosti polinomi. Tada je $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$, pri čemu su $L_i = \mathsf{Ker}\, p_i^{s_i}$ invarijantni potprostori od A, i $p_i^{s_i}$ je minimalni polinom restrikcije $A_i = A_{|\,L_i}$ na L_i za $i = 1, 2, \ldots, k$.

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po k. Kada je $k = 1$ dokaz je trivijalan, zato pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k-1$, tada zbog Teoreme 1 imamo $V = L_1 \oplus V_0$, gde su L_1 i V_0 invarijantni potprostori od A i gde je $L_1 = \mathsf{Ker}\, p_1^{s_1}$ i $V_0 = \mathsf{Ker}\,(p_2^{s_2}\, p_3^{s_3} \cdots p_k^{s_k})$. Prema prethodnoj Posledici minimalni polinomi restrikcija A_1 na L_1 je $p_1^{s_1}$, odnosno restrikcije A_0 na V_0 je $p_2^{s_2}\, p_3^{s_3} \cdots p_k^{s_k}$. Pretpostavka indukcije, primenjena na operator A_0 i njegov minimalni polinom $p_2^{s_2}\, p_3^{s_3} \cdots p_k^{s_k}$, daje dekompoziciju $V_0 = L_2 \oplus L_3 \oplus \cdots \oplus L_k$, pri čemu su $L_i = \mathsf{Ker}\, p_i^{s_i}(A_0)$ i gde su $p_i^{s_i}$ minimalni polinomi restrikcija A_0 na L_i za $i = 2, 3, \ldots, k$. Kako je $\mathsf{Ker}\, p_i^{s_i}(A) \subseteq V_0$ za $i = 2, 3, \ldots, k$ jer $p_i^{s_i}$ deli polinom $p_2^{s_2}\, p_3^{s_3} \cdots p_k^{s_k}$, zaključujemo da je $\mathsf{Ker}\, p_i^{s_i}(A) = \mathsf{Ker}\, p_i^{s_i}(A_0) = L_i$. Takođe restrikcija operatora A na L_i podudara se sa restrikcijom operatora A_0 na L_i za $i = 2, 3, \ldots, k$, odakle sledi da je $p_i^{s_i}$ minimalni polinom od A_i. Tako da je $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$ tražena dekompozicija. $\square$

Posledica 2. *Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ i neka je μ_A proizvod različitih linearnih faktora. Tada je A dijagonalizabilan operator.*

Dokaz. Primetimo da je tvrđenje ove posledice, nedostajuća implikacija (i3) $\Longrightarrow$ (i1) iz dokaza **6.12** Teorema. Neka je

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_k), \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ za } i \neq j.$$

Tada prema prethodnoj Teoremi 1 imamo dekompoziciju

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k, \qquad \text{gde je } L_i = \mathsf{Ker}\,(A - \lambda_i \mathsf{id}_V). \tag{6.45}$$

Dakle, ako je $x \in L_i$ tada je $(A - \lambda_i \mathsf{id}_V)x = 0$, ili ekvivalentno, $A\,x = \lambda_i x$, tj. svaki vektor od L_i je sopstveni vektor za sopstvenu vrednost λ_i. Sada zbog dekompozicije (6.45) možemo u svako od prostora L_i izabrati bazu e_{L_i}, tako da je $e = e_{L_1} \cup e_{L_2} \cup \cdots \cup e_{L_k}$ je baza od V, koja se sastoji od sopstvenih vektora operatora A i on je dijagonalizabilan. $\square$

6.13. Nilpotentni operatori. Za operator $A \in \mathsf{Hom}\, V$ $(n = \mathsf{dim}\, V)$, kažemo da je nilpotentan ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $A^k = 0$. Najmanji prirodni broj k za kojeg važi da je $A^k = 0$, ali $A^{k-1} \neq 0$ zove se indeks nilpotentnosti operatora A.

Ako je A nilpotentni operator indeksa nilpotentnosti k karakteristični polinom od A (ili njegove matrice u proizvoljnoj bazi) je $(-1)^n \lambda^n$, a njegov minimalni je λ^k. Specijalno, $\mathsf{Tr}(A) = \mathsf{det}\, A = 0$, i jedina sopstvena vrednost od A je 0. Budući da je $\kappa_A = (-1)^n \lambda^n$ i kako je $\partial\, \mu_A \le \partial\, \kappa_A$, jasno, indeks nilpotentnosti operatora A je manji ili jednak n.

Primer. Pokažimo da je sledeća matrica tipa $k \times k$ nilpotentna indeksa nilpotentnosti k, a zatim odredimo karakteristični i minimalni polinom matrice

$$\mathcal{N}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_\lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}. \tag{6.46}$$

Sada redom računamo,

$$\mathcal{N}_k^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_k^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathcal{N}_k^{k-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(6.47)\qquad \mathcal{N}_k^{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{N}_k^k = \mathbb{O}_k.$$

Primetimo da je $\mathcal{B}_\lambda^k = \lambda\,\mathbb{I}_k + \mathcal{N}_k$. Tako da su karakterisitični i minimalni polinom matrice $\mathcal{B}_\lambda^k$ jednaki $(t-\lambda)^k$.

Matricu $\mathcal{N}_k$ nazivamo kanonskom nilpotentnom matricom indeksa k. Osnovne osobine nilpotentnih operatora date su u sledećim tvrđenjima.

Teorema 1. *Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ nilpotentni operator indeksa nilpotentnosti k. Tada*

(i1) *postoji vektor $e \in V$ takav da je skup vektora $S_1 = \{e, Ae, A^2e, \dots, A^{k-1}e\}$ linearno nezavisan,*

(i2) *$L_1 = \mathcal{L}(S_1)$ je invarijantan prostor od A,*

(i3) *Restrikcija $A_1 = A_{|L_1}$ je nilpotentan operator indeksa nilpotentnosti k, čija je matrica u bazi $e_{L_1} = (A^{k-1}e, A^{k-2}e, \dots, Ae, e)$ kao u prethodnom primeru, tj. kao u (6.46).*

Dokaz. (i1) Kako je $A^{k-1} \neq 0$ postoji vektor e takav da je $A^{k-1}e \neq 0$. Pokažimo da je skup $S_1 = \{e, Ae, \dots, A^{k-1}e\}$ linearno nezavisan. Ako na jednakost,

$$(6.48)\qquad \alpha_0\, e + \alpha_1\, Ae + \dots + \alpha_{k-1}\, A^{k-1}e = 0,$$

delujemo operatorom A^{k-1}, dobijamo da na levoj strani preostane (zbog $A^k \equiv 0$) samo prvi član tako da ona postaje

$$\alpha_0\, A^{k-1}e = 0, \quad \text{odakle je} \quad \alpha_0 = 0, \quad \text{jer je } A^{k-1}e \neq 0.$$

Sada analogno nastavljamo dalje, primenjujući operator A^{k-2} na jednakost (6.48), gde smo iskoristili da je $\alpha_0 = 0$,

$$\alpha_1\, Ae + \alpha_2\, A^2e + \dots + \alpha_{k-1}\, A^{k-1}e = 0,$$

i opet zaključujemo da sa leve strane jednakosti preostane samo prvi član tj.

$$\alpha_1\, A^{k-1}e = 0, \quad \text{odakle je} \quad \alpha_1 = 0, \quad \text{jer je } A^{k-1}e \neq 0.$$

Nastavljajući analogno, dobijamo redom da su svi $\alpha_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, tj. skup S_1 je linearno nezavisan.

(i2) L_1 je invarijantan potprostor operatora A, jer za $= \sum_{i=0}^{k-1} x_i\, A^i \in L_1$ sledi

$$Ax = \sum_{i=0}^{k-2} x_i\, A^{i+1}e \quad \in \quad L_1.$$

(i3) Ako obeležimo sa $v_i = A^{k-i}e$, $i = 1, \dots, k$, vidimo da važe jednakosti

$$(6.49)\qquad Av_1 = 0, \quad Av_i = v_{i-1}, \ i = 2, 3, \dots, k.$$

Budući da je $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = S_1$ zaključujemo da je $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ baza potprostora L_1 i sada iz (6.49) lako sledi da matrica operatora $A_1(e_{L_1}) = A_{L_1}(e_{L_1})$ ima traženi oblik. $\square$

Definicija. Linearni operator za kojeg postoji baza $\mathcal{B} = (e, A\,e, A^2\,e, \dots, A^{k-1}\,e)$ takva da je $A^k\,e \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ nazivamo ciklički operator. Ako je ciklički operator indeksa k tada je $A^k\,e = 0$. Nilpotentan ciklički operator A u bazi (6.49) ima matricu oblika (6.46). Dakle, A_1 iz tvrdnje (i3) prethodne teoreme je ciklički nilpotentan operator. Baza e_{L_1} iz tvrdnje (i1) prethodne teoreme zove se ciklička baza od A_1, a L_1 nazivamo cikličkim potprostorom operatora A.

Ako u prethodnoj teoremi obeležimo sa $L_2 = \mathcal{L}(S_2)$, gde je S_2 neka nadopuna baze S_1 do baze čitavog prostora V. Tada je $V = L_1 \oplus L_2$, i restrikcije linearnog operatora A na L_1 i L_2 su nilpotentni operatori A_1 i A_2. Indeks nilpotentnosti operatora A_{L_1} očigledno je jednak k. Primetimo da je indeks nilpotentnosti operatora A_{L_2}, k_2, manji ili jednak od k, ili preciznije biće jednak k ako je dim $A^{k-1} > 1$, a manji od k ako je dim $A^{k-1} = 1$. Ako sada primenimo isto rasuđivanje na nilpotentni operator A_2 indeksa nilpotentnosti k_2, i analogno dalje dolazimo do dekompozicije vektorskog prostora V u direktnu sumu. Preciznije, tako smo pokazali sledeću posledicu.

Posledica. *Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ nilpotentan operator indeksa nilpotentnosti k. Tada postoje invarijantni potprostori $L_1, L_2, \ldots, L_k$ takvi da je*

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_m, \qquad i \qquad A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m, \tag{6.50}$$

gde je A_i restrikcija operatora A na invarijantni potprostor L_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Linearni operatori A_i su nilpotentni operatori indeksa nilpotentnosti $k_i = \dim L_i \leq k$ i važi:

(i1) $k = k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m \geq 1$,

(i2) *matrice operatora A_i na L_i u bazi u bazi e_{L_i} je oblika (6.46) i dimenzije $k_i \times k_i$, drugim rečima operatori A_i su ciklički operatori na L_i.*

Primedba. Primetimo da je matrica operatora A u bazi $e = (e_{L_1}, e_{L_2}, \ldots, e_{L_m})$, koja se konstruiše tako što dopišemo redom bazne vektore baza $e_{L_1}, e_{L_2}, \ldots$, i e_{L_m}, kvazidijagonalna blok-matrica,

$$A(e) = \begin{bmatrix} \boxed{\mathcal{N}_{k_1}} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \boxed{\mathcal{N}_{k_2}} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \boxed{\mathcal{N}_{k_m}} \end{bmatrix}. \tag{6.51}$$

Primetimo da se matrice $A(e)$ i $\mathcal{N}_n$ razlikuju (eventualno) samo u sporednoj gornjoj dijagonali, tj. vektoru dužine $n-1$, koji se sastoji od matričnih elemenata, $(\alpha_{12}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{n-2\,n-1}, \alpha_{n-1\,n})$; u matrici $\mathcal{N}_n$ svi elementi te dijagonale su jednaki 1, dok ta dijagonala matrice $A(e)$ sadrži $m-1$ nulu i to na sledećim mestima $\alpha_{k_1\,k_1+1}, \alpha_{k_1+k_2\,k_1+k_2+1}, \ldots$ $\alpha_{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}\,k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}+1}$, a svi ostali elementi jednaki su 1. Dakle, 0 na gornjoj sporednoj dijagonali matrice $A(e)$ pojavljuju se na granicama blokova, tj. poslednja vrsta svakog od blokova $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots$ i $\mathcal{N}_{m-1}$ jednaka je nula vektoru. Prema tome, broj blokova od kojih se sastoji matrica $A(e)$ za jedan je veći od broja nula na sporednoj glavnoj dijagonali matrice $A(e)$.

PROBLEM. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ nilpotentan linearni operator indeksa nilpotentnosti k, tada niz dat u (6.17) ima dužinu k, tj.

$$\{0\} = \mathsf{Ker}\,A^0 \subseteq \mathsf{Ker}\,A \subseteq \mathsf{Ker}\,A^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{Ker}\,A^{k-1} \subseteq \mathsf{Ker}\,A^k = V.$$

Isto važi i za niz (6.18),

$$V = \mathsf{Im}\,A^0 \supseteq \mathsf{Im}\,A \supseteq \mathsf{Im}\,A^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathsf{Im}\,A^{k-1} \supseteq \mathsf{Im}\,A^k = \{0\}. \tag{6.52}$$

I obeležimo sa $d_i = \mathsf{Ker} A^i$ i $r_i = \mathsf{Im} A^i$, tada za svaki $i = 1, 2, \ldots, k$, zbog teoreme o rangu i defektu je $n = d_i + r_i$, za sve $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Sada bismo hteli ispitati strukturu dekompozcije (6.52), tj. naći vezu između brojeva d_i, r_i i dimenzija invarijantnih potprostora L_j iz prethodne posledice, ili ekvivalentno, broju i dimenziji nilpotentnih blokova matrice $A(e)$, iz (6.51). U tu svrhu prvo predstavimo dekompoziciju na sledeći način,

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_m = \xi_k\, M_k \oplus \xi_{k-1}\, M_{k-1} \oplus \cdots \oplus \xi_1\, M_1, \tag{6.53}$$

gde su M_j ciklički potpostori dimenzije j i kojima u cikličkoj bazi restrikciji operatora A na M_j odgovara kanonska nilpotentnna matrica $\mathcal{N}_j$, a ξ_j je broj takvih potprostora, tj. blokova dimenzije j duž dijagonale od $A(e)$ iz (6.51). Primetimo da to uvek možemo uraditi, jer jednostavno cikličke potprostore $L_1, L_2, \ldots, L_m$ podelimo u grupe iste dimenzije.

Dekompozicije vektorskog prostora V, (6.52), implicira i dekompoziciju,

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m, \qquad \text{gde je } A_i = A_{|L_i} \text{ restrikcija operatora } A \text{ na potprostor } L_i, \tag{6.54}$$

linearnog operatora A na direktnu sumu cikličkih operatora A_i. Tada zbog invarijantnosti potprostora $\mathsf{Ker}\,A^j$ i $\mathsf{Im}\,A^k$, za svako $j = 1, 2, \ldots, k$, važiće i

$$\mathsf{def}\,A^j = \mathsf{def}\,A_1^j + \mathsf{def}\,A_2^j + \cdots + \mathsf{def}\,A_m^j \qquad \text{i} \qquad \mathsf{rang}\,A^j = \mathsf{rang}\,A_1^j + \mathsf{rang}\,A_2^j + \cdots + \mathsf{rang}\,A_m^j. \tag{6.55}$$

Da bismo rešili ovaj problem, posmatrajmo niz potprostora dat formulom (6.52). Prvo primetimo, da je $A(\mathsf{Im}\,A^j) = \mathsf{Im}\,A^{j+1}$, pa je specijalno, $\mathsf{Im}\,A^{k-1} \subseteq \mathsf{Ker}\,A$. Neka je $(e_1^{k-1}, e_2^{k-1}, \ldots, e_{r_{k-1}}^{k-1})$ baza prostora $\mathsf{Im}\,A^{k-1}$. Za vektore ove baze važi

(k) $A(e_j^{k-1}) = 0$, za $j = 1, 2, \ldots, r_{k-1}$,

(k-2) postoje vektori $e_1^{k-2}, e_2^{k-2}, \ldots, e_{r_{k-1}}^{k-2}$ takvi da je $A(e_j^{k-2}) = e_j^{k-1}$, za $j = 1, 2, \ldots, r_{k-1}$.

Vektori $e_1^{k-1}, e_2^{k-1}, \ldots, e_{r_{k-1}}^{k-1}, e_1^{k-2}, e_2^{k-2}, \ldots, e_{r_{k-1}}^{k-2}$ su linearno nezavisni, jer ako na relaciju

$$\alpha_1\, e_1^{k-1} + \alpha_2\, e_2^{k-1} + \cdots + \alpha_{r_{k-1}}\, e_{r_{k-1}}^{k-1} + \beta_1\, e_1^{k-2} + \beta_2\, e_2^{k-2} + \cdots + \beta_{r_{k-1}}\, e_{r_{k-1}}^{k-2} = 0, \tag{6.56}$$

primenimo operator A i iskoristimo uslove (k) i (k-2) dobićemo

$$\beta_1 e_1^{k-1} + \beta_2 e_2^{k-1} + \cdots + \beta_{r_{k-1}} e_{r_{k-1}}^{k-1} = 0,$$

odakle, zbog linearne nezavisnosti vektora $e_1^{k-1}, e_2^{k-1}, \ldots, e_{r_{k-1}}^{k-1}$, prvo zaključujemo da je $\beta_j = 0$, za sve indekse $j \in \{1, 2, \ldots, r_{k-1}\}$, a zatim iz jednakosti (6.56), uz istu argumentaciju, sledi da su i $\alpha_j = 0$, za sve $j \in \{1, 2, \ldots, r_{k-1}\}$.

Budući da je $\mathsf{Im}\, A^{k-1} \subseteq \mathsf{Im}\, A^{k-2}$ skup linearno nezavisnih vektore $\{e_1^{k-2}, e_2^{k-2}, \ldots, e_{r_{k-1}}^{k-2}\}$ možemo dopuniti vektorima $e_{r_{k-1}+1}^{k-2}, \ldots, e_{r_{k-2}}^{k-2}$ do baze prostora $\mathsf{Im}\, A^{k-2}$. Pri tome važi da su vektori $e_{r_{k-1}+1}^{k-2}, \ldots, e_{r_{k-2}}^{k-2} \in \mathsf{Ker}\, A$, zbog teoreme o rangu i defektu primenjene na restrikciju operatora A na $\mathsf{Im}\, A^{k-2}$. Sada analogno nastavljamo dalje, tj. za vektore $(e_1^{k-2}, e_2^{k-2}, \ldots, e_{r_{k-2}}^{k-2})$ baze prostora $\mathsf{Im}\, A^{k-2}$. Za vektore ove baze važi

(k-1) $A(e_j^{k-2}) = 0$, za $j = r_{k-1} + 1, \ldots, r_{k-2}$,

(k-3) postoje vektori $e_1^{k-3}, e_2^{k-3}, \ldots, e_{r_{k-2}}^{k-3}$ takvi da je $A(e_j^{k-3}) = e_j^{k-2}$, za $j = 1, 2, \ldots, r_{k-2}$.

Sada analogno prethodnom slučaju zaključujemo da je skup $\{e_1^{k-3}, e_2^{k-3}, \ldots, e_{r_{k-2}}^{k-3}\}$ linearno nezavisan, i možemo ga dopuniti vektorima $e_{r_{k-2}+1}^{k-3}, \ldots, e_{r_{k-3}}^{k-3}$ do baze prostora $\mathsf{Im}\, A^{k-3}$. Pri tome važi da su vektori $e_{r_{k-2}+1}^{k-3}, \ldots, e_{r_{k-3}}^{k-3} \in \mathsf{Ker}\, A$, zbog teoreme o rangu i defektu primenjene na restrikciju operatora A na $\mathsf{Im}\, A^{k-3}$. I analogno nastavimo dalje, dok ne dođemo do prostora $\mathsf{Im}\, A^0 = V$. Tako dolazimo do sledećih vektora

$$
\begin{array}{llcccccccccc}
\text{baza od } \mathsf{Im}\, A^{k-1} & \longrightarrow & e_1^{k-1}, & e_2^{k-1}, & \ldots, & e_{r_{k-1}}^{k-1}, & & & & & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & & & \\
\text{baza od } \mathsf{Im}\, A^{k-2} & \longrightarrow & e_1^{k-2}, & e_2^{k-2}, & \ldots, & e_{r_{k-1}}^{k-2}, & \ldots, & e_{r_{k-2}}^{k-2}, & & & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & \\
\text{baza od } \mathsf{Im}\, A^{k-3} & \longrightarrow & e_1^{k-3}, & e_2^{k-3}, & \ldots, & e_{r_{k-1}}^{k-3}, & \ldots, & e_{r_{k-2}}^{k-3}, & \ldots & e_{r_{k-3}}^{k-3}, & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\text{baza od } \mathsf{Im}\, A & \longrightarrow & e_1^1, & e_2^1, & \ldots, & e_{r_{k-1}}^1, & \ldots, & e_{r_{k-2}}^1, & \ldots & e_{r_{k-3}}^1, & \ldots & e_{r_1}^1, \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\text{baza od } \mathsf{Im}\, A^0 & \longrightarrow & e_1^0, & e_2^0, & \ldots, & e_{r_{k-1}}^0, & \ldots, & e_{r_{k-2}}^0, & \ldots & e_{r_{k-3}}^0, & \ldots & e_{r_1}^0, \quad \ldots \quad e_{r_0}^0.
\end{array}
\tag{6.57}
$$

Iz gornje konstrukcije, vidimo da vrste ove matrice imaju osobinu da kada na njih delujemo operatorom A da se sve one preslikaju u prethodnu vrstu osim prve, koja se preslika u nula vektor. Preciznije, prvih r_{k-1} vektora druge vrsta preslika se u odgovarajuće vektore prve vrste; vektori druge vrste e_j^{k-2}, za $j = r_{k-1} + 1, \ldots, r_{k-2}$ preslikaju se u nula vektor, zatim se prvih r_{k-2} vektora treće vrste preslikaju redom u odgovarajuće vektore druge vrste; vektori treće vrste e_j^{k-3}, za $j = r_{k-2} + 1, \ldots, r_{k-3}$ preslikaju se u nula vektor, itd.

Primetimo da u svakom bloku dimenzije j, kojem odgovara matrica $\mathcal{N}_j$, u odgovarajućoj cikličkoj bazi, prvi vektor iste, vidi (6.49), pripada potprostoru $\mathsf{Ker}\, A$, drugi pripada potprostoru $\mathsf{Ker}\, A^2$, itd., i $j.-$ti vektor pripada $\mathsf{Ker}\, A^j$. Odakle sledi da svaki blok duž dijagonale sadrži po jedan vektor iz potprostora $\mathsf{Ker}\, A$, i time smo pokazali da je broj blokova duž dijagonale matrice $A(e)$ jednak dimenziji potprostora $\mathsf{Ker}\, A$. Ovo rezonovanje možemo uopštiti i na blokove viših dimenzija. Prvo primetimo da ako je B_j ciklički operator koji deluje na $j-$dimenzionom prostoru [16], tada je

$$\mathsf{def}\, B_j^l = \begin{cases} l & \text{za} \quad 0 \le l \le j \\ j & \text{za} \quad j \le l \end{cases} \tag{6.58}$$

Tako da prethodna jednakost (6.58) primenjena na drugu dekompoziciju u (6.53) daje sledeći linearni sistem,

$$\mathsf{def}\, A^l = d_l = n - r_l = \xi_1 + 2\,\xi_2 + \cdots + l\,\xi_l + l\,\xi_{l+1} + \cdots + l\,\xi_k, \qquad \text{za } 1 \le l \le k. \tag{6.59}$$

Primetimo da za $l = 1$, dobijamo da je broj svih blokova duž glavne dijagonale jednak $\mathsf{def}\, A$, tj. dimenziji $\mathsf{Ker}\, A$.

[16] U našem slučaju B_j su one restrikcije iz $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ koje deluju na $j-$dimenzionim potprostorima.

Ako iz ovog sistema izdvojimo jednačine za $l = j-1, j$ i $j+1$ dobijamo,

$$
\begin{aligned}
n - r_{j-1} &= \xi_1 + 2\,\xi_2 + \cdots + (j-1)\,\xi_{j-1} + (j-1)\,\xi_j + (j-1)\,\xi_{j+1} + \cdots + (j-1)\,\xi_k \\
n - r_j &= \xi_1 + 2\,\xi_2 + \cdots + (j-1)\,\xi_{j-1} + j\,\xi_j + j\,\xi_{j+1} + \cdots + j\,\xi_k \\
n - r_{j+1} &= \xi_1 + 2\,\xi_2 + \cdots + (j-1)\,\xi_{j-1} + j\,\xi_j + (j+1)\xi_{j+1} + \cdots + (j+1)\,\xi_k.
\end{aligned} \tag{6.60}
$$

Ako sada pomnožimo drugu jednačinu sistema (6.60) sa dva, a zatim oduzmemo prvu i treću jednačinu dobićemo

$$\xi_j = r_{j-1} - 2\,r_j + r_{j+1} = 2\,d_j - d_{j-1} - d_{j+1}, \tag{6.61}$$

vidimo da ova formula važi za sve $j = 1, 2, \ldots, k$. Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema 2. *Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ nilpotentan operator indeksa k, takav da se V dekomponuje kao*

$$V = \xi_k\, M_k \oplus \xi_{k-1}\, M_{k-1} \oplus \cdots \oplus \xi_1\, M_1,$$

gde je M_j ciklički potpostor dimenzije j, kojem u cikličkoj bazi restrikciji operatora A na M_j odgovara kanonska nilpotentnna matrica $\mathcal{N}_j$, a ξ_j je broj takvih potprostora, tj. blokova dimenzije j duž dijagonale od $A(e)$ iz (6.51). Ako je $d_i = \mathsf{Ker}\,A^i$ i $r_i = \mathsf{Im}\,A^i$, za $i = 1, 2, \ldots, k$. Tada je

$$\xi_j = r_{j-1} - 2\,r_j + r_{j+1} = 2\,d_j - d_{j-1} - d_{j+1}, \qquad \text{za sve } j = 1, 2, \ldots, k. \tag{6.62}$$

6.14. Žordanova normalna forma. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ linearni operator i neka je $\lambda \in \mathsf{Sp}\,(A)$ neka sopstvena vrednost, onda se skup

$$V^A_{(\lambda)} = \{v \in V \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (A - \lambda\, I_n)^k v = 0\}$$

naziva **korenskim potprostorom** operatora A koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ, a svaki ne nula vektor $x \in V^A_{(\lambda)}$ nazivamo korenskim vektorom operatora A koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Ako nam je iz konteksta poznato o kojem se operatoru A radi onda iz oznake $V^A_{(\lambda)}$ ispuštamo A i kraće pišemo $V_{(\lambda)}$. Primetimo, da su sopstveni vektori ujedno i korenski vektori, za $k = 1$.

Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ neki linearni operator i neka su karakteristični i minimalni polinomi operatora A proizvodi linearnih faktora, tj.

$$
\begin{aligned}
\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}, \\
\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{s_k},
\end{aligned} \tag{6.63}
$$

pri čemu je $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$. Tada primena Teoreme 2 iz tačke **6.13**, i daje dekompoziciju

$$V = \bigoplus_{\lambda_i \in \mathsf{Sp}\,(A)} V_{(\lambda_i)} = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{(\lambda_i)},$$

gde je $V_{(\lambda_i)}$ korenski potprostor sopstvene vrednosti $\lambda_i \in \mathsf{Sp}\,(A)$.

Primedba 1. Primetimo da ako je $\mathbb{F}$ algebarski zatvoreno polje, tada uvek imamo faktorizaciju karakterističnog i minimalnog polinoma u obliku (6.63).

Primedba 2. Primetimo da je restrikcija operatora $(A - \lambda_i \mathsf{id}_n)^{s_i}$ na korenski potprostor $V_{(\lambda_i)}$ nilpotentan operator, a na preostale korenske prostore $V_{(\lambda_j)}$ $(i \neq j)$ regularan operator, tako da je Fitingova dekompozicija operatora $(A - \lambda_i \mathsf{id}_n)^{s_i}$ jednaka

$$V = L \oplus M, \quad \text{gde je} \quad L = V_{(\lambda_i)} \quad \text{i} \quad M = \bigoplus_{i \neq j = 1}^{k} V_{(\lambda_i)}. \tag{6.64}$$

Dekompozicija (6.64) pokazuje, da je potrebno ispitati sve nilpotentne restrikcije linearnih operatora $(A - \lambda_i \mathbb{I}_n)^{s_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, odrediti baze za invarijantne potprostore kao u (6.53) za svaku od sopstvenih vrednosti i onda napraviti uniju tako dobijenih baza.

Pre same formulacije Žordanove[17] teoreme, uvedimo neke osnovne pojmove koji su nam potrebni.

Osnovni Žordanov blok (OJB) je matrica oblika $\mathcal{B}^k_\lambda$, pri čemu je λ je sopstvena vrednost bloka, k je dimenzija bloka. Primetimo da se minimalni polinom osnovnog Žordanovog bloka $\mathcal{B}^k_\lambda$ jednak $\mu_{\mathcal{B}^k_\lambda}(t) = (t - \lambda)^k$, a njen karakteristični polinom jednak je $\kappa_{\mathcal{B}^k_\lambda}(t) = (-1)^k\,(t - \lambda)^k$, vidi **6.14** Primer.

[17] Marie Ennemond Camille Jordan, 1838-–1922, francuski matematičar.

$$(6.65)\qquad \mathcal{B}_\lambda^k=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda\end{bmatrix},\qquad \mathcal{C}_\lambda^r=\begin{bmatrix}\mathcal{B}_\lambda^{s_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mathcal{B}_\lambda^{s_2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{B}_\lambda^{s_l}\end{bmatrix},\qquad \mathcal{J}^n=\begin{bmatrix}\mathcal{C}_{\lambda_1}^{r_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mathcal{C}_{\lambda_2}^{r_2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{C}_{\lambda_k}^{r_k}\end{bmatrix}$$

Žordanov blok je kvazidijagonalna blok matrica oblika $\mathcal{C}_\lambda^k$, gde je λ sopstvena vrednost i $\mathcal{B}_\lambda^{k_i}$, $i=1,\dots,l$ su osnovni Žordanovi blokovi sopstvene vrednosti λ od kojih je sastavljen $\mathcal{C}_\lambda^r$, tako da je $s_1\geq s_2\geq\cdots\geq s_l$, i $r=s_1+s_2+\cdots+s_l$. Primetimo da je minimalni polinom matrice $\mathcal{C}_\lambda^r$ jednak $\mu_{\mathcal{C}_\lambda^r}(t)=(t-\lambda)^s_1$, a njen karakteristični polinom $\kappa_{\mathcal{C}_\lambda^r}(t)=(-1)^r\,(t-\lambda)^r$.

Žordanova matrica je kvazidijagonalna blok matrica oblika $\mathcal{J}^n$, gde su $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ međusobno različite sopstvene vrednosti, $\mathcal{C}_{\lambda_i}^{r_i}$ je Žordanov blok, sopstvene vrednosti λ_i, pri čemu je

$$n=r_1+r_2+\cdots+r_k.$$

Koristeći **6.13** Teorema 2, kao i što smo rekli za karakteristični i minimalni polinom Žordanovog bloka sopstvene vrednosti λ sada lako nalazimo

$$(6.66)\qquad \begin{aligned}&\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)=(-1)^n\,p_1(\lambda)^{r_1}\cdot p_2(\lambda)^{r_2}\cdots p_k(\lambda)^{r_k},\\ &\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)=p_1(\lambda)^{s_1}\cdot p_2(\lambda)^{s_2}\cdots p_k(\lambda)^{s_k},\qquad \text{pri čemu je}\qquad s_i\leq r_i,\ i=1,\dots,k.\end{aligned}$$

Teorema (Žordanova normalna forma, proširena verzija). *Neka je $A\in\mathsf{Hom}\,(\mathbb{F})$ linearni operator čije se karakteristični i minimalni polinomi proizvodi linearnih faktora, tj.*

$$(6.67)\qquad \begin{aligned}&\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k},\\ &\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{s_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{s_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{s_k},\end{aligned}$$

pri čemu je $\lambda_i\neq\lambda_j$ za $i\neq j$.

Tada postoji baza e u kojoj se matrica operatora A podudara sa sledećom Žordanovom matricom,

$$\mathcal{J}^A=\begin{bmatrix}\mathcal{C}_{\lambda_1}^{r_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mathcal{C}_{\lambda_2}^{r_2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{C}_{\lambda_k}^{r_k}\end{bmatrix},$$

gde je $\mathcal{C}_{\lambda_i}^{r_i}$, Žordanov blok sopstvene vrednosti λ_i, $i=1,\dots,k$. Pri tome u matrici $\mathcal{C}_{\lambda_i}^{r_i}$ postoji barem jedan OJB dimenzije s_i, tj. matrica $\mathcal{B}_{\lambda_i}^{s_i}$, a red svih ostalih OJB od kojih se sastoji $\mathcal{C}_{\lambda_i}^{r_i}$ nije veći od s_i. Broj osnovnih Žordanovih blokova u $\mathcal{C}_{\lambda_i}^{r_i}$ jednak je geometrijskoj višestrukosti sopstvene vrednosti λ_i, a zbir redova svih OJB od kojih se sastoji $\mathcal{C}_{\lambda_i}^{r_i}$ jednak je algebarskoj višestrukosti sopstvene vrednosti λ_i, tj. broju r_i. Broj svih OJB u svakom od Žordanovih blokova $\mathcal{C}_{\lambda_i}^{r_i}$ kao i njihove dimenzije jedinstveno su određene operatorom A. Matrica $\mathcal{J}^A$ jedinstveno je određena do na permutacije osnovnih Žordanovih blokova u $\mathcal{C}_{\lambda_i}^{r_i}$, $i=1,\dots,k$, duž njihovih glavnih dijagonala.

Dokaz. Prema Teoreme 2 iz tačke **6.13**, znamo da je

$$V=L_1\,\oplus\,L_2\,\oplus\,\cdots\,\oplus\,L_k,\quad \text{gde je}\quad L_i=V_{(\lambda_i)}=\mathsf{Ker}\,(A-\lambda_i\,\mathsf{id}_n)^{s_i},$$

i gde je $\mu_i(t)=(t-\lambda_i)^{s_i}$ minimalni polinom restrikcije $A_i=A_{|\,L_i}$. Specijalno je,

$$(A_1-\lambda_1\,\mathsf{id}_{r_1})^{s_1}=\mathbb{O}_{r_1},\qquad (A_2-\lambda_2\,\mathsf{id}_{r_2})^{s_2}=\mathbb{O}_{r_2},\qquad \dots,(A_k-\lambda_k\,\mathsf{id}_{r_k})^{s_k}=\mathbb{O}_{r_k}.$$

Ako sada obeležimo sa $C_i=A_i-\lambda_i\,\mathsf{id}_{r_i}$, za svaki $i=1,2,\dots,k$ imaćemo da je

$$A_i=\lambda_i\,\mathsf{id}_{r_i}+C_i,\qquad \text{gde je}\qquad C_i^{s_i}=\mathbb{O}_{r_i}.$$

Drugim rečima A_i je zbir skalarnog operatora $\lambda_i\mathsf{id}_{r_i}$ i nilpotentnog operatora C_i čiji je indeks nilpotentnosti s_i. Tako da primena Teorema 1 i Teorema 2 iz tačke **6.14**, daje egzistenciju baze takve da je matrica operatora A_i jednaka kvazidijagonalnoj matrici $\mathcal{C}_{\lambda_i}^{r_i}$, pri tome su broj i dimenzije svih OJB, jedinstveno određene određeni formulom (6.62) primenjenom na nilpotentni operator $C_i^{s_i}$. Ostala svojstva OJB slede iz pomenutih teorema dokazanih za nilpotentne operator i definicija algebarske i geometrijske višestrukosti sopstvenih vrednosti. □

Primedba 1. Matrica $\mathcal{J}^A$ iz gornje teoreme zove se Žordanova normalna forma, ili kraće Žordanova forma, operatora A, a baza e zove se Žordanova baza. Kako Žordanova forma nije jedinstvena tako ni Žordanova baza nije jedinstvena. Ako pređemo na jezik matrica, osnovni deo gornje teoreme možemo iskazati na sledeći način: *proizvoljna data matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ čiji su karakteristični i minimalni polinom jednaki (6.67) slična je matrica $\mathcal{J}^A$.*

Posledica. *Dve matrice su slične ako i samo ako imaju istu Žordanovu formu.*

6.15. Praktično određivanje Žordanove forme. Iz prethodnih tačaka vidimo da proces određivanja Žordanove forme ima sledeće korake:

(i1) nađemo karakteristični i minimalni polinom i sve sopstvene vrednosti operatora A,

(i2) uzimamo redom sopstvene vrednosti λ_i, i za svaku od njih nalazimo strukturu OJB u Žordanovom bloku $\mathcal{C}^{r_i}_{\lambda_i}$

(i3) zatim određujemo njihove Žordanove baze $e^{\lambda_i} = (e_1^{\lambda_i}, \dots, e_{r_i}^{\lambda_i})$ kao što je opisano u tački 6.14, vidi tabelu (6.57),

(i4) formiramo Žordanovu bazu $e = (e_1^{\lambda_1}, \dots, e_{r_1}^{\lambda_1}, e_1^{\lambda_2}, \dots, e_{r_2}^{\lambda_2}, \dots, e_1^{\lambda_k}, \dots, e_{r_k}^{\lambda_k})$ i matricu operatora A u ovoj bazi, a ta matrica je Žordanova matrica $\mathcal{J}$ (kao u Žordanovoj teoremi).

U koraku (i1), potrebno je naći karakteristični polinom na uobičajeni način. Da bismo mogli primeniti Žordanovu formu karakteristični polinom mora da bude proizvod linearnih faktora. Minimani polinom moguće je odrediti nekom od ranijih metoda, npr. ako slobodničlan κ_A nije jednak 0.

