

PROJECT REPORT

1. ΤΙΤΛΟΣ

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ – ΕΡΓΑΣΙΑ MATLAB
ΓΑΡΟΥΦΑΛΗ ΜΑΡΙΑ ΝΕΦΕΛΗ, ΑΕΜ: 3129
ΓΑΡΟΥΦΑΛΗΣ ΚΙΜΩΝ, ΑΕΜ: 2968

2. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην συγκεκριμένη αναφορά παρουσιάζεται η εργασία του μαθήματος. Η εργασία αυτή αποτελείται από 2 μέρη με επιμέρους υποερωτήματα. Το 1^ο μέρος σχετίζεται με την σχεδίαση FIR φίλτρων με παραθύρωση. Το 2^ο μέρος αφορά την ανάλυση σημάτων με DFT. Παρακάτω θα αναλυθούν ο κώδικας υλοποίησης σε MATLAB, καθώς και τα ερωτήματα της εργασίας.

3. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στόχος του 1^{ου} μέρους είναι να σχεδιάσουμε ζωνοπερατά φίλτρα διακριτού χρόνου με:

- Ζώνη διάβασης (passband) το $[0.4\pi, 0.6\pi]$
- Ζώνη αποκοπής (stopband) το $[0, 0.2\pi] \cup [0.8\pi, \pi]$

χρησιμοποιώντας διάφορα παράθυρα κατάλληλου μήκους, συγκεκριμένα:

- Παράθυρο Hann
- Παράθυρο Hamming
- Παράθυρο Blackman

Για κάθε παράθυρο:

A1. Βρείτε το μήκος του παραθύρου ώστε να ικανοποιούνται τα εύρη των ζωνών μετάβασης που αντιστοιχούν στις παραπάνω απαιτήσεις και σχεδιάστε το παράθυρο.

A2. Στη συνέχεια, βρείτε το ζητούμενο φίλτρο πολλαπλασιάζοντας την ιδανική κρουστική απόκριση με το παράθυρο ή χρησιμοποιώντας κατάλληλη εντολή του MATLAB.

A3. Σχεδιάστε την κρουστική απόκριση του φίλτρου, την βηματική απόκριση αυτού, το μέτρο της απόκρισης συχνότητάς του σε λογαριθμική κλίμακα (σε dB), και την καθυστέρηση ομάδας του.

A4. Βρείτε τη μέγιστη απόκλιση, δ (και σε dB ως $20 \log 10 \delta$), μεταξύ του μέτρου της απόκρισης συχνότητάς του φίλτρου και της ιδανικής (δ_0 . του 1 ή 0) στις ζώνες διάβασης και αποκοπής, σχεδιάζοντας επίσης τη συνάρτηση σφάλματος (διαφέρει λίγο από αυτή του βιβλίου):

$$\begin{aligned}
 E(\omega) &= |H(e^{j\omega})|, & \text{για } 0 \leq \omega \leq 0.2\pi \text{ και } 0.8\pi \leq \omega \leq \pi \\
 &1 - |H(e^{j\omega})|, & \text{για } 0.4\pi \leq \omega \leq 0.6\pi \\
 &0, & \text{για } 0.2\pi < \omega < 0.4\pi \text{ και } 0.6\pi < \omega < 0.8\pi
 \end{aligned}$$

όπου $H(e^{j\omega})$ είναι η απόκριση συχνότητας του φίλτρου. [Υπόδειξη: Για την εύρεση της συνάρτησης $E(\omega)$ υπολογίστε τον DFT της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου με μεγάλο μήκος, π.χ. $N = 8192$, και αντιστοιχίστε σωστά τα δείγματα που προκύπτουν στις ζώνες συχνοτήτων της παραπάνω εξίσωσης.] Σχολιάστε τις διαφορές μεταξύ των διαφορές της παραπάνω εξίσωσης. Σημείωση: Το παράθυρο είναι μετατοπισμένο κατά $L/2$ δείγματα αριστερά ώστε να παραθυρώνει το σήμα στο συγκεκριμένο διάστημα.

