(1) ПРЕБРОЈАВАЊА. ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ ПРЕБРОЈАВАЊА. (УОПШТЕНИ) ДИРИХЛЕОВ ПРИНЦИП

- Пребројавање (енумерација) - бави се одређивањем кардиналности неког скупа.
- Уколико је тај скуп непразан или коначан, пребројавање се своди на одређивање природног броја n који је једнак броју елемената тог скупа.

* Основни принципи пребројавања:
1) принцип једнакости
2) принцип збира
3) принцип производа

1) Принцип једнакости: Уколико за скупове A и B постоји бијекција $f: A \to B$, тада је $|A| = |B|$

пример: Скуп $A = \{a \mid a \in \mathbb{N}_{30} \land 3 \mid a\}$ има 10 елемената јер постоји бијекција $f: A \to \mathbb{N}_{10}$, $f(a) = \frac{a}{3}$.

2) Принцип збира: Уколико су коначни скупови $A_1, A_2, \ldots, A_n$ дисјунктни, тада: $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$

3) Принцип производа: Нека су A и B произвољни коначни скупови и $A \times B$ њихов Декартов производ.

Тада важи једнакост $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

→ Важи и општије. Нека $S \subseteq A \times B$. Означимо са V_a све елементе скупа S код којих је прва координата фиксирана и једнака a, тј. $V_a = \{(a,b) \in S \mid b \in B\}$. Слично, означимо са K_b све елем. скупа S код којих је друга коорд. фиксирана и једнака b, $K_b = \{(a,b) \in S \mid a \in A\}$. Тада важи:

$$|S| = \sum_{a \in A} |V_a| = \sum_{b \in B} |K_b|$$

- Очигледно је да се једнакост добија из принципа производа у спец. случају када $S = A \times B$.
- Принцип производа се може уопштити и на произвољан коначан број скупова

Пример1: Колико има бинарних речи дужине n?

Будући да се свака таква реч састоји од n бинарних цифара, разматрамо Декартов произ.: $\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n}$

Број елем. овог Декартовог производа једнак је $\overbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}^{n} = 2^n$. На свакој од n позиција налази се један елемент из скупа $\{0,1\}$, што значи да за сваку позицију имамо по 2 кандидата, па множимо двојке...

Пример2: Колико има трочланих комбинација скупа $\mathbb{N}_{30}$ (уз дозвољено понављање истог броја), таквих да је барем један број у свакој комбинацији једноцифрен?

Број свих трочланих комбинација једнак је броју елем. Декартовог производа $|\mathbb{N}_{30}| \times |\mathbb{N}_{30}| \times |\mathbb{N}_{30}| = 30^3$

Број свих оних комбинација које се састоје само од двоцифрених бројева је 21^3

Дакле, тражени број је $30^3 - 21^3$

Дирихлеов принцип

* <u>Дирихлеов принцип</u>: Уколико је k објеката распоређено у n кутија, при чему $k>n$, тада постоји кутија у којој се налазе барем два објекта.

<u>Пример 1</u>: У скупу од $n \geq 2$ особа, постоје бар 2 особе које познају једнак број особа из тог скупа.

Бр. особа које једна особа може да познаје креће се од 0 до $n-1$. Међутим, ове две екстремне вредности се међусобно искључују: ако нека особа не познаје ниједну особу из скупа, тада не може постојати особа која познаје све, и обратно. Дакле, постоји $n-1$ могућих познанстава за сваку особу и n особа, па на основу Дирихлеовог принципа, постоје бар 2 особе са једнаким бројем познанстава.

* <u>Уопштени Дирихлеов принцип</u>: Уколико је k објеката распоређено у n кутија, при чему важи $k>c\cdot n$, $c\in N$, тада постоји кутија таква да број објеката распоређених у њу није мањи од $c+1$.

<u>Пример 2</u>: Колико најмање пута треба бацити нумерисану коцкицу тд са сигурношћу можемо рећи да је барем један број добијен 3 пута?

- У најнеповољнијем случају ћемо након 12 бацања сваки број добити тачно 2 пута, па ће 13. бацање дати неки број поновљен 3. пута. Дакле решење је 13.

→ Ми смо у овом решењу (имплицитно) применили уопштени Дирихлеов принцип:

- Замислимо да смо уместо бацања 1 коцкице имали неограничен бр. коцкица и преформулисан задатак: колики је најмањи бр. коцкица које треба (одједном) бацити тд се неки број добије најмање 3 пута? Овде имамо $n=6$ (могући бројеви), $c=2$ (тражи се да се барем један бр. добије $2+1$ пута) и k је број који тражимо. По уопштеном Д. принципу $k > n\cdot c = 12 \Rightarrow k=13$.

<u>Пример 3</u>: У скупу од 6 особа постоје 3 које се или све међусобно познају, или све међусобно не познају.

- Нека је $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ скуп од 6 особа. Ако издвојимо особу a, тада остатак скупа A можемо поделити на оне које познају особу a и оне који не познају a. Имамо 2 подскупа и 5 особа, па према уопштеном Дирихлеовом пр., један подскуп мора садржати најмање 3 особе. Нека бyо b,c,d припадају том подскупу. ПП да особе b,c,d познају особу a. Ако међу њима постоје 2 особе које се познају, тада те 2 особе и особа a чине тражени скуп (све 3 се познају). Ако се пак особе b,c,d не познају, тада баш оне чине тражени скуп (3 особе које се не познају).
Уколико особе b,c,d не познају a, доказ је аналоган.

* Овај пример (3) је део много опште теорије познате као <u>РАМЗИЈЕВА ТЕОРИЈА</u>. У тој теорији, РАМЗИЈЕВ БРОЈ $R(k,n)$, за $k,n\in N$, означава најмањи скуп особа тд у њему постоји или k особа које се међусобно познају, или n особа које се међусобно не познају. За наш пример важи $R(3,3)=6$.

② Биномни коефицијенти. Основна својства. Биномна и полиномна формула

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ ← дефиниција биномног коефицијента за $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{R}$

→ дефинишемо $\binom{n}{0}=1$

→ У спец. случају за $n\in\mathbb{N}$, $k\le n$ важи: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Ⓣ /услов симетричности/ За $k,n\in\mathbb{N}$ и $k\le n$ важи:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

(доказ: лако)

Ⓣ /негација горњег индекса/ За $k\in\mathbb{N}$ и $n\in\mathbb{R}$ важи:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k\cdot\binom{n+k-1}{k}$$

Док: $\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k\cdot(n+k-1)\cdot(n+k)\cdot\ldots\cdot n}{k!} = (-1)^k\cdot\binom{n+k-1}{k}$

Ⓣ /адициона формула/ За $k\in\mathbb{N}$ и $n\in\mathbb{R}$ важи:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

Док: $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-k+1)}{(k-1)!} = \frac{(n-1)\ldots(n-k)+(n-1)\ldots(n-k-1)\cdot k}{k!} =$

$= \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k+k)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$

▸ Паскалов троугао:

n=0					1				
n=1				1		1			
n=2			1		2		1		
n=3		1		3		3		1	
n=4	1		4		6		4		1
...				...					

• Приметимо да су елементи n-те врсте облика $\binom{n}{k}$ за $1\le k\le n$. За почетне врсте ово се лако провери рачуном. Доказ да је то тако за све врсте Паскаловог Δ следи директно из адиционе ф-ле. Она тврди баш оно што се користи при конструкцији троугла: k-ти ел. у n-тој врсти једнак је суми (k-1)-вог и k-тог елемента из (n-1)-ве врсте

Ⓣ /Биномна формула/ За $n\in\mathbb{N}$ и $x,y\in\mathbb{R}$ важи:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\cdot y^{n-k}$$

Док: индукцијом по n

БАЗА: $n=0$ $1=1$ ✓

КОРАК: ПП да ф-ла важи за $n-1$

$(x+y)^n = (x+y)\cdot(x+y)^{n-1} = (x+y)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k\cdot y^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}\cdot y^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\cdot x^k\cdot y^{n-k} =$

$= x^n+y^n+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right)x^k\cdot y^{n-k} = \binom{n}{n}x^n\cdot y^0+\binom{n}{0}x^0\cdot y^{n-0}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^k\cdot y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\cdot y^{n-k}$

* Важни спец. случајеви:

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$(1-1)^n = 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

* $$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

Ⓣ /полиномна формула/ За $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{R}$ важи:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_r=n \\ k_1, k_2, \dots, k_r \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}$$

→ примери књига

3.) БИНОМНИ ИДЕНТИТЕТИ

- У класичној комбинаторици издвајају се 2 метода за доказивање биномних идентитета: 1) алгебарски
  2) комбинаторни

Ⓣ /извлачење испред заграде/ За $k, n \in \mathbb{N}$, $k \neq n$ важе идентитети:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} \quad , \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$$

Док:

За $k>n$ оба идентитета следе директно. За $n>k$ доказаћемо први (други слично)

$$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Ⓣ /поједностављивање производа/ За $k, n, r \in \mathbb{N}$ важи:

$$\binom{n}{k+r} \cdot \binom{k+r}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{r}$$

Док:

Довољно је размотрити случај $k+r \leq n$.

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{r} = \frac{n!}{k!\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k)!}}{r!(n-k-r)!} = \frac{n!}{k!r!(n-k-r)!} \cdot \frac{(k+r)!}{(k+r)!} = \frac{n!}{(n-k-r)!(k+r)!} \cdot \frac{(k+r)!}{k!r!} =$$

$$= \binom{n}{k+r} + \frac{(k+r)!}{k!(k+r-k)!} = \binom{n}{k+r} + \binom{k+r}{k}$$

Ⓣ /сумационе формуле/ За $r, n \in \mathbb{N}$ важе једнакости:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{n+r+1}{n} \quad , \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Док: Применом мат. индукције доказаћемо први идентитет, а на сличан начин се доказује и други.

БАЗА: $n=0 \quad 1=1$ ✓

КОРАК: ПП да формула важи за $n-1$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r+k}{k} + \binom{r+n}{n} \overset{\text{и.х.}}{=} \binom{r+n}{n-1} + \binom{r+n}{n} = \binom{n+r+1}{n}$$

Ⓣ /сума квадрата/ За $n \in \mathbb{N}$ важи једнакост:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Док: За сваки реалан бр. x важи $(x+1)^n \cdot (x+1)^n = (x+1)^{2n}$. На основу спец. случаја биномне ф-ле $(y=1)$

имамо: $$\left((x+1)^n (x+1)^n\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \quad \left(= (x+1)^{2n}\right)$$

Јасно је да коефицијенти који се налазе уз x^n са обе стране једнакости, морају бити једнаки:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad ✓$$

4. ПРИНЦИП УКЉУЧЕЊА - ИСКЉУЧЕЊА

Ⓣ /формула укључења-искључења/ За коначне скупове $A_1, \dots, A_n$ важи једнакост:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}_n} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \qquad (*)$$

Док:

- Уколико неки елемент x припада унији $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, тада тај ел. припада и неким од скупова $A_1, A_2, \dots, A_n$. ПП да k скупова садржи тo x, и нека су то био скупови $A_1, A_2, \dots, A_k$. Тада важи $x \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i$
- Пошто x припада поменутој унији, елемент x доприноси да се вредност са леве стране једнакости $(*)$ увећа за 1. Треба доказати да x на исти начин доприноси да се и вредност десне стране увећа за 1.
- Размотримо десну страну. Најпре, из $|A_1| + \dots + |A_n|$, x доприноси да се десна страна увећа за k. Затим, при одузимању двочланих пресека, x доприноси да се десна страна умањи за $\binom{k}{2}$, па се при сабирању трочланих пресека десна страна увећала за $\binom{k}{3}$, итд.

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \binom{k}{4} + \dots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} \dots (-1)^{k-1}\binom{k}{k} - \binom{k}{0} + \binom{k}{0} = \binom{k}{0} - \overbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i}^{(1-1)^k = 0} = \binom{k}{0} = 1 \quad //$$

уређено = битан редослед

5. УРЕЂЕНИ ИЗБОРИ ЕЛЕМЕНАТА СА И БЕЗ ПОНАВЉАЊА. ПЕРМУТАЦИЈЕ

Уређени избори ел. са понављањем

- Размотримо уређени избор k елемената скупа од n елемената, уз дозвољено понављање приликом избора, при чему $k, n \in \mathbb{N}$

- Број таквих избора једнак је броју пресликавања $f: \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$. Ако скуп од n елемената идентификујемо са $\mathbb{N}_n$, онда сваком пресликавању f једнозначно одговара један избор елемената на начин да је i-ти изабрани елемент у оквиру тог избора једнак $f(i)$, $i \in \mathbb{N}_k$.

(Т) Број пресликавања $f: \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$ једнак је n^k

Док:

Доказаћемо индукцијом по k.

БАЗА: За $k=1$ постоји n пресликавања којима се јединствени ел. скупа $\mathbb{N}_1$ слика у неки ел. скупа $\mathbb{N}_n$ ✓

КОРАК: ПП да тврђење важи за $k-1$ (и.х.).

Из и.х. закључујемо да се $k-1$ елемената скупа $\mathbb{N}_k$ може пресликати у елементе скупа $\mathbb{N}_n$ на n^{k-1} начина, а преостали k-ти ел. се може на n начина пресликати у неки елемент скупа $\mathbb{N}_n$.
Дакле, постоји $n \cdot n^{k-1} = n^k$ пресликавања. ∎

* Нека је A произ. подскуп неког скупа X. Карактеристична ф-ја скупа A, $\chi_A: X \to \{0,1\}$ деф. је са:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

(Т) Нека је X неки скуп од n елемената. Бр. елемената партитивног скупа скупа X је 2^n тј

$$|P(X)| = 2^n$$

Док:

Уочимо да сваком подскупу A скупа X, $A \subseteq X$ (укључујући и $\emptyset$ и A) одговара јединствена карактеристична ф-ја $\chi_A: A \to \{0,1\}$, али и обратно, свака ф-ја датог облика одговара једном подскупу.

Другим речима, бр. елемената $|P(X)|$ једнак је броју карактеристичних ф-ја, па у складу са претходном теоремом таквих ф-ја има 2^n

$\Rightarrow |P(X)| = 2^n$ ∎

Уређени избори ел. (без понављања)

- Нека су $k, n \in \mathbb{N}$. Уколико $k > n$, јасно је да не постоји ниједан уређени избор k елемената (без понављања).
Зато можемо претпоставити $k \le n$. Број уређених избора (без понављања) k ел. скупа од n ел. једнак је броју „1-1" пресликавања $f: \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$. Инјективност пресликавања елиминише могућност понављања приликом избора...

(Т) За $k, n \in \mathbb{N}$ тд $k \le n$, број „1-1" пресликавања $f: \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_n$ једнак је $\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Док:

Индукцијом по k. (БАЗА - лако...)