Iz Žordanove teoreme vidimo da ono što nije jednoznačno njome određeno je broj OJB i njihove dimenzije od kojih se sastoje Žordanovi blokovi $\mathcal{C}^{r_i}_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, k$. Ovaj problem zahteva detaljniju analizu korenskih potprostora $V_{(\lambda_i)}$, koji smo uradili u tački . S obzirom da imamo dekompoziciju vektorskog prostora V na korenske potprostore,

$$V = \bigoplus_{\lambda_i \in \sigma(A)} V_{(\lambda_i)},$$

problem se svodi na analizu nekog od njih.

Neka je $V_{(\lambda_i)}$ neki od korenskih potprostora i neka je

$$V^j_{(\lambda_i)} = \{v \in V \mid (A - \lambda_i I_n)^j v = 0\} = \mathsf{Ker}(A - \lambda_i I_n)^j,$$

onda je jasno da važe relacije:

$$V^1_{(\lambda_i)} \subseteq V^2_{(\lambda_i)} \subseteq \cdots \subseteq V^j_{(\lambda_i)} \subseteq \cdots, \tag{6.68}$$

U dokazu Fitingove dekompozicije videli smo da kada se u nizu (6.68) prvi put pojavi jednakost između susednih potprostora, tj.

$$\text{kada je} \quad V^j_{(\lambda_i)} = V^{j+1}_{(\lambda_i)} \qquad \text{tada je} \qquad V^j_{(\lambda_i)} = V^t_{(\lambda_i)},\ t = j, j+1, \dots,$$

kao i to da je $j = s_i$, gde je s_i eksponent linearnog faktora $\lambda - \lambda_i$ u minimalnom polinomu. Ova činjenica nam daje algoritam za traženje minimalnog polinoma kada je karakteristični polinom proizvod linearnih faktora. Kao što znamo od ranije karakteristični i minimalni polinom od A imaju iste ireducibilne faktore i razlikuju se samo stepeni tih ireducibilnih faktora, pa se određivanje minimalnog polinoma praktički svodi na određivanje stepena s_{λ_i}, $\lambda_i \in \mathsf{Sp}(A)$, a to radimo na sledeći način: uzmemo sopstvenu vrednost λ_1 i za nju formiramo niz (6.68) i kada se u tom nizu prvi put pojavi jednakost između susednih potprostora $V^j_{(\lambda_1)} = V^{j+1}_{(\lambda_1)}$, onda je $s_{\lambda_1} = s_1 = j$. Zatim istu proceduru ponovimo sa svim sopstvenim vrednostima operatora A.

(i2) Da bismo odredili Žordanovu formu restrikcije C_i na korenskom potprostoru $V_{(\lambda_i)}$ potrebno je izračunati prirodne brojeve: $d_i^j = \dim V^j_{(\lambda_i)}$, $j = 1, \dots, s_i$, i primeniti dormulu (6.62).

Ponekad se kaže da niz (6.68) (ili samo niz, $(d_i^j)_{j=1,\dots,s_i}$, njihovih dimenzija) predstavlja strukturu korenskog potprostora $V_{(\lambda_i)}$. U praksi često koristimo činjenicu da niz $(d_i^j)_{j=1,\dots,s_i}$, određuje Žordanovu formu bloka $\mathcal{C}^{r_i}_{\lambda_i}$

na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&k_i^1 \text{ je broj OJB (geometrijska višestrukost sopstvene vrednosti } \lambda_i),\\
&k_i^2 - k_i^1 \text{ je broj OJB dimenzije barem } 2,\\
&k_i^3 - k_i^2 \text{ je broj OJB dimenzije barem } 3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&k_i^{s_i} - k_i^{s_i-1} \text{ je broj OJB dimenzije } s_i.
\end{aligned}$$

Pronalaženje baza OJB u Žordanovom bloku je najkomplikovaniji deo ovog zadatka. Žordanova baza bloka $\mathcal{C}_{\lambda_i}^{r_i}$ određuje na način opisan u tački **6.14**, vidi tabelu (6.57), tj. potrebno je prvo izračunati matrice operatora $C_i^j = (A - \lambda_i \,\mathsf{id}_{r_i})^j$, za $j = 1, 2, \ldots, s_i - 1$. Tada odredimo vektore $e_1^{s_i-1}, \ldots, e_{r_{s_i-1}}^{s_i-1}$ koji su baza potprostora $\mathsf{Im}\, C_i^{s_i-1}$, zatim rešavajući linearni sistem

$$(A - \lambda_i \,\mathsf{id}_{r_i})(e_j^{s_i-2} = e_j^{s_i-1}, \qquad \text{za } j = 1, 2, \ldots, r_{s_i-1}.$$

Ovaj sistem uvek mora imati rešenja jer je $\mathsf{Im}\, C_i^j \supseteq \mathsf{Im}\, C_i^{j+1}$, za svaki $j \in \mathbb{N}$. Sada, ako je potrebno, nadopunimo skup $\{e_1^{s_i-2}, \ldots, e_{r_{s_i-1}}^{s_i-2}\}$ vektorima $e_{r_{s_i-1}+1}^{s_i-2}, \ldots, e_{r_{s_i-2}}^{s_i-2}$ do baze od $\mathsf{Im}\, C_i^{s_i-2}$, i analogno nastavimo dalje. Kada napokon dođemo do baze potprostora $V_{(\lambda_i)}$, kao što je opisano u u tački 6.14, u odgovarajućoj tabeli oblika (6.57), kolone vektora predstavljaju ciklike baze OJB koje tražimo. Time je kompletirana i (i3) u procesu određivanja Žordanove forme.

(i4) je samo dopisivanje baza, i kada je kompletiran korak (i3) veoma je jednostavno.

Primer. Odredimo Žordanovu formu i Žordanovu bazu matrice

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kao što znamo prvo je potrebno naći karakteristični i minimalni polinom matrice $\mathcal{A}$. Kako je $\mathcal{A}$ matrica oblika $\begin{bmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{D}\\ 0 & \mathcal{C}\end{bmatrix}$ sledi da je

$$\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda\,\mathbb{I}_7) = \det(\mathcal{B} - \lambda\,\mathbb{I}_4)\det(\mathcal{C} - \lambda\,\mathbb{I}_3) = \kappa_{\mathcal{B}}(\lambda)\,\kappa_{\mathcal{C}}(\lambda) = -(\lambda - 2)^7.$$

Izračunajmo minimalni polinom za kojeg su kandidati $(\lambda - 2)^i$, $i = 1, \ldots, 7$. Očigledno $\lambda - 2$ nije minimalni polinom jer matrica $\mathcal{A}$ nije proporcionalna matrici $\mathbb{I}_7$.

$$(\mathcal{A} - 2\,\mathbb{I}_7)^2 = \begin{bmatrix} 0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Budući da je $(\mathcal{A} - 2\,\mathbb{I}_7)^2 \neq 0$, lako se nalazi da je $(\mathcal{A} - 2\mathbb{I}_7)^3 = 0$, odakle je $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 2)^3$. Poznavanje minimalnog polinoma (jer postoji barem jedan OJB dimenzije 3) za dimenzije OJB imamo sledeće mogućnosti: $3+3+1$, $3+3+2$, $3+2+1+1$ i $3+1+1+1+1$.

Da bismo odredili broj OJB računamo $\mathsf{Ker}(\mathcal{A} - 2\,\mathbb{I}_7)$:

$$0 = \mathsf{Ker}(\mathcal{A} - 2\,\mathbb{I}_7)\,x = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&-3&-3&-3\\ 0&0&0&0&3&3&3\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2\\ x_3 + x_4\\ -3x_5 - 3x_6 - 3x_7\\ 3x_5 + 3x_6 + 3x_7\\ 0\\ x_5\\ -x_5 \end{bmatrix},$$

odakle imamo redom, $x_2 = 0$, $x_5 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, $x_6 + x_7 = 0$, a zatim i

$$x = (x_1, x_3, -x_3, 0, x_6, -x_6)^\tau \;=\; x_1\underbrace{(1,0,0,0,0,0,0)^\tau}_{f_1} + x_3\underbrace{(0,0,1,-1,0,0,0)^\tau}_{f_2} + x_6\underbrace{(0,0,0,0,0,1,-1)^\tau}_{f_3},$$

tj. vektori f_1, f_2 i f_3 su jedna baza sopstvenog potprostora $\mathsf{Ker}(\mathcal{A} - 2\,\mathbb{I}_7) = V_{(2)}^1$, odakle zaključujemo da postoje tri OJB od kojih je barem jedan dimenzije 3, tako da postoje samo dve mogućnosti za dimenzije OJB i to: $3+3+1$ ili $3+2+2$. Da bismo odredili koja od tih mogućnosti je tačna moramo izračunati i $\mathsf{Ker}(\mathcal{A}-2\,\mathbb{I}_7)^2$. S obzirom da smo već ranije (kod traženja minimalnog polinoma) izračunali matricu $(\mathcal{A}-2\,\mathbb{I}_7)^2$, lako nalazimo rešenje jednačine $(\mathcal{A}-2\,\mathbb{I}_7)^2\,x=0$, i dobijamo sledeću vezu među koordinatama rešenja $x:\ x_3+x_4=0$. Tako da za svaki $x\in\mathsf{Ker}(\mathcal{A}-2\,\mathbb{I}_7)^2$ važi,

$$\begin{aligned} x=(x_1,x_2,x_3,-x_3,x_5,x_6,x_7)^\tau \;&=\; x_1\underbrace{(1,0,0,0,0,0,0)^\tau}_{f_1}+x_2\underbrace{(0,1,0,0,0,0,0)^\tau}_{f_4}+x_3\underbrace{(0,0,1,-1,0,0,0)^\tau}_{f_2}\\ &+x_5\underbrace{(0,0,0,0,1,0,0)^\tau}_{f_5}+x_6\underbrace{(0,0,0,0,0,1,0)^\tau}_{f_6}+x_7\underbrace{(0,0,0,0,0,0,1)^\tau}_{f_7}, \end{aligned}$$

Prema tome, vektori $f_1,\ f_2,\ f_4,\ f_5,\ f_6$ i f_7 predstavljaju jednu bazu potprostora $\mathsf{Ker}(\mathcal{A}-2\,\mathbb{I}_7)^2=V^2_{(2)}$, odakle zaključujemo da je dimenzija potprostora $V^2_{(2)}=6=d^2_2$. Kako je dimenzija potprostora $\mathsf{Ker}(\mathcal{A}-2\,\mathbb{I}_7)=V^1_{(2)}=3=d^1_2$, vidimo da je $d^2_2-d^1_2=3$, odakle sledi da postoje tri OJB dimenzije barem 2. Dakle, otpada prva mogućnost za dimenzije OJB i tako nam ostaje da je Žordanova forma matrice $\mathcal{A}$ jednaka:

$$\begin{bmatrix} 2&1&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&1\\ 0&0&0&0&0&0&2 \end{bmatrix}.$$

Žordanova baza $e=(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7)$ sastoji se od unije baza OJB. Bazu prvog OJB čine vektori $e_1=f_1,\ \ e_2=f_4$ i $e_3=(0,0,1,0,0,0,0)^\tau$ jer je $\mathcal{A}\,e_1=2\,e_1$, $(\mathcal{A}-2\,\mathbb{I}_7)\,e_2=e_1$ i $(\mathcal{A}-2\,\mathbb{I}_7)\,e_3=e_2$. Zatim bazu drugog OJB čine vektori $e_4=f_2$ i $e_5=-1/3\,f_6$ jer je $\mathcal{A}\,e_4=2\,e_4$, i $(\mathcal{A}-2\,\mathbb{I}_7)\,e_5=e_4$ i na kraju za treći OJB bazu čine vektori $e_6=f_3$ i $e_7=f_5-f_7$, jer je $\mathcal{A}\,e_6=2\,e_6$, i $(\mathcal{A}-2\,\mathbb{I}_7)\,e_7=e_6$.

6.16. Invarijantnost linearnih operatora nad realnim vektorskim prostorima. Postavlja se prirodno pitanje kako tretirati slične probleme invarijantnosti, Žordanove normalne forme nad poljem realnih brojeva, tj. kad nemamo faktorizaciju karakterističnog polinoma κ_A u linearne faktore. Tada ne možemo direktno primeniti rezultate prethodnih tačaka.

Kako se ireducibilni polinomi nad poljem realnih brojeva ne razlikuju isuviše od onih nad $\mathbb{C}$, jer ireducibilni polinomi nad poljem $\mathbb{R}$ mogu biti osim linearnih i kvadratni polinomi čija je diskriminanta manja od nule, očekujemo da ćemo moći kontrolisati situaciju i iskoristiti pomenute rezutate. Prvo moramo nekako naše realne objekte staviti u kompleksno okruženje.

Kompleksifikacija realnog vektorskog prostora. Neka je V **realni** vektorski prostor i neka je $A\in\mathsf{Hom}\,V$ linearni operator. Tada realnom vektorskom prostoru V prvo pridružimo na prirodan način kompleksni vektorski prostor $V^{\mathbb{C}}$, i na prirodan način linearni operator A možemo tretirati kao linearni operator na $V^{\mathbb{C}}$.

Dakle, ako je $e=(e_1,\dots,e_n)$ neka baza od V, tada je

$$V^{\mathbb{C}}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i,\ \text{pri čemu su } \lambda_i\in\mathbb{C}\right\}=V\oplus i\,V\,, \tag{6.69}$$

drugim rečima $V^{\mathbb{C}}$ je lineal od V, ali nad poljem kompleksnih brojeva. Vektorski prostor $V^{\mathbb{C}}$ nazivamo **kompleksifikacija** realnog vektorskog prostora V. Ponekad se kaže da $V^{\mathbb{C}}$ dobijamo iz V proširenjem polja skalara.

Za $z=x+i\,y$ $w=x_1+i\,y_1$, $x,y,x_1,y_1\in V$ i $\lambda=\sigma+i\,\tau$, $\sigma,\tau\in\mathbb{R}$ operacije sabiranja i množenja sa skalarom u $V^{\mathbb{C}}$ date su formulama

(s) $z+w=(x+i\,y)+(x_1+i\,y_1)=(x+x_1)+i\,(y+y_1)$,

(m) $\lambda\,z=(\sigma+i\,\tau)(x+i\,y)=(\sigma\,x-\tau\,y)+i(\sigma\,y+\tau\,x)$.

Ako je $A\in\mathsf{Hom\,V}$ sada možemo definisati i operator $A^{\mathbb{C}}\in\mathsf{Hom}\,V^{\mathbb{C}}$, na prirodan način,

$$A^{\mathbb{C}}z=A^{\mathbb{C}}(x+i\,y)=Ax+i\,Ay. \tag{6.70}$$

Linearni operator $A^{\mathbb{C}}$ nazivamo kompleksifikacija linearnog operatora A.

Koristeći ovu konstrukciju, svaki linearni operator $A\in\mathsf{Hom\,V}$ ili njegovu matricu u nekoj bazi, $A(e)\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, možemo videti kao linearni operator $A^{\mathbb{C}}\in\mathsf{Hom}\,V^{\mathbb{C}}$, a njegovu matricu u bazi $A(e)$ možemo tretirati kao matricu iz $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Sada ćemo primeniti kompleksifikaciju u tretiranju nekih problema nad realnim vektorskim poljima.

Propozicija. *Neka je V realni vektorski prostor i neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ linearni operator takav da njegov karakteristični polinom, $\kappa_A(\lambda)$, ima barem jednu kompleksnu nulu koja nije realna. Tada A ima dvodimenzioni invarijantni potprostor.*

Dokaz. Posmatrajmo A kao linearni operator koji deluje na kompleksnom vektorskom prostoru $V \subseteq V^{\mathbb{C}}$. Dakle, ako izaberemo neku bazu e u V onda je matrica operatora $A(e) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Pri ovom prelasku na prostor $V^{\mathbb{C}}$ karakteristični polinom operatora A neće se promeniti, a kako $\kappa_A(\lambda)$ ima kompleksnu nulu λ_0 ona je sopstvena vrednost operatora A nad $V^{\mathbb{C}}$. Dakle, postoji vektor $z \in V^{\mathbb{C}}, z \neq 0$ takav da je $Az = \lambda_0 z$, pri čemu je $\lambda_0 = \mu + i\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, i $z = x + i\,y$, $x, y \in V$. Kada ovo uzmemo u obzir imamo:

$$Az = A(x + i\,y) = Ax + i\,Ay = (\mu + i\,\nu)(x + i\,y) = (\mu\,x - \nu\,y) + i\,(\mu\,y + \nu\,x),$$

odakle odvajajući imaginarni i realni deo dobijamo,

$$A\,x = \mu\,x - \nu\,y \qquad \text{i} \qquad A\,y = \mu\,y + \nu\,x. \tag{6.71}$$

Primetimo prvo da je $\nu \neq 0$, jer je $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, zatim da vektori $x \in V$ i $y \in V$ nisu proporcionalni jer kad bi bilo $y = \alpha\,x$ onda bismo imali

$$Az = A(x + iy) = (1 + i\,\alpha)\,Ay = (\mu + i\,\nu)(1 + i\,\alpha)\,y \qquad \text{odakle sledi} \qquad A\,y = (\mu + i\,\nu)\,y,$$

a kako je $\nu \neq 0$ sledilo bi da je $y = 0$ i $x = 0$, tj. $z = 0$, što je nemoguće, jer $z \neq 0$. Ali nije moguće da jedan od x i y bude nula vektor, što zapravo znači da potprostor $L = \mathcal{L}(\{x, y\})$ ima dimenziju jednaku 2. S druge strane jednakosti (7.23) pokazuju da je L invarijantan potprostor operatora A. Dakle, L je traženi potprostor. $\square$

Teorema. *Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica. Tada je $\mathsf{Sp}\,(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Matricu $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$ možemo shvatiti kao matricu iz $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, tako da postoji $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, sopstvena vrednost, jer je $\mathbb{C}$ algebarski zatvoreno polje. Ako matrica $\mathcal{A}$ ima realnu sopstvenu vrednost nemamo što dokazivati. Sada postoji $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ takav da je

$$\mathcal{A}z = \lambda\,z, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \text{i za} \;\; y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$$

definišemo linearno preslikavanje, $f_z : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, formulom,

$$f_z(y) = y_1\overline{z_1} + y_2\overline{z_2} + \cdots + y_n\overline{z_n}.$$

Ako je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ kanonska baza onda f_z možemo zadati i na sledeći način: $f_z(e_i) = \overline{z_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Sada imamo,

$$f_z(\mathcal{A}z) = f_z(\lambda z) = \lambda f_z(z) = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}_{\neq 0}, \tag{6.72}$$

dok je s druge strane,

$$\begin{aligned} f_z(\mathcal{A}z) &= f_z\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\,\mathcal{A}(e_k)\Big) = f_z\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}e_i\big)\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}z_k\Big) f_z(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\overline{z_i}z_k \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}z_i\overline{z_i}}_{=\,\Lambda\in\mathbb{R}} + \sum_{i<k} \underbrace{(\alpha_{ik}\overline{z_i}z_k + \alpha_{ki}\overline{z_k}z_i)}_{\mathcal{A}=\mathcal{A}^\tau \implies \alpha_{ik}=\alpha_{ki}} = \Lambda + \underbrace{\sum_{i<k} \alpha_{ik}(\overline{z_i}z_k + \overline{z_k}z_i)}_{=\,\Gamma\in\mathbb{R}} = \Lambda + \Gamma \;\in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6.73}$$

Budući da su leve strane jednakosti (6.72) i (6.73) jednake $= f_z(\mathcal{A}z)$, moraju biti i desne, odakle sledi da je $\lambda \in \mathbb{R}$. Ovim je pokazano da je $\mathcal{A}\,z = \lambda\,z$, $\;0 \neq z \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{R}$. Kako je $z = x + i\,y$, $\;x, y \in \mathbb{R}^n$, imamo,

$$\lambda\,x + i\,(\lambda\,y) = \lambda\,(x + i\,y) = \lambda z = \mathcal{A}z = \mathcal{A}\,(x + i\,y) = \mathcal{A}\,x + i\,\mathcal{A}\,y \qquad \text{odakle je} \qquad \mathcal{A}\,x = \lambda\,x \quad \text{i} \quad \mathcal{A}\,y = \lambda y,$$

odakle, jer barem jedan od vektora x i y nije nula vektor (kad bi $x = y = 0$ onda bi i $z = 0$, a to je nemoguće jer je z sopstveni vektor), zaključujemo da postoji $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\mathcal{A}v = \lambda\,v$, tj. $\mathsf{Sp}\,(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. $\square$

Primedba. U jednoj od narednih glava pokazaćemo da je simetrična matrica dijagonalizabilna.

1. Zadaci, vežbanja i dopune

6.17. Struktura skupa polinoma. Pokažite da je skup polinoma $\mathbb{F}[x]$ nad poljem $\mathbb{F}$, uz standardne operacije sabiranja polinoma i množenja polinoma sa skalarom, komutativni prsten sa $\mathbb{1}$.

6.18. Struktura skupa polinoma. Pokažite da je $\mathbb{F}[x] = (\mathbb{F}[x], \mathbb{F}, +, \cdot, *)$ asocijativna, komutativna $\mathbb{F}-$algebra sa $\mathbb{1}$.

6.19. Svojstva relacije deljvosti polinoma. Dokažite **6.2** Propozicija.

6.20. Najveći zajednički delilac. Nađite $d =$NZD (f, g) ako je: $f(x) = 2\,x^4 + 3\,x^3 + 3\,x - 2$ i $g(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 11\,x + 6$,
a zatim odredite u i v tako da je $f\,u + g\,v = d$.

6.21. Relacija kongruencije. Neka su $0 \neq p, f, g \in \mathbb{F}[x]$ polinomi. Kažemo da je polinom f kongruentan polinomu g po modulu p ako ' deli $f - g$, što zapisujemo kao: $f \cong g \bmod p$.

Dokažite da je $\cong$ relacija ekvivalencije na skupu svih polinoma $\mathbb{F}[x]$, koja je kompatibilna sa operacijama sabiranja i množenja polinoma u sledećem smislu: ako je $f \cong g \bmod p$ i $f_1 \cong g_h \bmod p$ tada je,

(s) $f + f_1 \cong g + g_1 \bmod p$,

(m) $f\,f_1 \cong g\,g_1 \bmod p$.

6.22. O racionalnim nulama polinoma sa celobrojnim koeficijentima. Neka je $f = \sum_{i=0}^{n} a_i\,x^n \in \mathbb{Z}[x]$ i neka je $p/q \in \mathbb{Q}$ nula polinoma f pri čemu je NZD $(p, g) = 1$, onda važi da je $q \big| a_n$ i $p \big| a_0$.

Rešenje. Kako je p/q nula polinoma f imamo:

$$0 = f\Big(\frac{p}{q}\Big) = a_n\,\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\,\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\,\frac{p}{q} + a_0. \tag{6.74}$$

Ako (6.74) pomnožimo redom sa q^{n-1} i q^n dobijene relacije zapišemo na sledeći način:

$$0 = a_n\,\frac{p^n}{q} + \underbrace{a_{n-1}\,p^{n-1} + \cdots + a_1\,p\,q^{n-2} + a_0\,q^{n-1}}_{\in\,\mathbb{Z}}, \tag{6.75}$$

$$-a_0\,q^n = p\,(a_n\,p^{n-1} + a_{n-1}\,p^{n-2} + \cdots + a_1\,q^{n-1}). \tag{6.76}$$

Kako su u relaciji (6.75) svi članovi osim prvog celi brojevi, mora biti i prvi. Budući da je $(p, q) = 1$, da bi prvi član bio celi broj, mora $q \big| a_n$.

Analogno, budući da je desna strana relacije (6.76) deljiva sa p mora biti i leva, a kako je $(p, q) = 1$ i p ne deli q sledi da $p \big| a_0$.

6.23. Prosti polinomi. Provedite potpun induktivan dokaz Posledice u tački 6.4.

6.24. Rastav na proste polinome. Neka je $\mathbb{F}$ polje i neka je $1 \neq f \in \mathbb{F}[x]$ moničan polinom takav da je

$$f = p_1^{r_1}\,p_2^{r_2}\,\cdots\,p_m^{r_m}$$

njegova faktorizacija na proste monične polinome. Za svaki $1 \leq i \leq m$ posmatrajmo polinom

$$f_i = \frac{f}{p_i^{r_i}} = \prod_{i \neq j = 1}^{m} p_j^{r_j}.$$

Pokažite da su polinomi $f_1, f_2, \ldots, f_k$ relativno prosti.

6.25. Višestruke nule polinoma i izvod. Neka je f polinom nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je f' njegov izvod. Dokažite da je f proizvod različitih ireducibilnih polinoma nad $\mathbb{F}$ akko su f i f' uzajamno prosti.

6.26. Ireducibilni polinomi. Neka je p prost broj. Pokaži da je polinom $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$.

6.27. Polinomi koji poništavaju matrice. Nađite matricu $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}^2)$ sa celobrojnim koeficijentima koja zadovoljava jednačinu $\lambda^3 - 1 = 0$, ali ne zadovoljava jednačinu $\lambda - 1 = 0$.

Rešenje. Probajte sa matricom $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

6.28. Karakteristični polinom. Neka su $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, gde je $\mathsf{char}\mathbb{F} = 0$. Dokažite da matrice $\mathcal{A}\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}\mathcal{A}$ imaju isti karakteristični polinom.

Rešenje. Pokažimo prvo tvrdnju u slučaju kada je barem jedna od matrica $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ regularna. Tada je dovoljno pokazati da su polazne matrice slične jer slične matrice imaju isti karakteristični polinom. Pretpostavimo da je npr. $\mathcal{A}$ regularna onda imamo: $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\mathcal{B})\,\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, odakle zaključujemo da su matrice $\mathcal{A}\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}\mathcal{A}$ slične.

Pokažimo sada opšti slučaj, tj. kada su obe matrice singularne. Prvo obeležimo sa $\mathsf{Sp}\,(\mathcal{A})$ skup svih nula karakterističnog polinoma matrice $\mathcal{A}$. Budući da polje $\mathbb{F}$ ima beskonačno mnogo elemenata postoji beskonačno mnogo $\alpha \notin \mathsf{Sp}\,(\mathcal{A})$ takvih da je

$$\kappa_A(\alpha) = \det(\mathcal{A} - \alpha\,\mathbb{I}_n) \neq 0, \qquad \text{odakle je} \qquad \mathcal{A} - \alpha\,\mathbb{I}_n \quad \text{je regularna matrica,}$$

tako da imamo prvo $\kappa_{(\mathcal{A}-\alpha\,\mathbb{I}_n)\,\mathcal{B}} = \kappa_{\mathcal{B}\,(\mathcal{A}-\alpha\,\mathbb{I}_n)}$, a zatim da za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ i svaki $\alpha \notin \mathsf{Sp}\,(A)$,

$$p_1(\lambda, \alpha) = \kappa_{(\mathcal{A}-\alpha\,\mathbb{I}_n)\,\mathcal{B}}(\lambda) = \kappa_{\mathcal{B}\,(\mathcal{A}-\alpha\,\mathbb{I}_n)}(\lambda) = p_2(\lambda, \alpha). \tag{6.77}$$

Ako u (6.77) fiksiramo $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ dobijamo da se polinomi u α,

$$p_1(\alpha) = p_1(\lambda_0, \alpha) \qquad \text{i} \qquad p_2(\alpha) = p_2(\lambda_0, \alpha),$$

podudaraju na beskonačnom skupu (komplementu konačnog skupa $\mathsf{Sp}\,(A)$) pa su jednaki na čitavom $\mathbb{F}$. Dakle, kako (6.77) važi za sve $\lambda, \alpha \in \mathbb{F}$, važi specijalno i za $\alpha = 0$, tj. $\kappa_{\mathcal{A}\,\mathcal{B}}(\lambda) = \kappa_{\mathcal{B}\,\mathcal{A}}(\lambda)$.

6.29. Sopstveni vektori. Dokažite Lemu u tački **6.10** metodom matematičke indukcije po broju vektora.

6.30. Karakteristični i minimalni polinom. Odredi karakteristični i minimalni polinom kao i sopstvene vrednosti i sopstvene vektore sledećih realnih matrica. Ispitaj da li su date matrice dijagonalizabilne nad $\mathbb{R}$.

$$\text{(i1)} \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{(i2)} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{(i3)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{(i4)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(i5)} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(i6)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(i7)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(i8)} \begin{bmatrix} 17 & 6 & 17 & -3 \\ 6 & 5 & 7 & -1 \\ -16 & -8 & -17 & 4 \\ -5 & -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Problem nalaženja sopstvenih vrednosti linearnog operatora (matrice) svodi se na traženje nula karakterističnog polinoma (što u opštem slučaju nije jednostavan problem), a to je ekvivalentno nalaženju svih ireducibilnih faktora karakterističnog polinoma.

Nalaženje sopstvenih vektora za sopstvenu vrednost λ_0 svodi se na rešavanje homogenog sistema, $(\mathcal{A} - \lambda_0\mathbb{I}_n)\,x = 0$.

(i1) $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = -\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 - 45\lambda + 171 = -(\lambda - 3)(\lambda^2 + 4\lambda + 57)$,
sopstvena vrednost je 3, a sopstveni vektor je: $v_3 = (-5, 1, 0)^\tau$.
Primetimo da je faktor $\lambda^2 + 4\lambda + 57$, ireducibilan nad $\mathbb{R}$ jer je $4^2 - 4 \cdot 57 < 0$. Matrica $\mathcal{A}$ nije dijagonalizabilna.

(i2) $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = -\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = -\lambda(\lambda + 2)(\lambda + 3)$,
sopstvene vrednosti su $-3, -2$ i 0 a sopstveni vektori su:

$$v_{-3} = (-1, 0, 1)^\tau, \qquad v_{-2} = (-2, 1, 0)^\tau, \quad \text{i} \quad v_0 = (0, -1, 1)^\tau.$$

Matrica $\mathcal{A}$ je dijagonalizabilna jer postoji baza koja se sastoji od sopstvenih vektora.

(i3) $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = -\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = -(\lambda + 1)(-1 - 5\lambda + \lambda^2)$,
sopstvene vrednosti su: $-1, 1/2\,(5 - \sqrt{29})$ i $1/2\,(5 - \sqrt{29})$, a odgovarajući sopstveni vektori su:

$$v_1 = (-1, -2, 1)^\tau, \qquad v_2 = (1/2\,(-9 + \sqrt{29}), 7 - \sqrt{29}, 1)^\tau \quad \text{i} \quad v_3 = (1/2\,(-9 - \sqrt{29}), 7 + \sqrt{29}, 1)^\tau.$$

Matrica $\mathcal{A}$ je dijagonalizabilna jer postoji baza koja se sastoji od sopstvenih vektora.

(i4) $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = -\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$,
sopstvene vrednosti su: 1 i 2, a odgovarajući sopstveni vektori su:

$$v_1 = (1, 1, 1)^\tau \qquad \text{i} \qquad v_2 = (0, 1, 1)^\tau.$$

Matrica $\mathcal{A}$ nije dijagonalizabilna jer ne postoji baza koja se sastoji od sopstvenih vektora.

(i5) $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = -\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = -(\lambda - 6)(\lambda - 3)^2$,
sopstvene vrednosti su: 3 i 6, a odgovarajući sopstveni vektori su:

$$v_3 = (0, -1, 1)^\tau \qquad \text{i} \qquad v_6 = (3, 4, 2)^\tau.$$

Matrica $\mathcal{A}$ nije dijagonalizabilna jer ne postoji baza koja se sastoji od sopstvenih vektora.

(i6) $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = \mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda + 3)$,
sopstvene vrednosti su: $1, -1, 3$ i -3, a odgovarajući sopstveni vektori su:

$$v_1 = (-1, -1, 1, 1)^\tau, \; v_{-1} = (1, -1, -1, 1)^\tau, \; v_3 = (1, 3, 3, 1)^\tau \; \text{ i } \; v_{-3} = (-1, 3, -3, 1)^\tau.$$

Matrica $\mathcal{A}$ je dijagonalizabilna jer postoji baza koja se sastoji od sopstvenih vektora.

(i7) $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = \mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2(\lambda-2)^2$,
sopstvene vrednosti su: 0, i 2, a odgovarajući sopstveni vektori su:

$$v_0 = (0,-1,0,1)^\tau \qquad \text{i} \qquad v_2 = (0,1,0,1)^\tau.$$

Matrica $\mathcal{A}$ nije dijagonalizabilna jer ne postoji baza koja se sastoji od sopstvenih vektora.

(i8) $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = \mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)$,
sopstvene vrednosti su: $1, 2$ i 3, a odgovarajući sopstveni vektori su:

$$v_1 = (-7,-3,8,2)^\tau, \qquad v_2 = (-11,-5,12,3)^\tau \quad \text{i} \quad v_2 = (-3,-1,3,1)^\tau.$$

Matrica $\mathcal{A}$ nije dijagonalizabilna jer ne postoji baza koja se sastoji od sopstvenih vektora.

6.31. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ linearni operator nad poljem $\mathbb{F}$, kojem u nekoj bazi e odgovara matrica

$$\mathsf{A}(e) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

(i1) Nađite minimalni i karakteristični polinom operatora A.
(i2) Pokažite da A ima tačno jedan sopstveni vektor.
(i3) Pokažite da A nije potpuno reducibilan.

6.32. Za datu matricu $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ definišemo preslikavanje $B : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, formulom: $B(X) = \mathcal{A}\, X\, \mathcal{A}^{-1}$.

(i1) Dokažite da je B linearan operator i odredite matricu od B u standardnoj bazi.
(i2) Odredite baze od $\mathsf{Ker}\, B$ i $\mathsf{Im}\, B$, kao i njihove dimenzije.
(i3) Izračunajte $k_B(\lambda)$ i $\mu_B(\lambda)$, kao i $\mathsf{dim}\, \mathcal{L}(\{I,\, B,\, B^2,\, ...,\, B^n,\, ...\})$.
(i4) Izračunajte sopstvene vrednosti i sopstvene vektore operatora B, i ako je moguće bazu prostora $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ u kojoj je matrica operatora B dijagonalna.

6.33. Na vektorskom prostoru $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dat je linearni operator A formulom:

$$A(X) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

(i1) Nađite rang i defekt operatora A.
(i2) Dokažite da postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da je $A^n = 0$.
(i3) Nađite minimalni i karakteristični polinom operatora A.
(i4) Odredite A^{-1}, ako postoji.

6.34. Linearni operator, $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, zadat je u standardnoj bazi (e_1, e_2, e_3, e_4) formulom:

$$A(e_i) = 6\, e_i + \sum_{j=1}^{4} e_j, \qquad \text{za } i = 1,2,3,4.$$

(i1) Odredite $k_A(\lambda)$ i $\mu_A(\lambda)$.
(i2) Izračunajte sopstvene vrednosti i sopstvene vektore operatora A i ako je moguće bazu prostora $\mathbb{R}^4$ u kojoj je matrica operatora A dijagonalna.
(i3) Odredite sve invarijantne potprostore operatora A.
(i4) Odredite A^{-1} ako postoji.

6.35. Neka je $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{C})$ kompleksni vektorski prostor kompleksnih polinoma stepena ≤ 4. Dato je preslikavanje sledećom formulom, $B(p) = 3\, p + (2\, x - 1)\, p'$.

(i1) Dokažite da je B linearan operator na V.
(i2) Odredite matricu operatora B u standardnoj bazi.
(i3) Izračunajte $k_B(\lambda)$ i $\mu_B(\lambda)$, kao i $\mathsf{dim}\, \mathcal{L}(\{I,\, B,\, B^2, \ldots, B^n, \ldots\})$.
(i4) Izračunajte sopstvene vrednosti i sopstvene vektore operatora B i ako je moguće bazu prostora V u kojoj je matrica operatora B dijagonalna.

6.36. Neka je $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, skup realnih polinoma stepena ne većeg od 4. Za $f \in V$ definišemo preslikavanje $A : V \longrightarrow V$, formulom:

$$A(f(x)) = 2\,f(x) - x\,f'(x) + x\;f''(x), \quad \text{gde je} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}\,.$$

(i1) Dokažite da je V vektorski prostor, nađite mu jednu bazu i odredite dimenziju.

(i2) Nađite matricu endomorfizma A u nekoj bazi. Da li je A bijekcija na V?

(i3) Odredite neke baze od $\mathsf{Ker}\,A$ i $\mathsf{Im}\,A$ kao i njihove dimenzije.

(i4) Nađite minimalni i karakteristični polinom operatora A. Da li je A dijagonalizabilan operator?

6.37. Neka je $\alpha \neq 0$, dat realan broj i neka je

$$W = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = (a + b\,x + c\,x^2 + d\,\mathsf{sin}\,x + g\,\mathsf{cos}\,x)\,e^{\alpha x},\ a, b, c, d, g \in \mathbb{R}\}.$$

Definišemo preslikavanje $B(f) = f' = \dfrac{df}{dx}$, $f \in W$.

(i1) Dokažite da je W vektorski prostor i nađite mu jednu bazu.

(i2) Dokažite da je B automorfizam od W i nađite matricu operatora B u nekoj bazi.

(i3) Odredite inverz B^{-1} od B.

(i4) Odredite invarijantne potprostore operatora B.

6.38. Za vektor $0 \neq a \in V$, $\mathsf{dim}_{\mathbb{C}}\,V < \infty$ i linearno nezavisne funkcionale c^* i $b^* \in V^*$, definišemo preslikavanje za $x \in V : A(x) = 3\,x - c^*(x)\,a + b^*(x)\,a\,.$

(i1) Pokažite da je A linearni operator.

(i2) Izračunajte $\mathsf{det}\,A$, $k_A(\lambda)$, $\mu_A(\lambda)$ i $\mathsf{rang}(A)$.