Για το 2^o Μέρος θα πρέπει να θεωρήσουμε το σήμα $x[n]$ που ορίζεται ως

$$x[n] = 80 \delta[n] - 80 \sin(\pi n / 2) \pi n + \cos(\pi n / 16) + \cos(\pi n / 8) + \cos(\pi n / 4)$$

Σκοπός μας είναι να αναλύσουμε το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παραθύρωσης και DFT. Συγκεκριμένα, το σήμα θα το παραθυρώσουμε με ορθογώνιο παράθυρο μήκους L στο διάστημα $[-L/2, L/2 - 1]$ για διάφορες τιμές του $L = 16, 32, 64, 128$. Σημείωση: Το παράθυρο είναι μετατοπισμένο κατά $L/2$ δείγματα αριστερά ώστε να παραθυρώνει το σήμα στο συγκεκριμένο διάστημα.

B.1 Για κάθε L , υπολογίστε και σχεδιάστε (με την εντολή stem) το σήμα που προκύπτει μετά την παραθύρωση. Προσοχή στην τιμή $n = 0$, λόγω της κρουστικής και της συνάρτησης sinc.

B.2 Για κάθε L , σχεδιάστε το μέτρο του DFT του παραθυρωμένου σήματος με υπολογισμό DFT μήκους $N = L$ όπως και μεγάλου μήκους $N = 8192$. Στην περίπτωση που $N = L$ σχεδιάστε τα μέτρα των DFT με την εντολή stem, ενώ για $N = 8192$ σχεδιάστε τα διαγράμματα με την εντολή plot στο διάστημα συχνοτήτων $[0, \pi]$, αντιστοιχίζοντας σωστά τα δείγματα του DFT σε αυτό.

B.3 Για τα διάφορα L (και N), σχολιάστε την ευκρίνεια του διαγράμματος του μέτρου DFT, την ύπαρξη κυματισμού και δευτερευόντων λοβών (ripple, sidelobes), όπως επίσης και αν το συχνοτικό περιεχόμενο του αρχικού σήματος είναι εμφανές.

B.4 Για τις περιπτώσεις $L = 64, 128$ και $N = 8192$, χρησιμοποιείστε παράθυρο Hamming αντί για ορθογώνιο, και συγκρίνετε το φάσμα του παραθυρωμένου σήματος με το αντίστοιχο της ορθογώνιας παραθύρωσης για τις ίδιες τιμές των L και N . Σημείωση: Το παράθυρο Hamming να το μετατοπίσετε κατά $L/2$ δείγματα αριστερά ώστε να παραθυρώνει το σήμα στο διάστημα $[-L/2, L/2 - 1]$. Προσοχή να υλοποιήσετε σωστά την παραθύρωση αυτή.

B.5 Περάστε το σήμα του B.4 για $L = 128$ ως σήμα εισόδου από κάποιο από τα ζωνοπερατά φίλτρα του μέρους A (όποιο προτιμάτε) και σχολιάστε το φάσμα του σήματος που προκύπτει σε σχέση με το σήμα εισόδου (χρησιμοποιώντας $N = 8192$ για τον υπολογισμό του μέτρου του DFT του σήματος εξόδου και σχεδιάζοντας το αποτέλεσμα στο συχνοτικό διάστημα $[0, \pi]$).