КОРАК: ПП да важи за $k-1$. То значи да се $k-1$ ел. скупа $\mathbb{N}_k$ може инјективно пресликати у елементе скупа $\mathbb{N}_n$ на $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2)$ начина; а преостали k-ти ел. се може пресликати у неки ел. скупа $\mathbb{N}_n$ на $(n-k+1)$ начина $\Rightarrow$ k ел. скупа $\mathbb{N}_k$ се може на $\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$ начина инјективно пресликати у ел. скупа $\mathbb{N}_n$. ∎

Напомена: Производ из теореме једнак је $\frac{n!}{(n-k)!}$. Ако важи $k>n$ онда је један фактор у производу једнак 0 па тиме је и цео производ једнак 0. Тврђење тада важи, иако тада овај количник није деф.

* ПЕРМУТАЦИЈЕ (скупа од n елемената) су спец. случај уређених избора без понављања елемената код којих важи $k=n$. Број пермутација скупа од n елемената једнак је $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$

6. НЕУРЕЂЕНИ ИЗБОРИ ЕЛЕМЕНАТА СА И БЕЗ ПОНАВЉАЊА. ПЕРМУТАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ

Неуређени избори ел. (без понављања)

Т Нека $k,n\in\mathbb{N}$ и $k\leq n$. Бр. неуређених избора (без понављања) k елемената скупа од n елемената једнак је:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Док:

Показали смо да је бр. уређених избора (без пон.) k ел. скупа од n ел. једнак $\frac{n!}{(n-k)!}$. Будући да сада имамо неуређене изборе, од свих уређења скупа од k елемената треба елиминисати сва изузев једног. Што нас доводи до тога да претходни количник треба поделити бројем пермутација (који је једнак $k!$), и тако добијамо тражени број. ∎

* Вредност из теореме једнака је биномном коеф. $\binom{n}{k}$.
* У овом контексту се често користи термин „комбинације k елем. скупа од n елемената". Можемо да закључимо да је бр. таквих комбинац. једнак броју комбинација n-k елем. скупа од n елемената. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

▶ Опишимо комбинаторни метод за доказивање биномних идентитета. Овим методом се врше два пребројавања елемената неког скупа тд резултат првог пребројавања буде једнак једној, а резултат другог пребројавања другој страни једнакости која се доказује. (Доказ (1) у теореми која следи)

Т За $n,r,s\in\mathbb{N}$ важе једнакости: (1) $\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n}$ /ВАНДЕРМОНДОВ ИДЕНТИТЕТ/

(2) $\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\binom{s}{n+k}=\binom{r+s}{r+n}$

Док:

(1): ПП да у некој просторији има r девојчица и s дечака и да треба изабрати n деце независно од пола. То је могуће учинити на $\binom{r+s}{n}$ начина.

С друге стране, из скупа девојчица можемо изабрати њих k на $\binom{r}{k}$ начина, док за одабир n-k дечака постоји $\binom{s}{n-k}$ начина. Сумирањем по k добијамо да је укупан бр. начина за избор n деце једнак управо $\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$ и тако смо доказали тврђење.

(2): $$\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\binom{s}{n+k}=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\binom{s}{s-n-k}\overset{(1)}{=}\binom{r+s}{s-n}=\binom{r+s}{r+s-s+n}=\binom{r+s}{r+n}$$ ∎

Неуређени избори елемената са понављањем

Ⓣ Број неуређених избора k ел. скупа од n елемената, уз дозвољено понављање приликом избора, једнак је

$$\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Док:

- Уколико елементе скупа означимо са $1,2,\ldots,n$ тада избор k елем. можемо схематски представити распоређивањем тачкица • код елемената који су раздвојени преградама

1	2	3	4	5	6	7	8	9
•		•	•	••		•	•	

↑ избор 7 од 9

- број избора k елемената једнак је броју избора k позиција за маркере од $n+k-1$ могућих позиција (имамо и $n-1$ позиц. за преграде)

Зато је решење $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

- види пример из скрипте

* ПЕРМУТАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ су пермутације елемената који се могу понављати више пута. (мултискупа)

Пример (анаграмирање) Колико се речи може саставити размештањем слова речи МАТЕМАТИКА ?

→ Када би се разматрана реч састојала од 10 различитих слова, одговор би био $10!$, али имамо понављање.

Слово А се појављује 3 пута, слова М и Т по 2 пута, а свих 10 слова треба распоредити на 10 позиција.

Решење је $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot 3!$

$\binom{10}{2}$ – на колико начина од 10 места бирамо 2 места за слово М

$\binom{8}{3}$ – од преосталих 8 места бирамо 3 места за А

$\binom{5}{2}$ – од 5 бирамо 2 за Т

$3!$ – бр. начина да распоредимо остала 3 броја

Ⓣ Број пермутација са понављањем, мултискупа од n елемената у којем се први елемент појављује n_1 пута, други n_2 пута, ... k-ти n_k пута, при чему важи $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$, једнак је:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

Док:

Уопштавајући рачун из претходног примера, долазимо до закључка да је тражени број једнак:

$$\frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!\,(n-n_1-\ldots-n_k)!}$$

Након скраћивања и коришћења $n_1+\ldots+n_k=n$, долазимо до тражене једнакости.

Напомена: Вредност из претходне теореме можемо означавати са: $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}$

Ⓣ Број начина да се n објеката распореди у k кутија тако да се у i-ту кутију стави n_i објеката једнак је:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

7.) ГЕНЕРИСАЊА ПЕРМУТАЦИЈА И КОМБИНАЦИЈА

* комбинације = неуређени изобри елемената (без понављања)

Генерисање пермутација

→ подразумева одређивање свих пермутација скупа од n елемената у складу са неким правилом које одређује редослед у којем се генеришу

- Нека је $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Јасно је да се било који скуп од n елемената може бијективно пресликати у скуп $\mathbb{N}_n$, те је довољно размотрити пермутације скупа $\mathbb{N}_n$.
- Нека су A и B две пермутације разматраног скупа. Нека $A = a_1 a_2 \dots a_n$, $a_i \in \mathbb{N}_n$ $(1 \leq i \leq n)$, $B = b_1 b_2 \dots b_n$, $b_i \in \mathbb{N}_n$ $(1 \leq i \leq n)$ при чему важи $a_i \neq a_j$ за $i \neq j$ и исто и за b_i.
- У лексикографском уређењу, пермутација A се налази ИСПРЕД пермутације B ако важи:

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots,\ a_{k-1} = b_{k-1},\ a_k < b_k$$

- У складу са тим, важи:
  - прва пермутац. скупа $\mathbb{N}_n$ је $123\dots n$
  - друга пермутац. скупа $\mathbb{N}_n$ је $123\dots n(n-1)$

  ⋮
  - последња пермутац. скупа $\mathbb{N}_n$ је $n(n-1)\dots 21$

- Размотримо сада питање одређивања пермутације која следи након задате пермутације у лексикографски уређеном скупу пермутација скупа $\mathbb{N}_n$.

Алгоритам 1 (наредна пермутација)

→ Алгоритам прихвата пермутацију $A = a_1 a_2 \dots a_n$, а враћа наредну перм. у складу са лексикографским уређењем.

K1: Ако су бројеви a_i $(1 \leq i \leq n)$ уређени у опадајући низ, онда је A последња пермутација у лексикографском уређењу, па наредна не постоји

K2: Претражити пермутацију A здесна налево до првог појављивања индекса i за који важи $a_i < a_{i+1}$.

K3: Одредити најмањи број a_j који је већи од a_i, уз услов $i < j$

K4: Заменити места бројевима a_i и a_j, потом уредити у растући поредак све бројеве који се након замене налазе десно од a_j и прећи на корак K5

K5: Крај

→ пример у скрипти

→ Алгоритам за одређивање претходне пермутације је сличан овом алгоритму..

Генерисање тражене и случајне пермутације

- Један начин за одређивање k-те пермутације је да генеришемо све перм., па одредимо k-ту. Међутим, ово је врло неефикасно. Постоји алгоритам за ефикаснији начин али га не обрађујемо сад.
- За генерисање случајне пермутац. скупа $\mathbb{N}_n$ се користи алгоритам заснован на ф-ји која даје случајно изабрани бр. скупа првих k природних бројева. Алгоритам има n корака и у i-том кораку се случајно бира број који ће се налазити на i-тој позицији (бројеви се бирају из скупа „неизабраних")

Генерисање комбинација

→ Будући да код комбинација поредак елем. није битан, приликом генерисања комб. узимаћемо у обзир представнике који су први у лексикографском уређењу (нпр. 123 је иста комбинација као и 132 или 231, али ћемо узимати 123 јер је први по лекс. уређењу)

→ У складу са претходним, за лекс. уређење комбинација k елемената скупа $\mathbb{N}_n$, $k \le n$, важи:

- прва комбинација: $123\ldots k$ (првих k ел.)
- друга комбинација: $123\ldots(k-1)(k+1)$

  ⋮
- последња комб.: $(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)n$ (последњих k ел.)

→ Размотримо схематски приказ у којем је сваком ел. скупа $\mathbb{N}_n$ придружен један бинарни индикатор (означен тачкицом •):

$$\underset{1}{\circ}\ \underset{2}{\circ}\ \underset{3}{\circ}\ \ldots\ \underset{n}{\circ} \in \{0,1\}$$

Очигледно важи следећа лема:

ЛЕМА: Уређена бинарна n-торка која садржи тачно k јединица једнозначно одређује једну комбинацију k елемената скупа $\mathbb{N}_n$.

→ На основу ове леме, лекс. уређење комбинација (k ел. скупа $\mathbb{N}_n$) своди се на пермутац. са понављањем мултискупа од n елемената од којих су њих k јединице, а остали нуле. Дакле:

- прва комбинац. одређена је пермутацијом: $\underbrace{11\ldots11}_{k}00\ldots0$
- друга комб. —‖— : $\underbrace{11\ldots1}_{k-1}010\ldots0$

  ⋮
- последња —‖— : $00\ldots00\underbrace{11\ldots1}_{k}$

→ Сада није тешко одредити наредну комбинацију у односу на задату. Приметимо да свака комбинац. изузев последње има облик: $a_1a_2\ldots a_{i-1}10\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{\text{не мора постојати}}$

→ Репрезентација се дакле састоји из префикса $a_1a_2\ldots a_{i-1}1$ који се завршава јединицом, иза којег следи ниска нула, а потом ниска јединица (ова ниска не мора да постоји).

→ Наредна комбинација је облика: $a_1a_2\ldots a_{i-1}01\ldots10\ldots0$
Добија се од претходне тк што се префикс препише, затим се јединица са његовог краја замени нулом, потом допише потребан бр. јединица, и све комплетира нулама

⇝ пример у скрипти...

8.) ФУНКЦИЈЕ ГЕНЕРАТРИСЕ. ДЕФ. И ОСНОВНА СВОЈСТВА. БИНОМНА Ф-ЛА ЗА ЦЕЛОБРОЈНЕ ЕКСПОНЕНТЕ

Дефиниција и основна својства

- Сваком низу (нпр реалних) бројева, $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, можемо придружити степени ред $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$, при чему је x нека реална променљива. Ако овај ред конвергира (у неком интервалу), његову суму називамо функцијом генератрисом низа (a_n) и означавамо са A $(= A(x))$.
- Сумирањем степеног реда, кад год је то могуће, добијамо сажетији облик ф-је генератрисе

  нпр. $(a_n) = (1,1,1,\dots)$ одговара степени ред $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ за $|x|<1$
- Функција $\frac{1}{1-x}$ садржи све податке о степеном реду. Ако диференцирамо ф-ју k-пута у тачки $x=0$ и резултат помножимо са $\frac{1}{k!}$, добићемо коеф. који се налази уз x^k. Другим речима, сума степеног реда садржи све информације о низу (a_n). Зато се и зове функција генератриса.

  Пишемо $(a_n) \longleftrightarrow A$ $(A \to$ ф-ја генератриса$)$

* Ф-ју генератрису смо сумирали под уп да $|x|<1$, а потом диференцирали у 0 (уз множење са $\frac{1}{k!}$) како бисмо добили коефицијенте, тј чланове низа. Ове рестрикције не праве проблем јер је нама довољно да степени ред конвергира у било ком интервалу, и да се потом све његове коеф. могу одредити диференцирањем добијене суме у некој тачки тог интервала. На тај начин добијамо једнозначну кореспонденцију између суме степеног реда и одговарајућег низа

Напомена: - ф-ја генератриса == генераторска ф-ја == генеришућа ф-ја
- низови могу бити генерисани и другачијим степеним редовима (нпр $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i$)

Биномна ф-ла за целобројне експоненте

$\boxed{\text{ЛЕМА}}$: Нека $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$. Коеф. који се налази уз x^k у развоју израза $(1+x+x^2+\dots)^n$ једнак је:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Док:

Коеф. који се налази уз x^k у производу $\underbrace{(x^0+x^1+x^2+\dots)(x^0+x^1+x^2+\dots)\cdot\dots\cdot(x^0+x^1+x^2+\dots)}_{n \text{ заграда}}$

једнак је броју избора по једног сабирка из сваког од фактора, уз услов да је сума степена изабраних сабирака једнака k. Јасно, у тим изборима учествују само сабирци $x^0, x^1, \dots, x^k$.

Размотримо низ $(\overbrace{1,1,1,\dots 1}^{n})$ који се састоји од n јединица. Приметимо да је претходно описани избор n сабирака еквивалентан избору k јединица тако да се i-та јединица бира онолико пута колики је степен сабирка изабраног из i-тог фактора $(1 \le i \le n)$. Ово је управо неуређени избор k елемената низа од n елемената уз дозвољено понављање. $\Rightarrow$ Број избора је $\binom{n+k-1}{k}$ ∎

$\boxed{\text{ЛЕМА}}$: За $n \in \mathbb{N}$, $|x|<1$, коеф. који се налази уз x^k у развоју израза $(1-x)^{-n}$ једнак је

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Док:

Директним рачуном: $(1-x)^{-n} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}\cdots\frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+\dots)^n$ па

резултат следи из претх. леме ∎

ЛЕМА: За $n \in \mathbb{N}$ и $|x|<1$, коеф. који се налази уз x^k у развоју $(x+1)^{-n}$ је
$$\binom{-n}{k}$$

Док:

Мењамо $-x$ са x у доказу претх. леме:
$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^n = (1-x+x^2-x^3+\ldots)^n \Rightarrow \text{коеф. уз } x^k \text{ је } (-1)^k \cdot \binom{n+k-1}{k} = \binom{-n}{k}$$ ∎

Т /БИНОМНА Ф-ЛА ЗА ЦЕЛОБРОЈНЕ ЕКСПОНЕНТЕ/ За $n \in \mathbb{Z}$ и $|x|<1$ важи:
$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

Док:

За $n \in \mathbb{N}^+$, тврђ. следи из биномне ф-ле. За $n<0$ тврђење следи из претходне леме. ∎

⇝ може се док. да ово важи и за $n \in \mathbb{R}$

9.) ОДРЕЂИВАЊЕ ФУНКЦИЈА ГЕНЕРАТРИСА

- Одређивање ф-је генератрисе <=> израчунавање суме одговарајућег степеног реда

→ Нека су дати низови $(a_n)=(a_0,a_1,\ldots,a_k,\ldots)$ и $(b_n)=(b_0,b_1,\ldots,b_k,\ldots)$ и њихове ф-је генератрисе $A(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k+\ldots$ и $B(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_kx^k+\ldots$

→ Размотримо ф-је генератрисе низова који се добијају неким трансформацијама ова два низа.