(i3) Odredite sve invarijantne potprostore operatora A.

6.39. Neka je dat neki vektor $w \in V$, $w \neq 0$, $(\mathsf{dim}\,V = n < \infty)$. Posmatrajmo linearni operator $A_w \in \mathsf{Hom}\,V$ definisan formulom: $A_w = I_n - 2\,w \cdot w^\tau$, pri čemu vektor w smatramo kolonom, a $^\tau$ predstavlja operator transponovanja. Odredite

(i1) rang operatora A_w.

(i2) minimalni i karakteristični polinom operatora A_w.

(i3) $\mathsf{det}\,A_w$ i $\mathsf{Tr}\,A_w$.

(i4) sve invarijantne potprostore operatora A_w.

6.40. Neka je $L \in \mathsf{Hom}\,V$, $\mathsf{dim}\,V = n \in \mathbb{N}$, takav da je $\mathsf{rang}(L - I) = 1$ i $L^2 = I$.

(i1) Dokažite da je $\mathsf{Ker}(L + I) \oplus \mathsf{Ker}(L - I) = V$.

(i2) Izračunajte $\mathsf{det}L$ i $\mathsf{det}(L + I)$.

(i3) Odredite $\mathsf{rang}(L + I)$.

6.41. Odredite, ako postoji, dijagonalnu matricu sličnu matrici

$$\mathcal{A}_{2n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 2\,n+1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots\dots & 2\,n & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots\dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n+1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & \dots\dots & 2\,n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 2\,n+1 \end{bmatrix}.$$

6.42. Data je dijagonalna matrica $\mathcal{D} = (d_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})\,(n \in \mathbb{N})$, takva da je $d_{ii} = 2^i$, $i = 1, \dots, n$. Dokažite da ne postoje matrice $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ takve da su matrice $\mathcal{D}$ i $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ slične.

6.43. Na skupu $\mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ definišemo komutator formulom, $[x,y] = x\,y - y\,x$. Neka je $\mathsf{sl}_2(\mathbb{C}) = \{x \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \mid \mathsf{Tr}(x) = 0\}$.

(i1) Dokažite da je $\mathsf{sl}_2(\mathbb{C})$ potprostor od $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, nađite mu najjednostavniju bazu e i dimenziju.

(i2) Dokažite da $[\,\cdot,\cdot\,]$ preslikava $\mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ u $\mathsf{sl}_2(\mathbb{C})$.

(i3) $\forall\, x \in \mathsf{sl}_2(\mathbb{C})$ definišemo preslikavanje $\mathsf{ad}_x : \mathsf{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathsf{sl}_2(\mathbb{C})$, formulom $\mathsf{ad}_x(y) = [x,y]$. Dokažite da je ad_x linearni operator i odredite matrice operatora $\mathsf{ad}_{e_i}, \forall\, e_i \in e$ u bazi e.

(i4) Odredite one $e_i \in e$ za koje je ad_{e_i} nilpotentan operator.

6.44. Neka su v_1 i v_2 sopstveni vektori koji redom odgovaraju sopstvenim vrednostima $\lambda_1 \neq \lambda_2$ operatora $A \in \mathsf{Hom}\,V$. Pokažite da vektor $v = v_1 + v_2$ ne može biti sopstveni vektor.

Rešenje. Pretpostavimo da je vektor v sopstveni vektor, tj. $A(v) = \lambda\,v$, za neko $\lambda \in \mathbb{F}$. Tada redom imamo:

$$\lambda\,v_1 + \lambda\,v_2 = \lambda\,v = A(v) = A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \lambda_1\,v_1 + \lambda_2\,v_2.$$

Iz prvog i zadnjeg izraza dobijamo (nakon prebacivanja svih članova na istu stranu,

$$(\lambda - \lambda_1)\,v_1 + (\lambda - \lambda_2)\,v_2 = 0,$$

odakle zbog linearne nezavisnosti vektora v_1 i v_2 sledi $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, što je nemoguće jer je $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

6.45. Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ kvadratna matrica i neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(n \geq k \geq 2)$ međusobno različite $(\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j)$ sopstvene vrednosti matrice $\mathcal{A}$ i neka su $v_1, \ldots, v_k$ odgovarajući sopstveni vektori $(\mathcal{A}\,v_i = \lambda_i\,v_i,\ i = 1,\ldots,k)$. Dokažite da vektor $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ nije sopstveni vektor matrice $\mathcal{A}$.

6.46. Ako su $A_1, A_2 \in \mathsf{Hom}\,V$ i ako je $\lambda_i \in \mathsf{Sp}\,(A_i)$, $i = 1,2$. Da li mora da važi $\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathsf{Sp}\,(A_1 + A_2)$?

Rešenje. Samo ako je $\mathsf{dim}V = n = 1$, jer se tada operatori svode na skalare. Ako je npr. $n = 2$ izaberimo operatore A_1 i A_2 koji u bazi e imaju matrice $A_1(e) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \nu_1 \end{bmatrix}$ i $A_2(e) = \begin{bmatrix} \nu_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, uz uslov $\nu_i \neq \lambda_i$, $i = 1,2$, onda uslov iz zadatka nije ispunjen jer $\lambda_1 + \lambda_2 \notin \mathsf{Sp}\,(A_1 + A_2)$.

6.47. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ linearni operator i neka je $\mathsf{Sp}\,(A)$ spektar operatora A. Pokažite da:

(i1) $\lambda \in \mathsf{Sp}\,(A)$ tada je $\lambda^k \in \mathsf{Sp}\,(A^k)$, $k \in \mathbb{N}$.

(i2) ako je A regularan: $\lambda \in \mathsf{Sp}\,(A)$ tada je $\lambda^{-k} \in \mathsf{Sp}\,((A^{-1})^k)$, $k \in \mathbb{N}$.

(i3) $\lambda \in \mathsf{Sp}\,(A)$ tada je $\lambda - \lambda_0 \in \mathsf{Sp}\,(A - \lambda_0 I_n)$, $\lambda_0 \in \mathbb{F}$.

.

6.48. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathbb{C}^n$ neki linearni operator. Dokažite formulu,

$$\begin{vmatrix} n & \mathsf{Tr}A & \mathsf{Tr}A^2 & \ldots & \mathsf{Tr}A^{n-2} & \mathsf{Tr}A^{n-1} \\ \mathsf{Tr}A & \mathsf{Tr}A^2 & \mathsf{Tr}A^3 & \ldots & \mathsf{Tr}A^{n-1} & \mathsf{Tr}A^{n} \\ \mathsf{Tr}A^2 & \mathsf{Tr}A^3 & \mathsf{Tr}A^4 & \ldots & \mathsf{Tr}A^{n} & \mathsf{Tr}A^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \mathsf{Tr}A^{n-1} & \mathsf{Tr}A^{n} & \mathsf{Tr}A^{n+1} & \ldots & \mathsf{Tr}A^{2n-3} & \mathsf{Tr}A^{2n-2} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)^2,$$

pri čemu su λ_i, $(i = 1,\ldots,n)$ sopstvene vrednosti operatora A.

6.49. Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ kvadratna matrica reda n, i neka je $q \in \mathbb{C}[x]$ polinom takav da je $q(\mathcal{A}) = 0$. Pokažite da su sve sopstvene vrednosti matrice $\mathcal{A}$ nule polinoma q. Što možete reći o stepenu polinoma q?

6.50. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ linearni operator $(\mathsf{dim}V < \infty)$ i neka je $p \in \mathbb{C}[x]$ polinom takav da je $p(A) = 0$. Ako je λ sopstvena vrednost operatora A pokažite da $x - \lambda \mid p(x)$.

6.51. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,(\mathbb{F}^n)$ linearni operator i neka je $\mathsf{char}(\mathbb{F}) = 0$. Dokažite da ako operator $A^2 - 2\,A$ ima sopstvenu vrednost -2 da onda operator A^4 ima sopstvenu vrednost -4. Kontraprimerom pokažite da obrat ne važi.

6.52. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ linearni operator, pri čemu je V realni vektorski prostor neparne dimenzije. Pokažite da A ima sopstvenu vrednost.

Rešenje. Kako su sopstvene vrednosti koreni karakterističnog polinoma, $\kappa_A(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$, koji ima realne koeficijente i neparan stepen zaključujemo da $\kappa_A(\lambda)$ ima barem jednu realnu nulu (jer kompleksne dolaze u međusobno konjugovanim parovima) λ_0 i upravo ona je tražena sopstvena vrednost.

6.53. Neka $A \in \mathsf{Hom}\, V\, (\mathsf{dim}\, V \geq 2)$, linearni operator ranga 1. Pokažite da je minimalni polinom operatora A stepena 2.

Rešenje. Kako je $\mathsf{rang}\, A = 1$, postoji vektor $e \neq 0$ takav da je $\mathsf{Im}\, A = \mathcal{L}(\{e\})$. Primetimo da važi formula

$$A\,x = \lambda(x)\,e, \quad \lambda(x) \in \mathbb{F} \quad \text{jer je } \mathsf{rang}\, A = 1.$$

Sada imamo:

$$A^2 x = A(Ax) = A(\lambda(x)\,e) = \lambda(x)\,Ae = \lambda(x)\,\lambda(e)\,x = \lambda(e)\,Ax$$

odakle sledi

$$A^2 x - \lambda(e)\,Ax = 0 \quad \text{odakle je} \quad (A^2 - \lambda(e)\,A)\,x = 0, \ \forall\, x \in V.$$

Odavde je $\mu_A(\lambda) = \lambda\,(\lambda - \lambda(e))$, jer ako bi $\partial\,\mu_A = 1$, onda bi A morao biti proporcionalan sa I_n, a rang takvog operatora je ili 0 ili n.

6.54. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ linearni operator na kompleksnom vektorskom prostoru V. Definišimo operatore L_A, D_A, $C : \mathsf{Hom}\, V \longrightarrow \mathsf{Hom}\, V$ formulama: $L_A(B) = A\,B$, $D_A(B) = B\,A$ i $C = L_A - D_B$. Dokažite da je

(i1) $\mathsf{Sp}\,(L_A) = \mathsf{Sp}\,(D_A) = \mathsf{Sp}\,(A)$.

(i2) $\mathsf{Sp}\,(C) = \mathsf{Sp}\,(A) - \mathsf{Sp}\,(B) = \{\alpha - \beta \mid \alpha \in \mathsf{Sp}\,(A), \beta \in \mathsf{Sp}\,(B)\}$.

6.55. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,(\mathbb{R}^n)$ dijagonalizabilan linearni operator. Koliko A ima invarijantnih potprostora?

6.56. Neka je $\mathcal{N} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ takva da je $\mathcal{N}^2 = \mathbb{O}_2$. Dokažite da je $\mathcal{N} = 0$ ili je $\mathcal{N}$ slična matrici $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6.57. Neka je A linearni operator koji u standardnoj bazi ima matricu,

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pod kojim uslovima na brojeve x i y A je dijagonalizabilan ?

6.58. Ako su A i B nilpotentni operatori koji komutiraju, $A\,B = B\,A$ dokažite da su i operatori $A\,B$ i $A+B$ nilpotentni.

Rešenje. Neka su k i l redom indeksi nilpotentnosti operatora A i B, i neka je $m = \mathsf{min}\{k, l\}$. Budući da operatori A i B komutiraju imamo redom

$$(A\,B)^m = A^m\,B^m = 0, \qquad \text{odakle sledi da je operator } A\,B \text{ je nilpotentan.}$$

Da bismo pokazali da je operator $A + B$ nilpotentan prvo nalazimo primenom binomne formule (jer operatori A i B komutiraju, pa možemo primeniti binomnu formulu)

$$(A + B)^{k+l-1} = \sum_{i=0}^{k+l-1} \binom{k+l-1}{i} A^i\; B^{k+l-1-i},$$

a zatim primetimo da je opšti član $A^i\,B^{k+l-1-i}$ uvek jednak 0 jer je ili $i \geq k$ (tj. $A^i = 0$) ili je $k+l-1-i \geq l$ (tj. $B^{k+l-1-i} = 0$) za svako $i = 0, 1 \ldots, k + l - 1$.

6.59. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ linearni operator i neka je $V_{(\lambda)}$ njegov korenski potprostor za sopstvenu vrednost λ. Pokažite da je $V_{(\lambda)}$ invarijantan potprostor operatora A.

Rešenje. Prvo pokažimo da je $V_{(\lambda)}$ potprostor od V. Neka su $v_1, v_2 \in V_{(\lambda)}$ onda postoje prirodni brojevi k_1 i k_2 takvi da je $(A - \lambda\,\mathsf{id}_n)^{k_i} v_i = 0$, $i = 1, 2$; i neka je $k = \mathsf{max}\{k_1, k_2\}$. Sada imamo

$$(A - \lambda\mathsf{id}_n)^k (v_1 + v_2) = (A - \lambda\,\mathsf{id}_n)^k v_1 + (A - \lambda\,\mathsf{id}_n)^k v_2 = 0.$$

Slično za $v \in V_{(\lambda)}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(A - \lambda\,\mathsf{id}_n)^k v = 0$ i $\alpha \in \mathbb{F}$ imamo

$$(A - \lambda\,\mathsf{id}_n)^k(\alpha\, v) = \alpha\,(A - \lambda\,\mathsf{id}_n)^k v = 0,$$

što dokazuje da je $V_{(\lambda)}$ potprostor od V.

Dokažimo još da je $V_{(\lambda)}$ invarijantan potprostor. Za $v \in V_{(\lambda)}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(A - \lambda\mathsf{id}_n)^k v = 0$, tako da je

$$(A - \lambda\,\mathsf{id}_n)^k(Av) \;=\; ((A - \lambda\,\mathsf{id}_n)^k A)\,v = A((A - \lambda I_n)^k v) = A(0) = 0, \quad \text{odakle je} \quad (A - \lambda \in_n)^k(Av) = 0, \quad \text{tj.} \quad Av \in V_{(\lambda)}.$$

6.59. Objasnite razliku, na nivou matričnih elemenata, između osnovnog Žordanovog bloka i Žordanovog bloka iste sopstvene vrednosti i iste dimenzije.

Rešenje. Matrični elementi osnovnog Žordanovog bloka ($\mathcal{B}_\lambda^k$) i Žordanovog bloka ($\mathcal{C}_\lambda^k$) koji odgovaraju istoj sopstvenoj vrednosti λ razlikuju se (ako je Žordanov blok sastavljen barem od dva osnovna Žordanova bloka) samo u sporednoj gornjoj dijagonali (mesta u matrici $(1,2),\ldots,(k-1,k)$). U $\mathcal{B}_\lambda^k$ ta dijagonala se sastoji od niza 1, dok u $\mathcal{C}_\lambda^k$ ta dijagonala sastoji se od niza 1 i 0. Broj 0 u tom nizu za jedan je manji od broja OJB od kojih se sastoji $\mathcal{C}_\lambda^k$.)

6.60. Nađite Žordanovu formu i neku Žordanovu bazu za matrice iz **6.31**.

6.61. Neka su $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{R}^4$, pri čemu je

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(i1) Odredite karakteristične i minimalne polinome matrica $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

(i2) Odredite Žordanove forme matrica $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

(i3) Da li su matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ slične?

6.62. Nađite Žordanovu formu i neku Žordanovu bazu sledećih matrica:

$$\text{(i1)} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 6 & 4 & 3 \\ -14 & 0 & -14 & -8 & -7 \\ 4 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ -12 & 1 & -12 & -8 & -6 \\ -8 & 1 & -8 & -5 & -5 \end{bmatrix} \qquad \text{(i2)} \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -19 & -8 & -3 & 3 & -1 \\ -10 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -22 & -10 & -3 & 4 & -1 \\ 14 & 6 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(i3)} \begin{bmatrix} 8 & 6 & -4 & 4 & 3 \\ -20 & -20 & 15 & -19 & -10 \\ -13 & -15 & 13 & -13 & -6 \\ 4 & 4 & -2 & 7 & 2 \\ 10 & 11 & -7 & 11 & 7 \end{bmatrix}.$$

6.63. Neka je A linearni operator dat svojom matricom u bazi e

$$A(e) = \begin{bmatrix} 3 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -14 & -1 \end{bmatrix}.$$

(i1) Nađite Žordanovu formu i bazu operatora A.

(i2) Proverite da li važi formula: $\mathsf{det}(e^A) = e^{\mathsf{Tr}A}$, gde je
$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n. \qquad (*)$$

(i3) Ispitajte da li $(*)$ važi za svaki operator A, ako je: (a) $A \in \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}} V$, (b) $A \in \mathsf{Hom}_{\mathbb{R}} V$.

6.64. Neka je A linearni operator dat svojom matricom u bazi (e),

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(i1) Nađite Žordanovu formu i bazu operatora A.

(i2) Izračunajte $\mathsf{tr}A^n$ i $\mathsf{det}A^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i3) Ako postoji, nađite A^{-1}.

6.65. Dat je linearni operator $A : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ svojom matricom u standardnoj bazi e:

$$A(e) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 22 & 9 & -30 & 0 & 0 & 0 \\ -22 & -21 & -7 & 33 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

(i1) Odredi Žordanovu formu i neku Žordanovu bazu f operatora A.

(i2) Ako je A regularan izračunajte $A^{-1}(e)$.

(i3) Izračunajte $A^n(e)$, koristeći $A(e) = T^{-1}A(f)\,T$.

6.66. Neka je $\mathcal{B}_\nu^k$ osnovni Žordanov blok. Pokažite da je matrica $\mathcal{N}_k = \mathcal{B}_\nu^k - \nu\,\mathbb{I}_k$ nilpotentna, a zatim nađite polinome $p(\lambda)$ i $q(\lambda)$, takve da je $\nu\,\mathbb{I}_k = p(\mathbf{b}_\nu^k)$ i $\mathcal{N}_k = q(\mathcal{B}_\nu^k)$. Da li matrice $\mathcal{B}_\nu^k$ i $\mathcal{N}_k$ komutiraju ?

6.67. Neka je V **realni** vektorski prostor neparne dimenzije veće od 3 i neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ linearni operator. Dokažite da A ima trodimenzionalni invarijantni potprostor.

6.68. Žordanova dekompozicija operatora. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ linearni operator na konačnodimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru V. Pokažite, koristeći Žordanovu teoremu (tj. Žordanovu formu operatora A), da operator A možemo na jedinstven način predstaviti u obliku: $A = A_d + A_n$, pri čemu su operatori A_d i A_n takvi da je:

(i1) A_d je dijagonalizabilan,

(i2) A_n je nilpotentan,

(i3) operatori A_d, A_n i A svi međusobno komutiraju,

(i4) postoje polinomi $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ takvi da je $A_d = p(A)$ i $A_n = q(A)$.

6.69. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ linearni operator i neka je L potprostor od V.

(i1) Ako je L invarijantan za A i ako je $\dim L = 1$, dokažite da je L sopstveni potprostor.

(i2) Neka je B operator koji komutira sa A i ako je L sopstveni potprostor od A pokažite da je L invarijantan za B.

Rešenje. (i1) Kako je $L = \mathcal{L}(\{v\})$, $v \neq 0$, i L invarijantan za A imamo,

$$Av \in L \text{ dakle postoji } \lambda_0 \in \mathbb{F} \text{ takav da je } Av = \lambda_0 v,$$

i λ_0 je sopstvena vrednost čiji je sopstveni vektor v, pa je L sopstveni potprostor za A.

(i2) Kako je L sopstveni potprostor za sopstvenu vrednost λ_0, onda za svaki $v \in L$ i $v \neq 0$, $Av = \lambda_0 v$, i imamo,

$$A(\underline{Bv}) = B(Av) = B(\lambda_0 v) = \lambda_0(\underline{Bv}) \text{ tj. } Bv \in L\,,$$

tj. L je invarijantan potprostor operatora B.

6.70. Neka su A i $B \in \mathsf{Hom}\,(\mathbb{R}^n)$ linearni operatori koji komutiraju, $A\,B = B\,A$, i neka su A i B dijagonalizabilan operatori. Dokažite da postoji baza u kojoj su matrice operatora A i B dijagonalne.

6.71. Neka je $\mathcal{F}$ familija operatora na kompleksnom vektorskom prostoru V, ($\dim V = n$) takva da svaka dva operatora iz $\mathcal{F}$ komutiraju[18] i da su svi operatori familije $\mathcal{F}$ dijagonalizabilni. Pokažite da

(i1) postoji vektor $v \neq 0$ takav da je za sve $A \in \mathcal{F}$, $A\,v = \lambda(A)\,v$.

(i2) je preslikavanje $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{C}$, definisano u (i1) linearno.

(i3) postoji niz potprostora: $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \cdots \subseteq V_n = V$ takvih da je $\mathsf{dim} V_i = i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ i da su V_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ invarijantni potprostori za svaki $A \in \mathcal{F}$. Ovakav niz potprostora zove se fleg.

(i4) postoji regularna matrica $\mathcal{T}$ takva da je matrica $\mathcal{T}^{-1}A(e)\,\mathcal{T}$ gornje trougaona matrica za sve $A \in \mathcal{F}$, pri čemu je e neka baza od V u kojoj operator A ima matricu $A(e)$.

6.72. Šurova lema[19] lema. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ i V vektorski prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i neka A komutira sa svakim $B \in \mathsf{Hom}\,V$, tj. $A\,B = B\,A$, za sve $B \in \mathsf{Hom}\,V$, onda je operator A proporcionalan jediničnom operatoru. Dokažite !!

---

[18] Takva familiju ponekad nazivamo i Abelova familija.

[19] Issai Schur, 1875 – 1941 nemački matematičar.

Rešenje. Prvo pokažimo da $\mathsf{Sp}\,(A) \neq \emptyset$, tj. A ima barem jednu sopstvenu vrednost. Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ onda A ima barem jednu sopstvenu vrednost (jer je $\mathbb{C}$ algebarski zatvoreno polje, pa karakteristični polinom ima nulu u $\mathbb{C}$), a ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ onda posmatrajmo operator B koji ima jednodimenzioni sopstveni potprostor L. Takav je npr. operator B koji je definisan na sledeći način:

$$Be_1 = e_1, \quad Be_j = 0, \quad j = 2, \ldots, n = \mathsf{dim}\, V,$$

pri čemu je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ neka baza od V. Sada zbog tvrdnje (i2) prethodnog zadatka zaključujemo da je L invarijantan potprostor za operator A, a onda tvrdnja (i1) istog zadatka, implicira da je L sopstveni potprostor od A, tj. $\mathsf{Sp}\,(A) \neq \emptyset$.

Kako je $\mathsf{Sp}\,(A) \neq \emptyset$ postoji $\lambda \in \mathsf{Sp}\,(A)$ i neka je V_λ sopstveni potprostor operatora A koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Da bismo završili dokaz primetimo da je dovoljno pokazati da je $V_\lambda = V$. Kada bi $V_\lambda \neq V$ onda bi postojao vektor $w \in V \setminus V_\lambda$ i neka je B operator za kojeg potprostor V_λ nije invarijantan, takav je npr. operator B koji je definisan na sledeći način:

$$Bv = w, \quad Be_j = 0, \quad j = 2, \ldots, n,$$

pri čemu je $v \in V_\lambda$ i $e = (v, e_2, \ldots, e_n)$ neka baza od V, onda tvrdnja (i2) prethodnog zadatka implicira da je potprostor V_λ invarijantan za B što je nemoguće. Prema tome naša pretpostavka da $V_\lambda \neq V$ dovela nas je do kontradikcije odakle sledi da je $V_\lambda = V$, tj. $A = \lambda\, \mathsf{id}_V$.

6.73. Dokažite Šurovu lemu, 'pešačkom metodom', tj. pažljivim izborima matrica $\mathcal{B}$ sa kojima polazna matrica $\mathcal{A}$ komutira.

GLAVA 7

UNITARNI PROSTORI

7.1. Definicija. Neka je V kompleksni vektorski prostor, kažemo da je V **unitaran** vektorski prostor ako je definisana funkcija $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$ za koju važe sledeće aksiome $(\forall\, v_1, v_2, w\in V,\ \forall\,\alpha\in\mathbb{C})$:

(a1) aditivnost u prvom argumentu: $\langle v_1+v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$,

(a2) homogenost u prvom argumentu: $\langle \alpha v, w\rangle = \alpha\,\langle v, w\rangle$,

(a3) hermitska simetričnost: $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$,

(a4) pozitivna definitnost: $\langle v, v\rangle \geq 0$,

(a5) nedegenerisanost: $\langle v, v\rangle = 0$ akko $v=0$.

Funkcija koja zadovoljava aksiome (a1)–(a3) zove se hermitski bilinearni funkcional (forma), ako zadovoljava aksiomu nedegerisanosti[1] kažemo da je nedegenerisana hermitska bilinearna forma, a ako još zadovoljava i pozitivnu definitnost onda takvu funkciju zovemo **skalarni proizvod** na V.

Unitarni prostori su prirodna generalizacija **euklidskih prostora** – **realnih** vektorskih prostora na kojima je definisan skalarni proizvod. Primetimo da se aksioma (a3) na realnim vektorskim prostorima svodi na običnu simetriju, jer je $\overline{\alpha}=\alpha$, za svaki $\alpha\in\mathbb{R}$. Zbog toga analogni rezultati koji važe za unitarne prostore važe i za euklidske, a neke od posebnog interesa ćemo i posebno tretirati.
Lako se vidi da (a1), (a2) i (a3) impliciraju $(\forall\, v, w_1, w_2\in V,\ \alpha\in\mathbb{C})$:

(a1') aditivnost u drugom argumentu: $\langle v, w_1+w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$.

(a2') hermitska homogenost u drugom argumentu: $\langle v, \alpha\, w\rangle = \overline{\alpha}\,\langle v, w\rangle$.

U ovoj glavi, osim ako ne bude drugačije rečeno, sa V označavamo unitarni konačnodimenzioni prostor dimenzije n, a sa $\langle\cdot,\cdot\rangle$ njegov skalarni proizvod. Pod unitarnim prostorom podrazumevamo i realni unitarni (tj. euklidski) prostor. Dakle, u ovoj glavi polje $\mathbb{F}$ je ili $\mathbb{C}$ (uglavnom) ili $\mathbb{R}$ (ponekad).

7.2. Važni primeri unitarnih prostora.

(i1) $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$ pri čemu je skalarni proizvod definisan formulom,

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i\,\overline{w_i}, \qquad \text{za } v=(v_1,\dots,v_n) \text{ i } w=(w_1,\dots,w_n).$$

Ovaj skalarni proizvod zove se standardni skalarni proizvod.

(i2) Neka je $\mathcal{C}[a,b]$ vektorski prostor svih kompleksnih (realnih) neprekidnih funkcija na intervalu $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, i neka je $\omega : [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^+$, neprekidna pozitivna realna funkcija onda definišemo skalarni proizvod formulom:

$$\langle f, g\rangle_\omega = \int_a^b \omega(t)\, f(t)\,\overline{g(t)}\,dt\,.$$

Funkcija ω naziva se težina. Ako je $\omega=1$ na $[a,b]$, tada dobijamo neprekidnu verziju standardnog skalarnog proizvoda na skupu $\mathcal{C}[a,b]$.

(i3) Neka je $V=\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ vektorski prostor kvadratnih kompleksnih matrica reda n. V je unitaran prostor uz skalarni proizvod dat formulom, $\langle\mathcal{A},\mathcal{B}\rangle = \mathsf{Tr}(\mathcal{B}^*\mathcal{A})$, gde je $\mathcal{A}^* = (\overline{\alpha_{ji}})$ matrica koja se dobije iz matrice $\mathcal{A}=(\alpha_{ij})$ konjugovanjem i transponovanjem.

[1] koja se formuliše kao: ako je $B(x,y)=0$, za sve $y\in V$ tada je $x=0$.

(i4) Neka je $V = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall\, i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty\}$ skup svih kvadratno sumabilnih redova u $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. V je vektorski prostor u kojem za dva niza $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in V$ važi da je $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\, \beta_i < \infty$, pa možemo uvesti skalarni proizvod formulom:

$$\langle (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\, \beta_i.$$

7.3. Ortogonalnost. Neka je V unitaran prostor, za vektore v i w kažemo da su ortogonalni (normalni) i pišemo $v \perp w$ ako je $\langle v, w\rangle = 0$. Po definiciji, nula vektor je normalan na sve ostale vektore iz V, a zbog aksiome (a5) to je jedini vektor koji je normalan na sve vektore iz V. Pojam ortogonalnosti na prirodan način proširujemo i na bilo koja dva podskupa (potprostora) $W_1, W_2 \subseteq V$ sledećom definicijom: kažemo da je W_1 ortogonalan (normalan) na W_2 ako i samo ako je

$$\langle W_1, W_2\rangle = 0 \ \text{ tj. akko } \ \langle w_1, w_2\rangle = 0,\ \forall\, w_1 \in W_1,\ \forall\, w_2 \in W_2 \ \text{ i pišemo } \ W_1 \perp W_2.$$

Skup $W = \{v_1, \ldots, v_k\}$ je ortogonalan ako važi:

$$v_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, k \quad \text{i} \quad \langle v_i\,,\, v_j\rangle = 0, \ \ i \neq j.$$

Ortogonalni skup vektora često se naziva i ortogonalnim sistemom vektora. Ovaj pojam može se proširiti i na skupove koji nisu konačni tako što u tom slučaju kažemo da je skup W ortogonalan ako i samo ako je svaki njegov konačni podskup ortogonalan.

7.4. Ortogonalnost i linearna nezavisnost. Na osnovu našeg 3−dimenzionog iskustva očekujemo da su ortogonalni skupovi linearno nezavisni. Da je to tako pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija. *Neka je $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$ ortogonalan skup unitarnog prostora V, tada je on linearno nezavisan.*

Dokaz. Kako je $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ ortogonalan skup, posmatrajmo jednakost:

$$\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0,$$

i ako ovu relaciju skalarno množimo redom vektorima v_i $(i = 1, \ldots, k)$, i dobijamo,

$$0 = \langle 0, v_i\rangle = \langle \alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 + \cdots + \alpha_k\, v_k\,,\, v_i\rangle = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, \langle v_j\,,\, v_i\rangle = \alpha_i\, \langle v_i\,,\, v_i\rangle$$

odakle je $\alpha_i = 0$, jer je $v_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$. □

7.5. Norma. Ugao. Bunjakovski[2]–Koši[3] –Švarcova[4] nejednakost. U svakom unitarnom prostoru veoma važnu ulogu ima funkcija, $\|\ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, definisana formulom: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Ova funkcija naziva se **norma** i dobro je definisana zbog aksiome (a4).

Teorema. *Neka su v, w bilo koja dva vektora unitarnog prostora V. Tada važi nejednakost,*

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|, \tag{7.1}$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako su vektori v i w linearno zavisni.

Digresija. Nejednakost (7.1) poznata je kao Bunjakovski – Koši – Švarcova nejednakost.

Dokaz. Jasno, nejednakost važi ako je neki od vektora v ili w nula vektor. Zato pretpostavimo da je npr. $w \neq 0$, i za proizvoljno λ posmatrajmo vektor $u = v + \lambda\, w$. Tada redom imamo:

$$0 \leq \|u\|^2 = \|v + \lambda\, w\|^2 = \|v\|^2 + 2\lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\|w\|^2. \tag{7.2}$$

Prethodna nejednakost važi i za $\lambda = -\dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}$, što nakon zamene u (7.2) daje,

$$0 \leq \|u\|^2 = \|v + \lambda\, w\|^2 = \|v\|^2 - 2\frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\langle v, w\rangle + \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^4}\|w\|^2 = \|v\|^2 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2} \tag{7.3}$$

---

[2] Bunjakovski, Viktor Jakovljevič, 1804 –1889, ruski matematičar.

[3] Augustin-Louis, Cauchy, 1789 – 1857, francuski matematičar, jedan od osnivača moderne matematičke analize.

[4] Scwartz, Karl Hermann Amandus, 1843 – 1921, nemački matematičar.

odakle, nakon množenja (7.3) sa $\|w\|^2$, i uzimanja drugog korena, dobijamo traženu nejednakost (7.1). Očigledno, u (7.2) jednakost važi akko $v = \lambda\, w$, $\lambda \in \mathbb{F}$, tj. kada su v i w linearno zavisni. $\square$

Zbog, prethodne nejednakosti u unitarnom prostoru dobro je definisan i pojam **ugla** za bilo koja dva ne-nula vektora v, w, formulom:

$$\cos \sphericalangle(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\,.$$

7.6. Ortonormirana baza. Gram[5] – Šmitov[6] postupak ortogonalizacije.

Neka je V unitaran prostor dimenzije n, za bazu $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ kažemo da je **ortonormirana** ako važi:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad \forall\, i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Iz same definicije nije jasno da li takva baza postoji u svakom konačnodimenzionom unitarnom prostoru. Pozitivan odgovor na problem egzistencije ortonormirane baze u unitarnim prostorima daje Gram – Šmitov postupak ortogonalizacije. Radi se o algoritmu kojime se neka proizvoljna baza f vektorskog prostora V zamenjuje ortonormiranom bazom e i to tako da se u $i-$tom koraku podudaraju lineali $\mathcal{L}(\{f_1,\ldots,f_i\}) = \mathcal{L}(\{e_1,\ldots,e_i\})$, za sve $i = 1,2,\ldots,\dim V$. Preciznije, imamo

(i1) 1. korak: uzmemo 1. vektor stare baze $f_1 \in f$ i definišemo 1. vektor nove baze formulom:

$$e_1 = \varepsilon_1 \frac{f_1}{\|f_1\|}\,, \quad \text{gde je } \varepsilon_1 \in \{-1, 1\} \tag{$*1$}$$

(i2) 2. korak: uzmemo 2. vektor stare baze $f_2 \in f$ i definišemo prvo vektor

$$v_2 = f_2 - \langle f_2, e_1\rangle\, e_1\,, \tag{$*2$}$$

a zatim vektor v_2 normiramo i dolazimo do 2. vektora nove baze:

$$e_2 = \varepsilon_2 \frac{v_2}{\|v_2\|}\,, \quad \text{gde je } \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$$

(i3) 3. korak: uzmemo 3. vektor baze $f_3 \in f$ i definišemo vektor

$$v_3 = f_3 - \langle f_3, e_1\rangle\, e_1 - \langle f_3, e_2\rangle\, e_2\,, \tag{$*3$}$$

a zatim vektor v_3 normiramo i dolazimo do 3. vektora nove baze:

$$e_3 = \varepsilon_3 \frac{v_3}{\|v_3\|}\,, \quad \text{gde je } \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Pretpostavimo da smo u $(k-1)$. koraku definisali ortonormirani skup $\{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}$.

(k) k.-ti korak: uzmemo k.-ti vektor stare baze $f_k \in f$ i definišemo prvo vektor

$$v_k = f_k - \sum_{i=1}^{k} \langle f_k, e_i\rangle\, e_i\,, \tag{$*$k}$$

a zatim vektor v_k normiramo i dolazimo do k.-tog vektora nove baze:

$$e_k = \varepsilon_k \frac{v_k}{\|v_k\|}\,, \quad \text{gde je } \varepsilon_k \in \{-1, 1\}$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Primetimo da su svi vektori e_i različiti od nula vektora, jer kada bi neki od vektora v_i bili jednaki nula vektoru, postojao bi najmanji indeks takav da je $v_k = 0$. Iz formula $(*1) - (*(\mathrm{k}-1))$ vidimo da su vektori e_j, ili ekvivalentno, vektori v_j $(j = 1,\ldots,i-1)$ linearne kombinacije vektora f_j $(j = 1,\ldots,k-1)$, a kako je $v_k = 0$ iz $(*\mathrm{k})$, nakon zamene vektore e_j linearnim kombinacijom vektora f_j,) dobili bismo da je skup $\{f_1,\ldots,f_k\}$ linearno zavisan, a to je nemoguće jer je skup f baza vektorskog prostora.

Takođe je jasno da vektori e_i imaju normu jednaku 1, pa nam preostaje da pokažemo da je vektor v_k (e_k) normalan na sve vektore e_j $(j = 1,\ldots,k-1)$. Ovo tvrđenje dokazujemo indukcijom. Za $i = 1$, važi, zato

[5] Jorgen Pedersen, Gram, 1850 – 1916, danski matematičar i aktuar.

[6] Schmidt, Erhard, 1876 – 1959, nemački matematičar.

pretpostavimo da je $e_{k-1} \perp e_1, \ldots, e_{k-2}$; onda za $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ imamo:

$$\langle v_k, e_j \rangle = \langle f_k, e_j \rangle - \Big\langle \sum_{l=1}^{i} \langle f_k, e_l \rangle \, e_l, e_j \Big\rangle = \langle f_k, e_j \rangle - \sum_{l=1}^{i} \langle f_k, e_l \rangle \underbrace{\langle e_l, e_j \rangle}_{=\delta_{lk} \ po \ P.I} = 0.$$

Time je dokazano da je skup $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ ortonormiran tj. važi formula $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, za sve i, j. Time smo dokazali sledeću teoremu.

Teorema(Gram – Šmitova ortoganalizacija) *Neka je $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ baza unitarnog vektorskog prostora V. Tada postoji pozitivno orijentisana ortonormirana baza $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ takva da je*

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_{11} \, e_1, \\ f_2 &= \alpha_{21} \, e_1 + \alpha_{22} \, e_2, \\ &\vdots \\ f_n &= \alpha_{1n} \, e_1 + \alpha_{2n} \, e_2 + \cdots + \alpha_{nn} \, e_n \, . \end{aligned} \tag{7.4}$$

Skalari $\alpha_{11}, \alpha_{22} \ldots, \alpha_n$ možemo izabrati tako da baza e bude pozitivno orijentisana.