4. Μέρος Α – Σχεδιασμός FIR φίλτρων με παραθύρωση

- A1

Ξεκινάμε καταγράφοντας τις απαιτήσεις της εκφώνησης για το συγκεκριμένο ζωνοπερατό φίλτρο. Αυτές είναι οι τιμές του ω για τις οποίες έχουμε την ζώνη διάβασης και την ζώνη αποκοπής. Έτσι, κατασκευάζουμε 4 σημεία (point1,...,point4). Στην συνέχεια, πρέπει να υπολογίσουμε την μικρότερη διαφορά μεταξύ των διαδοχικών σημείων στα οποία αλλάζει η «ζώνη». Αυτά είναι τα point1,point2 & point3,point4. Ο τύπος για τον συγκεκριμένο υπολογισμό είναι $dw1 = point2 - point1; dw2 = point4 - point3; dw = max(dw1, dw2);$. Στην συνέχεια, υπολογίζουμε τα σημεία στα οποία γίνεται η αλλαγή από την ζώνη αποκοπής στην ζώνη διάβασης και το αντίστροφο. Αυτά βρίσκονται στη μέση των περιοχών αλλαγής της ζώνης. Πιο συγκεκριμένα, $w1=(point1+point2)/2;$ $w2 = (point3+point4)/2;$. Τα μήκη των παραθύρων υπολογίζονται από τους αντίστοιχους τύπους για το κάθε παράθυρο.

Πίνακας 1

| Window Type | Peak Sidelobe Amplitude (Relative, dB) | Approximate Width of Main Lobe | Peak Approximation Error, $20\log(\delta)$ (dB) |
|-------------|--|--------------------------------|---|
| Rectangular | -13 | $\frac{4\pi}{M + 1}$ | -21 |
| Bartlett | -25 | $\frac{8\pi}{M}$ | -25 |
| Hann | -31 | $\frac{8\pi}{M}$ | -44 |
| Hamming | -41 | $\frac{8\pi}{M}$ | -53 |
| Blackman | -57 | $\frac{12\pi}{M}$ | -74 |

Έτσι οι τύποι που προκύπτουν για τα παράθυρα είναι $Mhann = ceil(8*pi/dw);$ $Mhamming = ceil(8*pi/dw);$ $Mblackman = ceil(12*pi/dw);$. Έχοντας τα μήκη των παραθύρων μπορούμε να σχεδιάσουμε τα παράθυρα. Αυτό μπορεί να γίνει με 2 τρόπους. Αρχικά, με τις συναρτήσεις του MATLAB. Οι τύποι που προκύπτουν είναι $Whamming = hamming(Mhamming+1)';$ $Wblackman = blackman(Mblackman+1)';$ $Whann = hann(Mhann+1)';$. Για τον δεύτερο τρόπο θα υπολογίσουμε αναλυτικά το παράθυρο βάσει του τύπου του.

Πίνακας 2

| Name of Window function | Window function $w(n), 0 \leq n \leq N$ |
|-------------------------|---|
| Rectangular | 1 |
| Hanning | $0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ |
| Hamming | $0.5 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ |
| Blackman | $0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$ |

Πριν εφαρμόσουμε τους τύπους θα πρέπει να δημιουργήσουμε την μεταβλητή n για το κάθε παράθυρο, η οποία όπως βλέπουμε και στον πίνακα ξεκινάει από το 0 και φτάνει μέχρι το μήκος του κάθε παραθύρου. Παρακάτω φαίνονται οι συγκεκριμένες μεταβλητές για το κάθε παράθυρο. $Uhann = 0:1:Mhann$; $Uhamming = 0:1:Mhamming$; $UbLackman = 0:1:MbLackman$. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τους τύπους για να δημιουργήσουμε τα παράθυρα.

```

W2hann=0.5-0.5*cos(2*pi*Uhann/Mhann);
W2hamming=0.54-0.46*cos(2*pi*Uhamming/Mhamming);
W2bLackman = 0.42-0.5*cos(2*pi*UbLackman/MbLackman)
+0.08*cos(4*pi*UbLackman/MbLackman);

```

Ο σχεδιασμός των παραθύρων μπορεί να γίνει εύκολα, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση stem του MATLAB. Διαβάζουμε από το manual της συνάρτησης ότι απεικονίζει τα δεδομένα μιας μεταβλητής στον άξονα Y ως προς μια άλλη μεταβλητή στον άξονα X. Αφού, εμείς θέλουμε να απεικονίσουμε ως προς τις τιμές του n θα χρησιμοποιήσουμε τις μεταβλητές που φτιάξαμε για αυτόν τον σκοπό. Έτσι, οι εντολές MATLAB για τον σχεδιασμό των παραθύρων είναι

```

figure(1); stem(Uhann,Whann);
figure(2); stem(Uhamming,Whamming);
figure(3); stem(UbLackman,WbLackman);
Επαναλαμβάνουμε τις ίδιες εντολές με τα παράθυρα που φτιάξαμε με τον 2o τρόπο,
προκειμένου να επιβεβαιώσουμε ότι δεν διαφέρουν με τα παραπάνω.