* САБИРАЊЕ НИЗОВА: Низу $(a_n)+(b_n) = (a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_k+b_k, \ldots)$ одговара ф-ја генератриса:
$$a_0+b_0+(a_1+b_1)x+\ldots+(a_k+b_k)x^k+\ldots = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^k+\ldots + b_0+b_1x+\ldots+b_0x^k+\ldots = A(x)+B(x)$$

* МНОЖЕЊЕ НИЗА СКАЛАРОМ: За $c \in \mathbb{R}$, низу $c\cdot(a_n) = (ca_0, c\cdot a_1, c\cdot a_2, \ldots, c\cdot a_k, \ldots)$ одговара ф-ја генератриса:
$$ca_0+ca_1x+\ldots+ca_kx^k+\ldots = c\cdot(a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k+\ldots) = c\cdot A(x)$$

* ПОМЕРАЊЕ НИЗА ЗА К МЕСТА УЛЕВО: Померањем низа (a_n) за k места улево добијамо низ $(a_k, a_{k+1}, \ldots)$ којем одговара ф-ја генератриса $a_k+a_{k+1}x+a_{k+2}x^2+\ldots = \dfrac{A(x)-(a_0+a_1x+\ldots+a_{k-1}x^{k-1})}{x^k}$

* ПОМЕРАЊЕ НИЗА ЗА К МЕСТА УДЕСНО: Померањем низа (a_n) за k места удесно добијамо низ $(0,0,\ldots,0,a_0,a_1,\ldots a_k,\ldots)$ којем одговара ф-ја генератриса $x^k\cdot A(x)$

→ Размотримо сада неке трансформације ф-је генератрисе и њихов утицај на одговарајући низ. ↗

* ЗАМЕНА X СА $c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$ У Ф-ЈИ ГЕНЕРАТРИСИ: Оваквом заменом у ф-ји генератриси $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ добијамо ф-ју ген. $a_0 + c \cdot a_1 x + c^2 a_2 x + \dots + c^k a_k x^k + \dots$ која одређује низ $(a_0, ca_1, c^2a_2, \dots, c^k a_k, \dots)$

→ спец. за $c = -1$ добијамо низ: $(a_0, -a_1, a_2, -a_3, \dots)$

* пример у скрипти

* ЗАМЕНА X СА X^k У Ф-ЈИ ГЕНЕРАТРИСИ: Оваквом заменом у ф-ји ген. $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, добијамо ф-ју ген. $a_0 + a_1x^k + a_2x^{2k} + \dots + a_k \cdot x^{k \cdot k} + \dots$ која одређује низ:

$$(a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, a_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, a_2, \dots)$$

→ спец. за $k=2$ добијамо $(a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots)$

* пример скрипта

* ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ Ф-ЈЕ ГЕНЕРАТРИСЕ: Диференцирањем ф-је ген. $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots$ добијамо ф-ју ген. $A'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + k \cdot a_k \cdot x^{k-1} + \dots$ која одређује низ $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, ka_k, \dots)$

* ИНТЕГРАЦИЈА Ф-ЈЕ ГЕНЕРАТРИСЕ: Интеграцијом ф-је ген. $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots$ добијамо ф-ју ген. $\int A(x)dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_k}{k+1}x^k + \dots$ која одређује низ: $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_k}{k+1}, \dots)$

10) КОМПОЗИЦИЈЕ И ПАРТИЦИЈЕ БРОЈЕВА, ОСНОВНА СВОЈСТВА

* Композиција природног броја n на k сабирака је уређена k-торка $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ природних бројева тд важи $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Бројеве $a_1, a_2, \dots, a_k$ називамо сабирцима композиције.

– нпр. за $k=2$ добијамо следеће композиције броја 4: $1+3$, $3+1$, $2+2$

* композиције = уређене партиције = уређена разлагања прир. броја

(T) Број композиција прир. броја n на k сабирака једнак је: $\binom{n-1}{k-1}$

Док:

Послужимо се следећом комбинаторном схемом: $n = 1\_1\_1\_\dots\_1$

→ Бр. цртица је $n-1$. Да бисмо добили k сабирака потребно је да на цртице расподелимо $k-1$ плусева, а то можемо на $\binom{n-1}{k-1}$ начина (неуређени избор елемената...)

→ Након распоређивања плусева, узастопне јединице дају један сабирак ... ∎

(T) Бр. композиција прир. броја n једнак је 2^{n-1}.

Док:

Сумирамо $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$$

* **ПАРТИЦИЈА** прир. броја n на k сабирака је мултискуп $[a_1,a_2,\dots,a_k]$ прир. бројева што важи $n=a_1+a_2+\dots+a_k$. Бројеве $a_1,a_2,\dots,a_k$ називамо сабирцима партиције

- Пр. за $k=2$ добијамо следеће партиције броја 4: $1+3$, $2+2$

* Број партиција броја n означавамо са $p(n)$, а бр. партиција броја n на k сабирака са $p_k(n)$.

* Партицију броја n можемо записати и овако: $[1^{m_1},2^{m_2},\dots,n^{m_n}]$, при чему ненегативни цели бројеви $m_1,m_2,\dots,m_n$ означавају бројеве појављивања сабирака у мултискупу.

→ Не постоји ф-ла за број партиција произ. природног броја.

(Т) Важи једнакост:

$$p_k(n)=p_k(n-k)+p_{k-1}(n-k)+\dots+p_1(n-k)$$

Док:

Нека је $n=a_1+a_2+\dots+a_k$ једна партиција броја n на k сабирака. Ако од сваког сабирка одузмемо 1, добијамо:

$$n-k=(a_1-1)+(a_2-1)+\dots+(a_k-1) \quad (*)$$

- На овај начин смо од дате партиције броја n добили партицију броја $n-k$. Уочимо да неки од сабирака могу бити једнаки нули ако су пре одузимања били једнаки јединици. Дакле, (*) даје једну бијективну кореспонденцију између скупа партиција броја n на k сабирака и скупа партиција броја $n-k$ на највише k сабирака одакле следи тврђење. ■

(Т) ф-ја генератриса низа $(p(n))$ одређена је са: $P(x)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}$

→ Ова теорема се може доказати разлагањем свих партиција броја n на оне који садрже један фиксирани сабирак и на оне које га не садрже, те потом одређивања ф-ја генератриса низова таквих партиција.

(18) ФЕРСЕРОВИ ДИЈАГРАМИ. КОНЈУГОВАНЕ ПАРТИЦИЈЕ БРОЈА. ИДЕНТИТЕТИ СА ПАРТИЦИЈАМА

→ Партиције бројева могу погодно да се представе преко Ферсерових дијаграма. Маркери се распоређују у врсте и колоне дијаграма тако да свака врста одговара сабирку из дате партиције. Уз то, код оваквог представљања су сабирци партиције уређени у нерастући низ, тј. бр. маркера опада од прве ка последњој врсти.

(Пр.) Ферсеров дијаграм партиције $17=5+4+3+2+2+1$ је:

* За две партиције броја n кажемо да су (међусобно) **КОНЈУГОВАНЕ** уколико се Ферсеров дијаграм једне добија заменом места врста и колона у Ферсеровом дијаграму друге. (тј. уколико се Ферсеров дијаграм једне добија транспоновањем Ферсеровог дијаграма друге...)

(Пр.) Ферс. дијаграми партиција $5=3+2$ и $5=2+2+1$ су дати са:

одакле следи да су оне конјуговане.

* За партицију кажемо да је <u>самоконјугована</u> уколико је њен Ферсеров дијаграм инваријантан у односу на транспоновање. Нпр. $7 = 5+4+3+2+2+1$

<u>Напомена</u>: Ферсеров дијаграм самоконјуговане партиције је симетричан као овде :

Ⓣ Важе следећи идентитети :

(1) Бр. партиција броја n на највише k сабирака једнак је броју партиција броја $n+k$ на k сабирака

(2) Бр. партиција броја n на највише k сабирака једнак је броју партиција броја n на сабирке из скупа $\mathbb{N}_k$

(3) Бр. партиција броја n на парне сабирке једнак је броју партиц. броја n у којима се сваки сабирак појављује паран бр. пута

(4) Бр. самоконјугованих партиц. броја n једнак је броју партиц. броја n у којима су сабирци различити и непарни.

<u>Док</u>:

(1): Овај идентитет је последица теореме (♡) од раније ... k врста

Нека је дата партиција броја $n+k$ на k сабирака. Прва колона одговарајућег Ферсовог дијаграма садржи тачно k маркера. Ако уклонимо прву колону из дијаграма, добијамо дијаграм неке партиције броја n који има највише k врста, тј. та партиција броја n има највише k сабирака.
Овим је успостављена бијективна кореспонденција ... (између скупова)

(2): Довољно је уочити да је Ферсеров дијаграм који представља партицију броја n на највише k сабирака конјугован Ферсеровом дијаграму једне партиције броја n на сабирке који припадају скупу $\mathbb{N}_k$.
Идентитет се добија успостављањем сличне бијективне кореспонденције...

(3) и (4) се слично доказују. ∎

11.) РЕКУРЕНТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ. ДЕФИНИЦИЈА И РЕШЕЊА. ЛИНЕАРНА РЕКУРЕНТНА Ј-НА И ЊЕНО ОПШТЕ РЕШЕЊЕ

↳ j-не које оперишу над низовима

<u>Деф</u> За $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ и $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1} \in \mathbb{R}$, једначину облика:

$$a_{n+k} = \phi(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1})$$

називамо рекурентна j-на k-тог реда. Јасно, функција ϕ дефинисана је на скупу $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^k$, док су $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}$ узастопни чланови неког (реалног) низа.

<u>Напомена</u>: Постоје разл. дефиниције рекурентне j-не. Нпр. постоји приступ где се члан низа изражава у ф-ји од свих чланова низа који му претходе ; Рекурентне j-не се могу уопштити и на низове низова / могу обухватити комплексне бројеве..

Пример: Низ факторијела бројева скупа N^* може се дефинисати ј-ном $\begin{cases} a_{n+1} = (n+1)\cdot a_n \\ a_0 = 1 \end{cases}$

при чему услов $a_0 = 1$ називамо почетни услов.

$$a_{n+1} = (n+1)\cdot a_n = (n+1)\cdot n \cdot a_{n-1} = (n+1)\cdot n \cdot \ldots \cdot a_0 = (n+1)\cdot n \cdot \ldots \cdot 1 = (n+1)! \quad \Rightarrow \quad a_n = n!$$

* Рекурентна ј-на – ј-на којом се рекурзивно дефинише неки низ бројева

– Чланови низа су одређени једначином, али и вредношћу нултог члана a_0; За различите вредности a_0 добијамо различите низове који задовољавају исту једначину

Деф: • Решење рекурентне ј-не (*) је било који низ (a_n), такав да за свако $n \in N^*$, чланови тог низа $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}$ задовољавају ту једначину

$$(*) \quad a_{n+k} = \phi(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$$

• Опште решење те ј-не зависи од k констаната, тј. од првих k чланова низа.

• Различита решења рекурентне ј-не добијају се из општег решења изборима вредности констаната.

• Услове којима се једнозначно одређују вредности ових констаната називамо почетни услови.

• Једно издвојено решење које је одређено неким почетним условима називамо партикуларно решење.

• За произ. вредност n, n-ти члан низа (a_n) називамо општи члан тог низа.

• Одређивање општег решења ј-не (*) у пракси се своди на одређивање општег члана низа који задовољава ту ј-ну у функцији од n и констаната које се потом могу одредити на основу почетних услова

Линеарне рекурентне једначине

Деф: Ј-ну облика $f_0(n)a_n + f_1(n)a_{n+1} + \ldots + f_k(n)a_{n+k} = f(n)$ (☆)

називамо линеарна рекурентна једначина (k-тог реда).

* Разликујемо 2 врсте линеарних рекурентних ј-на:

1) са константним коефицијентима (код којих су сви коеф. f_i $(0 \le i \le k)$ константе)

2) са функционалним коефицијентима (код којих су коеф. f_i функције променљиве n)

* За линеарну рек. ј-ну кажемо да је ХОМОГЕНА уколико важи $f(n) = 0$. У супротном је НЕХОМОГЕНА.

* Нормализовани облик лин. рек. ј-не је облик у којем важи $f_k(n) = 1$

* За решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots, (a_n^{(r)})$ хомогене лин. рек. ј-не (☆) кажемо да су ЗАВИСНА уколико се неко од њих може представити као лин. комб. осталих. У супротном су НЕЗАВИСНА.

(Т) Решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots, (a_n^{(r)})$ хомогене ј-не (★) су независна акко:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \ldots & a_1^{(r)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \ldots & a_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^{(1)} & a_r^{(2)} & \ldots & a_r^{(r)} \end{vmatrix} \neq 0$$

(1. низ, 2. низ; први низ, други низ)

Док:

(⇒): Независност решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots, (a_n^{(r)})$ одмах даје и независност колона-вектора матрице A, што значи да је ранг матрице једнак r, тј. важи $\det(A) \neq 0$

(⇐): Ако је $\det(A) \neq 0$, онда је ранг матрице A једнак r, па су колоне матрице A лин. независне ⇒ решења су лин. независна ■

→ Приметимо да су два решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)})$ зависна, уколико су одговарајући чланови низа пропорционални, тј. ако $\forall n \in \mathbb{N}$ важи $a_n^{(1)} = c \cdot a_n^{(2)}$, при чему је c неко фиксирана константа.

(Т) Уколико су $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots, (a_n^{(k)})$ независна решења хомогене ј-не (★), тада је опште решење одређено са:

$$a_n = c_1 \cdot a_n^{(1)} + c_2 \cdot a_n^{(2)} + \ldots + c_k \cdot a_n^{(k)} \qquad (**)$$

при чему су $c_1, \ldots, c_k$ неке константе

* За сваку хомогену ј-ну облика (★) важе:

  • број k у једнакости (**) подудара се са редом ј-не (★)

  • опште решење представља лин. комбинацију k независних решења

  • константе $c_1, c_2, \ldots, c_k$ одређују се на основу почетних услова

* Опште решење НЕХОМОГЕНЕ лин. рекурентне ј-не је облика: $a_n = h_n + p_n$

при чему је h_n опште реш. одговарајуће хомогене ј-не, а p_n партикуларно решење дате нехомогене ј-не.