Primedba 1. Primetimo da ovaj dokaz važi i u slučaju kada vektorski prostor ima prebrojivu bazu.

Primedba 2. Iz formula (7.4) sledi da je Gram – Šmitov postupak linearan i da je trougaoni, tj. vektor ortonormirane baze e_i je linearna kombinacija prvih i vektora polazne baze.

Primedba 3: Geometrijska interpretacija GS postupka. Iz $k.-$tog koraka u dokazu Gram – Šmitovog postupka sledi da za vektor f_k polazne baze postoje jedinstveni vektori v_k i p_k takvi da je $f_k = v_k + p_k$ gde je $p_k \in V_{k-1} = \mathcal{L}(f_1, f_2, \ldots, f_{k-1})$ i $v_k \perp V_{k-1}$. Drugim rečima, u $k.-$tom koraku od vektora f_k oduzimamo njegovu ortogonalnu projekciju (p_k) na potprostor V_{k-1}, koja uvek postoji, a zatim dobijeni rezultat (v_k) normiramo.

Primer 1. Ortonormirajte skup vektora, $\{a_1 = (1, 0, 1)^\tau, a_2 = (1, 2, 0)^\tau, a_3 = (0, 2, 3)^\tau\} \subseteq \mathbb{R}^3$, s obzirom na standardni skalarni proizvod.

Koristeći Gram – Šmitov postupak nalazimo redom:

(i1) $e_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1)^\tau$,

(i2) $v_2 = a_2 - \langle a_2, e_1 \rangle \, e_1 = (1, 2, 0)^\tau - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1)^\tau = \dfrac{1}{2} (1, 4, -1)^\tau$

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{18}{4}}} \, \frac{\sqrt{2}}{6} (2, 4, -2)^\tau,$$

(i3) $$\begin{aligned} v_3 &= a_3 - \langle a_3, e_1 \rangle \, e_1 - \langle a_3, e_2 \rangle \, e_2 = (0, 2, 3)^\tau - \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1)^\tau - \frac{5\sqrt{2}}{6} \frac{\sqrt{2}}{6} (2, 4, -2)^\tau \\ &= (0, 2, 3)^\tau - \frac{3}{2} (1, 0, 1)^\tau - \frac{10}{36} (1, 4, -1)^\tau = \frac{8}{9} (-2, 1, 2)^\tau, \\ e_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{3} (-2, 1, 2)^\tau. \end{aligned}$$

Primer 2. Ležandrovi[7] polinomi. Polinomi, P_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, koji se dobijaju Gram – Šmitovim postupkom ortogonalizacije skupa polinoma $\{1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n, \ldots, \}$ s obzirom na skalarni proizvod iz tačke **7.2** (i2) uz težinsku funkciju $\omega = 1$, i koji zadovoljavaju uslov normiranosti

$$\langle P_k, P_k \rangle = \frac{2}{2k + 1}$$

zovu se Ležandrovi polinomi. Ležandrovi polinomi P_k ošu proporcionalni polinomima $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, \}$ koji se dobijaju zadatku **7.76**, tako je npr.

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2} (3 \, t^2 - 1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2} (5 \, t^3 - 3 \, t), \ldots.$$

[7] Legendre, Adrien-Marie, 1752 – 1833, francuski matematičar.

Ležandrovi polinomi su samo jedna od familija ortogonalnih polinoma, druge se dobijaju ortonormiranjem skupa $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n, \dots, \}$, ali s obzirom na skalarne proizvode sa različitim težinskim funkcijama i na drugom intervalu. Takvi su npr.

(H) Ermitovi[8] polinomi: težinska funkcija je e^{-x^2} na $(-\infty, \infty)$

(L) Lagerovi[9] polinomi: težinska funkcija je e^{-x} na $[0, \infty)$

(Č) Cebiševljevi[10] polinomi prve vrste: težinska funkcija je $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na $[-1, 1]$

Postoje i neke druge vrste ortogonalnih polinoma kao što su: Jakobijevi polinomi, Gegenbauerovi i sl.
Ovi polinomi su veoma važni u fizici.

7.8. Furijeovi[11] koeficijenti i njihova svojstva. Neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza unitarnog prostora V i neka je $v \in V$ proizvoljan vektor. Tada znamo da važi $v = \sum_{i=1}^n v_i\, e_i$, i ako ovu jednakost skalarno pomnožimo da vektorom e_j, dobićemo

$$\langle\, v, e_j \,\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^n v_i\, e_i, e_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^n v_i\, \langle\, e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n v_i\, \delta_{ij} = v_j.$$

Tako da koordinate vektora v u proizvoljnoj ortonormiranoj bazi su jednake $v_j = \langle\, v, e_j \,\rangle$ i možemo pisati

$$v = \sum_{i=1}^n \langle\, v, e_j \,\rangle\, e_i. \tag{7.5}$$

Skalari $v_j = \langle\, v, e_j \,\rangle$ zovu se Furijeovi koeficijenti vektora v s obzirom na ortonormiranu bazu e.
U sledećoj teoremi ispitujemo svojstva Furijeovih koeficijenata.

Teorema. *Neka je $\mathcal{B}_k = \{e_1, \dots, e_k\}$ ortonormirani skup unitarnog prostoru V. Tada,*

(B) *za svaki $v \in V$ važi,*

$$\langle v, v\rangle \geq \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_k^2, \qquad \text{gde su} \qquad \alpha_i = \langle v, e_i\rangle, \text{ za } i = 1, \dots, k.$$

U prethodnoj nejednaksti jednakost važi za svaki $v \in V$ akko je $\{e_1, \dots, e_k\}$ baza od V. Prethodna nejednakost naziva se Beselova[12] nejednakost.

(P) *je $\mathcal{B}_k$ baza od V akko za svaka dva vektora $v, w \in V$ važi jednakost*

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v,\, e_i\rangle\langle e_i, w\rangle.$$

Prethodna jednakost zove se Parservalova[13] jedankost.

Dokaz. (B) Ako je $\{e_1, \dots, e_k\}$ ortonormirana baza od V tada je $v = \sum\limits_{i=1}^k v_i\, e_i$, gde su $v_i = \alpha_i$, $(i = 1, \dots, k)$ Furijeovi koeficijenti. Sada računamo,

$$\langle v, v\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i\, e_i, \sum_{j=1}^k \alpha_j\, e_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i\, \overline{\alpha_j} \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i\, \overline{\alpha_j}\, \delta_{ij} = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \overline{\alpha_i} = \sum_{i=1}^k |\, \alpha_i\,|^2,$$

pa vidimo da u Beselovoj nejednakosti važi jednakost ako je polazni ortonormirani skup baza. Ako skup $\{e_1, \dots, e_k\}$ nije ortonormirana baza onda ga nadopunimo vektorima $e_{k+1}, \dots, e_n$ do ortonormirane baze od V, i konačno dobijamo,

$$\langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^n |\, \alpha_i\,|^2 \geq \sum_{i=1}^k |\, \alpha_i\,|^2.$$

---

[8] Hermite, Charles, 1822 – 1901, francuski matematičar.
[9] Laguerre, Edmond Nicolas, 1834 – 1886, francuski matematičar
[10] Chebyshev, Pafnuty Lvovich, 1821 – 1894, ruski matematičar
[11] Fourier, Jean-Baptiste Joseph, 1768 – 1830, francuski matematičar i fizičar.
[12] Bessel, Friedrich Wilhelm, 1784 – 1846, nemački astronom, matematičar i fizičar.
[13] Parserval, Marc-Antoine des Chenes, 1755 – 1836, francuski matematičar.

(P) Nužnost. Kako je skup $\{e_1,\dots,e_k\}$ baza onda je $v=\sum\limits_{i=1}^{k}\langle v,e_i\rangle\, e_i$ i $w=\sum\limits_{j=1}^{k}\langle w,e_j\rangle\, e_j$. Sada redom imamo,

$$\langle v,w\rangle=\Big\langle \sum_{i=1}^{k}\langle v,e_i\rangle\, e_i, \sum_{j=1}^{k}\langle w,e_j\rangle\, e_j\Big\rangle=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\langle v,e_i\rangle\overline{\langle w,e_j\rangle}\,\underbrace{\langle e_i,e_j\rangle}_{\delta_{ij}=0}=\sum_{i=1}^{k}\langle v,e_i\rangle\,\langle e_i,w\rangle.$$

Dovoljnost. Pretpostavimo da za sve $v,w\in V$ važi: $\langle v,w\rangle=\sum_{i=1}^{k}\langle v,e_i\rangle\,\langle e_i,w\rangle$ i pretpostavimo da skup $\{e_1,\dots,e_k\}$ nije ortonormirana baza od V. Nadopunimo ga sada neki vektorima $e_{k+1},\dots,e_n$ do ortonormirane baza od V. Uzmimo neki vektor $e_m\in\{e_{k+1},\dots,e_n\}$ tada je $e_m\perp e_1,\dots,e_k$, i računamo

$$\langle e_m,e_m\rangle=\sum_{i=1}^{k}\langle e_m,e_i\rangle\,\langle e_i,e_m\rangle=0,$$

odakle je $e_m=0$, a to je nemoguće. Dobijena kontradikcija pokazuje da je skup $\{e_1,\dots,e_k\}$ baza od V. $\square$

7.9. Ortogonalni komplement. Neka je V unitaran prostor i neka je L neki njegov potprostor. Skup vektora $L^\perp=\{x\in V\mid \langle x,v\rangle=0,\ \forall\, v\in L\}$ zove se **ortogonalni komplement** od L u V s obzirom na skalarni proizvod $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Osnovna svojstva ortogonalnog komplementa sadržana su u sledećoj propoziciji.

Propozicija. *Neka su L i M neki potprostori unitarnog prostora V. Tada*

(i1) $L^\perp$ je potprostor od V,
(i2) $L\oplus L^\perp=V$,
(i3) $L^\perp$ je jedinstven,
(i4) $(L^\perp)^\perp=L$,
(i5) $(L+M)^\perp=L^\perp\cap M^\perp$
(i6) $(L\cap M)^\perp=L^\perp+M^\perp$.

Dokaz. (i1) Neka su $v,\,w\in L^\perp$, $\alpha,\,\beta\in\mathbb{C}$ i neka je x proizvoljan vektor iz L. Tada je $\langle x,v\rangle=\langle x,w\rangle=0$, i lako nalazimo

$$\langle x,\alpha\, v+\beta\, w\rangle=\langle x,\alpha\, v\rangle+\langle x,\beta\, w\rangle=\alpha\,\langle x,v\rangle+\beta\,\langle x,w\rangle=0\,,$$

odakle sledi da je $L^\perp$ potprostor od V.

(i2) Neka je $(f_1,f_2,\dots,f_k)$ baza od L, zatim ovu bazu nadopunimo vektorima $f_{k+1},\dots,f_n$ do baze od V, i nakon primena Gram$-$Šmitovog postupka ortogonalizacije na bazu f dolazimo do baze e koja je ortonormirana i u kojoj prvih k vektora $(e_1,\dots,e_k)$ formiraju ortonormiranu bazu od L, a preostalih $n-k$ vektora $(e_{k+1},\dots,e_n)$ čine ortonormiranu bazu od $L^\perp$, jer su svi vektori iz $L^\perp$ normalni na sve vektore iz L.

(i3) Implicitno je sadržano u prethodnom dokazu od (i2). Malo preciznije, izaberimo bazu $(e_1,\dots,e_k)$, od L, ako je $x\in L^\perp$ važi,

$$\langle x,e_i\rangle=0,\quad i=1,\dots,k. \tag{7.6}$$

Primetimo da (7.6) predstavlja jedan homogeni linearni sistem od k linearno nezavisnih jednačina u kojem su nepoznate koordinate vektora x tj. $x_1,x_2,\dots,x_n$. Kako rešenja ovog homogenog sistema obrazuju jedinstveni vektorski potprostor dimenzije $n-k$, a taj je u našem slučaju baš ortogonalni komplement, sledi da je ortogonalni komplement jedinstven.

(i4) Iz (i2) sledi

$$V=L^\perp\oplus(L^\perp)^\perp\quad\text{i}\quad V=L^\perp\oplus L.$$

Kako je zbog (i3) ortogonalni komplement od $L^\perp$ jedinstven iz prethodne dve jednakosti sledi tvrdnja.

(i5) Tvrdnja je posledica sledećeg niza ekvivalencija

$$\begin{aligned} x\in(L+M)^\perp &\iff \langle x,y\rangle=0,\quad \forall\, y\in L+M=\mathcal{L}(L\cup M)\\ &\iff \langle x,y\rangle=0,\quad \forall\, y\in L\ \text{ i }\ \forall\, y\in M\\ &\iff x\in L^\perp\ \text{ i }\ x\in M^\perp \iff x\in L^\perp\cap M^\perp\,. \end{aligned}$$

(i6) Primenimo (i5) na ortogonalne komplemente od L i M tj.

$$(L^\perp+M^\perp)^\perp=(L^\perp)^\perp\cap(M^\perp)^\perp=L\cap M\,,$$

ako na ovu jednakost primenimo operaciju uzimanja ortogonalnog komplementa, zbog jedinstvenosti ortogonalnog komplementa i $(L^\perp)^\perp=L$ sledi tvrdnja. $\square$

Primedba. Primetimo da je ortogonalni komplement od L **jedinstven** za razliku od proizvoljnog direktnog komplementa.

Primer. U euklidskom prostoru $\mathbb{R}^5$ dat je potprostor $M = \mathcal{L}(\{v = (2,4,7,2,-1)^\tau,\ u = (1,2,3,-1,2)^\tau\})$. Odredimo $M^\perp$.

Neka je $x = (x_1,\dots,x_5)^\tau \in M^\perp$, tada je $\langle x, v\rangle = \langle x, u\rangle = 0$, i tako dobijamo linearni sistem

$$x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 - x_4 + 2\,x_5 = 0, \qquad 2\,x_1 + 4\,x_2 + 7\,x_3 + 2\,x_4 - x_5 = 0. \tag{7.7}$$

Sistem (7.7) ima rešenje: $x = x_1(-2,1,0,0,0)^\tau + x_2(-13,0,-4,1,0)^\tau + x_3(-17,0,5,0,1)^\tau$, $\quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Dakle, $M^\perp = \mathcal{L}(\{(-2,1,0,0,0)^\tau, (-13,0,-4,1,0)^\tau, (-17,0,5,0,1)^\tau\})$.

7.10. Hermitsko konjugovanje. Neka je $^* : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ preslikavanje definisano kao kompozicija transponovanja i konjugovanja. Kako je kompozicija transponovanja i konjugovanja komutativna, imamo $^* = {}^\tau \circ {}^- = {}^- \circ {}^\tau$. Dakle, preslikavanje * matrici $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ dodeli matricu $\mathcal{A}^* = (\overline{\alpha_{ji}}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Preslikavanje * nazivamo hermitsko konjugovanje. Za matricu $\mathcal{A}^*$ kažemo da je i (hermitski) adjungovana matrici $\mathcal{A}$.

Propozicija. *Hermitsko konjugovanje* *, *ima sledeće osobine,*

(i1) *involutivnost*: $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$,

(i2) * *je bijekcija*,

(i3) $(\lambda\,\mathcal{A})^* = \overline{\lambda}\,\mathcal{A}^*$,

(i4) $(\mathcal{A}\,\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\,\mathcal{A}^*$.

Dokaz. (i1) Primetimo da je * kompozicija dve involucije (transponovanja i konjugovanja) koje komutiraju, odakle odmah sledi tvrdnja. Preciznije,

$$\begin{aligned}({}^*)^2 = ({}^*) \circ ({}^*) &= ({}^\tau \circ {}^-) \circ ({}^\tau \circ {}^-) = {}^\tau \circ ({}^- \circ {}^\tau) \circ {}^- = {}^\tau \circ ({}^\tau \circ {}^-) \circ {}^- \\ &= ({}^\tau \circ {}^\tau) \circ ({}^- \circ {}^-) = ({}^\tau)^2 \circ ({}^-)^2 = \mathsf{id} \circ \mathsf{id} = \mathsf{id}\,.\end{aligned}$$

(i2) Kompozicija dve bijekcije (transponovanje i konjugovanje) je bijekcija.

(i3) $(\lambda\,\mathcal{A})^* = (\lambda\,(\alpha_{ij}))^* = (\lambda\,\alpha_{ij})^* = (\overline{\lambda\,\alpha_{ji}}) = (\overline{\lambda}\,\overline{\alpha_{ji}}) = \overline{\lambda}\,(\overline{\alpha_{ji}}) = \overline{\lambda}\,\mathcal{A}^*$.

(i4) Kako je * kompozicija transponovanja i konjugovanja, i kako je transponovanje linearni antiautomorfizam ($f(a\cdot b) = f(b)\cdot f(a)$) od $\mathbb{M}(\mathbb{C})$, a konjugovanje je automorfizam od $\mathbb{M}(\mathbb{C})$ tvrdnja sledi. Preciznije,

$$(\mathcal{A}\,\mathcal{B})^* = \overline{(\mathcal{A}\,\mathcal{B})^\tau} = \overline{(\mathcal{B}^\tau\,\mathcal{A}^\tau)} = \overline{\mathcal{B}^\tau}\,\overline{\mathcal{A}^\tau} = \mathcal{B}^*\,\mathcal{A}^*\,.$$

7.11. Gramova matrica i Gramova determinanta. Neka je dat skup vektora $\{v_1,\dots,v_k\}$ u unitarnom prostoru V. Taj skup je linearno nezavisan ako jednačina,

$$\lambda_1\,v_1 + \lambda_2\,v_2 + \cdots + \lambda_k\,v_k = 0, \tag{7.8}$$

ima samo trivijalno rešenje: $\lambda_i = 0$, $i = 1,\dots,k$. Množeći jednakost (7.8) skalarno redom vektorima v_i, $i = 1,\dots,k$ dobijamo sledeći homogeni sistem linearnih jednačina u $\lambda_i, i = 1,\dots,k$,

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_1\rangle\,\lambda_1 + \langle v_2, v_1\rangle\,\lambda_2 + \cdots \langle v_k, v_1\rangle\,\lambda_k &= 0,\\ \langle v_1, v_2\rangle\,\lambda_1 + \langle v_2, v_2\rangle\,\lambda_2 + \cdots \langle v_k, v_2\rangle\,\lambda_k &= 0,\\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots &\quad \vdots\\ \langle v_1, v_k\rangle\,\lambda_1 + \langle v_2, v_k\rangle\,\lambda_2 + \cdots \langle v_k, v_k\rangle\,\lambda_k &= 0.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Matrica ovog sistema zove se Gramova matrica i jednaka je,

$$G = G(v_1, v_2, \dots, v_k) = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_2, v_1\rangle & \cdots & \langle v_k, v_1\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \cdots & \langle v_k, v_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle v_1, v_k\rangle & \langle v_2, v_k\rangle & \cdots & \langle v_k, v_k\rangle \end{bmatrix}. \tag{7.10}$$

Oznaka koja se koristi za determinantu matrice je G je $\Gamma = \Gamma(v_1, v_2, \dots, v_k)$.

Kako je sistem (7.9) homogeni i Kramerov, on ima samo trivijalno rešenje akko je $\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k) \neq 0$, a to implicira da je skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ linearno nezavisan akko je $\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k) \neq 0$.

Teorema. *Neka je V unitaran prostor, i neka su $v_1, \ldots, v_k \in V$. Tada je,*

(i1) $\Gamma(v_1 + \lambda\, v_2, v_2, \ldots, v_k) = \Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, *za sve* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i2) *Ako je* $v_k \perp \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ *onda je* $\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \|v_k\|^2\ \Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$.

(i3) $\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k) \geq 0$.

Dokaz. Da bismo dokazali svojstvo (i1) dovoljno je pomnožiti drugu vrstu determinante $\Gamma\,(v_1 + \lambda\, v_2, v_2, \ldots, v_k)$ sa $-\lambda$ i dodati prvoj vrsti, a zatim drugu kolonu dobijene determinante pomnožiti sa $-\lambda$ i dodati prvoj koloni, i iskoristiti činjenicu da ove transformacije ne menjaju determinantu.

(i2) sledi ako determinantu $\Gamma r\,(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ razvijemo po poslednjoj koloni i iskoristimo da je $\langle v_i, v_k\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, k-1$.

(i3) Ako je $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linearno zavisan tvrdnja lako sledi iz (i1) jer se Gramova determinanta skupa linearno zavisnih vektora poništava. Zato pretpostavimo da je skup $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linearno nezavisan. Neka je $L = \mathcal{L}(\{v_1, \ldots, v_k\})$ potprostor od V, tada postoji ortonormirana baza $e_L = (e_1, \ldots, e_k)$ potprostora L i definišemo linearno preslikavanje $A : L \longrightarrow L$ svojim dejstvom na bazi e_L, tj. formulom $A(e_i) = v_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji}\, e_j$. Izračunajmo sada $\det A$ u bazi e_L. Matrica tog skupa vektora u bazi e_L i njoj adjungovana (hermitski) matrica imaju sledeći oblik,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad A^* = \begin{bmatrix} \overline{\alpha_{11}} & \overline{\alpha_{21}} & \ldots & \overline{\alpha_{k1}} \\ \overline{\alpha_{12}} & \overline{\alpha_{22}} & \ldots & \overline{\alpha_{k2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{\alpha_{1k}} & \overline{\alpha_{2k}} & \ldots & \overline{\alpha_{kk}} \end{bmatrix},$$

s druge strane Parservalova jednakost daje:

$$\langle v_i, v_j\rangle = \sum_{l=1}^{k} \langle v_i, e_k\rangle\langle e_l, v_j\rangle = \sum_{l=1}^{k} v_{li}\overline{v_{lj}}\,. \qquad \text{Tako da sada računamo,} \tag{7.11}$$

$$A^*\,A = \begin{bmatrix} \overline{\alpha_{11}} & \overline{\alpha_{21}} & \ldots & \overline{\alpha_{k1}} \\ \overline{\alpha_{12}} & \overline{\alpha_{22}} & \ldots & \overline{\alpha_{k2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{\alpha_{1k}} & \overline{\alpha_{2k}} & \ldots & \overline{\alpha_{kk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_{i1}}\alpha_{i1} & \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_{i1}}\alpha_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_{i1}}\alpha_{ik} \\ \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_{i2}}\alpha_{i1} & \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_{i2}}\alpha_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_{i2}}\alpha_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_{ik}}\alpha_{i1} & \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_{ik}}\alpha_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_{ik}}\alpha_{ik} \end{bmatrix}.$$

Ako sada malo pažljivije pogledamo poslednju matricu i iskoristimo (7.11) vidimo da je $A^*\,A = G(v_1, \ldots, v_k)$. Odakle uzimanjem determinante napokon dobijamo:

$$\Gamma(v_1, \ldots, v_k) = \det\,(A^*\,A)\ = \det A^* \det A = \det \overline{A}^{\tau} \det A = \det \overline{A} \det A = |\det A|^2 \geq 0 \qquad \square.$$

Primedba. Koristeći osobinu (i3) Gramove determinante iz prethodne teoreme lako dobijamo dokaz Koši–Bunjakovski–Švarcove nejednakosti.

Dovoljno je za proizvoljna dva linearno nezavisna vektora v, i w (jer u suprotnom očigledno važi jednakost) iskoristiti osobinu (i3) iz prethodne teoreme,

$$0 < \Gamma(v, w) = \begin{vmatrix} \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{vmatrix} = \langle v, v\rangle\,\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2 \qquad \text{odakle sledi,} \qquad |\langle v, w\rangle\| < \|v\|\,\|v\|\,.$$

7.12. Geometrijski smisao Grammove determinante. Sada želimo da ispitamo geometrijski smisao Gramove determinante skupa vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. U manjim dimenzijama, tj. kada je k mali broj to nije teško. Tako nalazimo,

(k=1) $\Gamma(v_1) = \langle v_1, v_1\rangle = \|v_1\|^2$. Dakle, vidimo da je $\Gamma(v_1)$ kvadrat intenziteta (mere duži) vektora v.

(k=2) Kako je $\langle v,w\rangle = \|v\|\,\|w\|\cos\sphericalangle(v,w)$, sada zbog Primedbe iz prethodne tačke imamo,

$$\Gamma(v,w) = \|v\|^2\,\|w\|^2 - \|v\|^2\,\|w\|^2\cos^2\sphericalangle(v,w) = \|v\|^2\,\|w\|^2\,(1-\cos^2\sphericalangle(v,w)) = \|v\|^2\,\|w\|^2\sin^2\sphericalangle(v,w)\,,$$

tj. vidimo da je $\Gamma(v,w)$ jednako kvadratu površine (zapremine) paralelograma (paralelepiped u dimenziji 2).

(k=3) Neka je $e=(e_1,\,e_2,\,e_3)$ neka ortogonalna baza lineala $V_3=\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)$ i neka su vektori $v_1=(x_1,x_2,x_3)$, $v_2=(y_1,y_2,y_3)$ i $v_3=(z_1,z_2,z_3)$, dati svojim koordinatama u bazi e. Sada je kvadrat zapremine paralelepipeda razapetog vektorima v_1,v_2 i v_3 jednak, na osnovu geometrijske inerpretacije mešovitog proizvoda,

$$V^2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1\,y_1+x_2\,y_2+x_3\,y_3 & x_1\,z_1+x_2\,z_2+z_3\,z_3\\ y_1\,x_1+y_2\,x_2+y_3\,x_3 & y_1^2+y_2^2+y_3^2 & y_1\,z_1+y_2\,z_2+y_3\,z_3\\ z_1\,x_1+z_2\,x_2+z_3\,x_3 & z_1\,y_1+z_2\,y_2+z_3\,y_3 & z_1^2+z_2^2+z_3^2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle v,v\rangle & \langle v,w\rangle & \langle v,y\rangle\\ \langle w,v\rangle & \langle w,w\rangle & \langle w,y\rangle\\ \langle y,v\rangle & \langle y,w\rangle & \langle y,y\rangle\end{vmatrix} = \Gamma(v_1,v_2,v_3)\,.$$

I sada slutimo da ovo nije slučajno, i da za proizvoljni $k\in\mathbb{N}$ važi analogna formula.

Teorema. *Neka je $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}\subseteq V$ podskup unitarnog prostora. Tada je*

$$\Gamma(v_1,v_2,\ldots,v_k) = (\mathsf{Vol_k}\,\mathcal{P}(v_1,v_2,\ldots,v_k))^2, \tag{7.12}$$

gde je $\mathcal{P}(v_1,v_2,\ldots,v_k)$ paralelepiped određen vektorima $v_1,v_2,\ldots,v_k$.

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po broju k. Za $k=1,2,3$ videli smo da je tvrđenje tačno.

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna i za $n=k-1\in\mathbb{N}$. Sada posmatrajmo $k-$člani podskup $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}\subseteq V$. Možemo pretpostaviti da je ovaj skup linearno nezavisan, jer se u suprotnom obe strane jednakosti (7.12) poništavaju. Kako za zapremine paralelelepipeda važi veza

$$\mathsf{Vol_k}\,\mathcal{P}(v_1,v_2,\ldots,v_k) = h\,\mathsf{Vol_{k-1}}\,\mathcal{P}(v_1,v_2,\ldots,v_{k-1}), \tag{7.13}$$

gde je h visina. Gram-Šmitova ortogonalizacija implicira da postoji jedinstveno predstavljanje vektora v_k u obliku, $v_k=z+w$, gde je $w\in V_{k-1}=\mathcal{L}(v_1,v_2,\ldots,v_{k-1})$ i $z\perp V_{k-1}$, jer je ortogonalna projekcija vektora v_k na V_{k-1} jedinstvena. Ako sada primetimo da je $h=\|z\|$, jer je vektor z normalan na V_{k-1}, i koristeći sad svojstva iz **7.11** Teoreme redom imamo,

$$\begin{aligned}\Gamma(v_1,v_2,\ldots,v_k) &= \Gamma(v_1,v_2,\ldots,v_{k-1},z+w) \overset{(i1)}{=} \Gamma(v_1,v_2,\ldots,v_{k-1},z) \overset{(i2)}{=} \|z\|^2\Gamma(v_1,v_2,\ldots,v_{k-1})\\ &\overset{(PI)}{=} h^2\,(\mathsf{Vol_{k-1}}\,\mathcal{P}(v_1,v_2,\ldots,v_{k-1}))^2 = (\mathsf{Vol_k}\,\mathcal{P}(v_1,v_2,\ldots,v_k))^2,\end{aligned}$$

i teorema je dokazana. □

7.13. Linearni funkcionali u unitarnim prostorima. Znamo, da je skalarni proizvod linearan u prvom argumentu, tako da za dati $x\in V$ preslikavanje, $f_x: V\longrightarrow\mathbb{F}$, definisano formulom,

$$f_x(y) = \langle y,x\rangle \tag{7.14}$$

je očigledno linearni operator. Sada se postavlja prirodno pitanje: *da li je svaki linearni funkcional $f\in V^*$ tog oblika* ?

Odgovor na ovo pitanje je potvrdan i sadržaj je sledeće teoreme.

Teorema (O reprezentacija linearnog funkcionala u unitarnim prostorima). *Neka je f linearni funkcional na konačnodimenzionom unitarnom prostoru V, tada postoji jedinstveni vektor $v_0\in V$ takav da je $f(v)=\langle v,v_0\rangle$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f netrivijalan funkcional, tj. $f\neq 0$, jer u suprotnom, tj. ako je $f=0$ tada za v_0 možemo izabrati nula vektor i vidimo da tvrdnja važi.

Zbog teoreme o rangu i defektu $\mathsf{Ker}\,f$ ima dimenziju $\dim V-1$, pa postoji vektor $w_0\in(\mathsf{Ker}\,f)^\perp$ takav da je w_0 baza za $(\mathsf{Ker}\,f)^\perp$ i da je $\|w_0\|=1$. Dakle, proizvoljni $v\in(\mathsf{Ker}\,f)^\perp$ je predstavljiv u obliku $v=\alpha\,w_0$, za neko $\alpha\in\mathbb{C}$, i imamo redom

$$f(v) = f(\alpha\,w_0) = \alpha f(w_0) = \alpha f(w_0)\langle w_0,w_0\rangle = \langle\alpha\,w_0,\overline{f(w_0)}\,w_0\rangle. \tag{7.15}$$

Ako stavimo $v_0 = \overline{f(w_0)}\, w_0$ iz poslednje relacije dobijamo da je $f(v) = \langle v, v_0\rangle$. Ako je $v \in \mathsf{Ker}\, f$ onda je $f(v) = 0$, ali je i $v \perp v_0$, pa vidimo da se obe strane jednakosti, $f(v) = \langle v, v_0\rangle$, poništavaju. Primetimo da smo time dokazali egzistenciju, jer ako je $v \in V$ imamo da je $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in \mathsf{Ker}\, f$ i $v_2 \in (\mathsf{Ker}\, f)^{\perp}$, odakle je,

$$f(v) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = f(v_2) = \langle v_1, v_0\rangle + \langle v_2, v_0\rangle = \langle v_1 + v_2, v_0\rangle = \langle v, v_0\rangle.$$

Jedintvenost je posledica činjenice da postoje samo dva vektora w_0 i $-w_0$ u $(\mathsf{Ker}\, f)^{\perp}$ koji imaju normu 1, ali formulom $\overline{f(w_0)}\, w_0$, oni definišu isti vektor v_0.

Obrat ove teoreme je očigledan tj. za $v_0 \in V$ formulom $f(v) = \langle v, v_0\rangle$ definisan je jedinstveni linearni funkcional. $\square$

Primedba. Ova teorema je od velike važnosti jer je uspostavljena prirodna (preko skalarnog proizvoda) bijekcija između prostora V^* i V. Preciznije, dobro je definisano preslikavanje, $\delta : V^* \longrightarrow V$, formulom $\delta(f) = v_0$, gde je je v_0 jedinstveni vektor iz V takav da je $f(v) = \langle v, v_0\rangle$. Primetimo da za preslikavanje δ važi:

(i1) $\delta(f + g) = \delta(f) + \delta(g)$, $f, g \in V^*$ (aditivnost).

(i2) $\delta(\lambda f) = \overline{\lambda}\, \delta(f)$, $f \in V^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (antihomogenost).

Za preslikavanje, $A : V \longrightarrow W$, gde su V i W kompleksni vektorski prostori, za koje važe (i1) i (i2) kažemo da je antilinearno.

Dakle, δ je antilinearni izomorfizam, jer je bijekcija koja zadovoljava svojstva (i1) i (i2).

7.14. Hermitski andjungovani operator. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ linearan operator i neka je $w \in V$ vektor. Posmatrajmo preslikavanje,

$$f_w : V \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{definisano formulom: } f_w(v) = \langle A(v), w\rangle.$$

Preslikavanje f_w očigledno je linearni funkcional (jer je A linearni operator i jer je skalarni proizvod linearan po prvoj promenljivoj), pa prema prethodnoj teoremi **7.13** postoji vektor $w_0 = A^*(w)$ takav da je $f_w(v) = \langle v, w_0\rangle = \langle v, A^*(w)\rangle$. Zbog jedinstvenosti vektora w_0 dobro je definisano preslikavanje $A^* : V \longrightarrow V$ dato sa $w \longrightarrow w_0 = A^*(w)$. Preslikavanje A^* zove se **hermitski adjungovani operator** za kojeg važi očigledna, ali veoma važna fomula

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, A^* w\rangle\,. \tag{7.16}$$

Teorema 1. *Preslikavanje A^* je linearno.*

Dokaz. Za proizvoljne $v, w_1, w_2 \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ imamo:

$$\begin{aligned}\langle v, A^*(\alpha\, w_1 + \beta\, w_2) - \alpha\, A^* w_1 - \beta\, A^* w_2\rangle &= \langle v, A^*(\alpha\, w_1 + \beta\, w_2)\rangle - \langle v, \alpha\, A^* w_1\rangle - \langle v, \beta A^* w_2\rangle \\ &= \langle Av, \alpha\, w_1 + \beta\, w_2\rangle - \langle Av, \alpha w_1\rangle - \langle Av, \beta w_2\rangle = 0.\end{aligned}$$

Ako u gornjoj jednakosti izaberemo da je $v = A^*(\alpha\, w_1 + \beta\, w_2) - \alpha A^* w_1 - \beta A^* w_2$, tada aksiome (a5) primenjena na vektor $\|v\| = 0$ daje

$$\|v\| = 0 \quad \text{akko} \quad A^*(\alpha\, w_1 + \beta\, w_2) = \alpha\, A^* w_1 + \beta\, A^* w_2\,,$$

tj. operstor A^* je linearan i dokaz je gotov.

Primedba. Sada se pitamo u kakvoj su vezi hermitski adjungovane matrice i hermitski adjungovani operatori, i odgovor na to pitanje daje sledeća propozicija.

Propozicija. *Neka je $e = (e_1, \dots, e_n)$ ortonormirana baza unitarnog prostora V i ako je $\mathcal{A} = A(e) = (\alpha_{ij})$ matrica nekog linearnog operatora u bazi e, a $\mathcal{A}^* = A^*(e) = (\beta_{ij})$ matrica njemu hermitski adjungovanog operatora A^* u istoj bazi e. Tada je $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$.*

Dokaz. Kako je $Ae_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} e_k$, tada imamo,

$$\langle A\, e_i, e_j\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} e_k, e_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle e_k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\, \delta_{kj} = \alpha_{ji}\,. \tag{7.17}$$

Sada iz (7.17) redom imamo: $\beta_{ij} = \langle A^* e_j, e_i\rangle = \langle e_j, Ae_i\rangle = \overline{\langle Ae_i, e_j\rangle} = \overline{\alpha_{ij}}$. $\square$

Kako je A^* linearno preslikavanje, ima smisla posmatrati i njegovo jezgro i sliku, kao i njihovu vezu sa jezgrom i slikom operatora A. Preciznije važi sledeća teorema.

Teorema 2. *Neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$. Tada je $V = \mathsf{Ker}\, A \oplus \mathsf{Im}\, A^* = \mathsf{Ker}\, A^* \oplus \mathsf{Im}\, A$.*

Dokaz. Neka je $v \in \mathsf{Ker}\, A$ onda je

$$\langle Av, w\rangle = 0, \qquad \text{za sve } w \in V, \text{ odakle sledi} \qquad \langle v, A^*w\rangle = 0, \qquad \text{za sve } w \in V\,.$$

Drugim rečima, vidimo da da je $v \perp \mathsf{Im}\, A^*$, a budući da je v proizvoljan vektor iz $\mathsf{Ker}\, A$ sledi

$$\text{(7.18)} \qquad \mathsf{Ker}\, A \perp \mathsf{Im} A^*, \qquad \text{odakle sledi da je i} \qquad \mathsf{Im}\, A^* \subseteq (\mathsf{Ker}\, A)^{\perp}\,.$$

Na potpuno analogan način zaključujemo da je i

$$\text{(7.19)} \qquad \mathsf{Im}\, A \subseteq (\mathsf{Ker}\, A^*)^{\perp}\,.$$

Sada teorema o rangu i defektu primenjena na potprostore iz (7.18) i (7.19) redom daje: iz (7.18) $r(A^*) \le r(A)$, a iz (7.19) $r(A) \le r(A^*)$. Dakle, sada odmah imamo $r(A) = r(A^*)$.

Na kraju ako ponovo iskoristimo inkluzije (7.18) i (7.19) i činjenicu da potprostori sa leve i desne strane tih inkluzija imaju istu dimenziju dobijamo da u (7.18) i (7.19) važe jednakosti. $\square$

7.16. Ortogonalni projektor. U ovoj tački bavimo se svojstvima jedne važne klase linearnih operatora, a to su projektori. Već ranije smo videli da je linearni operator $P \in \mathsf{Hom}\, \mathsf{V}$ projektor ako za njega važi uslov da je $P^2 = P$. Ako za projektor P još važi da je $P = P^*$, kažemo da je P ortogonalni projektor. Osnovna svojstva ortogonalnih projektora sadržana su u sledećoj teoremi.