```

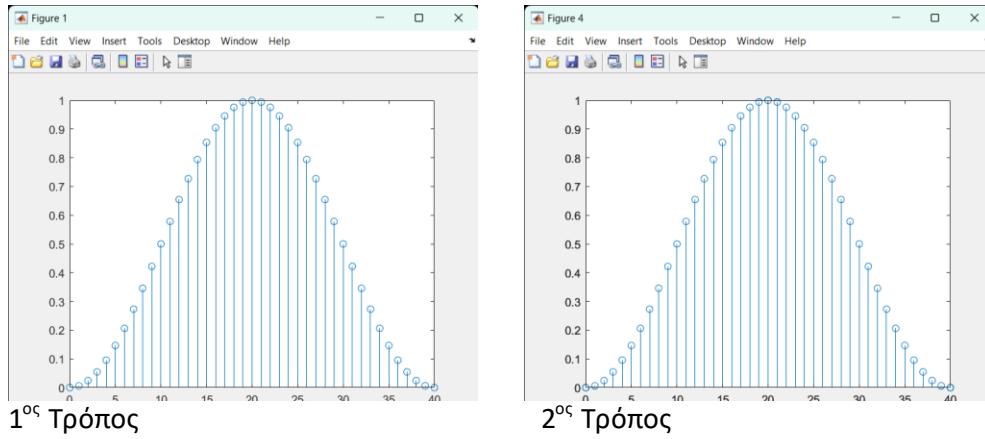
```

figure(4); stem(Uhann,W2hann);
figure(5); stem(Uhamming,W2hamming);
figure(6); stem(UbLackman,W2bLackman);

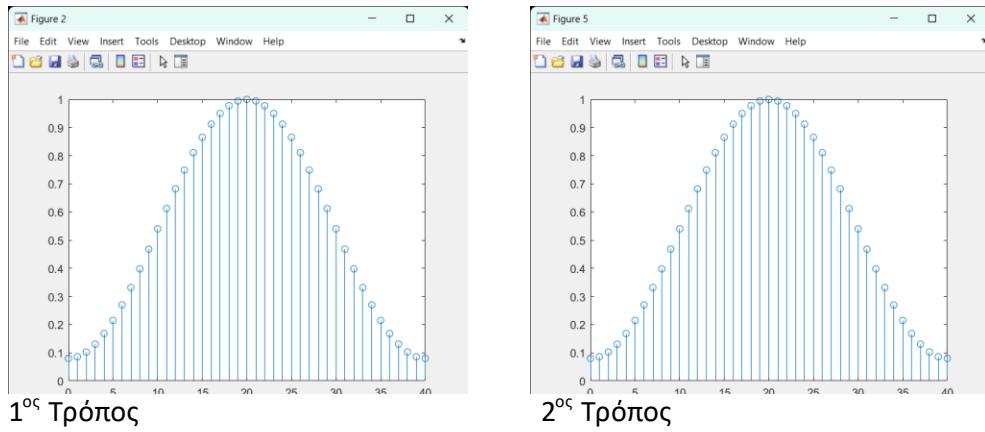
```

Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις που προέκυψαν.