→ Постоји више начина да се одреди то p_n (касније о томе)

(12) ЛИНЕАРНА РЕКУРЕНТНА Ј-НА СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

- У складу са обликом ј-не (★), линеарна рекурентна ј-на (k-тог реда) са конст. коеф. је облика:

$$f_0 a_n + f_1 a_{n+1} + \ldots + f_k a_{n+k} = f(n) \qquad (\#)$$

при чему су $f_0, f_1, \ldots, f_k$ реалне константе

* Размотримо најпре хомогене лин. рек. ј-не са константним коеф. Решење хомогене лин. рек. ј-не са конст. коеф. одређено је њеном карактеристичном ј-ном. Карак. ј-на једначине (#) је ј-на:

$$f_0 + f_1 x + \ldots + f_k x^k = 0 \qquad (\heartsuit)$$

- Сада ћемо описати начин одређивања хомогене ј-не (#). Оно се своди на одређивање k независних решења, а независност тих решења следи из теореме од раније. Разликујемо 2 случаја:

1° Ако су нуле $x_1, \dots, x_k$ каракт. ј-не (♡) једноструке, онда је опште реш. дато са

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \dots + c_k \cdot x_k^n$$

2° Ако постоји нула x_i вишеструкости m, онда она даје члан

$$c_i x_i^n + c_{i+1} \cdot n \cdot x_i^n + \dots + c_{i+m-1} \cdot n^{m-1} \cdot x_i^n$$

у општем решењу хомогене ј-не

Пример: Ако постоји трострука нула x_1, док су остале једноструке, решење је облика:

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 \cdot n \cdot x_1^n + c_3 \cdot n^2 \cdot x_1^n + c_4 x_4^n + \dots + c_k \cdot x_k^n$$

* Прелазимо на одређивање партикуларног реш. НЕХОМОГЕНЕ ј-не (#). У зависности од облика ф-је f разликујемо већи бр. случајева.

▷ Ако важи $f(n) = P_d(n) \cdot b^n$, где је P_d полином степена d, а b реална константа, онда важи:

- Ако $x=b$ није нула карakт. ј-не (♡), онда партикуларно реш. можемо потражити у облику:

$$p_n = (A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d) \cdot b^n$$

- Ако $x=b$ јесте нула кар. ј-не (♡), вишеструкости m, онда партик. реш. тражимо у облику:

$$p_n = n^m \cdot (A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d) \cdot b^n$$

→ Партикуларно решење ће бити одређено када се одреде непознати коефицијенти $A_0, A_1, \dots, A_d$ које налазимо заменом добијеног облика тог решења у ј-ну (#).

→ Наведимо два подслучаја која следе из претходног:

(1) Ако је $f(n) = P_d(n)$, онда важи:

- ако $x=1$ није нула карakт. ј-не (♡), онда партик. реш. тражимо у облику

$$p_n = A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d$$

- ако $x=1$ јесте нула кар. ј-не (♡), вишеструкости m, онда партик. реш. тражимо у облику

$$p_n = n^m (A_0 + A_1 n + \dots + A_d n^d)$$

(2) Ако је $f(n) = c \cdot b^n$, онда важи:

- ако $x=b$ није нула —||—

$$p_n = A \cdot b^n$$

- ако $x=b$ јесте нула —||—

$$p_n = n^m \cdot A \cdot b^n$$

// примери у скрипти

* Не постоји општи метод за решавање лин. рек. ј-на са функционалним коефицијентима, нити се све могу решити. За неке типове постоје методи (Метод варијације константи...)
→ Израчунавање првих неколико чланова и потом индуктивно доказивање наслућеног решења је један метод

Пример 2.3.11. Одредити решење рек. ј-не $n \cdot a_n = (n-2) \cdot a_{n-1} + 2$, $a_0 = 1$.

$$n \cdot a_n = (n-2)a_{n-1} + 2 \quad / \cdot (n-1)$$
$$n(n-1)a_n = (n-2)(n-1)a_{n-1} + 2(n-1)$$
$$n(n-1)a_n = (n-2)\cdot(n-3)\,a_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1)$$
$$\vdots$$
$$= 2(1+2+\ldots+n-1) = n(n-1) \Rightarrow n(n-1)\,a_n = n(n-1) \Rightarrow \boxed{a_n = 1}$$

Пример 2.3.13. Одредити реш. рек. ј-не $a_n = \frac{n+2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i$, $a_0 = 1$.

За разлику од претходног примера, овде се n-ти члан изражава преко свих претходних, тј бр. чланова низа са десне стране једнакости није константан.

$$n \cdot a_n = (n+2) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \cdot a_i \quad / + n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$
$$n \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i = 2(n+1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$
$$\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i \qquad \text{Нека је } b_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{n+1}$$
$$b_n = 2 \cdot b_{n-1}, \quad b_0 = 1$$

решимо ово и добијемо $b_n = 2^{n-1}$ па одатле добијамо $a_n = (n+2) \cdot 2^{n-2}$

Нелинеарне рекурентне једначине

* Методи за њихово решавање се не разликују много од метода за решавање лин. рек. ј-на са функц. коеф...

Пример 2.3.14. Одредити решење рек. ј-не $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

Најпре се (нпр. индукцијом) да су сви чланови низа који задовољава дату ј-ну и почетне услове, позитивни. Логаритмовањем обе стране добијамо:

$$\log_2 a_{n+2} = \log_2 a_{n+1}^3 - \log_2 a_n^2 \qquad \text{узмемо смену } b_n = \log_2 a_n$$
$$b_{n+2} = 3 \cdot b_{n+1} - 2 \cdot b_n \qquad \text{где } b_0 = \log_2 a_0 = 0, \; b_1 = \log_2 a_1 = 1$$

Ово решимо и добијемо $b_n = 2^n - 1$ $\qquad b_0 = 0, b_1 = 1$

$$\Rightarrow a_n = 2^{b_n} \Rightarrow \boxed{a_n = 2^{2^n - 1}}$$

13.) ФУНКЦИЈЕ ГЕНЕРАТРИСЕ И РЕШАВАЊЕ РЕКУРЕНТНИХ ЈЕДНАЧИНА

– Нека је линеарна рек. ј-на са конст. коефицијентима, уз почетне услове, задата са:

(нормализовани облик)

$$\left.\begin{aligned} &f_0 a_n + f_1 \cdot a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} = 0 \\ &a_0 = c_0,\ a_1 = c_1, \ldots, a_{k-1} = c_{k-1} \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Релација између оваквих ј-на и ф-ја генератриса дата је следећом теоремом:

Ⓣ ф-ја генератриса низа (a_n) одређеног рекурентном ј-ном $(*)$ је облика:

$$A(x) = \frac{P(x)}{f_0 x^k + f_1 x^{k-1} + \ldots + 1} \qquad (\#)$$

при чему је P полином степена (строго) мањег од k

Док:

Јасно је да се ф-ја ген. низа (a_n), која је сума неког конвергентног степеног реда, може записати у облику који је дат у теореми, где је P такође сума неког степеног реда. Треба само доказати да је P полином степена мањег од k.

$$P(x) = A(x) \cdot (f_0 x^k + f_1 x^{k-1} + \ldots + 1)$$

$$P(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots) \cdot (f_0 x^k + f_1 x^{k-1} + \ldots + 1)$$

Коефицијент уз x^{n+k} са десне стране једнакости за $n \geq 0$ једнак је

$$f_0 a_n + f_1 a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}$$

Међутим, пошто низ (a_n) задовољава $(*)$, што значи да је претходна вредност (тј. коеф. уз x^{n+k} за $n \geq 0$) једнаки нули $\Rightarrow$ P је степена мањег од k ∎

– Уколико у имениоцу ф-је генератрисе $(\#)$, променљиву x заменимо са $\frac{1}{x}$, и потом тај именилац помножимо са x^k, добијамо израз из карактеристичне ј-не која је раније одређена (12. питање ♡)

– Другим речима, ф-ја ген. траженог низа садржи комплетну информацију о каракт. ј-ни...

$\boxed{\text{Пример 2.3.17.}}$: Одредити ф-ју ген. низа који задовољава рекурентну ј-ну $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_0 = 0$, а потом одредити и општи члан тог низа

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad / \cdot x^n$$

$$a_{n+1} x^n = 2a_n x^n + x^n \quad / \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Нека је $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{x}(A(x) - a_0)$$

$$\frac{A(x) - a_0}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x}$$ ово средимо

... и добијемо $A(x) = \dfrac{x}{(1-x)(1-2x)}$ па нађемо у облику $A(x) = -\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-2x}$

Дакле
$$A(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(2^n - 1)}_{a_n = 2^n - 1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A(x)$$

(14.) ПАРТИЦИЈЕ СКУПОВА. СТИРЛИНГОВИ БРОЈЕВИ 2. ВРСТЕ И БЕЛОВИ БРОЈЕВИ

→ Размотрићемо једну примену рекурентних ј-на у израчунавању броја партиција коначног скупа.

* ПАРТИЦИЈА скупа $\mathbb{N}_n$ на k подскупова је скуп његових непразних дисјунктних подскупова $S_1, S_2, \dots, S_k$ таквих да важи:

$$\mathbb{N}_n = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$$

– Сматраћемо да је једна партиција празног скупа празан скуп.

Пример: Све партиције скупа $\mathbb{N}_3$ су:

$k=1$: $\{1,2,3\}$
$k=2$: $\{1,2\}\cup\{3\}$, $\{1,3\}\cup\{2\}$, $\{2,3\}\cup\{1\}$
$k=3$: $\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}$

* СТИРЛИНГОВ БРОЈ ДРУГЕ ВРСТЕ у ознаци $S(n,k)$ једнак је броју партиција скупа од n елемената на k подскупова.

→ Из прошлог примера имамо $S(3,2)=3$

* БЕЛОВ БРОЈ у ознаци $B(n)$ једнак је броју партиција скупа од n елемената. Важи:

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$ (k иде од 0 јер смо укључили и празан скуп)

Ⓣ Стирлингови бројеви 2. врсте задовољавају следећу рекурентну једначину:

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + k\cdot S(n,k)$$

Док: Све партиције скупа $\mathbb{N}_{n+1}$ на k подскупова можемо добити од партиција скупа $\mathbb{N}_n$ на $k-1$ односно k подскупова. Свака таква партиција скупа $\mathbb{N}_{n+1}$ добија се или проширивањем партиције скупа $\mathbb{N}_n$ на $k-1$ подскупова једночланим скупом $\{n+1\}$ (што даје први сабирак десне стране једнакости...) или додавањем елемента $n+1$ неком од подскупова који чине партицију скупа $\mathbb{N}_n$ на k подскупова. Тај елемент се може додати било којем од k подскупова, па зато имамо $k\cdot S(n,k)$. ∎

* Низ који задовољава неку рекурентну ј-ну је једнозначно одређен тек кад се задају и почетни услови. Зато, од низа Стирлингових бројева, задавањем почетних услова $S(n,1)=S(n,n)=1$, долазимо до рекурентне ј-не:

$$\begin{cases} S(n+1,k) = S(n,k-1) + k\cdot S(n,k) \\ S(n,1) = 1, \quad S(n,n) = 1 \end{cases}$$ која одређује ове бројеве.

Ⓣ Белови бројеви одређени су рекурентном ј-ном

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$$

и почетним условом $B(0)=1$.

(15) ФИБОНАЧИЈЕВИ БРОЈЕВИ. ЗЛАТНИ ПРЕСЕК. ОПШТИ ЧЛАН И Ф-ЈА ГЕН. ФИБОНАЧИЈЕВОГ НИЗА

- Фибоначи је до низа дошао бавећи се проблемом броја зечева унутар једне колоније. Уколико сваки пар зец-зечица (старих бар 2 месеца) добију током следећег месеца пар младих зеца и зечицу, и ако је у старту постојао само 1 пар, колико ће парова постојати након фиксираног бр. месеци?

- Нека је F_n бр. парова зец-зечица након n месеци. Важи $F_1=1$ и $F_2=1$, док се F_n за $n\geq 3$, добија када броју парова F_{n-1} из претх. месеца додамо новорођене парове који се добијају од F_{n-2} парова који су постојали пре 2 месеца. Добијамо рек. ј-ну $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ и почетне услове $F_1=1$, $F_2=1$, узећемо и $F_0=0$.

$$\begin{cases} F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \\ F_0=0,\ F_1=1 \end{cases} \qquad (*)$$

* ФИБОНАЧИЈЕВ НИЗ је низ бројева одређен ј-ном (*). Фибоначијеви бројеви су чланови Фибоначијевог низа:

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Златна подела

- Размотримо дуж подељену на два дела (d и k уз услов $d>k$) где важи следећа пропорција:

$$\frac{d+k}{d}=\frac{d}{k}$$

- Тј, однос између дужине целе дужи и дужег дела једнак је односу између дужине дужег и краћег дела. Таква подела позната је као ЗЛАТНА ПОДЕЛА (златни пресек)

- Да бисмо одредили тражени однос, можемо БУО претпоставити да је дужина краћег дела дужи једнака 1, тј да је $k=1$. Тада: $\frac{d+1}{d}=d$ тј $d^2-d-1=0 \Rightarrow d_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

- Пошто дужина дужи мора бити позитивна, закључујемо $d=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618$

Општи члан и ф-ја генератриса Фибоначијевог низа

(Т) Општи члан Фибоначијевог низа одређен је са:

$$F_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Док:

Карakт. ј-на која одговара ј-ни $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ је $t^2-t-1=0$ и кад се реши добијамо:

$$F_n=c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\left.\begin{aligned} F_0&=0=c_1+c_2 \\ F_1&=1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot c_1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1=\frac{1}{\sqrt{5}},\ c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{и ово даје:}$$

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \blacksquare$$

Ⓣ Општи члан Фибоначијевог низа одређен је са: $F_n = \left[\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5} \right]$ (#), $[x]$ – ознака за заокруживање на најближи цео број

Док:

Оценимо разлику између F_n и $\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5}$. Лаким рачуном, коришћењем претх. теореме добијамо:

$$\left| F_n - \frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5} \right| = \left| \frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5} - \frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5} \right| = \left| \frac{\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5} \right| \leq \frac{1}{\sqrt5} < \frac12$$

Пошто је апсолутна вр. разлике реалних бр. F_n и $\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5}$ мања од $\frac{1}{\sqrt3}$, важи (#). ∎

Ⓣ Ф-ја генераториса Фибоначијевог низа одређена је са: $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$

Док:

Рекурентној ј-ни $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ одговара ј-на:

$$\frac{F(x) - F_1 \cdot x - F_0}{x^2} = \frac{F(x) - F_0}{x} + F(x)$$

– заменом $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и сређивањем добијамо:

$$F(x) \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$ ∎

(16) СВОЈСТВА ФИБОНАЧИЈЕВИХ БРОЈЕВА

– Наредна теорема нам каже да количник два узастопна Фибоначијева броја тежи златној подели кад $n \to \infty$

Ⓣ Важе следеће једнакости:

(1) $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \underbrace{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots \cfrac{1}{1+\frac11}}}}_{n}$, за $n \geq 1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{1+\sqrt5}{2}$

Док:

(1) За $n=1$ добијамо $\frac{F_2}{F_1} = 1$ тј. $1=1$ што је тачно.