Teorema. *Neka je P ortogonalni projektor na unitarnom prostoru V. Tada,*

(i1) *za $v \in M = \mathsf{Im}\, P$ je $P\, v = v$.*

(i2) *za $v \in M^{\perp}$ je $P\, v = 0$.*

(i3) *za $v \in V$ je $P\, v \in M$.*

Dokaz. (i1) Važi za svaki projektor, vidi glavu 4.

(i2) Neka je $w \in M$ i $v \in M^{\perp}$. Tada je

$$0 = \langle w, v\rangle = \langle Pw, v\rangle = \langle w, P^*v\rangle = \langle w, Pv\rangle,$$

odakle je $Pv \perp w$ za sve $w \in M$. Kako je s druge strane i $Pv \in M$ sledi da je $Pv \in M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

(i3) Neka je $v \in V$ tada je $v = w_1 + w_2$, $w_1 \in M, w_2 \in M^{\perp}$. Tako da sada kratki račun daje,

$$Pv = P(w_1 + w_2) = Pw_1 + Pw_2 = w_1.$$

Dakle, P je ortogonalni projektor na M, tj. $P : V \longrightarrow M$. $\square$

Važnost ortogonalnih projektora otkriva i njihova veza sa invarijantnim potprostorima.

Propozicija. *Neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ linearni operator i $L \subseteq V$ potprostor od V. L je invarijantan potprostor od A akko je $A\, P = P\, A\, P$, gde je P ortogonalni projektor na L.*

Dokaz. Nužnost. Neka je L invarijantan potprostor operatora A, i neka je $v \in L$ tada je $Av \in L$, i $Pv = v$ jer je P projektor na L. Jasno, $(A\, Pv) = A(Pv) = Av$, i kako je $Av \in L$ sledi da je $(P\, A\, P)v = P(A\, Pv) = P(Av) = Av$. Ako je $v \in M^{\perp}$ onda je $Pv = 0$, tada je očigledno i $A\, Pv = P\, A\, Pv = 0$. Kako operatori $A\, P$ i $P\, A\, P$ jednako deluju i na L i na $L^{\perp}$ oni su jednaki.

Dovoljnost. Obratno, ako je $A\, P = P\, A\, P$, za $v \in Lv$ nalazimo

$$A\, Pv = Av = P\, A\, Pv = P\, Av \qquad \text{odakle sledi relacija } Av = P(Av), \text{ tj. } Av \in L,$$

dakle, L je invarijantan potprostor operatora A. $\square$

7.17. Neke važne klase operatora. Kažemo da je operator $A \in \mathsf{Hom}\, V$:

(i1) hermitski ili hermitski simetričan ako je $A = A^*$.

(i2) antihermitski ili hermitski koso simetričan ako je $A^* = -A$.

(i3) normalan ako je $A^*\, A = A\, A^*$.

(i4) unitaran ako je $A^*\, A = A\, A^* = \mathrm{id}_V$.

Primedba 1. Ako je V realan vektorski prostor onda za operator koji zadovoljava (i1) kažemo da je simetričan, ako zadovoljava (i2) antisimetričan (koso simetričan) i ako zadovoljava (i4) ortogonalan.

Primedba 2. Primetimo da su hermitski, antihermitski i unitarni operatori specijalne vrste normalnih operatora.

U sledećim teoremama ispitujemo najvažnije osobine hermitskih, kosohermitskih i unitarnih operatora.

Teorema 1. *Sopstvene vrednosti:*

(i1) *hermitskog operatora su realne,*

(i2) *koso hermitskog operatora su čisto imaginarne,*

(i3) *unitarnog operatora nalaze se na jediničnoj kružnici* $\mathbb{S}^1$.

Dokaz. (i1) Neka je A hermitski operator i $\lambda \in \mathsf{Sp}(A)$, tada postoji $v \in V, v \neq 0$ takav da je $Av = \lambda v$, pa imamo redom,

$$\lambda \langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, A^* v\rangle = \langle v, Av\rangle = \overline{\lambda}\, \langle v, v\rangle,$$

odakle je $(\lambda - \overline{\lambda})\langle v, v\rangle = 0$. Kako je $\langle v, v\rangle \neq 0$ biće $\lambda = \overline{\lambda}$.

(i2) Analogno kao (i1) samo što koristimo relaciju $A^* = -A$, tako da dobijamo da je $\lambda = -\overline{\lambda}$, odakle sledi tvrdnja.

(i3) Neka je A unitaran operator i $\lambda \in \mathsf{Sp}(A)$, onda postoji $v \in V, v \neq 0$ takav da je $Av = \lambda v$, i imamo redom:

$$\langle v, v\rangle = \langle v, I_n v\rangle = \langle v, (A^* A) v\rangle = \langle v, A^*(Av)\rangle = \langle Av, Av\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda \overline{\lambda}\, \langle v, v\rangle,$$

odakle, jer je $\langle v, v\rangle \neq 0$, odmah sledi da je $\|\lambda\|^2 - 1 = 0$, tj. $\lambda \in \mathbb{S}^1$. $\square$

Teorema 2. *Neka je V unitaran prostor. Tada važe sledeće tvrdnje.*

(i1) *Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ hermitski ili koso hermitski ili unitarni operator, i neka je L invarijantni potprostor operatora A. Tada je i $L^\perp$ invarijantan potprostor operatora A.*

(i2) *Ako je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ unitaran operator, tada A i A^* čuvaju skalarni proizvod, pa specijalno čuvaju ortogonalnost i normu, i preslikavaju ortonormiranu bazu u ortonormiranu.*

(i3) *Ako je $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ takav da A preslikava ortonormiranu bazu e u ortonormiranu bazu f, tada je A unitaran.*

Dokaz. (i1) Pretpostavimo da je A hermitski operator, tj. $A^* = A$, tada za svaki $v \in L$ i svaki $w \in L^\perp$ imamo,

$$\langle v, Aw\rangle = \langle v, A^* w\rangle = \langle Av, w\rangle = 0,$$

jer je L invarijantan potprostor od A, tako da je $Ax \in L$. Kako je $\langle x, Ay\rangle = 0$ za sve $x \in L$ i sve $y \in L^\perp$ sledi da je $L^\perp$ invarijantan potprostor od A. Za koso hermitski operator A i L invarijantan operator od A, analogno se dokazuje da je i $L^\perp$ invarijantan operator od A.

(i2) Neka je A unitaran operator na V tada važi da je $A A^* = A^* A = \mathsf{id}_V$, tako da za sve $v, w \in V$ imamo,

$$\langle v, w\rangle = \langle v, \mathsf{id}_V w\rangle = \langle v, (A^* A)\, w\rangle = \langle v, A^*(Aw)\rangle = \langle Av, Aw\rangle\,. \tag{7.20}$$

Iz prvog i poslednjeg člana jednakosti u (7.20) sledi da operator A čuva skalarni proizvod. Analogno se vidi da i A^* čuva skalarni proizvod. Sada iz (7.20) lako sledi i,

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2\,,$$

odakle uzimanjem drugog korena sledi da A čuva normu. Ako je $\langle v, w\rangle = 0$ onda opet iz (7.20) sledi da je $\langle Av, Aw\rangle = 0$, tj. A čuva i ortogonalnost. I na kraju ako je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza, tj. ako važi da je $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, onda uz oznake $f_i = Ae_i$, $i = 1, \ldots, n$ imamo,

$$\langle f_i, f_j\rangle = \langle Ae_i, Ae_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \tag{7.21}$$

tj. $f = (f_1, \ldots, f_n)$ ortonormirana baza.

Ako je L invarijantan potprostor od A tada je $A(L) = L$, jer je A regularan, i kako unitaran operator čuva skalarni proizvod biće

$$0 = \langle L, L^\perp\rangle = \langle A(L), A(L^\perp)\rangle = \langle L, A(L^\perp)\rangle,$$

odakle sledi da je i $A(L^\perp) \subset L^\perp$. Time smo pokazali i tvrdnju (i1) za unitarne operatore.

(i3) Primetimo da iz (7.21) proširenjem po linearnosti dobijamo da A čuva skalarni proizvod, tj. da za sve $v, w \in V$ važi jednakost, $\langle A\,v, A\,w\rangle = \langle v, w\rangle$, odakle onda dobijamo da je $A^*A = A\,A^* = \mathsf{id}_V$. □

Kao što smo videli u prethodnim teoremama unitarni operator čuva skalarni proizvod. Ispostavlje se da taj uslov implicira linearnost, kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 3. *Neka je $A : V \longrightarrow V$, operator koji čuva skalarni proizvod, tj. takav da za sve $v, w \in V$, važi jednakost $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$, tada je A linearan operator.*

Dokaz. Neka je A operator koji čuva skalarni proizvod, neka su $w_1, w_2 \in V$ proizvoljni vektori, i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ proizvoljni skalari onda definišemo vektor

$$v = A(\alpha\, w_1 + \beta\, w_2) - \alpha\, Aw_1 - \beta\, Aw_2\,.$$

Primetimo da je $v \in L = \mathcal{L}(\mathsf{Im}\, A)$, i dovoljno je pokazati da je $v \in L^{\perp}$, odakle je $v = 0$, jer je $v \in L \cap L^{\perp}$, a zatim iz definicije vektora v sledi linearnost operatora A. Zato pokažimo da je $v \in L^{\perp}$. Neka je $x \in \mathsf{Im}\, A$ tada postoji $y \in V$ takav da je $Ay = x$, i nalazimo,

$$\begin{aligned}\langle v, x\rangle &= \langle A(\alpha\, w_1 + \beta\, w_2) - \alpha\, Aw_1 - \beta\, Aw_2, Ay\rangle = \langle A(\alpha\, w_1 + \beta\, w_2), Ay\rangle - \ \langle \alpha\, Aw_1, Ay\rangle - \langle \beta\, Aw_2, Ay\rangle \\ &= \langle A(\alpha\, w_1 + \beta\, w_2), Ay\rangle - \alpha\langle Aw_1, Ay\rangle - \beta\langle Aw_2, Ay\rangle = \langle \alpha\, w_1 + \beta\, w_2, y\rangle - \alpha\langle w_1, y\rangle - \beta\langle w_2, y\rangle = 0.\end{aligned}$$

Ovim je pokazano da je v normalan na svaki vektor $x \in \mathsf{Im}\, A$, pa je normalan i na lineal nad $\mathsf{Im}\, A$ i time je dokaz završen. □

7.18. Izomorfizmi unitarnih prostora. Za dva unitarna prostora U i V kažemo da su izomorfna ako postoji linearno preslikavanje $A : U \longrightarrow V$ takvo da je

(i1) A čuva skalarne proizvode, tj. za sve $u, v \in U$ važi: $\langle u, v\rangle_U = \langle A\,u,\, v\rangle_V$,

(i2) A je bijekcija.

Oznaka koju koristimo za izomorfizam unitarnih vektorskih prostora je $\cong_u$.

Time je definisana relacija 'biti izomorfan'($\cong_u$) na skupu $\mathcal{V}_u(\mathbb{F})$ svih konačnodimenzionih unitarnih vektorskih prostora nad poljem $\mathbb{F}$. Nije se teško ubediti da važi sledeća lema.

Lema. *Relacija $\cong_u$ je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{V}_u(\mathbb{F})$.*

Dokaz. Sličan dokazu analogne leme iz tačke **3.4**, koja se odnosi na relaciju izomorfnosti za konačnodimenzione vektorske prostore. Jedino, što je potrebno proveriti da je kompozicija dva unitarna operatora unitaran operator (u dokazu tranzitivosti relacije $\cong_u$) i da je inverz unitarnog operatora unitaran operator(u dokazu simetričnosti relacije $\cong_u$). □

Sada se pitamo da li važi i analogon Teoreme iz tačke **3.4** za relaciju $\cong_u$. Odgovor je pozitivan, kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema. *Dva konačnodimenziona unitarna vektorska prostora U i V nad istim poljem su izomorfna ako i samo ako imaju istu dimenziju.*

Dokaz. Analogan dokazu Teoreme iz tačke **3.4**. Jedina razlika sastoji se u tome što u dokazu implikacije: iz $\dim U = \dim V$ sledi $U \cong_u V$, potrebno je izabrati ortonormirane baze $e = (e_1, \ldots, e_n)$ od U i $f = (f_1, \ldots, f_n)$ od V, a to možemo zbog GS postupka, i zatim definisati linearni operator A formulom $A\, e_i = f_i$ za $i = 1, \ldots, n$. Lako se proverava da je A unitaran. □

Nije teško pronaći nekog predstavnika klasa ekvivalencije relacije $\cong_n$: to su vektorski prostori $\mathbb{F}^n = (\mathbb{F}^n, \mathbb{F}, +, \cdot)$, $(n \in \mathbb{N})$, uz standardni skalarni proizvod.

7.19. Normalni operatori. Videli smo u prethodnoj tački da hermitski, koso hermitski i unitarni operatori pripadaju široj klasi normalnih operatora. Zbog toga sada posvećujemo nekoliko sledećih tačaka normalnim operatorima.

Teorema 1. *Neka je N normalan operator.*

(i1) *Ako je $\lambda \in \mathsf{Sp}\,(N)$, tada je $\overline{\lambda} \in \mathsf{Sp}\,(N^*)$, uz isti sopstveni vektor.*

(i2) *Sopstveni vektori normalnog operatora koji pripadaju međusobno različitim sopstvenim vrednostima međusobno su ortogonalni.*

Dokaz. (i1) Neka je N normalan operator, tada imamo,

$$\|Nv\|^2 = \langle Nv, Nv\rangle = \langle N^*Nv, v\rangle = \langle NN^*v, v\rangle = \langle N^*v, N^*v\rangle = \|N^*v\|^2, \quad \text{odakle je} \quad \|Nv\| = \|N^*v\|, \text{ za sve } v \in V.$$

Iz prethodne jednakosti sledi da za normalne operatore važi: $\mathsf{Ker}\, N = \mathsf{Ker}\, N^*$. Budući da je i operator $N - \lambda \mathsf{id}_V$ normalan, sledi $\mathsf{Ker}\,(N - \lambda\, \mathsf{id}_V) = \mathsf{Ker}\,(N - \lambda\, \mathsf{id}_V)^* = \mathsf{Ker}\,(N^* - \overline{\lambda}\, \mathsf{id}_V)$, odakle redom imamo,

$$0 \neq x \in \mathsf{Ker}\,(N - \lambda\, \mathsf{id}_V) = \mathsf{Ker}\,(N^* - \overline{\lambda}\, \mathsf{id}_V) \quad \text{tj.} \quad N^*x = \overline{\lambda}\, x \quad \text{odakle je} \quad \overline{\lambda} \in \mathsf{Sp}\,(N^*)\,.$$

(i2) Neka je N normalan operator, tj. neka je $N\,N^* = N^*\,N$ i neka su λ, μ dve različite sopstvene vrednosti, a v i w odgovarajući sopstveni vektori, tj. $Nv = \lambda\, v$ i $Nw = \mu\, w$. Računamo,

$$\lambda\, \langle v, w\rangle = \langle \lambda\, v, w\rangle = \langle Nv, w\rangle = \langle v, N^*w\rangle = \langle v, \overline{\mu} w\rangle = \mu\langle v, w\rangle \quad \text{ili ekvivalentno}, \quad (\lambda - \mu)\, \langle v, w\rangle = 0.$$

Kako je $\lambda \neq \mu$ mora biti $\langle v, w\rangle = 0$. □

Do kraja ove tačke bavimo se pokazivanjem da su normalni operatori dijagonalizabilni.

Lema 1. *Neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ proizvoljan linearan operator na unitarnom prostoru V tada postoji ortonormirana baza e u kojoj je matrica operatora $A(e)$ gornje trougaona.*

Dokaz. Isti kao dokaz slične tvrdnje za linearne operatore nad $\mathbb{C}$, (videti glavu 6) bez uslova na ortogonalnost baze. Ortogonalnost baze posledica je činjenice da u svakom koraku direktne komplemente možemo u unitarnom prostoru zameniti sa ortogonalnim komplementom. □

Lema 2. *Operator $N \in \mathsf{Hom\,V}$ je normalan akko za svaki $v \in V$ važi $\|Nv\| = \|N^*v\|$.*

Dokaz. Nužnost. Dokazana u dokazu **7.18 (i1)**

Dovoljnost dokazujemo uz slabiju pretpostavku, $\|N^*v\| \leq \|Nv\|$, za sve $v \in V$. Izaberimo sada ortonormiranu bazu $e = (e_1, \ldots, e_n)$ u kojoj je N reprezentovan gornje trougaonom matricom, što možemo na osnovu Leme 1.,

$$N(e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{onda je u istoj bazi matrica operatora } N^* \text{ zbog } \textbf{7.14}\ \mathsf{Propozicija} \text{ donje trougaona,} \quad \begin{bmatrix} \overline{\alpha_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ \overline{\alpha_{12}} & \overline{\alpha_{22}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\alpha_{1n}} & \overline{\alpha_{2n}} & \ldots & \overline{\alpha_{nn}} \end{bmatrix} = N^*(e).$$

Sada uslov $\|N^*v\| \leq \|Nv\|$, za sve $v \in V$, redom primenjujemo na vektore $e_1, e_2, \ldots, e_n$ i koristimo matrice operatora N i N^* u bazi e. Dakle, za $v = e_1$, nalazimo redom,

$$\begin{aligned} \|N^*e_1\|^2 &= \langle N^*e_1, N^*e_1\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_{1k}}\, e_k, \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_{1j}}\, e_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_{1k}}\, \alpha_{1j} \langle e_k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_{1k}}\, \alpha_{1j}\, \delta_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{1k}|^2 \leq \|Ne_1\|^2 = \langle Ne_1, Ne_1\rangle = |\alpha_{11}|^2, \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $\alpha_{1k} = 0,\ k = 2, \ldots, n$. Sada uvrstimo $v = e_2$ i dobijamo,

$$\begin{aligned} \|N^*e_2\|^2 &= \langle N^*e_2, N^*e_2\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_{2k}}\, e_k, \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_{2j}}\, e_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{2k}\, \overline{\alpha_{2j}} \langle e_k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{2k}\, \overline{\alpha_{2j}} \delta_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{2k}|^2 \leq \|Ne_2\|^2 = \langle Ne_2, Ne_2\rangle = |\,\alpha_{12}\,|^2 + |\,\alpha_{22}\,|^2 = |\,\alpha_{22}\,|^2, \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $\alpha_{2k} = 0,\ k = 3, \ldots, n$. Analogno nastavljajući dalje dobijamo da su svi van dijagonalni elementi matrica $N(e)$ i $N^*(e)$ jednaki 0. Prema tome, operatori N i N^* predstavljeni su dijagonalnim matricama u istoj bazi, pa komutiraju tj. $N\,N^* = N^*\,N$, i N je normalan operator. □

Teorema 3 (Dijagonalizabilnost normalnog operatora). *Neka je N normalan operator u unitarnom prostoru V, tada postoji ortonormirana baza e u kojoj je matrica operatora N dijagonalna.*

Dokaz. Dokaz je sadržan u dokazu dovoljnosti u Lemi 2.

Drugi dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po dimenziji prostora. Za $n = 1$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da tvrdnja važi za sve normalne operatore na unitarnim prostorima dimenzije $n - 1 \in \mathbb{N}$. Neka je N normalan operator na unitarnom prostoru dimenzije n. Tada postoji neka sopstvena vrednost λ_1, i odgovarajući sopstveni vektor e_1. Pokažimo da je ortogonalni komplement $L = \mathcal{L}(e_1)^{\perp}$ invarijantan za N i N^*. Neka je $y \in L$ tada imamo (vidi **7.18** (i1) iz Teoreme 1),

$$0 = \overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle = \langle \overline{\lambda}\, x, y\rangle = \langle N^* x, y\rangle = \langle x, N\, y\rangle \qquad \text{odakle sledi da je } \ N\, y \in L\,.$$

Analogan, dokaz važi i za N^*. Dakle, restrikcija $N_1 = N_{|L}$ na L je opet normalan operator, i očigledno je $N_1^* = \left(N_{|L}\right)^*$. Kako je N_1 normalan operator na unitarnom prostoru L dimenzije $n-1$, i prema pretpostavci indukcije postoji ortonormirana baza $e = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ od L u kojoj je matrica operatora $N_{|L}$ dijagonalna, ali tada je $\overline{e} = (e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ ortonormirana baza u kojoj se N dijagonalizuje. $\square$

Primedba. Kako su hermitski, antihermitski i unitarni operatori normalni oni su dijagonalizabilni tj. postoje ortonormirane baze koje se sastoje od sopstvenih vektora, a na dijagonali u toj ortonormiranoj bazi nalaze se sopstvene vrednosti, koje su za hermitski operator realne, za koso hermitski čisto imaginarne i za unitarni po modulu jednake 1.

7.20. Normalni operatori na realnim prostorima. Sada bismo hteli da ispitamo klase specijalnih operatora, ako je V realan vektorski prostor. Kao što znamo takvi operatori zovu se simetrični, koso simetrični, ortogonalni i normalni realni operatori. Naravno, možemo smatrati da su i oni operatori koji deluju na kompleksifikaciji $V^{\mathbb{C}}$ vektorskog prostora V, i primeniti sve što znamo za hermitske, koso hermitske, unitarne i normalne operatore, budući da su simetrični, koso simetrični, ortogonalni i normalni njihovi specijalni slučajevi, jer njihove matrice u odgovarajućim ortonormiranim bazama imaju samo realne koeficijente, tako da se hermitsko konjugovanje svodi samo na transponovanje jer je polje realnih brojeva invarijantno na dejstvo konjugovanja.

Zbog upravo rečenog, za simetrični, koso simetrični, ortogonalni i normalne realne operatore, kao specijalne slučajeve hermitskih, koso hermitskih, unitarnih i normalnih operatora, važiće da su oni dijagonalizabilni, ali u $V^{\mathbb{C}}$. Prethodna činjenica implicira da vektori u kojima se matrica neke od tih klasa operatora dijagonalizuje mora imati kompleksne vektore, i ne mogu se u matrici datog realnog operator pojavljivati kompleksni koeficijenti. Ako uzmemo u obzir **6.16** Propozicija, znamo da ako karakteristični polinom linearnog operatora $A \in \operatorname{Hom} V_{\mathbb{R}}$ ima kompleksnu nulu, tada on ima dvodimenzioni invarijantni potprostor. Preciznije, tamo smo videli da ako postoji vektor $z \in V^{\mathbb{C}}, z \neq 0$ takav da je $Az = \lambda_0 z$, pri čemu je $\lambda_0 = \mu + i\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, i $z = x + i\, y$, $x, y \in V$. Kada ovo uzmemo u obzir imamo:

$$Az = A(x + i\, y) = Ax + i\, Ay = (\mu + i\, \nu)(x + i\, y) = (\mu\, x - \nu\, y) + i\,(\mu\, y + \nu\, x),$$

odakle odvajajući imaginarni i realni deo dobijamo,

$$A\, y = \mu\, y + \nu\, x \qquad \text{i} \qquad A\, x = -\nu\, y + \mu\, x. \tag{7.22}$$

Ako sada λ_0 predstavimo u trigonometrijskom obliku, $\lambda_0 = \mu + i\, \nu = r(\cos\phi + i \sin\phi)$ vidimo da restrikcija operatora A na dvodimenzioni invarijantni potprostor $L = \mathcal{L}(y, x)$ je

$$A_{|L}(y, x) = r \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}. \tag{7.23}$$

Sada prvo ispitajmo simetričan operator.

Propozicija. *Neka je $A \in \operatorname{Hom} V_{\mathbb{R}}$ simetričan operator na realnom euklidskom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza od V takva da je matrica operatora A u toj bazi dijagonalna.*

Dokaz. Operator A shvatimo kao hermitski operator na kompleksifikaciji $V^{\mathbb{C}}$ od V. Tada, prema Teoremi 3 iz prethodne tačke postoji ortonormirana baza e od $V^{\mathbb{C}}$ u kojoj se operator A dijagonalizuje i na dijagonali se nalaze realne sopstvene vrednosti. Da bismo dovršili dokaz potrebno je pokazati da su svi sopstveni vektori realni. Neka je $A(e)\, z = \lambda\, z$, pri čemu je $A(e) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ i $z = x + i\, y$, x, $y \in \mathbb{R}^n$ tada je

$$A(e)\, z = A(e)(x + i\, y) = A(e)\, x + i\, A(e)\, y = \lambda\, z = \lambda\,(x + i\, y) = \lambda\, x + i\,(\lambda\, y).$$

Upoređujući realne i imaginarne delove u prethodnom izrazu dobijamo: $A(e)\, x = \lambda\, x$ i $A(e)\, y = \lambda\, y$. Ako su x i y linearno nezavisni, tada su vektori x i y realni sopstveni vektori i dokaz je u tom trivijalnom slučaju gotov. Tako da imamo tri mogućnosti: $x = 0$, $y = 0$, i $x = \alpha\, y\, (\alpha \neq 0)$ (ne mogu istovremeno vektori x i y biti nula vektori, jer bi tada $z = 0$, što je nemoguće). Dakle, u svakom slučaju dobijamo da za proizvoljnu sopstvenu vrednost λ njeni sopstveni vektori su realni. $\square$

Primedba. Prethodna propozicija može se formulisati i na sledeći način: *svaka simetrična matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ slična je dijagonalnoj matrici.*

Sada koristeći sve rečeno u prethodnoj i ovoj tački možemo formulisati sledeću teoremu.

Teorema (kvazidijagonalnost normalnog operatora u euklidskom prostoru). *Neka je N normalan operator na euklidskom vektorskom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza e od V u kojoj je operator N predstavljen matricom,*

$$N(e) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathcal{A}(r_1,\phi_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \mathcal{A}(r_2,\phi_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \mathcal{A}(r_j,\phi_j) \end{bmatrix},$$

gde su $\mathcal{A}(r_i,\phi_i) = r_i \begin{bmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{bmatrix}$, $r_i \in \mathbb{R}^+$, $\phi_i \in (0, 2\pi)$ *za sve* $i = 1, \dots, j$.

Dokaz. Prvo, primetimo da Teorema 3 iz **7.18**, implicira da je minimalni polinom operatora A, shvaćenog kao operatora na $V^{\mathbb{C}}$, proizvod linearnih ireducibilnih faktora. Kako je $A(e) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ realna matrica, $\kappa_{A(e)}$ i $\mu_{A(e)}$ su polinomi sa realnim koeficijentima, tako da imaju realne nule $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ i kompleksne nule koje dolaze u parovima, λ_i i $\overline{\lambda_i}$ za $i = k+1, k+2, \dots, k+2j$. Kako su realne nule karakterističnog polinoma sopstvene vrednosti operatora A, svaka (λ_i) od njih definiše svoj jedinični sopstveni vektor e_i. Tako dobijamo prvih k ortonormiranih vektora, $e_1, e_2, \dots, e_k$ tražene baze. Svaka kompleksna i njoj konjugovana nula definišu dvodimenzione invarijantne potprostore $L_1 = \mathcal{L}(e_{k+1}, e_{k+2}), \dots, L_j = \mathcal{L}(e_{n-1}, e_n)$ na kojima restrikcija operatora N ima matricu $\mathcal{A}(r_i,\phi_i)$. Ortonormiranost dobijene baze $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ sledi iz prethodnih razmatranja: iz **7.19** Teorema 3 i konstrukcije operatora $\mathcal{A}(r_i,\phi_i)$ (kolone matrice $\mathcal{A}(r_i,\phi_i)$ shvaćene kao vektori iz $\mathbb{R}^2$ međusobno su ortogonalne). □

7.21. Pozitivni operatori. Za hermitski (simetrični) operator $A \in \mathrm{Hom}\, V$ kažemo da pozitivno semidefinitan ili kraće samo **pozitivan** i pišemo $A \geq 0$ ako je

$$\langle Av, v\rangle \geq 0, \qquad \forall\, v \in V.$$

Pozitivan operator je strogo pozitivan (ili pozitivno definitan) ako je

$$\langle Av, v\rangle = 0 \qquad \text{akko je } v = 0, \tag{7.24}$$

i u tom slučaju pišemo $A > 0$.

Analogno definišemo negativne i strogo negativne operatore. Hermitski operator koji nije ni pozitivan ni negativan zovemo indefinitnim.

U ovoj tački bavimo se najvažnijim svojstvima pozitivnih operatora. Prva od njih je sledeća teorema.

Teorema. *Hermitski operator A je pozitivan ako i samo ako su sve njegove sopstvene vrednosti veće ili jednake od 0.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je A pozitivan operator. Neka je $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$ neka njegova sopstvena vrednost, onda postoji $v \in V$, $v \neq 0$ takav da je $Av = \lambda\, v$, tako da je

$$0 \leq \langle Av, v\rangle = \langle \lambda\, v, v\rangle = \lambda\, \langle v, v\rangle \qquad \text{odakle je } \lambda \geq 0 \text{ jer je } \langle v, v\rangle \geq 0.$$

Obratno, neka je $\mathrm{Sp}\,(A) \subseteq [0, +\infty)$. Kako je A hermitski postoji baza $e = (e_1, \dots, e_n)$ koja se sastoji od sopstvenih vektora (**7.18**). Neka je $v \in V$ proizvoljan vektor, onda je $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, e_i$ i prvo nalazimo,

$$Av = A\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i\, e_i\Big) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, Ae_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i\, e_i,$$

pri čemu su $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Sada računamo,

$$\langle Av, v\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i\, e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j\, e_j \Big\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i\, \alpha_i\, \overline{\alpha_j} \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i\, \alpha_i\, \overline{\alpha_j} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, \alpha_i\, \overline{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, |\alpha_i|^2 \geq 0.$$

Dakle, A je pozitivan operator. □

Primedba. Primetimo da važi analogon prethodne teoreme (uz analogan dokaz) za strogo pozitivne operatore: *Hermitski operator* A *je strogo pozitivan* **akko** *su sve njegove sopstvene vrednosti veće od* 0.

Neka je $(\cdot\,,\,\cdot)$ standardan skalarni proizvod na $V \cong \mathbb{C}^n$, i neka je A strogo pozitivan operator tada A definiše skalarni proizvod formulom,

$$\langle v, w\rangle_A = (A\,v, w) = v^{\tau}\,A\,w. \tag{7.25}$$

Nije teško pokazati da je svaki skalarni proizvod na $\mathbb{C}^n$ ovog oblika, tj. da se može predstaviti kao matrični proizvod, kao u formuli (7.25), za neku strogo pozitivnu matricu $\mathcal{A} = A(e)$.

7.21. Kvadratni koren operatora. Budući da su za svaki operator (ili matricu) $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ dobro definisani stepeni $A^0, A^1, A^2, \ldots, A^k, \ldots$, videli smo da je za svaki polinom $f \in \mathbb{F}[x]$ dobro definisan operator $f(A)$, tj. na f možemo gledati kao na funkciju sa $\mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ u $\mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$. Sada bismo hteli više, tj. da za neku širu klasu funkcija $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definišemo operatorsku funkciju $f : \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}_{\mathbb{C}}$ tako što promenjivu u f zamenimo operatorom (matricom). Npr. glatke funkcije mogu se, pod nekim uslovima, razviti u Tejlorov red u okolini neke tačke. Da bismo realizovali ovu ideju potrebno je uvesti neku normu na skupu $\mathsf{Hom}\,\mathsf{V}_{\mathbb{C}}$.

Ovde se nećemo baviti detaljno ovom problematikom, ali ćemo pokazati da je za pozitivne operatore dobro definisan drugi koren.

Za operator $B \in \mathsf{Hom}\ V$ kažemo da je **kvadratni (drugi) koren** iz operatora $A \in \mathsf{Hom}\ V$ ako je $B^2 = A$. Analogno se definiše i proizvoljni $k-$ti koren iz operatora A, za $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$.

Teorema. *Neka je* $A \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}$ *pozitivan operator, tada postoji jedinstveni pozitivni kvadratni koren* B *za kojeg važi da komutira sa svim operatorima sa kojima komutira operator* A.

Dokaz. Egzistencija. Budući da je A pozitivan on je hermitski i postoji ortonormirana baza $e = (e_1, \ldots, e_n)$ koja se sastoji od sopstvenih vektora operatora A. Kako je A pozitivan odgovarajuće sopstvene vrednosti (vidi **7.20**) $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Traženi pozitivni kvadratni koren B zadajemo na bazi e formulom: $B\,e_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Očigledno operator B je hermitski, jer mu je spektar nenegativan i jer svi njegovi sopstveni vektori obrazuju ortonormiranu bazu, a kako su svi realni brojevi $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ on je pozitivan i važi,

$$B^2 e_i = B(B e_i) = B(\sqrt{\lambda_i} e_i) = \sqrt{\lambda_i} B\,e_i = \lambda_i\,e_i = A\,e_i, \; i = 1, \ldots, n,$$

odakle sledi da je $A = B^2$. Iz same definicije operatora B vidimo da operator B u istoj bazi kao i A ima dijagonalnu matricu, odakle zaključujemo da svaki operator sa kojim komutira operator A komutira i sa operatorom B.

Jedinstvenost. Iz dokaza egzistencije, jasno sledi da je

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V^B_{\sqrt{\lambda_i}} = \bigoplus_{i=1}^{k} V^A_{\lambda_i} \quad \text{i} \quad V^B_{\sqrt{\lambda_i}} = V^A_{\lambda_i} \quad \text{za } i = 1, \ldots, k\,.$$

Kako su sopstveni potprostori V_λ jedinstveno određeni sa A, a oni moraju biti i sopstveni potprostori od B samo za sopstvenu vrednost $\sqrt{\lambda_i}$. □

7.22. Dekartova i polarna forma linearnog operatora. Sada bismo hteli da nađemo analogiju između linearnih operatora i brojeva. Kako su najvažnije informacije o linearnom operatoru sadržane u njegovom spektru, prirodno je posmatrati operatore čiji je spektar sadržan u određenom skupu. U toj analogiji hermitskim operatorima, jer je njihov spektar sadržan u skupu $\mathbb{R}$, odgovaraju realni brojevi. Slično kompleksnim brojevima norme 1 odgovaraju unitarni operatori, jer je njihov spektar sadržan na jediničnom krugu.

Propozicija. *Neka je* B *proizvoljan linearni operator na unitarnom prostoru* V. *Tada postoje jedinstveni operatori* $H, A \in \mathsf{Hom}\,V$ *takvi da je* H *hermitski,* A *koso hermitski, i takvi da je* $B = H + A$.

Dokaz. Egzistencija. Neka je

$$H = \frac{1}{2}\,(B + B^*) \qquad \text{i} \qquad A = \frac{1}{2}\,(B - B^*),$$

lako proveravamo da je $B = H + K$, kao i to da je $H = H^*$ i $A = -A^*$.

Jedinstvenost. Neka je $B = H + A = H_1 + A_1$, pri čemu su H, H_1 hermitski, a A, A_1 koso hermitski operatori. Iz ovih jednakosti dobijamo vezu $H - H_1 = A_1 - A$ u kojoj je leva strana hermitski operator, a desna koso hermitski. Dakle, obe strane moraju biti istovremeno hermitski i koso hermitski operator, a kako je takav samo 0 operator dobijamo da je $H = H_1$ i $A = A_1$. □

Posledica (Dekartova forma linearnog operatora). *Neka je $B \in \mathsf{Hom}\, V$ proizvoljni linearni operator na unitarnom prostoru V. Tada postoje jedinstveni hermitski operatori $H_1, H_2 \in \mathsf{Hom}\, V$ takvi da je $B = H_1 + i\, H_2$.*

Dokaz. U prethodnoj teoremi izaberemo da je $H = H_1$ i $A = i\, H_2$. □

Primedba. Rastav linearnog operatora kao u prethodnoj posledici, $B = H_1 + i\, H_2$, $(i^2 = -1)$ pri čemu su H_1 i H_2 hermitski operatori zove se Dekartova [14] forma ili rastav linearnog operatora po analogiji sa kompleksnim brojevima.