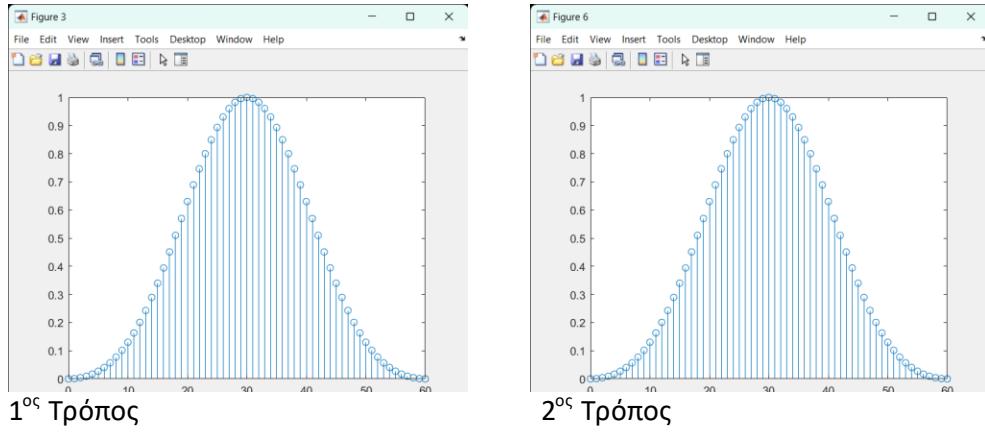
ΠΑΡΑΘΥΡΟ HANN



ΠΑΡΑΘΥΡΟ HAMMING



ΠΑΡΑΘΥΡΟ BLACKMAN



Όπως φαίνεται και από τα σχήματα, και οι 2 τρόποι υπολογισμού των παραθύρων δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Επίσης, συγκρίνοντας τα παρατηρούμε ότι ισχύουν οι χαρακτηριστικές διαφορές των συγκεκριμένων παραθύρων.

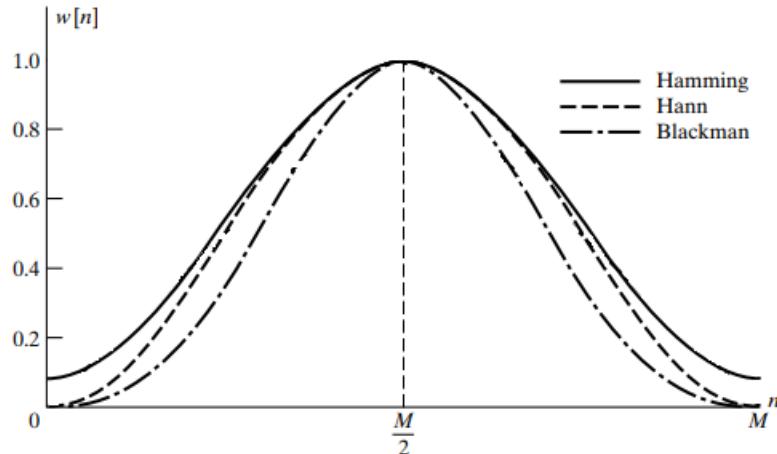


Figure 29 Commonly used windows.

Βλέπουμε δηλαδή ότι το παράθυρο Hamming όντως δεν καταλήγει στο 0. Επίσης, παρατηρούμε ότι το παράθυρο Hann και το παράθυρο Blackman καταλήγουν στο 0, ενώ το παράθυρο Blackman είναι πιο «στενό». Αυτά τα χαρακτηριστικά φαίνονται και στις δικές μας γραφικές παραστάσεις.

• A2

Για την δημιουργία του φίλτρου μπορούμε είτε να πολλαπλασιάσουμε την ιδανική κρουστική απόκριση με το παράθυρο είτε να χρησιμοποιήσουμε κάποιον τύπο του MATLAB. Παρακάτω φαίνεται ο τύπος από τον οποίο προκύπτει η ιδανική κρουστική απόκριση. Για να τον εφαρμόσουμε πρέπει να κάνουμε κάποιους υπολογισμούς. Συγκεκριμένα, μπορούμε για απλοποίηση να υπολογίσουμε το μέγεθος $M/2$ ως a και το $n-(M/2) = n-a$ ως m . Το n όπως και παραπάνω πρέπει να παίρνει διαδοχικά τις τιμές από το 0 έως το μήκος του εκάστοτε παραθύρου.