ПП да идентитет важи за $n-1$, докажимо да важи за n.

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = \underbrace{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots \cfrac{1}{1+\frac11}}}}_{n}$$ ✓

(2) Приметимо $1 < \dfrac{F_{n+1}}{F_n} < 2$

Одавде имамо да је низ $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ ограничен, а уз то његови непарни чланови монотоно расту, а парни монотоно опадају (лако се докаже). Самим тим оба подниза конвергирају некој вредности $x \in (1,2)$. ТЈ, у случају оба подниза постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ који је, на основу (1) једнак решењу ј-не:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Када ово решимо, и пошто знамо да реш. припада интервалу $(1,2)$, добијамо $x = \frac{1+\sqrt5}{2}$. ∎

(T) Важи једнакост: $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

Док:
$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \underset{F_3-F_2}{F_1} + \underset{F_4-F_3}{F_2} + \ldots + F_n = (\cancel{F_3} - F_2) + (\cancel{F_4} - \cancel{F_3}) + \ldots + (F_{n+2} - \cancel{F_{n+1}}) = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

(T) За $n \geq 1$ важи једнакост: $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

Док:
- За $n=1$ добијамо $F_2 F_0 - F_1^2 = (-1)^1$ односно кад заменимо: $-1 = -1$ ✓
- ПП да за неко $n \geq 2$ важи једнакост $F_n \cdot F_{n-2} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$, докажимо да важи за $n+1$.

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (F_n + F_{n-1}) \cdot F_{n-1} - F_n^2 = F_n(F_{n-1} - F_n) + F_{n-1}^2 =$$
$$= -F_n \cdot F_{n-2} + F_{n-1}^2 \overset{\text{ПП}}{=} -(-1)^{n-1} = (-1)^n$$

(17) ЛУКАСОВИ И КАТАЛАНОВИ БРОЈЕВИ

ЛУКАСОВИ БРОЈЕВИ

Деф: Лукасов низ одређен је следећом рекурентном ј-ном: $\begin{cases} L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \\ L_0 = 2,\ L_1 = 1 \end{cases}$

Почетни чланови су: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76 ...

* Лукасов и Фибоначијев низ задовољавају исту рек. ј-ну, уз различите почетне услове

(T) Општи члан Лукасовог низа одређен је са:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Док:

Каракт. ј-на је исти као код Фибоначијевог низа, одакле следи да су и нуле исте, па је опште решење:
$$L_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Из почетних услова имамо:
$$\left.\begin{aligned} L_0 &= 2 = c_1 + c_2 \\ L_1 &= 1 = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = 1$$

(T) Функција генератриса Лукасовог низа одређена је са:

$$L(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

Док:

Рекурентној ј-ни Лукасовог низа одговара ј-на: $\dfrac{L(x) - L_1 x - L_0}{x^2} = \dfrac{L(x) - L_0}{x} + L(x)$

одакле сређивањем и заменом $L_0 = 2, L_1 = 1$ добијамо $L(x) = \dfrac{2-x}{1-x-x^2}$.

⑦ Ако су (F_n) и (L_n) редом Фибоначијев и Лукасов низ, онда за $n \geq 1$ важи:

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

Док:

* За $n=1$ имамо $L_1 = F_0 + F_2$ тј $1=1$ ✓

* ПП да за неко $n \geq 2$ важи $L_{n-1} = F_n + F_{n-2}$, докажимо да важи $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$:
$L_{n-2} = F_{n-1} + F_{n-3}$

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + L_{n-2} \\ &= (F_n + F_{n-2}) + (F_{n-1} + F_{n-3}) \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3}) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} \end{aligned}$$ ✓ ■

КАТАЛАНОВИ БРОЈЕВИ

Деф: Каталанов низ одређен је следећом рек. ј-ном:

$$\begin{cases} C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i-1} \\ C_0 = 1 \end{cases} \quad (*)$$

* Почетни чланови: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ...

* Рекурентна ј-на је нелинеарна, али се може решити (нећемо радити).

* Општи члан: $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$

– Размотримо следећи проблем. Нека је дат неки рачунски израз који се рецимо састоји од низа основних математичких операција над било којим бројевима или променљивим и заграда. Уколико уклонимо све осим заграда добијамо један коректан низ заграда; нпр израз: $2x + (\frac{1}{4}(x^2-1)y+3) - 2(x-y)$ даје низ заграда (())()

* Колико има коректних низова n парова заграда?

Размотримо прво један пример

$\boxed{\text{Пример 2.5.1}}$: Колико има коректних низова 3 пара заграда?

* Разликујемо 3 случаја
  → Низ почиње са 3 отворене заграде
  → –"– 2 –"–
  → –"– 1 отвореном заградом

– Први случај даје тачно 1 коректан распоред јер након 3 отворене морају доћи 3 затворене заграде ((())).
– Други случај даје следећа 2 распореда: (()()) и (())()
– Трећи случај даје још 2 распореда: ()()() и ()(()) ⇒ Укупно има 5 коректних низова 3 пара заграда.

– Размотримо општи случај, нека је дат коректан низ n парова заграда. Јасно је да такав низ мора почети отвореном заградом коју негде касније морамо затворити, па га можемо записати у облику: $(z_1)z_2$ где су z_1 и z_2 (могуће и празни) коректни подннизови заграда. Ово нас доводи до рекурентне ј-не (*) за Каталанове бројеве, при чему је C_i бр. коректних распореда заграда који одговарају низу z_1, а C_{n-i-1} бр. коректних распореда заграда који одг. низу z_2.

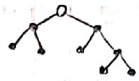
Дакле, број коректних распореда n парова заграда једнак је Каталановом броју C_n.

+ Пример 2.5.2. из скрипте

* Нека је дат коначан скуп објеката које називамо чворови и рел. поретка <u>наследник</u> деф. на том скупу. Тада се <u>потпуно коренско бинарно стабло</u> састоји од:

- једног чвора (који називамо корен) или
- два потпуна коренска бинарна стабла и једног додатног чвора таквих да су по дефиницији оба корена два стабла наследници новог чвора (који тиме постаје јединствени корен, док два стабла постају подстабла новог стабла)

* У складу са деф., свако коренско бинарно стабло има јединствени корен. Чворове таквог стабла који немају наследнике називамо <u>листови</u>. Пример:



→ Сваки чвор који није лист, има тачно 2 наследника, па наследнике сваког чвора можемо уредити тк што један назовемо левим а други десним.
→ Потпуно коренско бинарно стабло са таквим уређењем називамо позиционо потпуно коренско бинарно стабло. У том случају можемо говорити о левом и десном (позиционом) потпуном коренском бинарном подстаблу.

<u>Напомена</u>: Дефиниција потпуног коренског бинарног стабла може се уопштити на произ. потпуно k-арно стабло (у случају бинарног је $k=2$). Термин „потпуно" у тој деф. сугерише да сваки чвор који није лист има 2 наследника (тј k).

$\boxed{\text{Пример 2.5.4.}}$: За $n \geq 0$ број позиционих потпуних коренских бинарних стабала чији бр. листова износи $n+1$ једнак је Каталановом броју C_n.

→ Заиста, коректне низове заграда такође можемо задати рекурзивно:
- празан низ заграда је коректан
- ако су z_1 и z_2 коректни низови заграда, онда је и низ $(z_1)z_2$ такође коректан

* Рекурзивна деф. коректног низа заграда и деф. позиционог потпуног коренског бинарног стабла јасно сугеришу бијективну кореспонденцију између скупа који садржи све коректне распореде n парова заграда и скупа који садржи сва таква стабла чији је бр. листова једнак $n+1$:

- празан низ заграда пресликава се у стабло које се састоји од једног чвора
- ако се коректни низови заграда z_1 и z_2 пресликавају у стабла T_1 и T_2, онда се низ $(z_1)z_2$ пресликава у стабло које се добија увођењем новог чвора (корена) чији су леви и десни наследник редом корени стабала T_1 и T_2.

$\boxed{\text{18. ФЕРЕРСОВИ ДИЈАГРАМИ ...}}$ → код 10. питања

13. ТИПОВИ ГРАФОВА. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ, СВОЈСТВА И ИНВАРИЈАНТЕ. ШЕТЊЕ, СТАЗЕ И ПУТЕВИ. МАТРИЧНЕ РЕПР. ГРАФА

* <u>ПРОСТ ГРАФ</u> (или само граф) је уређени пар $G=(V,E)$ који се састоји од скупа V чије елементе називамо ЧВОРОВИ, и скупа E који чине двочлани подскупови скупа чворова, а чије елем. називамо гране.

→ Граф је релациона матем. структура чији се чворови u и v налазе у релацији ако скуп E садржи ел. $\{u,v\}$
→ Грана „спаја" два чвора којима је одређена, а за те чворове кажемо да су <u>суседни</u>
→ За грану која спаја два чвора кажемо да је ИНЦИДЕНТНА са сваким од њих, а њих називамо <u>крајевима</u> гране.
→ За гране инциденте са истим чвором кажемо да су суседне

→ Чворове означавамо: $u, v, w, \dots, v_1, v_2, \dots, 1, 2, 3$
→ Гране означавамо: $e, f, g, \dots, e_1, e_2, \dots, uv, uw, \dots, 12, 13, \dots$

* СТЕПЕН чвора u, d_u (ознака) = број грана инцидентних са тим чвором

* Околина чвора u, $N(u)$ = скуп свих чворова суседних том чвору

* Минимални степен чвора у графу означавамо са δ, а максимални са Δ.

– Ако је u произ. чвор, а e произ. грана графа G, онда је $G-u$ граф који се добија уклањањем чвора u (и свих грана инцидентних са њим) у графу G; а $G-e$ граф који се добија уклањањем гране e из графа G (слично $G+e$)

* ГРАФ са ПЕТЉАМА = граф где постоје гране чија су оба краја један исти чвор
* МУЛТИГРАФ = граф где постоји више грана између 2 иста чвора
* ТЕЖИНСКИ ГРАФ = граф чијој је свакој грани придружена нека нумеричка вредност коју зовемо ТЕЖИНА ГРАНЕ.
* УСМЕРЕНИ ГРАФ = граф где свака грана може имати усмерење од једног чвора ка другом чвору.
(грана без усмерења је двосмерна)

→ Могуће су и комбинације ових графова...

3.1.3.

Ⓣ Сума степена чворова графа једнака је двоструком броју грана $\sum_{i=1}^{n} d_{u_i} = 2m$. m - бр. грана

Док:
Приликом сумирања ових сабирака сваку грану добијемо тачно 2 пута... ■

3.1.4.

Ⓣ Бр. чворова непарног степена графа је паран.

Док:
Из претх. Ⓣ сума степена свих чворова је парна, а пошто исто важи и за суму парних степена, закључујемо да важи теорема ■

→ Ове 2 теореме важе за све типове графова сем оних који садрже петље.

Изоморфизми графова и инваријанте

* За графове G и H кажемо да су ИЗОМОРФНИ ако постоји бијекција скупа чворова једног на скуп чворова другог графа која чува суседства између чворова.

→ четвородимензиона коцка → граф чији се скуп чворова састоји од свих уређених бинарних k-торки и чији су чворови суседни акко се одговарајуће k-торке разликују тачно у једној координати (слике скрипта)

* Са порастом броја чворова број неизоморфних графова брзо расте

* ИНВАРИЈАНТА графа = ф-ја дефинисана на скупу графова која има исту вредност за све изоморфне графове
↳ нпр: бр. чворова, бр. грана, мин. степен графа δ, макс. степен графа Δ...

* ПОДГРАФ графа $G=(V,E)$ је граф $G'=(V',E')$ такав да важи $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. (G садржи G'; G' се налази у G)
* ИНДУКОВАНИ ПОДГРАФ графа $G=(V,E)$ се добија од графа G уклањањем произвољног скупа чворова графа G (а самим тим и грана инцидентних са њима). Сваки индуковани подграф је подграф али обратно не важи.

* КОМПЛЕМЕНТ графа $G=(V,E)$ је граф $\bar{G}=(V,\bar{E})$ који има исти скуп чворова V и у ком су чворови суседни акко нису суседни у графу G.

→ За граф кажемо да је САМОКОМПЛЕМЕНТАРАН ако је изоморфан свом комплементу

Шетње, стазе и путеви

* **ШЕТЊА** у графу је низ облика $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k)$ чији су чланови наизменично чворови и гране тог графа тд је грана e_i инцидентна са чворовима v_i и v_{i+1}. Кажемо да шетња повезује чворове v_1 и v_k.

→ шетња је ЗАТВОРЕНА ако је $v_1 = v_k$, иначе је отворена
→ дужина шетње = бр. грана које садржи

* **СТАЗА** у графу је шетња која сваком граном пролази највише једанпут (чвором може проћи и више пута)

* **ПУТ** у графу је шетња који сваким чвором (па самим тим и граном) пролази највише један пут.

– пут у усмереном графу (усмерени пут) је одређен низом разл. чворова $(v_1, v_2, \dots v_k)$ тд усмерени граф садржи гране (v_i, v_{i+1}), $1 \le i \le k-1$

* Два чвора графа су <u>ПОВЕЗАНА</u> ако постоји пут који их повезује. Граф је <u>повезан</u> ако су сви чворови међусобно повезани.
* Повезаност чворова је рел. еквиваленције дефинисана на графу. Класе еквив. у односу на ову релацију називамо <u>компоненте повезаности графа</u>

• **ВЕЗИВНИ ЧВОР** графа је чвор чијим се уклањањем повећава бр. компоненти повезаности.
• **МОСТ** (везивна грана) графа је грана чијим се уклањањем повећава бр. компоненти повезаности.

– Везивни чвор и мост повезаног графа су редом чвор и грана чијим уклањањем граф постаје неповезан.

* **РАСТОЈАЊЕ** између два чвора u и v графа G, у ознаци $dist(u,v)$, једнако је дужини најкраћег пута који их повезује.
  → сматраћемо да је растојање између два чвора која нису повезана једнако бесконачно

* **ЕКСЦЕНТРИЦИТЕТ** чвора u, $ecc(u)$, једнак је растојању између тог чвора и чвора који се налази на максималном растојању од њега, тј $ecc(u) = \max\{dist(u,v) \mid v \in V\}$

* **РАДИЈУС** графа G, $r(G)$, једнак је минималном ексцентрицитету чвора тог графа, тј $r(G) = \min\{ecc(u) \mid u \in V\}$

* **ЦЕНТАР** графа чине сви чворови чији је ексцентрицитет једнак радијусу графа

* **ДИЈАМЕТАР** графа G, $diam(G)$, једнак је максималном ексцентрицитету у графу, тј $diam(G) = \max\{ecc(u) \mid u \in V\}$

→ Повезаност, радијус и дијаметар су инваријанте графа

Неки графови

* **ПРАЗАН** граф = граф који нема грана. Има 1 чвор; називамо га <u>тривијалан граф</u>.