Teorema (Polarna forma linearnog operatora). *Neka je V unitaran vektorski prostor.*

(i1) *Ako je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ linearan operator, tada postoje unitarni operatori U_1 i U_2 i pozitivni operatori H_1 i H_2 takvi da je $A = U_1\, H_1 = H_2\, U_2$.*

(i2) *Operatori H_1 i H_2 iz (i1) jednoznačno su određeni sa A, a ako je A regularan operator, onda su i unitarni operatori U_1 i U_2 jednoznačno određeni.*

(i3) *A je normalan ako i samo ako je $U_1\, H_1 = H_1\, U_1$, $U_2\, H_2 = H_2\, U_2$ i $H_1 = H_2$.*

Dokaz. (i1) Prvo primetimo da je operator A^*A hermitski i pozitivan, jer je

$$(A^*A)^* = A^*A \quad \text{i} \quad \langle A^*Av, v\rangle = \langle Av, Av\rangle \geq 0$$

pa postoji ortonormirana baza $e = (e_1, \ldots, e_n)$ koja se sastoji od sopstvenih vektora operatora A^*A. Pretpostavimo da smo bazu uzeli tako da poslednjih $n - r$ vektora razapinju $\mathsf{Ker}\,(A^*A)$. Tada je,

$$A^*\, A\, e_k = \lambda_k^2\, e_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{pri čemu su} \quad \begin{cases} \lambda_i > 0, & i = 1, \ldots, r \\ \lambda_i = 0, & i = r+1, \ldots, n\,. \end{cases}$$

Primetimo takođe da je skup vektora $\{e'_k = 1/\lambda_k A e_k,\ k = 1, \ldots, r\}$ ortonormiran skup, jer je

$$\langle e'_k, e'_i\rangle = \left\langle \frac{1}{\lambda_k} Ae_k, \frac{1}{\lambda_i} Ae_i \right\rangle = \frac{1}{\lambda_k\, \lambda_i}\langle Ae_k, Ae_i\rangle = \frac{1}{\lambda_k\, \lambda_i}\langle A^*Ae_k, e_i\rangle = \frac{1}{\lambda_k\, \lambda_i}\langle \lambda_k^2 e_k, e_i\rangle = \frac{\lambda_k}{\lambda_i}\langle e_k, e_i\rangle = \delta_{ik}\,.$$

Ako je potrebno nadopunimo ortonormirani skup $\{e'_k,\ k = 1, \ldots, r\}$ vektorima $\{e'_{r+1}, \ldots, e'_n\}$ do ortonormirane baze za V. Definišemo sada operator U formulom

$$e'_k = U e_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Budući da operator U prevodi jednu ortonormiranu bazu u drugu on je unitaran. Sada još definišemo i operator H svojim dejstvom na bazi,

$$He'_k = \lambda_k e'_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Operator H je hermitski i pozitivan jer mu je spektar nenegativan i jer njegovi sopstveni vektori obrazuju ortonormiranu bazu. Napokon, dobijamo,

$$H\, U_k = He'_k = A\, e_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{odakle sledi,} \quad H\, U = A,$$

jer operatori $H\, U$ i A deluju jednako na bazi e'. Drugu dekompoziciju dobijamo ako dobijenu dekompoziciju primenimo na operator $A^* = H_1\, U_1$, koju adjungujemo i dobijamo da je $A = U_1^*\, H_1^*$, pri čemu je očigledno operator U_1^* unitaran, a H_1^* pozitivan. Time je pokazana i druga dekompozicija operatora A.

(i2) Pokažimo jedinstvenost operatora H.

$$A = H\, U \quad \text{odakle sledi} \quad A\, A^* = H\, U\, U^*\, H = H^2,$$

Dakle, H je pozitivan drugi koren iz $A\, A^*$, a on je jedinstven, pa je prema tome H jedinstven. Ako je A regularan onda je i H regularan ($\mathsf{det}\, A \neq 0$ onda je i $\mathsf{det}\, H \neq 0$), pa dobijamo da je $U = H^{-1}A$. Jasno, i operator U je jedinstven. Analogno važi i za drugu faktorizaciju.

(i3) Pretpostavimo da je A normalan i da je $A = U_1\, H_1 = H_2\, U_2$, $(H_1, H_2 \geq 0)$. Sada prvo imamo da je

$$H_1^2 = A^*A = A\, A^* = H_2^2,$$

[14] Descartes, René, 1596 – 1650, francuski filosof, matematičar i naučnik. Utemeljio je analitičku geometriju i sa njome koordinatnu metodu.

odakle vidimo da je $H_1^2 = H_2^2 = A^*A$, a kako je kvadratni koren iz A^*A jedinstven dobijamo da je $H_1 = H_2$. Iz $A = U_1\,H_1$ i $A\,A^* = A^*A$ sledi

$$U_1\,H_1^2\,U_1^* = H_1^2 \quad \text{tako da je} \quad U_1\,H_1^2 = H_1^2\,U_1,$$

a kako je H_1 pozitivan drugi koren iz H_1^2 dobijamo da sve što komutira sa H_1^2 komutira i sa H_1, odakle imamo da je $H_1\,U_1 = U_1\,H_1$. Sada imamo

$$A = U_1\,H_1 = H_1\,U_1 = U_2\,H_2 = H_2\,U_2.$$

Iz samog dokaza tvrdnje (i1) jasno je da U_1 može biti različit od U_2.

Obratno, ako je $A = U_1\,H_1 = H_1\,U_1 = U_2\,H_1 = H_1\,U_2$, onda važi:

$$A^*A - A\,A^* = (H_1\,U_1^*)(U_1\,H_1) - (H_1\,U_2)(U_2^*\,H_1) = 0,$$

odakle sledi da je A normalan. $\square$

Primedba. Bilo koja od dekompozicija linearnog operatora A iz tvrdnje (i1) prethodne teoreme zove se polarna forma linearnog operatora A. Ovaj naziv potiče od trigonometrijske ili polarne forme kompleksnog broja. Naime, znamo da se svaki kompleksni broj z može zapisati u polarnom obliku: $z = r \cdot e^{i\varphi}$, pri čemu je $r = |z| \geq 0$ i $|e^{i\varphi}| = 1$. Slično je i u slučaju linearnog operatora na unitarnom prostoru jer je $A = H\,U$, pri čemu je $\mathsf{Sp}\,(H) \subseteq [0, +\infty)$ (spektar pozitivnog operatora H je nenegativan) i jer je $\mathsf{Sp}\,(U) \subseteq \mathbb{S}^1$ (spektar unitarnog operatora nalazi se na jediničnoj kružnici). Dakle polarna forma linearnog operatora A je prirodna generalizacija polarne forme kompleksnog broja jer u slučaju da je $\dim V = 1$, ta dva pojma se podudaraju.

1. Zadaci, vežbanja i dopune

7.23. Dokažite relacije (a1') i (a2') iz definicije unitarnog prostora, tj. iz tačke **7.1**.

7.24. Primeri unitarnih prosotra. Pokažite detaljno da se u **7.2** u sva tri slučaja zaista radi o skalarnom proizvodu.

Rešenje. Pokažimo da se u slučaju (i3) radi o skalarnom proizvodu. Potrebno je proveriti aksiome (a1)–(a5) iz definicije skalarnog proizvoda (vidi **7.1**). (a1) i (a2) (koristimo linearnost traga),

$$\langle \alpha\,\mathcal{A} + \beta\,\mathcal{B}, \mathcal{C}\rangle = \mathsf{Tr}(\mathcal{C}^*\,(\alpha\,\mathcal{A} + \beta\,\mathcal{B})) = \mathsf{Tr}(\alpha\,\mathcal{C}^*\mathcal{A} + \beta\,\mathcal{C}^*\mathcal{B}) = \alpha\,\langle \mathcal{A}, \mathcal{C}\rangle + \beta\,\langle \mathcal{B}, \mathcal{C}\rangle.$$

(a3) koristimo $(\,\mathsf{Tr}(\mathcal{A}^\tau) = \mathsf{Tr}(\mathcal{A}),\ \overline{\mathsf{Tr}(\mathcal{A})} = \mathsf{Tr}(\overline{\mathcal{A}}),\ \mathsf{Tr}(\mathcal{A}\,\mathcal{B}) = \mathsf{Tr}(\mathcal{B}\,\mathcal{A})\,)$

$$\langle \mathcal{B}, \mathcal{A}\rangle \;=\; \mathsf{Tr}(\mathcal{A}^*\,\mathcal{B}) = \mathsf{Tr}(((\mathcal{A}^*\,\mathcal{B})^*)^*) = \mathsf{Tr}\overline{((\mathcal{A}^*\,\mathcal{B})^*)^\tau} = \overline{\mathsf{Tr}((\mathcal{A}^*\,\mathcal{B})^*)^\tau} = \overline{\mathsf{Tr}(\mathcal{A}^*\,\mathcal{B})^*} = \overline{\mathsf{Tr}\mathcal{B}^*\,\mathcal{A}} = \overline{\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle}\,.$$

(a4) i (a5): ako je $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$ imamo redom,

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{A}\rangle = \mathsf{Tr}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (\mathcal{A}^*\mathcal{A})_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} (\mathcal{A}^*)_{kl}(\mathcal{A})_{lk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{\alpha_{lk}}\,\alpha_{lk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \|\alpha_{lk}\|^2\,. \tag{7.26}$$

Iz (7.26) zaključujemo da je $\langle \mathcal{A}, \mathcal{A}\rangle \geq 0$ kao i to da je $\langle \mathcal{A}, \mathcal{A}\rangle = 0$ akko $\mathcal{A} = 0$.

Primetimo da je ovo zapravo standarndi skalarni proizvod na $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

7.25. Gram-Šmitov algoritam. Pokažite da je skup funkcija $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{int} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ ortonormiran u prostoru $\mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$ neprekidnih funkcija na $[-\pi, \pi\,]$ s obzirom na skalarni proizvod

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}dt\,.$$

7.26. Gram-Šmitov algoritam. Ortonormirajte skup polinoma $\{1, t, t^2, t^3\}$ s obzirom na skalarni proizvod dat formulom

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt\,.$$

Rešenje. Koristeći Gram-Šmitov (GS) postupak ortogonalizacije nalazimo redom:

(i1) $\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\ dt = 2$, odakle je $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

(i2) $v_2 = t - \left\langle t, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle \dfrac{1}{\sqrt{2}} = t$, jer je t neparna funkcija na simetričnom intervalu $[-1, 1]$, pa je $\int_{-1}^{1} t\ dt = 0$, tako da je

$$e_2 = \frac{t}{\|t\|} = \frac{t}{\sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\ dt}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\ t\,,$$

(i3) $v_3 = t^2 - \left\langle t^2, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \underbrace{\left\langle t^2, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\ t\right\rangle}_{=\,0,} \sqrt{\dfrac{3}{2}}\ t = t^2 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\ dt = t^2 - \dfrac{1}{3}$, odakle nalazimo da je: $e_3 = \dfrac{v_3}{\|v_3\|} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right)$

jer je $\left\langle t^2 - \dfrac{1}{3}, t^2 - \dfrac{1}{3}\right\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \int_{-1}^{1}\left(t^4 - \frac{2}{3}\,t^2 + \frac{1}{9}\right) dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{9} + \frac{t}{9}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{45}$,

(i4) i napokon imamo:

$$v_4 = t^3 - \left\langle t^3, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle t^3, \sqrt{\frac{3}{2}}\ t\right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}t - \left\langle t^3, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\right\rangle \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) = t^3 - \left\langle t^3, \sqrt{\frac{3}{2}}\,t\right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}\,t$$

$$= t^3 - \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} t^4\,dt\right)t = t^3 - \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{t^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}\right)t = t^3 - \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{6}}{5}\,t = t^3 - \frac{3}{5}\,t \text{ odakle je, } e_4 = \frac{v_4}{\|v_4\|} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\left(t^3 - \frac{3}{5}\,t\right),$$

jer je $\left\langle t^3 - \dfrac{3}{5}\,t, t^3 - \dfrac{3}{5}\,t\right\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(t^3 - \frac{3}{5}\,t\right)^2 dt = \int_{-1}^{1}\left(t^6 - \frac{6}{5}\,t^4 + \frac{9}{25}\right) dt = \left(\frac{t^7}{7} - \frac{6\,t^5}{25} + \frac{9\,t^2}{25}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{175}.$

7.27. Ortogonalna projekcija. Nađi ortogonalnu projekciju vektora

(i1) $a = (-1, 2, 1, -2)$ na $V^{\perp}$ gde je V potprostor $\mathbb{R}^4$ zadat sistemom jednačina:
$$4\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 = 0, \qquad 4\,x_1 - x_2 - 4\,x_3 + 4\,x_4 = 0.$$

(i2) $a = (1, -1, 1, -1)$ na $V^{\perp}$ gde je V potprostor $\mathbb{R}^4$ zadat sistemom jednačina:
$$5\,x_1 - 5\,x_2 - 8\,x_3 - 8\,x_4 = 0, \qquad 9\,x_1 - 7\,x_2 + 4\,x_3 + 6\,x_4 = 0.$$

7.28. Gram-Šmitov algoritam. Znamo da je formulom $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle = \mathsf{Tr}(\mathcal{B}^*\mathcal{A})$, dat skalarni proizvod na $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Nađite neku ortonormiranu bazu od $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ s obzirom na taj skalarni proizvod.

Rešenje.

Jednu ortonormiranu bazu čine matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

7.29. Ispitni zadatak. Neka je $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2\,x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ 4\,x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

(i1) Nađite po jednu ortonormiranu bazu potprostora V i $V^{\perp}$.

(i2) Odredite ortogonalne projekcije vektora $v = (0, 1, 2, 3)^{\tau}$ na V i $V^{\perp}$.

(i3) Kojem je, od potprostora V i $V^{\perp}$, bliži vektor v?

7.30. Ispitni zadatak. Neka je $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ vektorski prostor realnih polinoma stepena ne većeg od 3.

(i1) Dokažite da je sa $(f, g) = 2\,f(-2)\,g(-2) + f(-1)\,g(-1) + 3\,f(0)\,g(0) + f(1)\,g(1)$, definisan jedan skalarni proizvod na $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(i2) Ako je $V = \mathcal{L}(\{1 + t + t^2, 2t^2\})$, nađite ortonormiranu bazu za $V^{\perp}$.

(i3) Za vektor $p(t) = 2\,t^3 - t^2 + 2\,t - 1$, nađite $y \in V$ i $w \in V^{\perp}$ tako da je $p = y + w$. Da li su y i w jedinstveni?

(i4) Izračunajte $\|y\|, \|w\|$ kao i $d(1 + t + t^2, t^3 + t - 3)$.

7.31. Ispitni zadatak. Na skupu $\mathbb{R}_2[x]$ (realnih polinoma stepena manjeg ili jednakog 2) definisano je preslikavanje formulom: $\langle p, q\rangle = p(-1)\,q(-1) + 2\,p(0)\,q(0) + p(1)\,q(1)$.

(i1) Dokažite da je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni proizvod na $\mathbb{R}_2[x]$.

(i2) Nađite neku ortonormiranu bazu od $\mathbb{R}_2[x]$.

(i3) Nađite dužine stranica i kosinuse uglova $\triangle ABC$, ako je $\overrightarrow{OA} = 1$, $\overrightarrow{OB} = 2\,t$ i $\overrightarrow{OC} = t^2$.

(i4) Izračunajte Grammovu determinantu skupa vektora: $v_1 = 1 - t$, $v_2 = t^2 - 1$ i $v_3 = 1 + t + t^2$. Da li je $\{v_1, v_2, v_3\}$ linearno nezavisan skup?

7.32. Ispitni zadatak. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$, za $x = (x_i), y = (y_i)$, dato je preslikavanje formulom, :
$$\langle x, y\rangle = 5\,x_1\,y_1 - x_2\,y_1 - x_3\,y_1 - x_1\,y_2 + x_2\,y_2 - x_1\,y_3 + x_3\,y_3\,.$$

(i1) Pokažite da je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni proizvod na $\mathbb{R}^3$.

(i2) Izračunajte Grammovu matricu i Grammovu determinantu skupa vektora $\{a_1 = (2, 0, -1)^{\tau}, a_2 = (2, -3, 1)^{\tau}, a_3 = (-1, 0, 3)^{\tau}\}$.

(i3) Da li je taj skup vektora ortonormiran ? Da li je baza za $\mathbb{R}^3$?

7.33. Ispitni zadatak. Neka je X skup neprekidnih realnih funkcija na $[-1, 1]$. Na X definišemo preslikavanje formulom: $\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\,y(t)\,dt\,.$

(i1) Dokažite da je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni proizvod na X.

(i2) Nađite neku ortonormiranu bazu potprostora V razapetog vektorima $e_1 = \mathsf{sin}\,t + 2\,t^2$, $e_2 = \mathsf{cos}\,t - t$ i $e_3 = 1 - t^2$.

(i3) Odredite projekciju vektora e_1 na e_2 kao i projekciju vektora e_2 na potprostor razapet vektorima e_1 i e_3.

7.34. Ispitni zadatak. Neka je $V=\mathcal{C}[-\pi,\pi]$ realni vektorski prostor neprekidnih funkcija na intervalu $[-\pi,\pi]$ i neka je
$$W=\{f\in V \mid f(x)=a+b\,x+c\,\mathsf{sin}x+d\,\mathsf{cos}(x/2);a,b,c,d\in\mathbb{R}\}\subseteq V.$$

(i1) Dokažite da je W potprostor od V i odredi mu dimenziju.

(i2) S obzirom na skalarni proizvod, $(p,q)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}p(x)\,q(x)\,dx$, odredite ortonormiranu bazu potprostora $L\subseteq W$ razapetog vektorima $e_1=x$ i $e_2=\mathsf{sin}x-2\,x$, kao i njegovog ortogonalnog komplementa u W.

(i3) Vektor $w=2-x+3\,\mathsf{sin}x-2\,\mathsf{cos}(x/2)$ predstavite u obliku $w=a+b$, gde je $a\in L$ i $b\in L^{\perp}$. Da li je taj prikaz jedinstven?

(i4) Da li važi jednakost $\| w\|^2=\| a\|^2+\| b\|^2$?

7.35. Ispitni zadatak. U $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dat je potprostor $\mathsf{sl}(2,\mathbb{R})=\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}7&1\\1&-7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5&0\\2&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&4\\1&-2\end{bmatrix}\right\}$ i skalarni proizvod: $(\mathcal{A},\mathcal{B})=\mathsf{Tr}(\mathcal{B}^{\tau}\mathcal{A})$. Odredi neku ortonormiranu bazu potprostora $\mathsf{sl}(2,\mathbb{R})$ i prikaži vektor $\mathcal{C}=\begin{bmatrix}2&5\\7&3\end{bmatrix}$ u obliku $\mathcal{C}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$, gde je $\mathcal{A}\in\mathsf{sl}(2,\mathbb{R})$ i $\mathcal{B}\in\mathsf{sl}(2,\mathbb{R})^{\perp}$. Da li je taj prikaz jedinstven?

7.36. Ispitni zadatak. Neka je $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ skup svih kvadratnih matrica reda n nad poljem $\mathbf{R}$.

(i1) Dokažite da $\forall\,\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ važi $\mathsf{Tr}(\mathcal{A}\,\mathcal{B})=\mathsf{Tr}(\mathcal{B}\,\mathcal{A})$.

(i2) Ako je L linearni funkcional na $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dokažite ekvivalenciju: $L(\mathsf{X},\mathsf{Y})=L(\mathsf{Y}\,\mathsf{X})$ za sve $\mathsf{X},\mathsf{Y}\in M_n(\mathbb{R})$ akko postoji $\lambda\in\mathbb{R}$, takav da je $L(\mathsf{X})=\lambda\,\mathsf{Tr}(\mathsf{X})$, za sve $\mathsf{X}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,

(i3) Dokažite da je $\langle\mathcal{A},\mathcal{B}\rangle=\mathsf{Tr}(\mathcal{B}^{\tau}\mathcal{A})$ jedan skalarni proizvod na $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(i4) S obzirom na skalarni proizvod iz (i3), nađite neku ortonormiranu bazu potprostora
$$V=\mathcal{L}\left(\left\{\begin{bmatrix}-5&3\\7&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4&0\\8&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&0\\5&-2\end{bmatrix}\right\}\right).$$

7.37. Ispitni zadatak. Na skupu $\mathbb{R}_2[x]$ (realnih polinoma stepena manjeg ili jednakog 2) definisano je preslikavanje:
$$\langle p(x),q(x)\rangle=p'(-1)\,q'(-1)+p(0)\,q(0)+p''(1)\,q''(1),\quad \text{pri čemu je}\quad p'=\frac{dp}{dx}.$$

(i1) Dokažite da je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni proizvod na $\mathbb{R}_2[x]$.

(i2) Neka je dat potprostor $V=\mathcal{L}(x^2+1,-4\,x+1)$. Odredite ortonormirane baze potprostora V i $V^{\perp}$.

(i3) Prikažite vektor $p(x)=2\,x^2+4\,x+1$ u obliku $p=q+r$, pri čemu je $q\in V$, a $r\in V^{\perp}$. Da li je ovaj prikaz jedinstven?

(i4) Odredite rastojanje $d(p,V)$.

7.38. Ispitni zadatak. Neka su $p,\,q,\,r,\,s\in\mathbb{R}^4$. Definišemo preslikavanje,
$$Bx=2\,(p,x)\,q+2\,(q,x)\,p\qquad\qquad \{(\cdot\,,\cdot)\text{- standardni skalarni proizvod }\}.$$

(i1) Dokažite da je B linearan operator.

(i2) Ako je $\|p\|=\|q\|$ dokažite da je $r=p+q$ (ako je $r\neq 0$) sopstveni vektor operatora B i nađite odgovarajuću sopstvenu vrednost.

(i3) U zavisnosti o rangu skupa $\{p,q\}$ odredite po jednu bazu za $\mathsf{Im}B$ i $\mathsf{Ker}B$.

(i4) Ako je $e=(p,q,r,s)$ ortonormirana baza nađite matricu operatora B u bazi e.

7.39. Generalizacija Pitagorine[15] teoreme. Neka je $\{v_1,\dots,v_k\}$ ortogonalan sistem vektora u unitarnom prostoru V. Dokažite da važi formula:
$$\|v_1+v_2+\cdots+v_k\|^2=\|v_1\|^2+\|v_2\|^2+\cdots+\|v_k\|^2\,.$$

[15] Pitagora.

7.40. Gramova matrica. Neka je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ proizvoljna baza u unitarnom prostoru V i neka su $v(e) = (v_1, \ldots, v_n)^\tau$ i $w(e) = (w_1, \ldots, w_n)^\tau$ bilo koja dva vektora dati svojim koordinatama u bazi e. Pokažite da je

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, v_i\, \overline{w_j}, \qquad \text{pri čemu je } \alpha_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle\,.$$

Nađite i izraz za $\|v\|$.

7.41. Gramova determinanta. Neka su $f_1,\, f_2, \ldots, f_k$ neprekidne realne funkcije na intervalu $[a, b]$. Dokažite da je

$$\Delta = \begin{vmatrix} \int_a^b f_1^2(t)\,dt & \int_a^b f_1(t)\,f_2(t)\,dt & \ldots & f_1(t)\,f_k(t)\,dt \\ \int_a^b f_2(t)\,f_1(t)\,dt & \int_a^b f_2(t)^2\,dt & \ldots & f_2(t)\,f_k(t)\,dt \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b f_k(t)\,f_1(t)\,dt & \int_a^b f_k(t)\,f_2(t)\,dt & \ldots & \int_a^b f_k^2(t)\,dt \end{vmatrix} \geq 0\,,$$

a zatim da je skup funkcija $\{f_1, \ldots, f_k\}$ linearno zavisan ako i samo ako je $\Delta = 0$.

7.42. Linearni operatori i skalarni proizvod. Dokažite da preslikavanje δ definisano u **7.13** Primedba zaista ima osobine (i1) i (i2), tj. da je antilinearni izomorfizam.

7.43. Hermitski adjungovani operatori i matrice. Pokažite kontraprimerom da tvrđenje Propozicije **7.14** nije tačno ako e nije ortonormirana baza.

7.44. Hermitski adjungovani operatori i matrice. Dokažite da adjungovani operator iz **7.14** zadovoljava iste relacije kao i adjungovana matrica iz **7.10** Propozocija.

7.45. Ortogonalni projektori. Neka su P_1 i P_2 ortogonalni projektori. Da li su i kada su $P_1\,P_2$ i $P_1 + P_2$ ortogonalni projektori?

7.46. Ortogonalni projektori. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ linearni operator i neka je M potprostor od V. Dokažite da su ekvivalentni sledeći iskazi:

(i1) M i $M^\perp$ su invarijantni za A.

(i2) M je invarijantni za A i A^*.

(i3) $A\,P = P\,A$, pri čemu je P ortogonalni projektor na M.

7.47. Hermitski i koso hermitski operatori. Sopstveni vektori hermitskog (koso hermitskog) operatora koji pripadaju međusobno različitim sopstvenim vrednostima međusobno su normalni. Dokažite !!

Rešenje. Neka je A hermitski operator, tj. neka je $A = A^*$ i neka su λ, μ dve različite sopstvene vrednosti, a v i w odgovarajući sopstveni vektori tj. $Av = \lambda\, v$ i $Aw = \mu\, w$ $(v, w \neq 0)$. Računamo,

$$\lambda\,\langle v, w\rangle = \langle \lambda\, v, w\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle v, A^*w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \langle v, \mu\, w\rangle = \overline{\mu}\langle v, w\rangle \quad \text{odakle je} \quad (\lambda - \overline{\mu})\,\langle v, w\rangle = 0.$$

Tako da je $\langle v, w\rangle = 0$, jer je $\lambda \neq \mu = \overline{\mu}$ (**7.17** (i1) iz Teoreme 1).

7.48. Unitarni operatori. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ linearan operator na unitarnom prostoru V koji čuva ortogonalnost, tj. za kojeg važi sledeća implikacija: *ako je* $\langle v, w\rangle = 0$ *onda je i* $\langle Av, Aw\rangle = 0$. *Dokažite da postoje* $\alpha \in \mathbb{C}$ *i* B *unitaran operator na* V *takav da je* $A = \alpha\, B$.

7.49. Normalni operatori. Ako je N normalan operator na unitarnom prostoru dokaži da je $V = \mathsf{Ker}\,N \oplus \mathsf{Im}\,N$.

7.50. Linearni operatori na unitarnom prostoru. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\,V$ linearan operator na unitarnom prostoru dokažite da je tada $\mathsf{Im}\,A = \mathsf{Im}\,A\,A^*$.

7.51. Normalni operatori. Neka je $N \in \mathsf{Hom}\,V$ normalan operator i M invarijantan potprostor za operatore N i N^*. Dokažite da je $N_{|M}$ restrikcija operatora N na M, takođe normalan operator.

7.52. Normalni operatori. Neka je $N \in \mathsf{Hom}\, V$ normalan operator. Pokažite sledeće implikacije:

(i1) ako je $N^2 = N$ tada je N je hermitski operator.

(i2) ako je $N^2 = 0$ onda je $N = 0$.

7.53. Normalni operatori. Neka je V unitaran vektorski prostor i neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ linearni operator. Dokažite da je A normalan ako i samo ako postoji polinom $p(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ takav da je $N^* = p(N)$.

7.54. Normalni operatori. Neka je V kompleksan unitarni prostor i N neka je normalan operator.

(i1) Dokažite da $\forall\, m \in \mathbb{N}$, postoji operator T, takav da je $T^m = N$.

(i2) Koliko najviše može da postoji takvih operatora ($m-$tih korena iz N,) a koliko najmanje.

7.55. Hermitski operatori. Hermitski operator A je strogo pozitivan ako i samo ako je $\mathsf{Sp}\,(A) \subset (0, +\infty)$. Dokažite !

7.56. Hermitski i unitarni operatori. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ hermitski operator. Pokažite da je dobro definisan linearni operator $(A - i\, I)^{-1}\, (A + i\, I)$ i da je on unitaran.

Rešenje. Kako je operator A hermitski postoji ortonormirana baza e u kojoj je matrica operatora A dijagonalna i na dijagonali su, $\lambda_j\, (j = 1, \ldots, n = \mathsf{dim} V)$, realne sopstvene vrednosti. Dakle, matrica operatora $(A - i\, I)(e) = \mathsf{diag}[\lambda_1 - i, \ldots, \lambda_n - i]$. Odakle sledi da su sve sopstvene vrednosti operatora $A - i\, I\, (\lambda_j - i \neq 0\ (j = 1, \ldots, n))$ različite od nule, tako da je taj operator regularan i dobro je definisan operator $(A - i\, I)^{-1}$. Da bismo pokazali da je operator $(A - i\, I)^{-1}\, (A + i\, I)$ unitaran dovoljno je proveriti da postoji ortonormirana baza koja se sastoji od sopstvenih vektora i da sve sopstvene vrednosti tog operatora pripadaju jediničnoj sferi $\mathbb{S}^1$. U ortonormiranoj bazi e oba operatora $(A - i\, I)^{-1}$ i $(A + i\, I)$ predstavljena su dijagonalnim matricama, njihov proizvod, u istoj bazi, opet je dijagonalna matrica $\mathsf{diag}[(\lambda_1 - i)^{-1}(\lambda_1 + i), \ldots, (\lambda_n - i)^{-1}(\lambda_n + i)]$. Kako kompleksan broj $(\lambda + i)/(\lambda - i)$ pripada $\mathbb{S}^1$ za svako $\lambda \in \mathbb{R}$, tvrdnja odmah sledi.

7.57. Hermitski i unitarni operatori. Neka je $A \in \mathsf{Hom}\, V$ unitaran operator. Pokažite da ako je operator $A - I$ regularan tada je linearni operator $H = i\, (U - I)^{-1}\, (U + I)$ hermitski.

Rešenje. Za rešenje ovog zadatka može se koristiti ideja izložena u prethodnom zadatku. Kako je A unitaran postoji ortonormirana baza e takva da je matrica operatora $A(e) = \mathsf{diag}[e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_n}]$ $(0 \leq \phi_j < 2\pi,\ j = 1, \ldots, n)$. Uslov da je $A - I$ regularan operator implicira da 1 nije njegova sopstvena vrednost ili ekvivalentno da je $0 \neq \phi_j$, $(j = 1, \ldots, n)$. Prema tome u istoj ortonormiranoj bazi e imamo

$$\big(i(A - I)^{-1}\, (A + I)\big)(e) = i\, (A - I)^{-1}(e)\, (A + I)(e) = i\, \mathsf{diag}[(e^{i\phi_j} - 1)^{-1}]\, \mathsf{diag}[(e^{i\phi_j} + 1)] = \mathsf{diag}[i\, (e^{i\phi_j} - 1)^{-1}(e^{i\phi_j} + 1)],$$

Budući da je

$$\begin{aligned} i\, (e^{i\phi} - 1)^{-1}(e^{i\phi} + 1) &= i\, \frac{(\cos\phi + 1) + i \sin\phi}{(\cos\phi - 1) + i \sin\phi} = i\, \frac{((\cos\phi + 1) + i \sin\phi)((\cos\phi - 1) - i \sin\phi)}{((\cos\phi - 1) + i \sin\phi)((\cos\phi - 1) - i \sin\phi)} \\ &= i\, \frac{(\cos^2\phi - 1 + \sin^2\phi) + 2\, i \sin\phi \cos\phi}{2 - 2\cos\phi} = i\, \frac{2\, i \sin\phi \cos\phi}{4 \sin\frac{\phi}{2}} = -\, \mathsf{ctg}\, \frac{\phi}{2} \cos\phi \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

sledi da je $\mathsf{Sp}\,(H) \subset \mathbb{R}$. Ortonormirana baza e, sastoji se od sopstvenih vektora operatora H koji ima sve realne sopstvene vrednosti, dakle operator H je hermitski.

7.58. Unitarni operatori. Neka je A linearni operator na unitarnom kompleksnom prostoru V, za kojeg postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $A^k = \mathsf{id}_V$. Dokažite da je A unitaran operator.

7.59. Ispitni zadatak. Neka su $A, B \in \mathsf{Hom}\,(V)$, $(\mathsf{dim} V < \infty)$ pozitivni operatori koji komutiraju $(A\, B = B\, A)$ i pri čemu je B regularan operator. Neka je $f : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, funkcija definisana formulom:

$$f(x) = \frac{(Ax, x)}{(Bx, x)}\,.$$

(i1) Dokažite da je $f(\alpha\, x) = f(x), \forall\, x \in V$ i $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

(i2) Nađite minimum i maksimum funkcije f.

7.60. Pozitivni operatori. U dokazu **7.20** Teorema dajte detaljniji dokaz činjenice da pozitivni kvadratni koren $B (B^2 = A)$ komutira sa svim operatorima sa kojima komutira operator A.

7.61. Polarna dekompozicija. Neka su $A, U_1, U_2 \in \mathsf{Hom}\, V$ linearni operatori takvi da je $A > 0$ (strogo pozitivan) i U_1, U_2 unitarni operatori takvi da je $U_1\, A = A\, U_2$. Dokaži da je onda $U_1 = U_2$.

7.62. Polarna dekompozicija. Neka su A, B linearni operatori na unitarnom prostoru V, takvi da je $\|Ax\| = \|Bx\|$, $\forall\, x \in V$. Dokažite da postoji unitarni operator $U \in \mathsf{Hom}\, V$ takav da je $B = U\, A$.

Rešenje. Iz jednakosti normi odmah nalazimo,

$$\langle Ax, Ax\rangle = \langle Bx, Bx\rangle \qquad \text{odakle je} \qquad \langle A^* Ax, x\rangle = \langle B^* Bx, x\rangle,$$

kako su operatori A^*A i B^*B hermitski i pozitivni (**7.20 Teorema**, postoji jedinstveni pozitvni kvadratni koreni H_A i H_B takvi da je

$$H_A^2 = A^*A \quad \text{i} \quad H_B^2 = B^*B\,,$$

odakle nalazimo,

$$\langle H_A^2 x, x\rangle = \langle H_B^2 x, x\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle (H_A^2 - H_B^2)x, x\rangle = 0\,.$$

Kako su H_A i H_B hermitski operatori (i njihova razlika je hermitski operator) zaključujemo da je $H_A^2 = H_B^2$, a kako su još H_A i H_B pozitivni dobijamo da je $H_A = H_B$. Sada polarne dekompozicije operatora A i B, daju

$$\begin{aligned} &A = U_A\, H_A \ \text{ i } \ B = U_B\, H_B, \ \text{ i kako je } (H_A = H_B) \quad \Longrightarrow \quad H_A = U_A^*\, A \\ &\underline{B} = (U_B\, U_A^*)\, A = \underline{U\, A} \quad \Longrightarrow \quad U = U_B\, U_A^*. \end{aligned}$$

Dokaz je gotov jer je operator $U = U_B\, U_A^*$ očigledno unitaran kao proizvod dva unitarna.

BILINEARNE I KVADRATNE FORME

8.1. Definicija. U ovoj tački pretpostavljamo da je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. **Bilinearni funkcional (ili forma)** na $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\mathsf{A} : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ za koje važe sledeće aksiome,

(b1) $\mathsf{A}(\alpha\, v_1 + \beta\, v_2, w) = \alpha\, \mathsf{A}(v_1, w) + \beta\, \mathsf{A}(v_2, w)$ za sve $v_1,\, v_2,\, w \in V$ i $\alpha,\, \beta \in F$,

(b2) $\mathsf{A}(w, \alpha\, v_1 + \beta\, v_2) = \alpha\, \mathsf{A}(w, v_1) + \beta\, \mathsf{A}(w, v_2)$ za sve $v_1,\, v_2,\, w \in V$ i $\alpha,\, \beta \in F$.

Bilinearni funkcional A je **hermitski** ako uz aksiomu (b1) važi još i aksioma,

(b3) $\mathsf{A}(v, w) = \overline{\mathsf{A}(w, v)}$, za sve $v, w \in V$.

Primedba 1. Primetimo da u slučaju hermitskog bilinearnog funkcionala nad poljem $\mathbb{C}$ ne važi aksioma (b2) već (b2')

(b2') $\mathsf{A}(w, \alpha\, v_1 + \beta\, v_2) = \overline{\alpha}\, \mathsf{A}(w, v_1) + \overline{\beta}\, \mathsf{A}(w, v_2)$, za sve $v_1, v_2, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Primedba 2. Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ onda umesto termina hermitski koristimo izraz simetrični, jer se (b3) svodi na običnu simetriju, a aksiome (b2) i (b2') se podudaraju.

Važni primeri. 1. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

(i1) Ako su $f,\, g \in V^*$ proizvoljna dva linearna funkcionala onda je formulom,

$$\mathsf{A}(x, y) = f(x)\, g(y)\,,$$

definisan jedan bilinearni funkcional na V.

(i2) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ i ako je f linearan funkcional, a g antilinearan funkcional, tj ako važi $g(\lambda\, x) = \overline{\lambda}\, x$ za sve $x \in V$, i sve $\lambda \in \mathbb{C}$, onda je sa

$$\mathsf{A}(x, y) = f(x)\, g(y)\,,$$

definisan jedan hermitski bilinearni funkcional na V.

2. Neka je V vektorski prostor sa skalarnim proizvodom $\langle\, \cdot \,, \cdot \,\rangle$ nad poljem $\mathbb{F}$.

(i1) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tada je $\mathsf{A}(x, y) = \langle\, x, y\,\rangle$ simetrični bilinearni funkcional.

(i2) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ tada je $\mathsf{A}(x, y) = \langle\, x, y\,\rangle$ hermitski bilinearni funkcional.

3. Neka je $V = \mathcal{C}[a, b]$ vektorski prostor neprekidnih realnih funkcija na intervalu $[a, b]$ i neka je $\mathcal{K}(x, y)$ bilo koja neprekidna realna funkcija na $[a, b] \times [a, b]$. Tada je formulom

$$A(f, g) = \int_a^b \int_a^b \mathcal{K}(s, t)\, f(s)\, g(t)\, ds\, dt\,,$$

definisan bilinearni funkcional.

8.2. Matrica hermitskog bilinearnog funkcionala. Sada bismo hteli, analogno kao u slučaju linearnih operatora, da nađemo najmanji skup podataka koji jednoznačno određuju dati bilinearni funkcional.

Preciznije, neka je A bilinearni funkcional na V i neka je e neka baza od V, i sada definišemo skalare, $\alpha_{ji} = \mathsf{A}(e_i, e_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Tvrdimo da n^2 skalara $\alpha_{ij}\, i, j = 1, 2, \ldots, n$ u potpunosti određuju bilinearni funkcional A.