$$\text{Πολυζωνικό (multiband) φίλτρο FIR: } (G_{N_{\text{bands}}+1} = 0), \quad h_{\text{ideal}}[n] = \sum_{k=1}^{N_{\text{bands}}} (G_k - G_{k+1}) \frac{\sin[\omega_k(n - (M/2))]}{\pi(n - (M/2))}$$

Ο κώδικας MATLAB που αντιστοιχεί στην εφαρμογή του παραπάνω τύπου φαίνεται παρακάτω.

```

% Values for Hann and Hamming (since they have the same M)
n = 0:1:Mhann;
a = Mhann/2;
m=n-a;

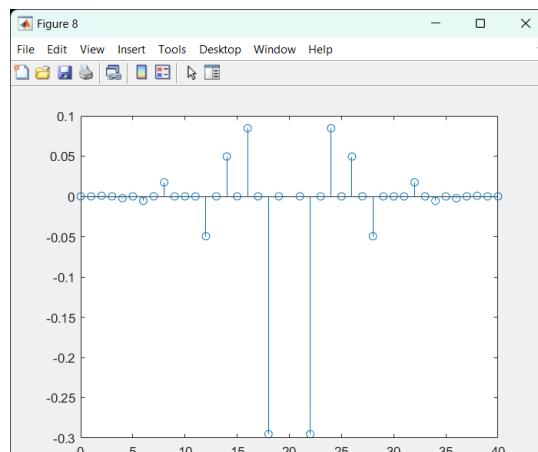
%Values for Blackman
n2 = 0:1:Mblackman;
a2 = Mblackman/2;
m2=n2-a2;

% 2nd way Filter
hb = ((-sin(w1*(n-a)) + sin(w2*(n-a)))./(pi*(n-a)));
hb2 = ((-sin(w1*(n2-a2)) + sin(w2*(n2-a2)))./(pi*(n2-a2)));
filterhann2 = hb.*Whann;
filterhamming2 = hb.*Whamming;
filterblackman2 = hb2.*Wblackman;

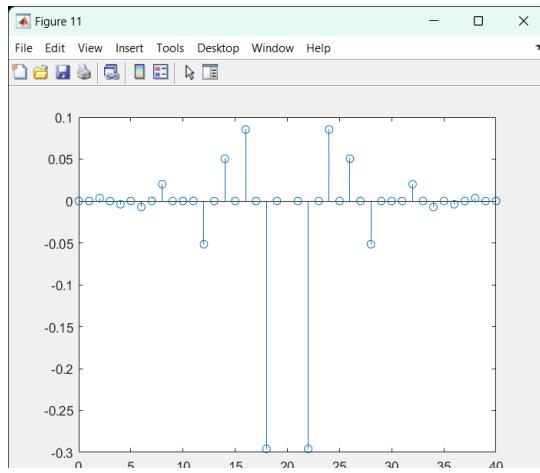
```

Παρακάτω θα δούμε και τις γραφικές παραστάσεις των φίλτρων από το συγκεκριμένο τύπο. Όπως βλέπουμε τα φίλτρα δεν απεικονίζονται καλά καθώς δεν απεικονίζεται η τιμή τους στο σημείο $M/2$. Αυτό συμβαίνει διότι για την συγκεκριμένη τιμή ο παρονομαστής του κλάσματος μηδενίζεται και δεν μπορεί να υπολογιστεί η συγκεκριμένη τιμή. Παίρνοντας ωστόσο το όριο του κλάσματος στο 0 μπορούμε εύκολα να την υπολογίσουμε. Μετά από πράξεις καταλήγουμε ότι η συγκεκριμένη τιμή είναι η $(w2 - w1)/\pi$. Πράγματι όπως θα δούμε και στην συνέχεια, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα της γραφικής παράστασης και όντως η τιμή που προκύπτει για το συγκεκριμένο σημείο είναι αυτή.