* **КОМПЛЕТАН** (потпун) граф = граф чија су свака два чвора спојена граном. Ознака: K_n - компл. граф са n чворова

* **РЕГУЛАРАН** граф = граф чији чворови имају једнаке степене. Нпр. празни и комплетни графови су регуларни.

* **БИПАРТИТНИ** граф = тривијалан граф или граф чији се скуп чворова може поделити на два дисјунктна подскупа тд свака грана тог графа спаја чвор из једног подскупа са чвором из другог подскупа. Празан граф је бипарт.

* **КОМПЛЕТАН БИПАРТИТАН** граф = бипартитан граф где је сваки чвор из једног скупа партиције суседан свим чворовима из другог скупа. Степен сваког чвора из једног скупа једнак је броју чворова другог скупа.

ознака: K_{n_1,n_2}

при чему n_1 и n_2 означавају кардиналности скупова партиције

* ЗВЕЗДА = комплетан бипартитни граф за који важи $n_1 = 1$

* ЦИКЛУС је повезан граф код којег је степен сваког чвора једнак 2. Циклус који има n чворова означавамо са C_n.

* ПУТ је граф дефинисан на сл. начин:
  ↳ са n чворова означавамо са P_n
  - $n \le 2$ то је једини повезан граф са n чворова
  - $n \ge 3$ то је граф који се добија уклањањем једне гране циклуса C_n

* дужина циклуса и дужина пута једнаке су броју грана у сваком од њих.

- Пут у графу одређује индуковани подграф који је пут (у смислу претходне деф.)
- За $n \in \mathbb{N}$, до на изоморфизам, постоји тачно 1 празан граф, комплетан граф, циклус и пут са n чворова. (за циклус $n \ge 3$)
- Слично, за $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, до на изоморфизам, постоји тачно 1 комплетан бипартитни граф K_{n_1,n_2}

31.10.

(Т) Граф је бипартитан акко не садржи циклус непарне дужине.

Док:

Ако би бипартитан граф садржао циклус непарне дужине, онда би свака два суседна чвора тог циклуса припадали различитим скуповима партиције чворова, али што је немогуће јер циклус садржи непаран бр. чворова.

ПП да је граф повезан и не садржи циклус непарне дужине. Извршићемо разврставање чворова графа у 2 скупа тд чворови који припадају истом скупу нису суседни. Прво произ. чвор, v, додамо у први скуп. Затим све чворове који су на непарном растојању од v додајемо у други скуп, а све који су на парном у први. Ако након завршетка овога међу чворовима истог скупа нема суседних, граф је бипартитан. У супротном ће се десити да су 2 чвора која су или оба на непарном или оба на парном растојању од v, суседни. Тада комбиновањем најкраћих путева од чвора v до сваког од тих чворова и гране која их спаја, добијамо циклус непарне дужине што је ↯ са претпоставком ∎

Матричне репрезентације графова

- Нека су $v_1, v_2, \ldots, v_n$ чворови, а $e_1, e_2, \ldots, e_m$ гране графа G

* МАТРИЦА СУСЕДСТВА графа G, $A(G)$, је матрица формата $n \times n$ у којој је сваки ел. на позицији (i,j) једнак 1 ако су чворови v_i и v_j суседни, а у супротном 0. Ова матрица је симетрична.
- Матрица суседства није инваријанта графа али су матрице изоморфних графова сличне.

* МАТРИЦА ИНЦИДЕНЦИЈЕ графа G, $R(G)$, је матр. формата $m \times n$, у којој је ел. на позицији (i,j) једнак 1 ако је чвор v_i инцидентан са граном e_j, а у супротном 0. Свака колона матр. инциденције има тачно две јединице.

• спектрална теорија = област теорије графова која се бави изучавањем матрица суседства и реалних бројева који су одређени њима. Такви бројеви се називају сопствене вредности и чине мултискуп који се назива спектар графа...

20. СТАБЛА. КОРЕНСКА И РАЗАПИЊУЋА СТАБЛА. ПРЕТРАГЕ ГРАФОВА

* СТАБЛО = повезан граф који не садржи подграф изоморфан циклусу.

* Неповезан граф чија је свака компонента повезаности стабло, зовемо ШУМА.

3.2.1.
(Т) Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) T је стабло
(2) T је повезан граф код кога је број грана за 1 мањи од броја чворова, тј $m=n-1$
(3) T је максимални граф без циклуса (додавањем било које гране настаје циклус)
(4) T је минимални повезан граф (уклањањем било које гране постаје неповезан)
(5) За свака 2 чвора графа T постоји тачно један пут који их повезује.

n - бр. чворова
m - бр. грана

доказ не треба

Коренска и разапињућа стабла

* КОРЕНСКО СТАБЛО је стабло чији је један чвор издвојен од осталих. Тај чвор зовемо корен.
– Нека је T коренско стабло чији је корен чвор r. За чвор u за који важи $dist(u,r)=i$, кажемо да припада i-том нивоу стабла T. Ако чвор u припада i-том нивоу а чвор v $(i+1)$-вом нивоу, и ако су чворови u и v суседни, онда чвор u називамо ПРЕТХОДНИКОМ чвора v, а чвор v називамо НАСЛЕДНИКОМ чвора u. Чвор који нема наследника називамо ЛИСТ. Чвор који није ни корен ни лист називамо унутрашњи чвор.

* Коренско k-арно стабло је коренско стабло чији сваки чвор има највише k наследника.
* Потпуно коренско k-арно стабло је коренско стабло чији сваки чвор који није лист има тачно k наследника

* РАЗАПИЊУЋИ ГРАФ графа G је граф који има исти скуп чворова као G и чији је скуп грана подскуп скупа грана графа G.
– Сваки разапињући граф графа G је један подграф графа G

* РАЗАПИЊУЋЕ СТАБЛО повезаног графа је разапињући граф који је стабло.
* РАЗАПИЊУЋА ШУМА неповезаног графа је разапињући подграф који се састоји од разапињућих стабала компонената повезаности тог графа.
– Сваки повезан граф има разапињуће стабло

– Ако је T разапињуће стабло повезаног графа G, онда се додавањем произвољне гране стаблу T, при чему она припада остатку графа G, добија тачно један циклус у новонасталом графу. Тај циклус зовемо ЕЛЕМЕНТАРНИ ЦИКЛУС графа G у односу на разапињуће стабло T

– У случају повезаног графа, бр. елементарних циклуса једнак је $m-n+1$ (јер $\underset{\text{ук. бр. грана}}{m} - \underbrace{(n-1)}_{\text{бр. грана стабла}}$)

2.3.4.
(Т) Број елементарних циклуса графа једнак је $m-n+p$, где је m број грана, n број чворова, а p број компонената повезаности тог графа.

* ЦИКЛОМАТИЧКИ БРОЈ графа, у ознаци ν, једнак је броју елементарних циклуса графа.
↳ ово је једна инваријанта графа

Претраге графова

– Претрага графа састоји се од селектовања једног по једног чвора графа тд сваки буде селектован тачно једном, у складу са неким правилом којим је одређен редослед селектовања. Уместо „селектовање чворова" користи се термин „обилажење чворова". Код скоро свих претрага, наредни чвор у обиласку је суседни неком чвору који је већ обиђен. Тада, граф чији су чворови чворови графа који је предмет претраге, а чије су гране одређене претрагом, је једно разапињуће (усмерено) стабло датог графа. Такво стабло називамо СТАБЛО ПРЕТРАГЕ.

– Имамо претрагу по дубини и претрагу по ширини графа. Обе претраге полазе од произвољног чвора.

*** ПРЕТРАГА ПО ДУБИНИ (DFS)** (пример у скрипти): Наредни чвор који обилазимо је суседни оном који је претходно обиђен, ако је то могуће. Ако није, онда је суседни претходном од претходно обиђеног, и тако редом. Ова претрага у општем случају није јединствена.

*** ПРЕТРАГА ПО ШИРИНИ (BFS)** (пример у скрипти): Најпре обилазимо све суседе првог чвора, потом све необиђене суседе другог чвора, па све необиђене суседе трећег чвора, итд... Ни ова претрага у општем случају није јединствена.

21. МИНИМАЛНО РАЗАПИЊУЋЕ СТАБЛО ТЕЖИНСКОГ ГРАФА. КРАСКАЛОВ И ПРИМОВ АЛГОРИТАМ.

- Тежински графови → графови чијим су гранама придружене нумеричке вредности које називамо тежинама грана.
- Повезан (тежински) граф може имати више разапињућих стабала, а од посебног интереса су она код којих је збир тежина свих грана стабла минималан.
- Тежину гране e означавамо са $w(e)$. Тежина тежинског графа G у ознаци $w(G)$ једнака је суми тежина грана тог графа $w(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e)$

* Минимално разапињуће стабло повезаног тежинског графа је разапињуће стабло минималне тежине (у скупу свих разапињућих стабала). Такво стабло постоји у случају сваког повезаног тежинског графа и не мора бити јединствено.

* Алгоритми за одређивање минималног разапињућег стабла: Краскалов алгоритам; Примов алгоритам

КРАСКАЛОВ АЛГОРИТАМ

- Стратегија овог алгоритма се може описати са „Најпре грана најмање тежине". Ово је пример похлепног алгоритма. Овакви алгоритми увек бирају решење које је локално најповољније

* Алгоритам: прихвата повезан тежински граф G, а враћа једно минимално разапињуће стабло тог графа (T):

K1: Текући граф T је празан граф са истим скупом чворова као G

K2: Уредити гране графа G у неопадајући низ у складу са њиховим тежинама

K3: Нека је e наредна грана у том низу. Ако таква не постоји, пређи на K5

K4: Ако додавањем гране e текућем графу T настаје циклус, пређи на K3. Иначе, додати ту грану графу T, и пређи на K3.

K5: Крај

3.4.1.
Т Краскалов алгоритам резултује минималним разапињућим стаблом повезаног тежинског графа.

Док:

- Најпре, алгоритам не може резултовати неповезаним графом нити графом који садржи циклус (због K4), дакле тај граф мора бити стабло; Нека је T стабло добијено Краск. алгоритмом и $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ гране тог стабла уређене у складу са редоследом додавања.
- ППС да тежина није минимална. Тада постоји бар једно разапињуће стабло минималне тежине, чија је тежина мања од тежине стабла T. Нека је за ∀такво стабло S дефинисана ф-ја $f(S) = \min\{i \mid e_i \notin E(S)\}$.
- Означимо са S' стабло за које је вредност ове ф-је максимална. Ако важи $f(S') = k$, онда су гране $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ истовремено и гране стабла S'. Граф који се добија додавањем гране e_k стаблу S' садржи циклус (Т.3.2.1.). Ако је e_k' грана тог циклуса која припада графу S', а не припада T (она постоји јер су T и S' различити), размотримо граф S'' који се добија уклањањем гране e_k' из S' и потом додавањем гране e_k. Број грана графа S'' је опет $n-1$, а граф је уз то и повезан (јер e_k' припада циклусу), па је и S'' такође разапињуће стабло. Важи:

$$w(S'') = w(S') + w(e_k) - w(e_k') \quad (*)$$

- Приметимо да стабла T и S'' садрже гране $e_1, \dots, e_k$. Пошто је e_k следећа грана која је била додата у T, важи $w(e_k) \leq w(e_k')$ (јер $e_k' \notin T$) па из $(*)$ добијамо $w(S'') \leq w(S')$. Заправо важи $w(S'') = w(S')$ јер је S' стабло мин. тежине. Међутим важи и $f(S'') > k = f(S')$ што противуречи избору стабла S' ∎

ПРИМОВ АЛГОРИТАМ

3.4.3.

Т Нека је $G=(V,E)$ повезан тежински граф, $U \subset V$, и e грана минималне тежине која спаја чвор из скупа U са чвором из скупа $V \setminus U$. Тада постоји минимално разапињуће стабло тежинског графа G које садржи грану e.

Док.:

Нека је S минимално разапињуће стабло које не садржи грану e. Подграф $S+e$ садржи циклус. Поред гране e, том циклусу припада и нека грана e' која спаја чвор из скупа U са чвором из скупа $V \setminus U$. Пошто важи $w(e) \leq w(e')$, уклањањем гране e' из графа $S+e$ добијамо (тражено) минимално разапињуће стабло. ■

* Стратегија Примовог алгоритма може се описати са „најбоље најближи суседу". Овај алгоритам може се користити и за одређивање минималне разапињуће шуме неповезаног тежинског графа.

* АЛГОРИТАМ: Алгоритам прихвата тежински граф G, а враћа једну минималну разапињућу шуму тог графа.

K1: Текући граф T је граф без чворова.

K2: Произвољан чвор графа G који не припада текућем графу додати текућем графу. Ако такав чвор не постоји, прећи на K4.

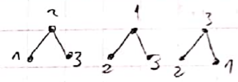
K3: Грану најмање тежине која спаја текући граф T са остатком графа G (тиме и други чвор инцидентан са том граном) додати графу T. Понављати K3 док год је могуће, а потом прећи на K2.

K4: Крај

22. РАЗАПИЊУЋА СТАБЛА ОЗНАЧЕНИХ ГРАФОВА. ПРИФЕРОВ НИЗ.

различита стабла!

* Означена стабла – стабла код којих означавање чворова игра есенцијалну улогу.



- Означимо број разапињућих стабала означеног графа G са $t(G)$.
- Разапињуће стабло повезаног мултиграфа са n чворова је стабло (а не мултистабло) чији је скуп чворова једнак скупу чворова мултиграфа.

3.3.5.

Т За сваки означени мултиграф G важи једнакост: $$t(G) = t(G-e) + t(G \cdot e) \quad (*)$$
при чему се мултиграф $G-e$ добија уклањањем гране e, а $G \cdot e$ контракцијом мултиграфа G у односу на грану e (деф. у 23. питању)

Док:

Свако разапињуће стабло мултиграфа G које не садржи грану e једнозначно одређује разапињуће стабло мултиграфа $G-e$ и обратно, што даје први сабирак у (*). Слично, свако разапињуће стабло мултиграфа G које садржи грану e једнозначно одређује разапињуће стабло мултиграфа $G \cdot e$ и обратно, што даје други сабирак у (*). ■

→ пример за Т у скрипти!