Zaista, neka su $v\,, w \in V$ proizvoljni vektori, tada je $v = \sum_{i=1}^n v_i\, e_i$ i $w = \sum_{i=1}^n w_i\, e_i$, i sada zbog bilinearnosti imamo

$$\mathsf{A}(v, w) = \mathsf{A}\Big(\sum_{i=1}^n v_i\, e_i, \sum_{j=1}^n w_j\, e_j\Big) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i\, w_j\, \mathsf{A}(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n v_i\, w_j\, \alpha_{ji}. \tag{8.1}$$

Prethodna formula (8.1) pokazuje da je bilinearni funkcional A u potpunosti određen sa n^2 skalara α_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Primetimo da svakom bilinearnom funkcionalu A možemo dodelimo matricu $\mathcal{A} = \mathsf{A}(e) = (\alpha_{ij})$ i vidimo da važi formula,

$$\mathsf{A}(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ji}\, v_i\, w_j = (w_j)^\tau\, (\alpha_{ji})\, (v_i) = w^\tau \mathcal{A}\, v. \tag{8.2}$$

Drugim rečima svaki bilinearni funkcional dopušta predstavljanje u obliku proizvoda matrica.

U slučaju da je A hermitski bilinearni funkcional tada zbog (b3) imamo,

$$\alpha_{ji} = \mathsf{A}(e_i, e_j) = \overline{\mathsf{A}(e_j, e_i)} = \overline{\alpha_{ij}}, \qquad \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

tj. matrica $\mathcal{A}$ je hermitska, i formula (8.2) prima oblik,

$$\mathsf{A}(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ji}\, v_i\, \overline{w_j} = (\overline{w_j})^\tau\, (\alpha_{ji})\, (v_i) = \overline{w}^{\,\tau} \mathcal{A}\, v. \tag{8.3}$$

Matrica $\mathcal{A} = \mathsf{A}(e) = (\alpha_{ij})$ naziva se matrica bilinearnog funkcionala A u bazi e.

Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. *Neka je A bilinearni funkcional na V i neka je e neka baza od V, i neka je $\mathcal{A} = \mathsf{A}(e) = (\alpha_{ij})$ matrica bilinearnog funkcionala u bazi e. Tada za proizvoljne vektore $v, w \in V$, važi formula,*

$$\mathsf{A}(v, w) = w^\tau \mathcal{A}\, v.$$

Ako je A hermitski bilinearni funkcional tada je matrica $\mathcal{A} = \mathsf{A}(e) = (\alpha_{ij})$ hermitska i za proizvoljne vektore $v, w \in V$, važi formula,

$$\mathsf{A}(v, w) = \overline{w}^{\,\tau} \mathcal{A}\, v.$$

Primer. Neka je na $\mathbb{R}^3$ definisan bilinearni funkcional $\mathsf{A}(x, y)$ formulom,

$$\mathsf{A}(x, y) = x_1\, y_1 - 2\, x_2\, y_2 + 4\, x_3\, y_3 \quad \text{gde je} \quad x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3)\,.$$

Odredimo matricu ove bilinearne forme u bazi $f_1 = (1, -1, -1)$, $f_2 = (1, 1, 1)$ i $f_3 = (1, 1, -1)$, a zatim i njen eksplicitni oblik u toj bazi.

Prema formuli iz prethodne teoreme,

$$\mathsf{A}(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ji}\, v_i\, w_j\,,$$

dobijamo matricu bilinearne forme $\mathsf{A}(x, y)$ u datoj bazi f,

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \mathsf{A}(f_1, f_1) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 - 2 + 4 = 3 = \alpha_{22} = \alpha_{33}\,,\\
\alpha_{12} &= \mathsf{A}(f_2, f_1) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 2 - 4 = -1 = \alpha_{21}\,,\\
\alpha_{13} &= \mathsf{A}(f_3, f_1) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 + 2 + 4 = 7 = \alpha_{31}\,,\\
\alpha_{23} &= \mathsf{A}(f_3, f_2) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 - 2 - 4 = -5 = \alpha_{32}.
\end{aligned}$$

Tako da je $\mathsf{A}(e) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \\ 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, matrica bilinearne forme A u bazi f. I na kraju odredimo eksplicitni oblik bilinearne forme u bazi f: ako su redom (x_1', x_2', x_3') i (y_1', y_2', y_3') koordinate vektora x i y u bazi (f_1, f_2, f_3) onda je

$$\mathsf{A}(x, y) = 3\, x_1'\, y_1' - x_1'\, y_2' + 7\, x_1'\, y_3' - x_2'\, y_1' + 3\, x_2'\, y_2' - 5\, x_2'\, y_3' + 7\, x_3'\, y_1' - 5\, x_3'\, y_2' + 3\, x_3'\, y_3'\,.$$

8.3. Kongruentnost matrica. Rang i jezgro hermitskog bilinernog funkcionala. Prethodni primer sadrži i jedan klasičan problem linearne algebre: zavisnost matrica hermitskog bilinearnog funkcionala o bazama

e i f. Postupajući sada kao i u slučnim situacijama, kao što je zapis linearnog operatora u različitim bazama imamo: Neka je T operator prelaska sa baze e u bazu f, tj. neka je

$$f_j = Te_j = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij}\, e_i\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,.$$

Sada je

$$\begin{aligned}[\mathsf{A}(f)]_{ij} &= \alpha'_{ij} = \mathsf{A}(f_j, f_i) = \mathsf{A}(Te_j, Te_i) = \mathsf{A}\Big(\sum_{p=1}^{n} \tau_{pj}\, e_p\,, \sum_{q=1}^{n} \tau_{qi}\, e_q\Big) = \sum_{p,q=1}^{n} \tau_{pj}\, \overline{\tau_{qi}}\, \mathsf{A}(e_p, e_q)\\ &= \sum_{p,q=1}^{n} \overline{\tau_{qi}}\, \tau_{pj}\, \alpha_{qp} = \sum_{q=1}^{n} \overline{\tau_{qi}} \Big(\sum_{p=1}^{n} \alpha_{qp} \tau_{pj}\Big) = \sum_{q=1}^{n} [T^*]_{iq}\, [\mathsf{A}(e)T]_{qj} = [T^* \mathsf{A}(e)\, T]_{ij}.\end{aligned}$$

Kako je prethodna relacija tačna za sve $i, j = 1, \ldots, n$, dobijamo važnu formulu:

$$\mathsf{A}(f) = T^* \mathsf{A}(e)\, T\,. \tag{8.4}$$

Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. *Neka je A hermitski bilinearni funkcional na unitarnom vektorskom prostoru V i neka su $A(e)$ i $A(f)$ matrice hermitskog bilinearnog funkcionala u bazama e i f, redom. Tada važi formula,*

$$A(f) = T^* A(e)\, T,$$

gde je T matrica prelaska sa baze e u bazu f.

Primedba. **1.** Ako je V realni vektorski prostor, tada se formula (8.4) svodi na $\mathsf{A}(f) = T^\tau \mathsf{A}(e)\, T$.

2. Kako je i skalarni proizvod hermitski bilinearni funkcional i za njega važe zaključci prethodne teoreme o zavisnosti matrice skalarnog proizvoda u različitim bazama.

Definicija. Relacija (8.4) omogućuje nam da uvedemo relaciju kongruentnosti kvadratnih matrica. Za dve matrice $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ kažemo da su kongruentne, što obeležavamo sa $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, akko postoji regularna matrica $\mathcal{T} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ takva da je

$$\mathcal{B} = \mathcal{T}^* \mathcal{A}\, \mathcal{T}\,.$$

Propozicija 1. *Relacija kongruentnosti matrica je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Analogan dokazu da je sličnost matrica relacija ekvivalencije, samo treba primetiti, u dokazu simetričnosti, da je $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$. □

Iz (8.4) sledi da matrice $\mathsf{A}(f)$ i $\mathsf{A}(e)$ imaju isti rang, jer su T i T^* regularne matrice. Tako da se može dobro definisati broj koji se zove rang bilinearnog hermitskog funkcionala, kao rang matrice hermitskog bilinearnog funkcionala $\mathsf{A}(e)$, u proizvoljnoj bazi e. Kažemo da je funkcional regularan ako je $\mathsf{rang}(\mathsf{A}(e)) = \mathsf{dim} V$.

Definicija. Neka je $\mathsf{A}(v, w)$ bilinearni funkcional na vektorskom prostoru V. Skup $\mathsf{N_A} = \{v \in V \mid \mathsf{A}(v, w) = 0,\ \forall\, w \in V\}$ nazivamo jezgrom bilinearnog funkcionala A.

Osnovna svojstva jezgra bilinearnog funkcionala sadržana su u sledećoj propoziciji.

Propozicija 2. *Neka je A bilinearni funkcional na vektorskom prostoru V, i neka je e neka baza od V. Tada je $\mathsf{N_A} = Ker\, A(e)$.*

Dokaz. Neka je $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ neka baza od V, i neka je $v \in \mathsf{N_A}$ tada je

$$v = \eta_1\, e_1 + \eta_2\, e_2 + \cdots + \eta_n\, e_n \quad \text{i} \quad \mathsf{A}(v, e_i) = 0, \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Poslednje jednakosti definišu homogeni linearni sistem u $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathsf{A}(v, e_1) = \mathsf{A}(\eta_1\, e_1 + \cdots + \eta_n\, e_n, e_1) = \eta_1\, \mathsf{A}(e_1, e_1) + \cdots + \eta_n\, \mathsf{A}(e_n, e_1)\,,\\ 0 &= \mathsf{A}(v, e_2) = \mathsf{A}(\eta_1\, e_1 + \cdots + \eta_n\, e_n, e_2) = \eta_1\, \mathsf{A}(e_1, e_2) + \cdots + \eta_n\, \mathsf{A}(e_n, e_2)\,,\\ &\vdots \\ 0 &= \mathsf{A}(v, e_n) = \mathsf{A}(\eta_1\, e_1 + \cdots + \eta_n\, e_n, e_n) = \eta_1\, \mathsf{A}(e_1, e_n) + \cdots + \eta_n\, \mathsf{A}(e_n, e_n)\,.\end{aligned}$$

Kako je matrica ovog sistema matrica bilinearnog funkcionala $A(e)$ sledi da je $\mathsf{N_A} = \mathsf{Ker}\, A(e)$. □

Posledica. *N_A je potprostor od V.*

8.4. Kvadratne forme (funkcionali). Neka je $\mathsf{A}(v,w)$ simetrični bilinearni funkcional (forma), onda je formulom $\mathsf{q}(v)=\mathsf{A}(v,v)$ definisano preslikavanje $\mathsf{q}:V\longrightarrow\mathbb{F}$ koje se zove **kvadratna forma (funkcional)**. $\mathsf{A}(v,w)$ zove se **polarna forma** kvadratne forme q. Ako je $\mathsf{A}(v,w)$ hermitska bilinearna forma onda pridruženi kvadratni funkcional nazivamo **hermitski kvadratni funkcional**. Osnovna svojstva kvadratnih i hermitskih kvadratnih funkcionala sadržana su u sledećoj teoremi.

Teorema. *Neka je V vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$.

(i1) *Svaka kvadratna forma q na V zadovoljava relaciju paralelograma,*

$$\mathsf{q}(v+w)+\mathsf{q}(v-w)=2\,(\mathsf{q}(v)+\mathsf{q}(w)),\qquad \text{za sve}\quad v,\,w\in V\,.$$

(i2) *Ako je q hermitski kvadratni funkcional na V, tada je*

(i2a) $q(v)\in\mathbb{R}\,,\quad$ *za sve* $v\in V$,

(i2b) $q(i\,v)=q(v),\quad$ *za sve* $v\in V$.

(i3) *Polarna forma A potpuno je određena svojom kvadratnom formom q.*

Dokaz. (i1) Dokaz sledi iz,

$$\begin{aligned}\mathsf{q}(v+w)+\mathsf{q}(v-w)&=\mathsf{A}(v+w,v+w)+\mathsf{A}(v-w,v-w)=(\mathsf{A}(v,v)+\mathsf{A}(v,w)+\mathsf{A}(w,v)+\mathsf{A}(w,w))\\&\quad+\,(\mathsf{A}(v,v)-\mathsf{A}(v,w)-\mathsf{A}(w,v)+\mathsf{A}(w,w))=2\,(\mathsf{q}(v)+\mathsf{q}(w))\,.\end{aligned}$$

(i2) Prva tvrdnja direktno sledi iz $\mathsf{q}(v)=\mathsf{A}(v,v)=\overline{\mathsf{A}(v,v)}$, a druga analogno sledi iz

$$\mathsf{q}(i\,v)=\mathsf{A}(i\,v,i\,v)=i\,\bar{i}\,\mathsf{A}(v,v)=\mathsf{A}(v,v)=\mathsf{q}(v).$$

(i3) Ako je A simetrična bilinearna forma tada iz (i1) lako sledi,

$$\mathsf{A}(v,w)=\frac{1}{4}\Big(\mathsf{q}(v+w)-\mathsf{q}(v-w)\Big)\,,\qquad \text{za sve } v,w\in V,$$

a ako je A hermitska bilinearna forma tada korišćenjem (i1) i (i2) za sve $v,w\in V$ dobijamo formulu,

$$\mathsf{A}(v,w)=\frac{1}{4}\Big(\mathsf{q}(v+w)-\mathsf{q}(v-w)\Big)+\frac{i}{4}\Big(\mathsf{q}(v+i\,w)-\mathsf{q}(v-i\,w)\Big)\,,$$

i dokaz je gotov. □

Definicija. Za hermitsku kvadratnu formu $\mathsf{q}(v)=\mathsf{A}(v,v)$ kažemo da je pozitivna ako je za svaki $x\in V$, $\mathsf{q}(v)\geq 0$. Među pozitivnim formama najvažniju ulogu igraju **strogo pozitivne forme**, tj. one kod kojih je $\mathsf{q}(v)=0$ samo za nula vektor (ili ekvivalentno za sve $v\neq 0\,,\ \mathsf{q}(v)>0$).

Primer. Neka je $\dim V=n$. Forma

(p) $q(v)=v_2^2+v_3^2+\cdots+v_n^2$ je pozitivna, ali nije strogo pozitivna jer je $q(e_1)=0$ gde je $e_1=(1,0,\ldots,0)$.

(sp) $q(v)=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2$ je strogo pozitivna kvadratna forma.

Primetimo da je svaki skalarni proizvod primer hermitskog bilinearnog funkcionala kojem odgovara strogo pozitivna hermitska kvadratna forma.

8.5. Karakterizacija hermitskih bilinearnih funkcionala u unitarnom prostoru. U prethodnoj glavi, u tački **7.13** posvećenoj opisu linearnih funkcionala u unitarnim prostorima videli smo da za svaki linearni funkcional $f\in V^*$ postoji jedinstven vektor v_0 takav da je $f(x)=\langle x,v_0\rangle$.

Sada bismo hteli naći analognu reprezentaciju za bilinearni hermitski funkcional na V. Tako dobijamo sledeću teoremu.

Teorema (O reprezentaciji hermitskog bilinearnog funkcionala u unitarnim prostorima). *Neka je V unitaran vektorski prostor. $A(v,w)$ je hermitski bilinearan funkcional ako i samo ako postoji jedinstven hermitski operator $A:V\longrightarrow V$ takav da je*

$$A(v,w)=\langle Av,w\rangle\,, \tag{8.5}$$

pri čemu je $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ skalarni proizvod u V.

Dokaz. Dovoljnost. Neka je A hermitski operator. Zbog bilinearnosti skalarnog proizvoda, formulom $\mathsf{A}(v,w) = \langle Av, w\rangle$, definisano je preslikavanje koje je linearno u 1. argumentu (jer su i skalarni proizvod ($\langle\cdot,\cdot\rangle$) i linearni operator ($A$) linearni u 1. argumentu, pa je i njihova kompozicija linearna). Potrebno je još pokazati da preslikavanje A zadovoljava aksiomu (b3). Budući da je operator A hermitski, za sve $v,\, w \in V$, imamo redom,

$$\mathsf{A}(v,w) = \langle Av, w\rangle = \langle v, A^*w\rangle = \overline{\langle A^*w, v\rangle} = \overline{\langle Aw, v\rangle} = \overline{\mathsf{A}(w,v)}\,,$$

odakle sledi da je A hermitski bilinearni funkcional.

Nužnost. Neka je $\mathsf{A}(v,w)$ neki hermitski bilinearni funkcional na V, i posmatrajmo linearno preslikavanje $B_w(v) = \mathsf{A}(v,w)$. Preslikavanje B_w je linearno jer za A važi aksioma (b1). Sada teorema o reprezentaciji linearnih funkcionala u unitarnim prostorima daje egzistenciju jedinstvenog vektora $w^* \in V$ takvog da je $B_w(v) = \langle v, w^*\rangle$, čime je definisano preslikavanje $w \longrightarrow w^*$ formulom $w^* = A(w)$. Pokažimo prvo da je ovo preslikavanje linearni operator.

Homogenost. S jedne strane, iz definicije sledi da je $B_{\alpha w}(v) = \langle v, A(\alpha w)\rangle$, dok je s druge strane

$$B_{\alpha w}(v) = \mathsf{A}(v,\alpha w) = \overline{\alpha}\,\mathsf{A}(v,w) = \overline{\alpha}\,B_w(v) = \overline{\alpha}\,\langle v, A(w)\rangle = \langle v, \alpha A(w)\rangle\,.$$

Kako se leve strane ovih jednakosti podudaraju za sve $\alpha \in \mathbb{C}$, i sve $v,\, w \in V$ moraju se podudarati i desne, odakle seledi homogenost.

Aditivnost. Slično kao i u dokazu homogenosti za sve $v,\, w_1,\, w_2 \in V$ imamo,

$$\begin{aligned}\langle v, A(w_1)+A(w_2)\rangle &= \langle v, A(w_1)\rangle + \langle v, A(w_2)\rangle = B_{w_1}(v) + B_{w_2}(v)\\ &= \mathsf{A}(v,w_1) + \mathsf{A}(v,w_2) = \mathsf{A}(v, w_1+w_2) = B_{w_1+w_2}(v) = \langle v, A(w_1+w_2)\rangle\,.\end{aligned} \tag{8.6}$$

Aditivnost je posledica jednakosti prvog i poslednjeg izraza u (8.6).

Hermitičnost. Hermitičnost sledi iz sledećeg niza jednakosti,

$$\langle v, A(w)\rangle = \mathsf{A}(v,w) = \overline{\mathsf{A}(w,v)} = \overline{\langle w, A(v)\rangle} = \langle A(v), w\rangle = \langle v, A^*(w)\rangle\,,$$

koje važe za proizvoljne $v,\, w \in V$. □

Primedba. Ova teorema ima nekoliko veoma važnih posledica. Jedna od tih posledica jeste da je broj svih bilinearnih hermitskih funkcionala na V jednak broju svih hermitskih operatora na V. Ako na bilinearne hermitske funkcionale nametnemo uslove kojima oni postaju skalarni proizvodi (nedegenerisanost i pozitivnu definitnost) onda zaključujemo da skalarnih proizvoda na V ima koliko i strogo pozitivnih operatora na V. Dakle, svakom strogo pozitivnom operatoru odgovara tačno jedan skalarni proizvod, koji je dat formulom:

$$\langle v, w\rangle_A = (Av, w) = \overline{w}^{\tau}\, A\, v, \qquad \text{za sve } v,\, w \in V,$$

pri čemu je $(\cdot\,,\cdot)$ standardni skalarni proizvod na $V \cong \mathbb{C}^n\,(\mathbb{R}^n)$.

8.6. Zakon inercije za hermitski kvadratni funkcional. Neka je $\mathsf{A}(v,w)$ hermitski bilinearni funkcional na V, koji je polarna forma hermitskog kvadratnog funkcionala $\mathsf{q}(v) = \mathsf{A}(v,v)$, onda iz **8.4.** znamo da je

$$\mathsf{A}(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ji} v(e)_i\, \overline{w(e)_j} \qquad \text{i} \qquad \mathsf{q}(v) = \mathsf{A}(v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ji} v(e)_i\, \overline{v(e)_j},$$

pri čemu je $e = (e_1,\dots,e_n)$ neka ortonormirana baza u V, $\alpha_{ji} = \mathsf{A}(e_i,e_j)$, i $v(e)_i$ je $i.$–ta komponenta vektora v u bazi e. Tada je matrica hermitskog bilinearnog funkcionala $\mathsf{A}(e)$ hermitska matrica, i ona se podudara sa matricom odgovarajućeg hermitskog operatora $A(e)$ definisanog formulom (8.5). Kao što znamo od ranije, svaka hermitska matrica može se svesti na dijagonalni oblik, tj. postoji unitarna matrica, $\mathcal{U}$, prelaska u novu ortonormiranu bazu, f, u kojoj je matrica hermitskog funkcionala dijagonalna,

$$\mathcal{U}^*A(e)\,\mathcal{U} = \mathcal{U}^*\mathsf{A}(e)\,\mathcal{U} = \mathsf{A}(f) = A(f) = \mathsf{diag}\,[\lambda_1,\dots,\lambda_n]\,.$$

Primetimo da se zbog unitarnosti matrice $\mathcal{U}$ gornja formula svodi na formulu za promenu baze linearnog operatora, $\mathcal{U}^{-1}A(e)\,\mathcal{U} = A(f)$. U ortonormiranoj bazi f hermitski bilinearni funkcional A poprima mnogo jednostavniji oblik,

$$\mathsf{A}(v,w) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v(f)_i\, \overline{w(f)_i},$$

pri čemu je $\lambda_i = \mathsf{A}(f_i,f_i)$. U ovoj bazi lako nalazimo rang funkcionala A i on je jednak broju sopstvenih vrednosti λ_i, $i = 1,\dots,n$ matrice $\mathsf{A}(f)$ koje su različite od nule. Pretpostavimo da je $\mathsf{rang}\,\mathsf{A} = r$ i da su

$\lambda_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, r,$ i da je $\lambda_i = 0, i = r+1, \ldots, n.$ Pridruženi kvadratni funkcional $\mathsf{q}(v) = \mathsf{A}(v,v)$ u ovoj bazi ima jednostavan oblik,

$$\mathsf{q}(v) = \mathsf{A}(v,v) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, |v(f)_i|^2. \tag{8.7}$$

Ova ortonormirana baza u kojoj je matrica kvadratnog funkcionala najjednostavnija zove se kanonska baza. Kanonska baza nije jedinstvena, ali broj negativnih i broj pozitivnih elemenata u nizu $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ ne zavisi o kanonskoj bazi, što je sadržaj veoma poznate Silvesterove [1] teoreme i tradicionalno se zove zakon inercije hermitskog kvadratnog funkcionala.

Primetimo da iz kanonske baze f možemo preći i na ortogonalnu bazu g [2] koja je definisana na sledeći način:

$$g_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} f_i, \quad i = 1, \ldots, r, \qquad \text{i} \quad g_i = f_i, \quad i = r+1, \ldots, n,$$

ovaj kvadratni funkcional prima najjednostavniji oblik,

$$\mathsf{q}(v) = \mathsf{A}(v,v) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \, |v(g)_i|^2, \qquad \text{pri čemu su } \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\,.$$

Teorema (Silvester). *Neka je $q(v) = A(v,v)$ hermitska kvadratna forma ranga r. Tada postoji ortonormirana kanonska baza e kvadratne forme q takva da je,*

$$q(v) = A(v,v) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, |v(e)_i|^2, \qquad \text{gde su } \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, r\,.$$

Ako su e i f dve kanonske baze kvadratne forme q, i ako je

$$q(v) = A(v,v) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, |v(e)_i|^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i' \, |v(f)_i|^2,$$

tada nizovi $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ i $(\lambda_1', \lambda_2', \ldots \lambda_r')$ imaju isti broj pozitivnih i negativnih elemenata.

Dokaz. *Egzistencija* kanonske baze dokazana je u prethodnom pasusu, vidi (8.7).

Inercija. BSO možemo pretpostaviti da se u nizovima $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ i $(\lambda_1', \lambda_2', \ldots \lambda_r')$ prvo nalaze pozitivni elementi, jer odgovarajućim prenumeracijama prvih r vektora baza e i f to možemo postići. Tako da sada imamo

$$\begin{aligned}\mathsf{A}(v,v) &= \lambda_1|v(e)_1|^2 + \lambda_2|v(e)_2|^2 + \cdots + \lambda_p|v(e)_p|^2 - \lambda_{p+1}|v(e)_{p+1}|^2 - \cdots - \lambda_r|v(e)_r|^2 \\ &= \lambda_1'|v(f)_1|^2 + \lambda_2'|v(f)_2|^2 + \cdots + \lambda_q'|v(f)_q|^2 - \lambda_{q+1}'|v(f)_{q+1}|^2 - \cdots - \lambda_r'|v(f)_r|^2,\end{aligned}$$

pri čemu su svi $\lambda_i, \lambda_i' \geq 0,\ i = 1, \ldots, r.$ Tvrdimo da je $p = q.$ Pretpostavimo suprotno, tj. da je npr. $p > q,$ tada skup $\{e_1, \ldots, e_p, f_{q+1}, \ldots, f_n\}$ ima više od $n = \dim V$ vektora, pa je linearno zavisan, i postoje skalari $\nu_1, \ldots, \nu_p, \nu_{q+1}', \ldots, \nu_r'$ koji nisu svi nula tako da je

$$0 \neq v_0 = \nu_1\, e_1 + \nu_2\, e_2 + \cdots + \nu_p\, e_p = \nu_{q+1}'\, f_{q+1} + \nu_{q+2}'\, f_{q+2} + \cdots + \nu_r'\, f_n\,.$$

Primetimo da vektor v_0 nije nula vektor, jer kada bi bio sledilo bi da su svi $\nu_i = 0,\ i = 1, \ldots, p$ i $\nu_i' = 0,\ i = q+1, \ldots, n,$ što je u kontradikciji sa izborom ovih skalara. Dakle, sada imamo prikaz vektora v_0 u dve baze: $v_0(e) = (\nu_1, \ldots, \nu_p, 0, \ldots, 0)^\tau$ i $v_0(f) = (0, \ldots, 0, \nu_{q+1}', \ldots, \nu_n')^\tau$ tako da je s jedne strane,

$$\mathsf{A}(v_0, v_0) = \lambda_1|\nu_1|^2 + \lambda_2|\nu_2|^2 + \cdots + \lambda_p|\nu_p|^2 > 0, \qquad \text{dok je s druge strane}$$

$$\mathsf{A}(v_0, v_0) = -\lambda_{q+1}'|\nu_{q+1}|^2 - \lambda_{q+2}'|\nu_{q+2}|^2 - \cdots + \lambda_r'|\nu_r|^2 \leq 0.$$

Ova kontradikcija pokazuje da je naša polazna pretpostavka $p > q$ pogrešna, tako da je $p \leq q,$ a onda na isti način zaključujemo da je i $q \leq p.$ Prema tome vidimo da je $p = q,$ što je i trebalo pokazati. ☐

Primedba. Dakle, vidimo da je broj p invarijanta funkcionala jer ne zavisi o kanonskoj bazi, a broj $s = p-(r-p)$ zove se signatura funkcionala. Dakle, hermitska kvadratna forma je u potpunosti određena svojim rangom i signaturom. Napomenimo ovde da ako je rang funkcionala maksimalan, tj. ako je $\mathsf{A}(v,w)$ nedegenerisan hermitski bilinearni funkcional onda se često pod signaturom tog funkcionala naziva uređeni par $(n-p, p)$.

---

[1] Sylvester, James Joseph, 1814-–1897, engleski matematičar.

[2] koja očigledno ne mora biti normirana

8.7. Dijagonalizacija hermitske kvadratne forme. Lagranžev algoritam. Pronalaženje neke kanonske baze u kojoj hermitska kvadratna forma ima najjednostavniji – dijagonalan oblik je jedno od najvažnijih pitanja u ovoj teoriji. U ovom poglavlju daćemo tri algoritma za nalaženje kanonske baze, i to

(i1) **Lagranževim postupkom**, koji se zasniva na nameštanju na potpun kvadrat sume pogodno izabranih članova,

(i2) **Jakobijevim postupkom** kojim trougaonim transformacijama polaznu formu svodim na zbir kvadrata,

(i3) **dijagonalizacijom hermitskog operatora** kojem u polaznoj bazi odgovara hermitska matrica $A(e)$ kojom je definisana polazna forma $\mathsf{q}(v)$ (vidi Silvesterovu teoremu).

Napomenimo da je prva metoda od veće praktične vrednosti od prethodne dve jer se može uvek primeniti. Druga metoda je primenjiva samo u slučaju kada je rang forme maksimalan. U poslednjoj metodi potrebno je izračunati sopstvene vrednosti nekog hermitskog operatora, što nije uvek jednostavno. Dakle, treća metoda je praktički primenjiva samo onda kada je lako izračunati sopstvene vrednosti matrice forme.

(i1) Lagranžev postupak za dijagonalizaciju hermitske kvadratne forme. Neka je

$$\mathsf{A}(v,v)=\mathsf{q}(v)=\mathsf{q}(v_1,\dots,v_n)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ji}\,v_i\,\overline{v_j}\,, \tag{8.8}$$

hermitska kvadratna forma. Kao što znamo ovoj formi odgovara jedinstvena hermitska matrica $\mathcal{A}=(\alpha_{ij})$. Naš cilj je da nađemo regularnu matricu $\mathcal{T}$ takvu da je matrica $\mathcal{T}^*\mathcal{A}\mathcal{T}$ dijagonalna, kada ova forma poprima najjednostavniji oblik

$$\mathsf{q}(v)=\mathsf{q}(v_1',\dots,v_n')=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,|v_i'|^2, \tag{8.9}$$

pri čemu je, $v_i=\sum_{j=1}^{n}t_{ij}\,v_j'$, ili $v_i'=\sum_{j=1}^{n}s_{ij}\,v_j$, $i=1,\dots,n\,.$

Ideja ovog algoritma zasniva se na nameštanju do potpunog kvadrata svih članova koji sadrže neki indeks i takav da je $\alpha_{ii}\neq 0$, a zatim eliminacije tog indeksa. Prilikom realizacije ovog algoritma pojavljuju se sledeće mogućnosti:

(i1) postoji indeks i takav da je $\alpha_{ii}\neq 0$.

(i2) $\alpha_{ii}=0$, $i=1,\dots,n$, ali postoji indeks $i\neq j$ takav da je $\alpha_{ij}\neq 0\,.$

(i1) Pretpostavimo da je npr. $\alpha_{11}\neq 0$ (što možemo BSO jer u suprotnom prenumeracijom promenljivih slučaj se svodi na $\alpha_{11}\neq 0$), tada (8.8) postaje,

$$\mathsf{q}(v)=\mathsf{q}(v_1,\dots,v_n)=\overline{v_1}\,(\alpha_{11}\,v_1+\alpha_{12}\,v_2+\cdots+\alpha_{1n}\,v_n)+v_1(\alpha_{21}\,\overline{v_2}+\cdots+\alpha_{n1}\,\overline{v_n})+\mathsf{s}(v_2,\dots,v_n)\,, \tag{8.10}$$

pri čemu je $\mathsf{s}(v_2,\dots,v_n)$, kvadratna hermitska forma u $v_2,\dots,v_n$. Uvedimo promenljive w_i, $i=1,\dots,n$ na sledeći način,

$$w_1=\frac{1}{\alpha_{11}}\,(\alpha_{11}\,v_1+\alpha_{12}\,v_2+\cdots+\alpha_{1n}\,v_n),\qquad w_i=v_i,\qquad i=2,\dots,n\,.$$

Ovu promenu baze zapisujemo kompaktnije u matričnom obliku,

$$\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} & -\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}} & \dots & -\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_0}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_n\end{bmatrix}.$$

Primetimo da u promenljivima $w_1,\dots,w_n$ polazna forma (8.8) ima jednostavniji oblik. Ako sada prvo uvedemo smenu,

$u=\dfrac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{12}\,v_2+\cdots+\alpha_{1n}\,v_n)$, vidimo da je $v_1=w_1-u$,

i ako zamenimo u (8.10) dobijamo da se desna strana od (8.10) mnogo pojednostavljuje,

$$\begin{aligned}\alpha_{11}(\overline{v_1}\,w_1+v_1\,(\overline{w_1}-\overline{v_1}))+\mathsf{s}(w_2,\dots,w_n)&=\alpha_{11}((\overline{w_1}-\overline{u})\,w_1+\overline{w_1}\,(w_1-u)-(\overline{w_1}-\overline{u})(w_1-u))+\mathsf{s}(w_2,\dots,w_n)\\ &=\alpha_{11}w_1\,\overline{w_1}\underbrace{-\alpha_{11}u\,\overline{u}+\mathsf{s}(w_2,\dots,w_n)}_{\mathsf{t}(w_2,\dots,w_n)}=\alpha_{11}w_1\,\overline{w_1}+\mathsf{t}(w_2,\dots,w_n)\\ &=\alpha_{11}|w_1|^2+\mathsf{t}(w_2,\dots,w_n).\end{aligned}$$

Ovu transformaciju moguće je naravno zapisati u kompaktnijem obliku korisreći matrice, tako imamo

$$\mathcal{T}_0^*\mathcal{A}\,\mathcal{T}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha'_{22} & \dots & \alpha'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha'_{n2} & \dots & \alpha'_{nn} \end{bmatrix},$$

pri čemu je matrica $\mathcal{S}_0 = \mathcal{T}_0^{-1}$. Primetimo da smo u matrici $\mathcal{T}_0^*\mathcal{A}\,\mathcal{T}_0$ sa $\alpha'_{ij},\ i,j=2,\dots,n,$ označili komponente hermitske matrice koja odgovara kvadratnoj hermitskoj formi $\mathsf{C}(w_2,\dots,w_n)$. Time je problem sveden na dijagonalizaciju kvadratne hermitske forme $\mathsf{C}(w_2,\dots,w_n)$, koja je reda $n-1$.

(i2) Možemo pretpostaviti da je npr. $\alpha_{12}\neq 0$, jer u suprotnom prenumeracijom promenljivih svaki drugi slučaj svodimo na ovaj. Sada (8.8) postaje:

$$\text{(8.11)}\qquad \mathsf{q}(v)=\mathsf{q}(v_1,\dots,v_n)=\overline{v_1}\,(\alpha_{12}\,v_2+\dots+\alpha_{1n}\,v_n)+v_1(\alpha_{21}\,\overline{v_2}+\dots+\alpha_{n1}\,\overline{v_n})+\mathsf{s}(v_2,\dots,v_n)\,,$$

pri čemu je $\mathsf{s}(v_2,\dots,v_n)$, kvadratna hermitska forma u $v_2,\dots,v_n$. Uvedimo promenljive $w_i,\ i=1,\dots,n$ na sledeći način:

$$w_1=v_1,\qquad w_2=(\alpha_{12}\,v_2+\dots+\alpha_{1n}\,v_n)-v_1,\qquad w_i=v_i,\ i=3,\dots,n\,,$$

ili matrično

$$\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \frac{1}{\alpha_{12}} & \frac{1}{\alpha_{12}} & -\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}} & \dots & -\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{12}}\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}}_{\mathcal{T}_0} \begin{bmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ \vdots\\ w_n\end{bmatrix}.$$

Ako označimo sa

$$u=(\alpha_{12}\,v_2+\dots+\alpha_{1n}\,v_n)-v_1,$$

iz formula za promenu baza vidimo da je $u=w_1+w_2$ i ako ovo zamenimo u (8.11) vidimo da desna strana od (8.11) postaje,

$$\begin{aligned}\overline{v_1}\,(\alpha_{12}\,v_2+\dots+\alpha_{1n}\,v_n)+v_1(\alpha_{21}\,\overline{v_2}+\dots+\alpha_{n1}\,\overline{v_n})+\mathsf{s}(v_2,\dots,v_n) &= \overline{w_1}\,u+w_1\,\overline{u}+\mathsf{s}(v_2,\dots,v_n)\\ =\overline{w_1}\,(w_1+w_2)+w_1(\overline{w_1+w_2})+\mathsf{s}(v_2,\dots,v_n) &= 2|w_1|^2+\overline{w_1}\,w_2+w_1\,\overline{w_2}+\mathsf{t}(w_2,\dots,w_n)\,,\end{aligned}$$

pri čemu u formi $\mathsf{t}(w_2,\dots,w_n)$, nema članova oblika $|w_1|^2,\overline{w_1}\,w_2$ i $w_1\,\overline{w_2}$. Prema tome polazna forma q u promenljivima $w_1,\dots,w_n$ ima koeficijent uz $|w_1|^2$ različit od nule, pa je ovaj slučaj sveden na (i1).

Ili matrično,

$$\mathcal{T}_0^*\mathcal{A}\,\mathcal{T}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \alpha'_{13} & \dots & \alpha'_{1n}\\ 1 & \alpha'_{22} & \alpha'_{23} & \dots & \alpha'_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha'_{n1} & \alpha'_{n2} & \alpha'_{n3} & \dots & \alpha'_{nn}\end{bmatrix},$$

pri čemu je matrica $\mathcal{S}_0=\mathcal{T}_0^{-1}$. Primetimo da smo u hermitskoj matrici $\mathcal{T}_0^*\mathcal{A}\,\mathcal{T}_0$ sa $\alpha'_{ij},\ i,j=2,\dots,n,$ označili komponente matrice koja odgovara kvadratnoj formi $\mathsf{t}(w_1,\dots,w_n)$.

Dakle, jasno je da primenjujući korake (i1) i (i2) konačno mnogo puta polaznu formu svodimo na dijagonalni oblik.