Кодирање и декодирање означених стабала

* Кодирање и декодирање означених стабала се користе приликом записивања таквих стабала у рачунским системима.
- Свако означено стабло са $n \geq 2$ чворова може бити кодирано низом од $n-2$ природна броја

* За $n \geq 2$, ПРИФЕРОВ НИЗ у ознаци $S(n) = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-2})$ је било који низ који се састоји од $n-2$ (не нужно различитих) броја скупа $\mathbb{N}_n$.

3.3.7.

Т Приферов низ $S(n)$ одређује једно означено стабло које има n чворова и обратно.

→ Постоје 2 алгоритма:
• први за одређивање Приферовог низа на основу задатог означеног стабла (кодирање),
• други за одређивање означеног стабла на основу задатог Приферовог низа (декодирање)

* **АЛГОРИТАМ (ПРИФЕРОВО КОДИРАЊЕ)**
↳ прихвата нетривијално означено стабло, а враћа јединствен код тог стабла

BEGIN:

INPUT: $T = (\{1,2,\dots,n\}, E)$ → стабло T

$S = ()$ → иницијализација

WHILE: $|V(T)| > 2$

u - чвор степена 1 минималне ознаке
v - сусед од u
$T := T - u$
$S := S + v$ → дописати члан v на крај низа S

RETURN: S
END

→ У складу са алгоритмом, јединствено означено стабло које има 2 чвора кодирано је празним низом

→ Пример у скрипти...

* **АЛГОРИТАМ (ПРИФЕРОВО ДЕКОДИРАЊЕ)**
↳ прихвата код, а враћа јединствено означено стабло које је њиме одређено

BEGIN:

INPUT: $S = (s(1), s(2), s(3), \dots, s(n-2))$ → Приферов низ

$T = (\{1,2,\dots,n\}, \emptyset)$ → иницијализац. стабла
$\ell = (1,2,\dots,n)$ → помоћни низ

→ Пример у скрипти

WHILE: $S \neq ()$

v - минимална вредност која припада ℓ, а не припада S
$w = s(1)$
$T := T + vw$
$\ell := \ell - v$
$S := S - s(1)$ → уклања се $s(1)$ из низа S

• спојити граном 2 чвора која су одређена преосталим елементима низа ℓ

RETURN: T
END

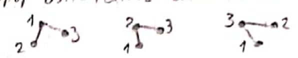
→ Ова два алгоритма су уједно и доказ теореме која је наведена пре њих.

(23.) БРОЈ РАЗАПИЊУЋИХ СТАБАЛА ОЗНАЧЕНИХ ГРАФОВА. КЕЈЛИЈЕВА ТЕОРЕМА. ЦИКЛОМАТИЧКИ БРОЈ ГРАФА.

* ОЗНАЧЕНИ ГРАФОВИ – графови код којих означавање игра есенцијалну улогу.
- Изоморфни графови остају изоморфни и уколико их разматрамо као означене, али се такви графови разликују уколико њихови чворови нису означени на исти начин.

- Чворове означеног стабла означаваћемо прир. бројевима.

Број означених стабала са 3 чвора једнак је 3!



- У теорији графова не постоји ефективни начин за израчунавање броја неизоморфних графова са датим бројем чворова. Исто важи и за број неизоморфних стабала.

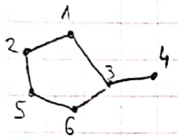
→ Кејлијева теорема нам даје број <u>означених</u> стабала која имају једнак бр. чворова. Први доказ ове теореме дао је Прифер. Ми је наводимо без доказа.

3.3.2.

(Т) /КЕЈЛИЈЕВА ТЕОРЕМА/: Број означених стабала са n чворова једнак је n^{n-2}.

* Број разапињућих стабала означеног комплетног графа K_n једнак је броју означених стабала који имају n чворова, тј. n^{n-2}

<u>Пример 3.3.3.</u>: Повезане графове који (као граф са слике) садрже тачно један <u>елементарни циклус</u>, Ајдоге називамо УНИЦИКЛИЧНИМ. Постоји тачно 5 разапињућих стабала разматраног означеног графа, пошто јединствени циклус има толико грана (уклањањем било које гране циклуса добијамо једно разапињуће стабло). Нека од тих разапињућих стабала су изоморфни.



→ Важи и <u>општи</u> закључак да је бр. разапињућих стабала означеног уницикличког графа једнак дужини јединственог циклуса тог графа.

(*) Ако је T разапињуће стабло повезаног графа G, онда се додавањем произвољне гране стаблу T, при чему она припада остатку графа G, добија тачно један циклус у новонасталом графу. Тај циклус називамо <u>елементарни циклус</u> графа G у односу на разапињуће стабло T.

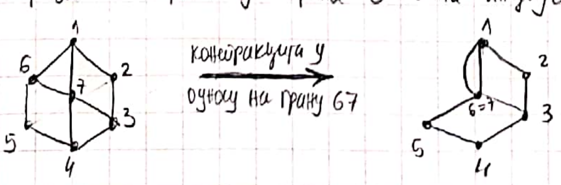
* <u>ЦИКЛОМАТИЧКИ БРОЈ</u> графа, у ознаци ν, једнак је броју елементарних циклуса графа.
  ↳ он је једна инваријанта графа

* Бр. елементарних циклуса графа, тј. цикломатички број, не зависи од избора разапињућег стабла. Бр. грана сваког разапињућег стабла једнак је $n-1$ (где је n бр. чворова графа), а по дефиницији, свака грана која припада графу, али не и фиксираном разапињућем стаблу, одређује један елем. циклус. Па, у случају повезаног графа, бр. ел. циклуса тј. цикломатички број, једнак је $m-n+1$ (m - укупан бр. грана)

3.3.4.

(Т) Број елементарних циклуса графа једнак је $m-n+p$, при чему је m бр. грана, n бр. чворова, а p бр. компонената повезаности тог графа.

* Нека је e грана мултиграфа G (може садржати и петље). <u>КОНТРАКЦИЈА МУЛТИГРАФА</u> G у односу на грану e, у ознаци $G \cdot e$, је мултиграф који се добија од мултиграфа $G-e$ идентификовањем чворова са којима је грана e била инцидентна.



24. ОЈЛЕРОВИ МУЛТИГРАФОВИ. ФЛЕРИЈЕВ АЛГОРИТАМ. ПРОБЛЕМ КИНЕСКОГ ПОШТАРА.

* За мултиграф кажемо да је Ојлеров уколико садржи затворену стазу која сваком граном тог мултиграфа пролази тачно једном. Такву стазу називамо ОЈЛЕРОВА СТАЗА.

* За мултиграф кажемо да је полуОјлеров, уколико садржи стазу која сваком граном пролази тачно једанпут.

→ Сваки Ојлеров мултиграф је истовремено и полуОјлеров.

→ Скрипта: прича о 7 кенигсбершких мостова ...

Ⓣ (ОЈЛЕРОВА ТЕОРЕМА) За нетривијалан повезан мултиграф важи да је Ојлеров АККО су сви чворови тог мултиграфа парног степена.

Док:

$\boxed{\Rightarrow}$: Означимо тај мултиграф са G и ПП да G садржи Ојлерову (затворену стазу). Ако се крећемо дуж те стазе тада када год неком граном дођемо до неког чвора, морамо користити неку другу грану (коју још нисмо користили) да одемо од тог чвора. Пошто ова стаза пролази свим гранама уз завршетак у полазном чвору, закључујемо да су степени свих чворова парни.

$\boxed{\Leftarrow}$: ПП да је степен сваког чвора мултиграфа G паран. Користићемо матем. индукцију по броју грана.

БАЗА: Мин. бр. грана нетривијалног мултиграфа код ког је степен сваког чвора паран је 2. То је мултиграф са 2 чвора и 2 гране које их спајају, и за њега очигледно важи тврђење

КОРАК: ПП да теорема важи за све графове који имају мање од m грана, и нека G има m грана. Пошто су сви чворови парног степена, G не садржи ниједан чвор степена $1 \Rightarrow G$ није стабло $\Rightarrow$
$\Rightarrow G$ садржи циклус, нека је то циклус C. Ако уклонимо све гране које припадају циклусу C, добијамо мултиграф који не мора бити повезан, али који и даље не садржи чворове непарног степена.
ПП да новонастали граф има k компоненти повезаности и означимо их са $G_1, \dots, G_k$.
- По И.Х. свака компонента G_i садржи Ојлерову стазу S_i.
- Пошто је мултиграф G повезан, свака од стаза $S_1, \dots, S_k$ има бар 1 заједнички чвор са циклусом C. Тражену Ојлерову стазу добијамо тк што крећући се циклусом C, када дођемо до првог чвора, рецимо u, који припада затвореној стази S_i коју нисмо већ обишли, изаћемо из циклуса, обићемо целу стазу S_i и вратимо се у чвор u. Кретање завршавамо када дођемо до чвора циклуса C од којег смо кренули. ∎

Ⓣ Нетривијалан повезан мултиграф је полуОјлеров АККО садржи 0 или 2 чвора непарног степена.

* ФЛЕРИЈЕВ АЛГОРИТАМ: прихвата Ојлеров мултиграф, враћа једну ојлерову стазу тог мултиграфа

```
BEGIN
INPUT  G
   v0          → произвољан чвор
   S = (v0)    → иницијализација стазе
   H = G       → помоћни мултиграф
                                        → пример скрипта
WHILE  |E(H)| > 0
   изабрати грану e=uv ∈ E(H) тд:
      • u је последњи чвор стазе S
      • e није мост мултиграфа H, осим ако нема другог избора
   S:=S+e,v    → стази додајемо грану e и чвор v
   H:=H-e
RETURN S
END
```

Проблем Кинеског поштара

- Поштар креће из поште, обилази улице у свом реону разносећи пошиљке, и потом се враћа у пошту. Он треба да обиђе све улице свог реона, а време ће трошити најрационалније ако је дужина пређеног пута минимална.
- ПП да се на крајевима сваке улице налазе раскрснице, онда реону можемо придружити један тежински мултиграф чији чворови одговарају раскрсницама, а гране деловима улица између раскрсница.
- Тада математичка формулација проблема кинеског поштара гласи: одредити затворену шетњу у тежинском мултиграфу (за који можемо да ПП да је повезан) која садржи све гране мултиграфа и минималне је тежине.
- Сваким проласком неком граном тежина шетње увећава се за тежину те гране.
- Приметимо да у случају да је придружен мултиграф Ојлеров, решење проблема је било која Ојлерова стаза у мултиграфу, будући да у тој ситуацији поштар може проћи сваком улицом тачно једанпут.
- Назив овог проблема потиче од кинеског математичара Куана, који га је први пут разматрао 1962. год.

25. ХАМИЛТОНОВИ ГРАФОВИ. ПРОБЛЕМ ТРГОВАЧКОГ ПУТНИКА. 3-ХЕУРИСТИКА

* За граф кажемо да је Хамилтонов уколико садржи циклус који пролази сваким чвором тог графа тачно једном. Такав циклус називамо Хамилтонов циклус.

* За граф кажемо да је полухамилтонов уколико садржи пут који пролази сваким чвором тог графа тачно једном. Такав пут називамо Хамилтонов пут.

* Сваки Хамилтонов граф је истовремено и полухамилтонов

- У случају Хамилтонових графова не постоји слична теорема као што је код Ојлерових Ојлерова теорема.

Т /ДИРАКОВА ТЕОРЕМА/ Граф који има бар 3 чвора и за чији минималан степен чвора важи $\delta \geq \frac{n}{2}$, је Хамилтонов.

* ПРОБЛЕМ КОЊИЧКОГ СКОКА:
Нека је дата правоугаона табла формата $m \times n$. Обићи сва поља скакачем тд скакач стане на свако поље тачно једанпут.

→ Свакој табли можемо придружити граф чији чворови одговарају пољима табле, при чему су чворови суседни акко скакач у једном потезу може прећи са једног поља на друго. На овај начин, питање постојања решења се своди на питање да ли је придружени граф полухамилтонов или не. Ако закључимо да јесте, онда у општем случају одређивање тог Хамилтоновог пута није лак задатак.

→ Занимљиво је то што је познато да решење постоји за све табле формата $m \times n$ за $m, n \geq 3$ са изузецима табли формата 3×3, 3×5, 3×6, 4×4

→ Један од начина да се дође до решења у случају шаховске табле (8×8) је да се табла подели на мање табле па да се проблем реши за сваку од њих...

Примери решења за 3×4 и 4×5:

10	5	8
7	2	11
4	9	6
1	12	3

9	4	13	18
14	19	8	3
5	10	17	12
20	15	2	7
1	6	11	16

→ Користећи симетрије подтабли и чињеницу да једно реш. обезбеђује још једно које се добија кретући се уназад, комбиновањем 2 мање табле, долазимо до једног реш. овог проблема на шаховској табли.

ПРОБЛЕМ ТРГОВАЧКОГ ПУТНИКА

- Нека је дат скуп градова од којих су неки повезани путем одређене дужине. Трговачки путник треба да обиђе сваки град тачно једанпут и врати се у онај из ког је кренуо, а да том приликом пређе најкраћи пут.

- Разматрамо тежински граф чији чворови репрезентују градове, гране путеве између њих, а тежине грана дужине путева.
- Неопходан услов да трговачки путник успешно може извршити задатак је да је придружени граф Хамилтонов. Отуда се овај проблем своди на одређивање Хамилтоновог циклуса минималне тежине у тежинском графу.
- Хамилтонов циклус чија је тежина минимална називамо оптимални циклус. Проблем одређивања таквог циклуса је NP-тежак. Један метод за одређивање оптималног циклуса је одређивање свих циклуса и потом издвајање оног који је минималне тежине (неефикасно...).

- Поред алгоритама који дају оптимално решење проблема трговачког путника, постоје и такозвани ХЕУРИСТИЧКИ АЛГОРИТМИ (ХЕУРИСТИКЕ). Заједничка својства свих хеуристика су да је њихова примена једноставна (могу се једноставно имплементирати и да не захтевају сложена израчунавања, па се могу понављати велики бр. пута), али да у општем случају не дају оптимално решење, већ решење које је блиско оптималном. Решења која се добијају применом хеуристика називају се ПОДОПТИМАЛНИМ.

3-ХЕУРИСТИКА

→ Примењује се на комплетне тежинске графове, тј. у складу са ранијом терминологијом, примењује се у ситуацијама када су свака 2 града повезана путем.

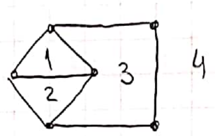
→ Нека је S_1 један Хамилтонов циклус комплетног тежинског графа. Уклањањем 3 несуседне гране циклуса S_1, добијамо подграф тог циклуса који се састоји из 3 пута. Спајањем крајева ових путева на одговарајуће начине добијамо нове Хамилтонове циклусе (пример у скрипти). Није тешко утврдити да различитим спајањима крајева путева добијамо n циклуса (n - бр. чворова). Од добијених циклуса бирамо онај који је минималне тежине (не мора бити јединствен), означавамо га са S_2 и на њега примењујемо претходну процедуру. На овај начин добијамо низ Хамилтонових циклуса $S_1, S_2, \ldots$, такав да је тежина сваког наредног мања или једнака од тежине претходног. Процедура се завршава када се испуни неки од унапред задатих критеријума (који се угл. односе на бр. итерација или тежину циклуса...)

→ Избор 3 гране које се уклањају може се вршити на разл. начине. То може бити случајан избор, или то могу бити гране веће тежине. У случају да избор грана не доведе до промене циклуса, треба покушати са другачијим избором.

26 ПЛАНАРНИ ГРАФОВИ

* За граф кажемо да је ПЛАНАРАН уколико се може представити у равни тд се његове гране међусобно не пресецају. (ова деф. је заснована на графичкој репрезентацији)

- Сваки повезан планаран граф који је представљен тд. му се гране не пресецају, дели раван на неки број области, од којих је тачно једна бесконачна.



Ⓣ (ОЈЛЕРОВА ТЕОРЕМА ЗА ПЛАНАРНЕ ГРАФОВЕ)

За сваки повезан планаран граф G који је представљен у равни тд. му се гране не пресецају важи једнакост:

$$n-m+f=2$$

при чему је n бр. чворова, m бр. грана, а f бр. области на које граф дели раван.

Док:

Индукцијом по броју грана.

- Пошто је G повезан, минимални бр. грана које садржи једнак је $n-1$, и тада је G стабло. У случају стабла очигледно важи $f=1$, па имамо $n-n+1+1=2$ тј $2=2$ ✓ (важи тврђење)
- пп да тврђење важи за све повезане графове са мање од m грана, и докажимо да важи за граф G који има m грана ($m \geq n$).

  Пошто наш граф садржи најмање n грана, он садржи бар један циклус. Нека је e грана тог циклуса. Граф $G-e$ је повезан (јер e припада циклусу), и дели раван на једну област мање од графа G. Према и.х. (примењеној на граф $G-e$) важи $n-(m-1)+(f-1)=2$ па одавде следи $n-m+f=2$ ■

* ПОТПОДЕЛА графа G добија се заменом сваке гране тог графа нетривијалним путем произвољне дужине. (који спаја чворове који су били инцидентни са граном). Неформално, потподела графа добија се узастопним додавањем произвољног броја чворова свакој грани.

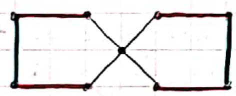
Ⓣ Граф је планаран АККО не садржи подграф који је изоморфан некој потподели графа K_5 или графа $K_{3,3}$.

* Није тешко уверити се да ниједан од графова K_5 и $K_{3,3}$ није планаран, па одуда графови који се добијају њиховим потподелама такође нису планарни.

27 СПАРИВАЊА У ГРАФОВИМА

* Спаривање у графу је подскуп скупа грана тд никоје две гране тог подскупа нису суседне у графу

* Максимално спаривање у графу је спаривање којем се не може додати грана тд оно остане спаривање.
* Највеће спаривање у графу је оно које садржи највећи бр. грана
* Ни максимално ни највеће спаривање не мора бити јединствено



→ црвено спаривање је максимално и највеће

→ зелено спаривање није максимално, па ниме ни највеће. Када бисмо му додали грану инцидентну са чвором степена 4, зелено спаривање би постало максимално, али и даље не би било највеће

* Свако највеће спаривање је истовремено и максимално

* Савршено спаривање у графу је спаривање тд је сваки чвор тог графа инцидентан са једном граном спарив-ања. Граф не мора да садржи савршено спаривање. Ако граф има непаран бр. чворова онда он не може имати савршено спаривање. Свако савршено спаривање је истовремено и највеће спаривање, а под претпоставком да савршено спаривање постоји, важи и обрнуто.

* Пут парне дужине нема савршено спаривање, док пут непарне дужине има јединствено савршено спаривање
* Циклус парне дужине има тачно 2 савршена спаривања

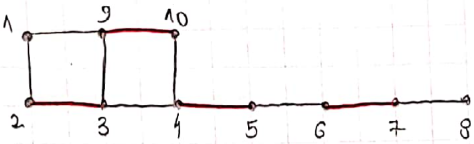
$K_{4,4}$  $K_{4,4}$ има $4!$ савршених спаривања (за први чвор 4 могућности, за други 3, па 2, ...)

ВАЖИ: Комплетан бипартитан граф $K_{n,n}$ има $n!$ савршених спаривања.

Комплетан граф K_{2n} има $\frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}$ савршених спаривања.

- Сада ћемо размотрити питање постојања највећег спаривања у графу.

* Нека је M произвољно спаривање у графу G. За чвор v тог графа који није инцидентан ни са једном граном спаривања M кажемо да је слободан у односу на M.
* За пут $P=(v_0,e_1,v_2,\dots,e_{k-1},v_k)$ у графу G кажемо да је M-алтернирајући уколико или све гране непарног индекса, или све гране парног индекса пута P припадају спаривању M. Другим речима гране пута наизменично припадају и не припадају датом спаривању.
* M-увећани пут је M-алтернирајући пут код којег су само крајњи чворови слободни у односу на спаривање M. Такав пут не мора да постоји.



(црвено)

→ Овде имамо једно спаривање M које садржи 4 гране.
- Пут одређен низом чворова од 2 до 8 је M-алтернирајући (и 1-8)
- Пут одређен низом чворова од 1 до 8 је M-увећани.
- M није највеће спаривање (веће је 12, 34, 56, 78, 9 10), тј. $M \Delta E(P)$ је највеће (Δ – симетрична разлика)

Ⓣ /БЕРЖОВА ТЕОРЕМА/

Спаривање M у графу G је највеће АККО G не садржи M-увећани пут.

Док:

[=>]: ПП да је спаривање M највеће, и нека, насупрот тврђењу, граф G садржи M-увећани пут, рецимо P. Приметимо да је $M \Delta E(P)$ (Δ-симетрична разлика) такође спаривање у разматраном графу. Штавише, то спаривање садржи једну грану више од спаривања M, што значи да M није највеће ↯

[<=]: Доказаћемо контрапозицију, тј. ПП да спаривање M није највеће и докажимо да тада граф садржи M-увећани пут.
Ако M није највеће спаривање, онда постоји неко спаривање M' које је највеће (садржи више грана од M). Размотримо подграф графа G чији је скуп грана одређен унијом скупова M и M'. Степен сваког чвора тог подграфа није већи од 2 (сваки чвор је инцидентан са највише 2 гране које припадају разл. спаривањима). Дакле, све компоненте повезаности разматраног подграфа су путеви или циклуси. Будући да сваки циклус садржи једнак бр. грана из спаривања M и M' (циклус мора бити парне дужине и његове гране наизменично припадају једном па другом спаривању), и да спаривање M' садржи више грана, закључујемо да мора постојати компонента која је пут који садржи једну грану више из M' него из M, у том случају гране таквог пута наизменично припадају спаривањима M и M', с тим да прва и последња грана припадају спаривању M'. Тај пут је дакле тражени M-увећани пут. ∎

* Постоји пуно примена спаривања у графовима. Једна од њих је код такозваног проблема распореда послова. ПП да је дат неки скуп послова и са друге стране скуп радника. Такође, дати су подаци о томе које од послова сваки радник уме да уради. Тражи се један распоред радника на послове тј. што више послова буде покривено и да што више радника буде запослено. Уколико претпоставимо да је за обављање сваког од послова довољан један радник и да су радници једнако ефикасни, добијамо најједноставнији облик проблема. Ово се може представити бипартитним графом код којег чворови једног скупа одговарају пословима, а чворови другог скупа радницима, и притом су 2 чвора спојена граном АККО одговарајући радник уме да ради дати посао. У овој ситуацији се одређивање оптималног распореда своди на одређивање највећег спаривања у бипартитном графу. За то постоји више алгоритама, а међу најпознатијима је мађарски алгоритам (он је заснован на Бержовој теореми...)

(28) БОЈЕЊА ГРАФОВА. ПРОБЛЕМ 4 БОЈЕ

* Бојење чворова графа је ф-ја која сваки чвор графа пресликава у неку боју из датог скупа боја. Тада кажемо да је чвор обојен одговарајућом бојом. За бојење чворова графа кажемо да је правилно уколико су суседни чворови обојени различитим бојама.

* Бојење грана графа је ф-ја која сваку грану графа пресликава у неку боју из датог скупа боја. Тада кажемо да је грана обојена одговарајућом бојом, а за бојење грана кажемо да је правилно уколико су суседне гране обојене различитим бојама.

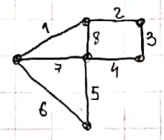
– Проблем бојења грана графа може се свести на проблем бојења чворова његовог линијског графа.

* Линијски граф графа G, у ознаци $L(G)$ је граф ком се добија на следећи начин:
  - скуп чворова графа $L(G)$ одговара скупу грана графа G
  - чворови графа $L(G)$ су суседни akko су њима одговарајуће гране суседне у графу G

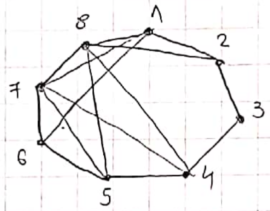
* Кажемо да је G коренски граф свог линијског графа.

Пример:

G:



$L(G)$:



* Сваки граф, до на изоморфизам, има тачно један линијски граф, и бојење грана графа једнозначно одређује бојење чворова његовог линијског графа.
* Обрнуто, сваком линијском графу, који није изоморфан графу K_3, одговара тачно један коренски граф. Другим речима, ако је неки граф линијски и није изоморфан графу K_3, онда он једнозначно одређује коренски граф и бојење чворова линијског графа једнозначно одређује бојење грана његовог коренског графа.

→ Под бојењем графа подразумеваћемо бојење његових чворова

* За граф кажемо да је k-обојив уколико се може правилно обојити коришћењем k боја. Тј. граф је k-обојив уколико постоји ф-ја која сваки чвор тог графа пресликава у неку боју из скупа од k боја тд се суседни чворови пресликавају у различите боје.

* Минималну вредност k за коју је граф k-обојив у ознаци χ, називамо ХРОМАТСКИ БРОЈ ГРАФА. Хроматски број је једна инваријанта графа.

* Бојење неповезаног графа се разматра тк што се бојење сваке компоненте повезаности разматра независно од бојења осталих компоненти. ⇒ Хроматски бр. неповезаног графа је једнак максималном од хроматских бројева његових компоненти повезаности.

* Комплетан граф K_n може се правилно обојити коришћењем n боја. Пошто су сви чворови овог графа међусобно суседни, закључујемо да је његов хроматски бр. једнак n.

* Сваки пут који садржи најмање 2 чвора, може се правилно обојити тк што се наизменично користе две боје, па је $\chi(P_n)=2$, $n\geq 2$.

* Важи и општије, хроматски број бипартитног графа који има бар једну грану је 2. Чворови из једног скупа партиције се боје једном, а чворови из другог скупа другом бојом. Овакви бипартитни графови се називају и БИХРОМАТСКИ графови.

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n=2k \\ 3, & n=2k-1 \end{cases} \quad k\geq 2$$

* За граф кажемо да је χ-критичан уколико је његов хроматски бр. једнак χ, и уколико је хроматски бр. сваког његовог правог подграфа мањи од χ. Сваки граф чији је хроматски бр. једнак χ садржи χ-критичан подграф.

→ χ-критичан граф мора бити повезан.

Ⓣ Хроматски број и максимални степен чвора сваког повезаног графа задовољавају неједнакост:

$$\chi \leq \Delta + 1 \quad (*)$$

(без доказа)

Ⓣ /БРУКСОВА ТЕОРЕМА/
Једнакост у ф-ли (*) важи АККО је разматрани граф изоморфан комплетном графу или циклусу непарне дужине.
(без доказа)

- Слично као и код спаривања, и код бојења графова постоје алгоритми који дају оптимално бојење чворова. (тј. бојење које користи минимални бр. боја). Поред њих, упоредо се развијају и хеуристички алгоритми.
- Једна таква хеуристика: Нека су чворови графа означени са $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и нека је дат уређен скуп од n боја. Чворове бојимо редом почевши од v_1 који бојимо првом бојом из скупа боја. Када дођемо до чвора v_i, бојимо га бојом која је прва боја скупа боја која није употребљена за бојење његових суседа.
- Ова хеуристика је похлепна јер бира локално најповољније решење. Она ће увек дати једно ефикасно и правилно бојење графа, али ће у случају неких графова употребити више боја него што је потребно.

<u>Пример (проблем распореда испита)</u>
На крају семестра студенти полажу испите из одслушаних предмета. За сваки испит постоји један термин у испитном року. Израчунати минимални бр. термина тј. сваки студент може полагати све испите које жели.
→ Означимо са S скуп студената, а са I скуп испита. За сваки испит $i \in I$, нека је N_i скуп студената који намеравају да га полажу. Ако су испити i и j различити, тада важи: Ако је $N_i \cap N_j \neq \emptyset$, онда се испити i и j морају одржати у различитим терминима.
→ Нека је G граф чији чворови одговарају испитима (тј $V(G) = I$) и чији чворови i и j су суседни АККО важи $N_i \cap N_j \neq \emptyset$. Бојење графа G коришћењем k боја, одговара распореду испита у k термина (сви испити обојени истом бојом се одржавају у истом термину). Самим тим, мин. бр. термина једнак је хроматском броју графа G.

<u>Пример (проблем складиштења)</u>
У складиште треба распоредити n материја међу којима су неке инкомпатибилне (при додиру изазивају нежељене реакције) па морају бити распоређене у различите одељке складишта. Колики је минималан бр. одељака неопходан за складиштење свих материја?
→ Размотримо граф формиран на сличан начин као у претходном примеру: сваки чвор одговара једној материји а чворови су суседни ако су одговарајуће материје инкомпатибилне. Број неопходних одељака једнак је хроматском броју овог графа.

<u>Проблем бојења мапа</u> (датира из 19. века)

* Мапу територија (од којих је свака повезана) треба обојити минималним бројем боја, тј. свака територија буде обојена једном бојом и да суседне територије буду обојене различитим бојама. (суседним територијама не сматрамо територије које се граниче у једној тачки).

* Нека је G граф чији чворови одговарају територијама и чворови су суседни АККО су одговарајуће територије суседне. Граф G је планарни, па се проблем бојења мапа своди на одређивање хроматског броја одговарајућег планарног графа.

- Мапа Европе обојена са 3 боје
* Хејвуд је 1890. доказао да се сваки планарни граф може правилно обојити коришћењем 5 боја.
* Много јачи резултат су 1976. год. доказали Епл и Хакен, познат као <u>теорема о 4 боје</u>. Она каже да хроматски број планарног графа није већи од 4

* Често се уз проблем бојења мапа разматра и проблем правилног бојења (планарног) графа са мање од 4 боје. слике, Скрипта
Испоставља се да испитивање да ли је граф 3-обојив припада класи NP-комплетних проблема.