Napomenimo da su u slučaju simetrične kvadratne forme matrice $\mathcal{S}_i$ i $\mathcal{T}_i$ realne, što zapravo znači da se realna kvadratna forma može dijagonalizovati. Preciznije, algoritam se sastoji u sledećem: u svakom koraku nove promenljive uvodimo pomoću matrica $\mathcal{S}_i,\ i=1,\dots,k$. Ako nam je trebalo k promena baza dok polaznu formu nismo sveli na dijagonalni oblik biće $\mathcal{S}=\mathcal{S}_k\cdot\mathcal{S}_{k-1}\cdots\mathcal{S}_2\cdot\mathcal{S}_1$, i ova matrica daje vezu između polaznih promenljivih, $v_i,\ i=1,\dots,n$, i promenljivih u kojima je forma predstavljena dijagonalnom matricom, $w_i,\ i=1,\dots,n$. Drugim rečima važi: $[w_i]^\tau=\mathcal{S}\ [v_i]^\tau$. Budući da matrica $\mathcal{T}=\mathcal{S}^{-1}$, dijagonalizuje matricu forme $\mathcal{A}$, tj. matrica $\mathcal{T}^*\mathcal{A}\mathcal{T}$ je dijagonalna. Dakle, potrebno je prvo izračunati matrice $\mathcal{S}_i,\ i=1,\dots,k$, zatim izračunati matrice $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}=\mathcal{S}^{-1}$ i na kraju dijagonalnu matricu $\mathcal{T}^*\mathcal{A}\mathcal{T}$.

Primer. Svedimo hermitsku kvadratnu formu,

$$\mathsf{q}(v)=\mathsf{q}(v_1,v_2,v_3)\ =\ |v_1|^2+2\,|v_2|^2-|v_3|^2+(v_1\,\overline{v_2}+\overline{v_1}\,v_2)-\frac{3}{2}\Big(v_1\,\overline{v_3}+\overline{v_1}\,v_3\Big)+2\,(v_2\,\overline{v_3}+\overline{v_2}\,v_3),$$

na dijagonalni oblik Lagranževim algoritmom.

Primenimo Lagranževim algoritam, kako je $\alpha_{11}=1\neq 0$, zapisujemo formu q kao

$$\mathsf{q}(v)=\overline{v_1}\Big(v_1+v_2-\frac{3}{2}\,v_3\Big)+v_1\,\Big(\overline{v_2}-\frac{3}{2}\,\overline{v_3}\Big)+2\,|v_2|^2-|v_3|^2+2\,(v_2\,\overline{v_3}+\overline{v_2}\,v_3).$$

Uvodeći nove promenljive,

$$w_1=v_1+v_2-\frac{3}{2}\,v_3,\qquad w_2=v_2\qquad \text{i}\qquad w_3=v_3,$$

vidimo da je $v_1 = w_1 - v_2 + \dfrac{3}{2}\,v_3$. Ako sada ovo zamenimo u $\mathsf{q}(v)$ dobijamo redom:

$$\begin{aligned}
\mathsf{q}_1(w_1,w_2,w_3) \;=\; & \mathsf{q}(w_1,w_2,w_3) - |w_1|^2 = \Big(\overline{w_1} - \overline{v_2} + \overline{\tfrac{3}{2}\,v_3}\Big)\,w_1 + \Big(w_1 - v_2 + \tfrac{3}{2}\,v_3\Big)\Big(\overline{v_2} - \tfrac{3}{2}\,\overline{v_3}\Big)\\
& + 2\,|v_2|^2 - |v_3|^2 + 2\,(v_2\,\overline{v_3} + \overline{v_2}\,v_3) - |w_1|^2 = \Big(-v_2 + \tfrac{3}{2}\,v_3\Big)\Big(\overline{v_2} - \tfrac{3}{2}\,\overline{v_3}\Big)\\
& + 2\,|v_2|^2 - |v_3|^2 + 2\,(v_2\,\overline{v_3} + \overline{v_2}\,v_3) = |v_2|^2 - \tfrac{13}{4}\,|v_3|^2 + \tfrac{7}{2}\Big(v_2\,\overline{v_3} + \overline{v_2}\,v_3\Big) = \mathsf{q}_1(w_2,w_3).
\end{aligned}$$

Kako je u formi $\mathsf{q}_1(w_2,w_3)$ opet $\alpha'_{22} = 1 \neq 0$ možemo ponovo primeniti slučaj (i1) iz Lagranževog algoritma, tako da redom imamo,

$$\mathsf{q}_1(w_2,w_3) = \overline{w_2}\Big(w_2 + \frac{7}{2}\,w_3\Big) + \frac{7}{2}\,w_2\,\overline{w_3} - \frac{13}{4}\,|w_3|^2\,.$$

Uvodimo nove promenljive,

$$u_1 = w_1, \qquad u_2 = w_2 + \frac{7}{2}\,w_3 \qquad \text{i} \qquad u_3 = w_3,$$

vidimo da je $w_2 = u_2 - \dfrac{7}{2}\,w_3$, i onda računamo,

$$\mathsf{q}_1(w_2,w_3) - |u_2|^2 = \Big(\overline{u_2} - \frac{7}{2}\,\overline{w_3}\Big)\,u_2 + \frac{7}{2}\,\Big(u_2 - \frac{7}{2}\,w_3\Big)\,\overline{w_3} - \frac{13}{4}\,|w_3|^2 - |u_2|^2 = -\frac{31}{2}\,|w_3|^2 \quad \text{odakle je}$$

$$\mathsf{q}(t_1,t_2,t_3) = |t_1|^2 + |t_2|^2 - |t_3|^2,$$

pri čemu je $t_1 = v_1 + v_2 - \dfrac{3}{2}\,v_3$, $t_2 = v_2 + \dfrac{7}{2}\,v_3$ i $t_3 = \sqrt{\dfrac{31}{2}}\,v_3$. Matrično ove transformacije izgledaju ovako,

$$\begin{bmatrix} t_1\\ t_2\\ t_3\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -31/2\end{bmatrix}}_{\mathcal{S}_2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 7/2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\mathcal{S}_1}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\mathcal{S}_0}\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3/2\\ 0 & 1 & 7/2\\ 0 & 0 & -31/2\end{bmatrix}}_{\mathcal{S}}\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}$$

Budući da je $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{-1}$, nalazimo: $\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5\sqrt{\frac{2}{31}}\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{31}}\\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{31}}\end{bmatrix}$. Tako da na kraju dobijamo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 5\sqrt{\frac{2}{31}} & -\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{31}} & \sqrt{\frac{2}{31}}\end{bmatrix}}_{\mathcal{T}^{\tau}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & 2 & 2\\ -\frac{3}{2} & 2 & -1\end{bmatrix}}_{\mathcal{A}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5\sqrt{\frac{2}{31}}\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{31}}\\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{31}}\end{bmatrix}}_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

8.8. Jakobijev algoritam. Opišimo sada još i Jakobijev algoritam. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema. *Neka je data hermitska kvadratna forma* $q(v) = A(v,v)$ *svojom matricom u nekoj bazi* e

$$q(v) = A(v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ji}\,v_i\,\overline{v_j} \qquad \textit{gde je } \alpha_{ij} = A(e_j,e_i).$$

I neka su glavne minore matrice $A(e)$

$$\Delta_1 = \alpha_{11}\,,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}\,,\quad \cdots\,,\quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}$$

različite od nule. Tada postoji baza f *u kojoj hermitska kvadratna forma* q *ima sledeći oblik*

$$q(v) = A(v,v) = \frac{1}{\Delta_1}\,\big|\xi_1\big|^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\,\big|\xi_2\big|^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\,\big|\xi_n\big|^2, \qquad \textit{gde je } v = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^{\tau}.$$

Dokaz. Ideja dokaz je slična onoj iz dokaza Gram-Šmitovog postupka ortogonalizacije, primenjenog na hermitsku bilinearnu formu A. Želimo odrediti bazu $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ takvu da je

$$\mathsf{A}(e_i,e_j)=0, \quad \text{za} \quad i\neq j \qquad i,j=1,2,\ldots,n. \tag{8.12}$$

Dakle, tražimo vektore $f_1,f_2,\ldots,f_n$ takve da je

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_{n-11} & \tau_{n-12} & \cdots & \tau_{n-1n-1} & 0 \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn-1} & \tau_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix}. \tag{8.13}$$

Potrebno je odrediti koeficijente τ_{ij} koristeći uslove (8.12), pri tome koristimo sledeću činjenicu:

ako je $A(f_k,e_i)=0$ za $i=1,\ldots,k-1$ tada je i $A(f_k,f_i)=0$ za $i=1,\ldots,k-1$.

Time smo naš problem sveli na određivanje koeficijenata $\tau_{k1},\tau_{k2},\ldots,\tau_{kk}$ takvih da vektor

$$f_k=\tau_{k1}\,e_1+\tau_{k2}\,e_2+\cdots+\tau_{kk}\,e_k$$

zadovoljava uslove $\mathsf{A}(f_k,e_i)=0,\, i=1,\ldots,k-1$. Jasno, time je vektor f_k određen do na množenje sa skalarom ($\neq 0$). Taj skalar odredimo iz normalizacionog uslova $\mathsf{A}(f_k,e_k)=1$. Ovi uslovi impliciraju sledeći linearni sistem u $\tau_{1k},\ldots,\tau_{kk}$,

$$\begin{aligned} \mathsf{A}(f_k,e_1)=0&=\tau_{k1}\,\mathsf{A}(e_1,e_1)+\tau_{k2}\,\mathsf{A}(e_1,e_2)+\cdots+\tau_{kk}\,\mathsf{A}(e_1,e_k),\\ \mathsf{A}(f_k,e_2)=0&=\tau_{k1}\,\mathsf{A}(e_2,e_1)+\tau_{k2}\,\mathsf{A}(e_2,e_2)+\cdots+\tau_{kk}\,\mathsf{A}(e_2,e_k),\\ &\vdots\\ \mathsf{A}(f_k,e_k)=1&=\tau_{k1}\,\mathsf{A}(e_k,e_1)+\tau_{k2}\,\mathsf{A}(e_k,e_2)+\cdots+\tau_{kk}\,\mathsf{A}(e_k,e_k). \end{aligned} \tag{8.14}$$

Kako je determinanta ovog sistema $\Delta_k^\tau\neq 0$ sledi da sistem (8.14) ima jedinstveno rešenje za svako $k=1,2,\ldots,n$. Nađimo sada koeficijente $\beta_{ik}=\mathsf{A}(f_k,f_i)$. Iz konstrukcije baze f znamo da je $\mathsf{A}(f_k,f_i)=\beta_{ik}=0$ za $i\neq k$.
Izračunajmo sada $\beta_{kk}=\mathsf{A}(f_k,f_k)$, koristeći date uslove: $\mathsf{A}(f_k,e_i)=0$, za $i\neq k$ i $\mathsf{A}(f_k,e_k)=1$,

$$\begin{aligned} \mathsf{A}(f_k,f_k) &= \mathsf{A}(\tau_{k1}\,e_1+\tau_{k2}\,e_2+\cdots+\tau_{kk}\,e_k,f_k)=\tau_{k1}\,\mathsf{A}(e_1,f_k)+\tau_{k2}\,\mathsf{A}(e_2,f_k)+\cdots+\tau_{kk}\,\mathsf{A}(e_k,f_k)\\ &= \tau_{k1}\,\overline{\mathsf{A}(f_k,e_1)}+\tau_{k2}\,\overline{\mathsf{A}(f_k,e_2)}+\cdots+\tau_{kk}\,\overline{\mathsf{A}(f_k,e_k)}=\tau_{kk}\,\overline{\mathsf{A}(f_k,e_k)}=\tau_{kk}. \end{aligned}$$

S druge strane τ_{kk} možemo naći iz sistema (8.14) koristeći Kramerovo pravilo. Tako nalazimo

$$\tau_{kk}=\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}\,, \qquad k=2,\ldots,n.$$

Za $k=1$ vidimo da za Δ_0 možemo uzeti da je 1. $\square$

Primer. Data je kvadratna forma $\mathsf{q}(v_1,v_2,v_3)=2\,v_1^2+3\,v_1\,v_2+4\,v_1\,v_3+v_2^2+v_3^2$ u standardnoj bazi. Jakobijevom metodom nađimo kanonsku bazu u kojoj ova forma ima dijagonalni oblik.
Lako se nalazi da je njena polarna forma,

$$\mathsf{A}(v,w)=2\,v_1\,w_1+\frac{3}{2}\,v_1\,w_2+2\,v_1\,w_3+\frac{3}{2}\,v_2\,w_1+v_2\,w_2+2\,v_3\,w_1+v_3\,w_3.$$

Sada nalazimo glavne minore

$$\Delta_1=2,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{1}{4},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{17}{4},$$

odakle vidimo da možemo primeniti Jakobijevu metodu. Sada tražimo vektore f_1,f_2,f_3 takve da je

$$f_1=\gamma_{11}\,e_1=(\gamma_{11},0,0)^\tau,\quad f_2=\gamma_{21}\,e_1+\gamma_{22}\,e_2=(\gamma_{21},\gamma_{22},0)^\tau,\quad f_3=\gamma_{31}\,e_1+\gamma_{32}\,e_2+\gamma_{33}\,e_3=(\gamma_{31},\gamma_{32},\gamma_{33})^\tau\,.$$

Koeficijent γ_{11} nalazimo iz uslova

$$\mathsf{A}(f_1,e_1)=1,\quad \text{odakle je }\ 2\,\gamma_{11}=1\ \text{ ili }\ \gamma_{11}=\frac{1}{2}\,.$$

Slično γ_{21} i γ_{22} nalazimo iz sistema,

$$\mathsf{A}(f_2,e_1)=0=2\,\gamma_{21}+\frac{3}{2}\,\gamma_{22},\qquad \mathsf{A}(f_2,e_2)=1=\frac{3}{2}\,\gamma_{21}+\gamma_{22}=1\,.$$

Rešenje ovog sistema je: $\gamma_{21}=6$, $\gamma_{22}=-8$. I napokon, $\gamma_{31}\,\gamma_{32}$ i γ_{33} nalazimo iz sistema,

$$\mathsf{A}(f_3,e_1)=0=2\,\gamma_{31}+\frac{3}{2}\,\gamma_{32}+2\,\gamma_{33},\quad \mathsf{A}(f_3,e_2)=0=\frac{3}{2}\,\gamma_{31}+\gamma_{32},\quad \mathsf{A}(f_3,e_3)=1=2\,\gamma_{31}+\gamma_{33}.$$

Rešenje ovog sistema je: $\gamma_{31}=\frac{8}{17}$, $\gamma_{32}=-\frac{12}{17}$, $\gamma_{33}=\frac{1}{17}$. Dakle, kanonska baza sastoji se iz vektora

$$f_1=\Big(\frac{1}{2}\,,0,0\Big),\qquad f_2=(6,-8,0),\qquad f_3=\Big(\frac{8}{17}\,,-\frac{12}{17}\,,\frac{1}{17}\Big)\,.$$

Tako da kvadratna forma q u bazi (f_1,f_2,f_3) ima dijagonalni oblik,

$$\mathsf{q}(v)=\mathsf{A}(v,v)=\frac{1}{\Delta_1}\left|\xi_1\right|^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\left|\xi_2\right|^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\left|\xi_3\right|^2=\frac{1}{2}\left|\xi_1\right|^2-8\left|\xi_2\right|^2+\frac{1}{17}\left|\xi_3\right|^2.$$

8.9. Karakterizacija pozitivnosti bilinearne hermitske forme. Znamo da su strogo pozitivne hermitske bilinearne forme od posebnog interesa, jer one definišu skalarne proizvode. Zato je važno da nađemo njihove karakterizacije. Ovim problemom bavimo se u ovoj tački, i u sledećoj teoremi dajemo karakterizaciju stroge pozitivnosti bilinearne hermitske forme preko glavnih minora.

Teorema 1. *Neka je data hermitska kvadratna forma $\mathsf{q}(v)=\mathsf{A}(v,v)$ svojom matricom u nekoj bazi e. Tada je kvadratna forma $\mathsf{q}(v)$ strogo pozitivno definitna akko je*

$$\Delta_1=\alpha_{11}>0\,,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}\end{vmatrix}>0\,,\quad\cdots\quad \Delta_n=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\dots&\alpha_{1n}\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ \alpha_{n1}&\dots&\alpha_{nn}\end{vmatrix}>0\,.$$

Dokaz. Ako je $\Delta_1>0\,,\Delta_2>0\,,\dots\Delta_n>0$ tada koristeći formulu iz **8.8** Teorema zaključujemo da forma $\mathsf{q}(v)$ u kanonskoj bazi ima oblik

$$\mathsf{q}(v)\,=\,\mathsf{A}(v,v)=\frac{1}{\Delta_1}\left|\xi_1\right|^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\left|\xi_2\right|^2+\cdots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\left|\xi_n\right|^2=\lambda_1\left|\xi_1\right|^2+\lambda_2\left|\xi_2\right|^2+\cdots+\lambda_n\left|\xi_n\right|^2\geq 0\,,$$

jer su $\lambda_i>0$, za sve $i=1,2,\dots,n$. Odakle odmah sledi da je $\mathsf{q}(v)=0$ samo za $v=0$, tj. forma $\mathsf{q}(v)$ je strogo pozitivna.

Obratno, neka je $\mathsf{q}(v)$ strogo pozitivna forma. Posmatrajmo niz $(1,\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_n)$ i pretpostavimo da nisu svi članovi tog niza pozitivni. Sada postoje dve mogućnosti ili u tom nizu ima nula ili nema. Ako nema, postoji kanonska baza $f=(f_1,f_2,\dots,f_n)$ takva da forma u njoj ima dijagonalni oblik,

$$\mathsf{q}(v)=\mathsf{A}(v,v)=\frac{1}{\Delta_1}\left|\xi_1\right|^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\left|\xi_2\right|^2+\cdots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\left|\xi_n\right|^2,$$

i pri tome postoji najmanji indeks $1\leq i\leq n$ takav da je $\Delta_i<0$. Posmatrajmo vektor $x=f_i$, tada je

$$\mathsf{q}(f_i)=\mathsf{A}(f_i,f_i)=\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}\left|1\right|^2<0\,,\qquad \text{jer je}\qquad \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}<0\,,$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $\mathsf{q}(v)$ strogo pozitivna forma. Ako u nizu ima nula onda opet uočimo najmanji indeks takav da je $\Delta_i=0$. Kako je

$$\Delta_i=\begin{vmatrix}\mathsf{A}(e_1,e_1)&\mathsf{A}(e_1,e_2)&\dots&\mathsf{A}(e_1,e_i)\\ \mathsf{A}(e_2,e_1)&\mathsf{A}(e_2,e_2)&\dots&\mathsf{A}(e_2,e_i)\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \mathsf{A}(e_i,e_1)&\mathsf{A}(e_i,e_2)&\dots&\mathsf{A}(e_i,e_i)\end{vmatrix}=0\,,$$

tada je barem jedna vrsta linearna kombinacija preostalih, recimo $k.-$ta,

$$\eta_1\,\mathsf{A}(e_1,e_j)+\eta_2\,\mathsf{A}(e_2,e_j)+\cdots+\eta_{k-1}\,\mathsf{A}(e_{k-1},e_j)+\eta_k\,\mathsf{A}(e_k,e_j)=0\,,\qquad j=1,2,\dots,i,$$

pri čemu postoji barem jedan indeks $1 \leq l \leq k$ takav da $\eta_l \neq 0$. Tada je i

$$\mathsf{A}(\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2, + \cdots + \eta_k e_k, e_j) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, i,$$

odakle je

$$\mathsf{A}(\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2, + \cdots + \eta_k e_k, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2, + \cdots + \eta_k e_k) = 0.$$

Kako je vektor $v = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2, + \cdots + \eta_i e_i \neq 0$, imali bismo da je $\mathsf{q}(v) = \mathsf{A}(v, v) = 0$, što je opet nemoguće zbog stroge pozitivnosti polazne forme q. □

Posledica. *Neka je V unitaran prostor. Tada je Gramova determinanta bilo kojeg konačnog podskupa vektora iz V nenegativna.*

Dokaz. Neka je dat proizvoljan konačan skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V$, i prvo pretpostavimo da je linearno nezavisan. Posmatrajmo bilinearnu formu

$$\mathsf{A}(v, w) = (v, w) \qquad \text{gde je } (\cdot\,,\cdot) \text{ skalarni proizvod.}$$

Kako je hermitska kvadratna forma $\mathsf{q}(v) = \mathsf{A}(v, v)$ strogo pozitivna, prema prethodnoj teoremi, sve njene glavne minore su pozitivne, pa i $\Delta_k = \Gamma[v_1, v_2, \ldots, v_k]$, i tvrdnja sledi.

Ako je skup vektora $\{v_1, e_v, \ldots, v_k\}$ linearno zavisan, i neka je v_i, $2 \leq i \leq k$, linearna kombinacija prethodnih vektora,

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1}.$$

Tada je $i.-$ kolona Gramove determinante linearna kombinacija prethodnih kolona, i Gramova determinta jednaka 0. □

Pozitivnost hermitske kvadratne forme možemo karakterisati i preko karakterističnog polinoma matrice njene polarne forme kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 2. *Neka je data hermitska kvadratna forma $\mathsf{q}(v) = \mathsf{A}(v, v)$ svojom matricom $\mathsf{A}(e)$ u nekoj bazi e. Forma $\mathsf{q}(v)$ je pozitivno definitna* ako i samo ako *koeficijenti karakterističnog polinoma matrice $\mathsf{A}(e)$ alterniraju. Ako pri tome postoji koeficijent od $\kappa_{\mathsf{A}(e)}$ koji je jednak nuli tada su i svi koeficijenti od $\kappa_{\mathsf{A}(e)}$ uz niže stepene jednaki nuli.*

Dokaz. Neka je $q(v) = A(v, v)$ pozitivna hermitska kvadratna forma, tada je matrica $\mathsf{A}(e)$ je unitarno slična i kongruentna dijagonalnoj matrici $\mathsf{A}(f) = \mathsf{diag}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0]$ $(\lambda_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, r)$, vidi **8.6**. Dakle, matrice $\mathsf{A}(e)$ i $\mathsf{A}(f)$ imaju isti karakteristični polinom,

$$\kappa_{\mathsf{A}(f)}(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_r) \lambda^{n-r} = (-1)^n (\lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} - \ldots.)$$

i kako su svi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ pozitivni, sledi da su, zbog Vieteovih formula, sve simetrične funkcije sopstvenih vrednosti

$$\sigma_i = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_i} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \cdots \lambda_{j_i}$$

pozitivne za $i = 1, 2, \ldots, r$ i jednake 0 za $i = r+1, \ldots, n$. Prema tome, koeficijenti karakterističnog polinoma alterniraju do momenta kada se neki koeficijent σ_{r+1} poništi tada se i svi preostali poništavaju.

Zanemarujući nulu kao koren, potrebno je pokazati da ako realni polinom stepena n ima alternirajuće koeficijente i n realnih korena, tada su svi ti koreni pozitivni. Dokaz provodimo indukcijom, za $n = 1$, jasno. Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za sve takve polinome stepena $n-1$. Neka je $f(x)$ polinom stepena n koji ima n realnih korena i neka svi njegovi koeficijenti alterniraju. Tada polinom $f^{'}(x)$ ima stepena $n-1$ i ima tačno $n-1$ realnu nulu zbog Rolove teoreme. Jasno, koeficijenti polinoma $f^{'}(x)$ alterniraju, pa su sve njegove nule pozitivne prema pretpostavci indukcije. Sada opet Rolova teorema implicira da polinom $f(x)$ ima barem $n-1$ pozitivnu nulu, ali je onda i poslednja $n.-$ta nula polinoma $f(x)$ pozitivna, jer je proizvod svih nula pozitivan. □

8.10. Istovremena dijagonalizacija para hermitskih kvadratnih formi. U slučaju linearnih operatora pronalaženje baze u kojoj su dva linearna operatora A i B predstavljena dijagonalnim matricama moguće je pod sledećim uslovima: oba operatora A i B moraju biti dijagonalizabilni i moraju da komutiraju. Štaviše ovaj rezultat može se generalisati i na proizvoljnu familiju $\mathcal{F} = \{A_\alpha \in \mathsf{Hom}\,\mathsf{V}\ \alpha \in I\}$ dijagonalizabilnih i međusobno komutirajućih operatora.

Sada se pitamo da li nešto slično možemo uraditi i za dve hermitske kvadratne forme. Tako dobijamo sledeću teoremu.

Teorema. *Neka su* $q(v) = A(v, v)$ *i* $s(v) = B(v, v)$ *dve hermitske kvadratne forme na kompleksnom vektorskom prostoru* V*. Ako je barem jedna od njih strogo pozitivna tada postoji zajednička kanonska baza.*

Dokaz. Neka je npr. forma $\mathsf{s}(v) = \mathsf{B}(v, v)$ strogo pozitivna tada je formulom $(v, w) = \mathsf{B}(v, w)$, gde je $\mathsf{B}(v, w)$ polarna forma od s, definisan skalarni proizvod na V. Na osnovu Silvesterove teoreme postoji ortonormirana (s obzirom na skalarni proizvod $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$) kanonska baza $e = (e_1, \ldots, e_n)$ za hermitsku kvadratnu formu q, takvu da je

$$\mathsf{q}(v) = \mathsf{A}(v, v) = \lambda_1 \|v_1\|^2 + \lambda_2 \|v_1\|^2 + \cdots + \lambda_n \|v_n\|^2 ,$$

ali u toj ortonormiranoj bazi je i

$$\mathsf{s}(v) = \mathsf{B}(v, v) = (v, v) = \|v_1\|^2 + \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2 ,$$

i dokaz je gotov. □

Primer. Pokažimo prvo da niti jedna od sledeće dve hermitske kvadratne forme

$$\mathsf{q}(v) = \mathsf{A}(v, v) = v_1\,\overline{v_2} + v_2\,\overline{v_1}\,, \qquad \mathsf{s}(v) = \mathsf{B}(v, v) = \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2 ,$$

na $\mathbb{C}^2$ nije strogo pozitivna, a zatim pokažimo da se ne mogu istovremeno svesti na dijagonalni oblik.

Zaista, iz

(q) $\mathsf{q}(i, -i) = i\,i + (-i)(-i) = -2 < 0$

(s) i $\mathsf{s}(0, 1) = -(1)^2 < 0$,

sledi da polazne forme nisu pozitivne.

Primetimo, da u slučaju iz prethodne teoreme, kada je barem jedna forma strogo pozitivna, postojala bi ortonormirana baza e u kojoj bi obe matrice bile dijagonalne, $\mathsf{A}(e) = \mathsf{diag}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ i $\mathsf{B}(e) = \mathsf{diag}\,[1, \ldots, 1]$. Tada je jasno,

$$\det\,[\,\mathsf{A}(e) - \lambda\,\mathsf{B}(e)\,] = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda).$$

Ako sada izaberemo neku drugu bazu f i ako sa $\mathcal{T}$ obeležimo matricu prelaska sa baze e u bazu f, tada je

$$\det\,[\mathsf{A}(f) - \lambda\,\mathsf{B}(f)] = \det\,[\mathcal{T}^*(\mathsf{A}(e) - \lambda\,\mathsf{B}(e))\,\mathcal{T}] = \det \mathcal{T}^* \det\,[\mathsf{A}(e) - \lambda\,\mathsf{B}(e)] \det \mathcal{T},$$

odakle sledi da su brojevi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ koreni sledeće jednačine

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda\,\beta_{11} & \alpha_{12} - \lambda\,\beta_{12} & \ldots & \alpha_{1n} - \lambda\,\beta_{1n} \\ \alpha_{21} - \lambda\,\beta_{21} & \alpha_{22} - \lambda\,\beta_{22} & \ldots & \alpha_{2n} - \lambda\,\beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} - \lambda\,\beta_{n1} & \alpha_{n2} - \lambda\,\beta_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \lambda\,\beta_{nn} \end{vmatrix} = 0\,,$$

pri čemu su $\mathsf{A}(f) = (\alpha_{ij})$ i $\mathsf{B}(f) = (\beta_{ij})$ matrice formi u proizvoljnoj bazi f. U našem slučaju imamo

$$\mathsf{A}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{odakle je} \quad \det\,[\mathsf{A}(f) - \lambda\,\mathsf{B}(f)] = -(\lambda^2 + 1)\,,$$

i ona nema realnih korena, tj. date forme ne mogu se istovremeno dijagonalizovati.

1. Zadaci, vežbanja i dopune

8.11. Kako treba modifikovati formulu iz Primera **2.** u tački **8.1** da bi se u slučaju kompleksnih funkcija dobio hermitski bilinearni funkcional.

8.12. Neka u kanonskoj bazi kvadratni funkcional $v \longrightarrow \mathsf{A}(v)$ ima matricu,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Nađite matricu tog funkcionala u sledećim bazama,

(i1) $(1,0,0)^\tau,\ (1,1,0)^\tau,\ (1,1,1)^\tau$,
(i2) $(1,2,3)^\tau,\ (1,1,1)^\tau,\ (1,2,2)^\tau$,
(i3) $(1,0,-1)^\tau,\ (1,-1,1)^\tau,\ (0,-1,1)^\tau$,
(i4) $(0,-2,3)^\tau,\ (1,-1,1)^\tau,\ (-2,2,2)^\tau$.

Nađite polarnu formu sledećih kvadratnih formi u standardnoj bazi,

(i1) $\mathsf{q}(v_1,v_2,v_3) = 2\,v_1^2 + 3\,v_1\,v_2 + 4\,v_1\,v_3 + v_2^2 + v_3^2$,
(i2) $\mathsf{q}(v_1,v_2,v_3) = |v_1|^2 - i\,v_1\,\overline{v_2} + i\,\overline{v_1}\,v_2 + (2+i)\,\overline{v_1}\,v_3 + (2-i)\,v_1\,\overline{v_3} - 3\,|v_3|^2$.

Rešenje. (i1) Koristeći formulu iz dokaza Teoreme iz tačke **8.4**

$$\begin{aligned} \mathsf{A}(v,w) &= \frac{1}{4}\Big(\mathsf{q}(v+w) - \mathsf{q}(v-w)\Big) = \frac{1}{4}\Big(2\,(v_1+w_1)^2 + 3\,(v_1+w_1)(v_2+w_2) \\ &\quad + 4\,(v_1+w_1)(v_3+w_3) + (v_2+w_2)^2 + (v_3+w_3)^2\Big) - \frac{1}{4}\Big(2\,(v_1-w_1)^2 \\ &\quad + 3\,(v_1-w_1)(v_2-w_2) + 4\,(v_1-w_1)(v_3-w_3) + (v_2-w_2)^2 + (v_3-w_3)^2\Big) \\ &= \dots\dots\dots\dots \\ &= 2\,v_1\,w_1 + \frac{3}{2}\,v_1\,w_2 + 2\,v_1\,w_3 + \frac{3}{2}\,v_2\,w_1 + v_2\,w_2 + 2\,v_3\,w_1 + v_3\,w_3. \end{aligned}$$

Analogno koristeći formulu iz iste teoreme za hermitski slučaj nalazimo,

$$\begin{aligned} \mathsf{A}(v,w) &= \frac{1}{4}\Big(\mathsf{q}(v+w) - \mathsf{q}(v-w)\Big) + \frac{i}{4}\Big(\mathsf{q}(v+i\,w) - \mathsf{q}(v-i\,w)\Big) \\ &= \dots\dots\dots\dots \\ &= v_1\,\overline{w_1} - i\,v_1\,\overline{w_2} + (2-i)\,v_1\,\overline{w_3} + i\,v_2\,\overline{w_1} + (2+i)\,v_3\,\overline{w_1} - 3\,v_3\,\overline{w_3}\,. \end{aligned}$$

8.13. Za sledeće hermitske kvadratne forme nađite njihova jezgra, zatim njihove polarne forme, i svedite ih na dijagonalni oblik koristeći (ako je moguće) sva tri postupka, i nađite matrice transformacija koje povezuju stare i nove promenljive:

(i1) $\mathsf{q}(v_1,v_2) = v_1\,v_2$,
(i2) $\mathsf{q}(v_1,v_2) = v_1^2 + 2\,v_1\,v_2 + v_2^2$,
(i3) $\mathsf{q}(v_1,v_2,v_3) = v_1^2 + v_3^2 - 2\,v_1\,v_2 - 2\,v_1\,v_3 + 10\,v_2\,v_3$,
(i4) $\mathsf{q}(v_1,v_2,v_3) = 2\,|v_1|^2 - |v_2|^2 + 3(v_1\,\overline{v_3} + \overline{v_1}\,v_3)$,
(i5) $\mathsf{q}(v_1,v_2) = (2+i)\,|v_1|^2 + (1+i)\,v_1\,\overline{v_2} + (1-i)\,\overline{v_1}\,v_2$,
(i6) $\mathsf{q}(v_1,v_2,v_3,v_4) = |v_1|^2 + |v_3|^2 - 2\,(v_1\,\overline{v_2} + \overline{v_1}\,v_2) - (v_1\,\overline{v_4} + \overline{v_1}\,v_4)$,
(i7) $\mathsf{q}(v_1,v_2,v_3,v_4) = |v_1|^2 + v_1\,\overline{v_2} + \overline{v_1}\,v_2 - |v_2|^2 + |v_3|^2 + v_3\,\overline{v_4} + \overline{v_3}\,v_4 - |v_4|^2$,
(i8) $\mathsf{q}(v_1,v_2,v_3,v_4) = |v_1|^2 + 2\,|v_1|^2 + v_1\,\overline{v_2} + \overline{v_1}\,v_2 + |v_3|^2 + |v_4|^2 + 2(v_3\,\overline{v_4} + \overline{v_3}\,v_4)$.

8.14. Svedite hermitsku kvadratnu formu,

$$\mathsf{q}(v) = \mathsf{q}(v_1,v_2,v_3) = (v_1\,\overline{v_2} + \overline{v_1}\,v_2) + 2\,(v_1\,\overline{v_3} + \overline{v_1}\,v_3) - (v_2\,\overline{v_3} + \overline{v_2}\,v_3),$$

na dijagonalni oblik Lagranževim algoritmom.

Rešenje. Kako su svi $\alpha_{ii} = 0,\ i = 1,2,3$ prema Lagranževom algoritmu, moramo prvo primeniti korak (i2), tj.

$$\mathsf{q}(v_1,v_2,v_3) = \overline{v_1}\,(v_2 + 2\,v_3) + v_1(\overline{v_2} + 2\,\overline{v_3}) - (v_2\,\overline{v_3} + \overline{v_2}\,v_3)\,.$$

Uvedimo nove promenljive, $w_1 = v_1, \qquad w_2 = v_2 + 2\,v_3 - v_1, \qquad$ i $\qquad w_3 = v_3.$

Sada vidimo da je $v_2 = w_1 + w_2 - 2\,w_3$. Ako sada ovo zamenimo u izraz za q dobijamo,

$$\begin{aligned}\mathsf{q}(w_1,w_2,w_3) &= \overline{w_1}\,(w_2+w_1) + w_1\,(\overline{w_1}+\overline{w_2}) - (w_2\,\overline{w_3}+\overline{w_2}\,w_3) = 2\,|w_1|^2 + 4\,|w_3|^2 + (w_1\,\overline{w_2}+\overline{w_1}\,w_2)\\ &\quad - (w_1\,\overline{w_3}+\overline{w_1}\,w_3) - (w_2\,\overline{w_3}+\overline{w_2}\,w_3)\,.\end{aligned}$$

Nastavljajući kao u prethodnom slučaju nalazimo nakon tri primene koraka (i1),

$$\mathsf{q}(v) = \mathsf{q}(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{2}\,|t_1|^2 - \frac{1}{2}\,|t_2|^2 + 4\,|t_3|^2, \qquad \text{gde je} \quad t_1 = v_1+v_2+v_3, \quad t_2 = -v_1+v_2+3\,v_3 \quad \text{i} \quad t_3 = v_3\,.$$

Iz gornjih formula vidimo da je:

$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{3}{\sqrt2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, a njen inverz je $\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}$. Tako da je konačno

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac12 & -1 & \frac12 \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}^\tau} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.15. Svedite kvadratnu formu,

$$\mathsf{A}(v,v) = 4\,v_1\,v_2 + 2\,v_1\,v_3 - 8\,v_2^2 - \,v_3^2$$

na dijagonalni oblik.

Rešenje. Prvo prenumerišimo promenljive, $v_1 = v_2'$, $\quad v_2 = v_3'$, $\quad v_3 = v_1'$, tako da je

$$\mathsf{A}(v,v) = -\,{v_1'}^2 + 2\,{v_1}'\,v_2' + 4\,v_2'\,{v_3}' - 8\,{v_3'}^2 = v_1'(-v_1'+v_2') + v_1'\,v_2' + 4\,v_2'\,{v_3}' - 8\,{v_3'}^2.$$

Sada uvedemo smene, $v_1'' = -v_1' + v_2'$, $\quad v_2'' = v_2'$, $\quad v_3'' = v_3'$, tako da je

$$\mathsf{A}(v,v) = -\,{v_1''}^2 + {v_2''}^2 + 4\,v_2''\,{v_3}'' - 8\,{v_3''}^2 = -{v_1''}^2 + ({v_2''}^2 + 4\,v_3'') - 8\,{v_3'}^2.$$

I napokon ako sada uvedemo smene, $\xi_1 = -v_1''$, $\quad \xi_2 = v_2'' + 2\,v_3''$, $\quad \xi_3''' = v_3''$, tako da je konačno dobijamo,

$$\mathsf{A}(v,v) = -\,{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 - 12\,{\xi_3}^2.$$

8.16. Neka su za hermitsku kvadratnu formu $\mathsf{q}(v)$ ispunjene pretpostavke Teoreme **8.8**. Da li je moguće iz tih podataka izračunati signaturu?

Rešenje. Da, jer je broj negativnih koeficijenata u

$$\mathsf{q}(v) = \mathsf{A}(v,v) = \frac{1}{\Delta_1}\,|\xi_1|^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\,|\xi_2|^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\,|\xi_n|^2,$$

jednak broju promena znaka u nizu $(1,\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n)$.