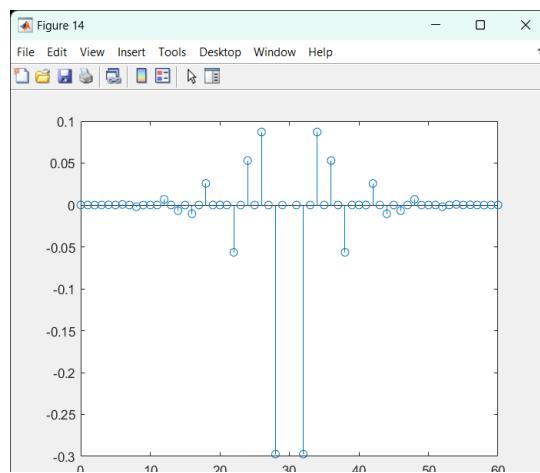
ΠΑΡΑΘΥΡΟ HANN



ΠΑΡΑΘΥΡΟ HAMMING



ΠΑΡΑΘΥΡΟ BLACKMAN



Παρατηρώντας πιο προσεκτικά την εξίσωση για την ιδανική κρουστική απόκριση, θα δούμε ότι θα μπορούσε να εκφραστεί ως sinc function. Μετασχηματίζοντάς την λοιπόν παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση.

$$\begin{aligned}
 & (-\sin(w1*(n-a)) + \sin(w2*(n-a))) / (\pi*(n-a)) = \\
 & = (-w1/\pi)*\text{sinc}((w1/\pi)*(n-a)) + (w2/\pi)*\text{sinc}((w2/\pi)*(n-a)) = \\
 & = (-f1*\text{sinc}(f1*m) + f2*\text{sinc}(f2*m))
 \end{aligned}$$

Για απλοποίηση της εξίσωσης έχουμε αντικαταστήσει το ($n-a$) με m και τα $w1/\pi$ και $w2/\pi$ με $f1$ και $f2$ αντίστοιχα. Τα φίλτρα και πάλι υπολογίζονται πολλαπλασιάζοντας την ιδανική κρουστική απόκριση με τα παράθυρα. Τέλος, ένας άλλος τρόπος δημιουργίας των φίλτρων είναι μέσω κατάλληλης εντολής MATLAB. Αυτή είναι η

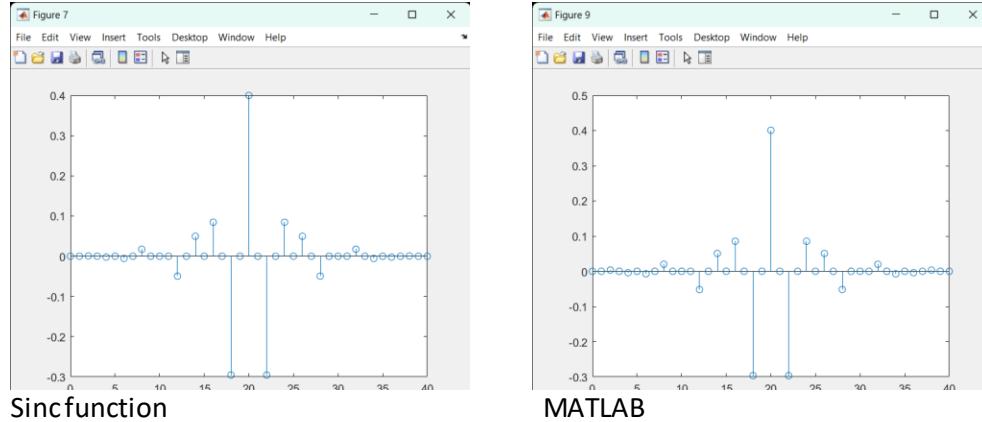
εντολή **fir1**. Παρακάτω φαίνεται ο κώδικας δημιουργίας των φίλτρων με το sinc function καθώς και με την εντολή του MATLAB.

```
synartisi = (-f1*sinc(f1*m)+f2*sinc(f2*m));
filterhann1 = (-f1*sinc(f1*m)+f2*sinc(f2*m)).*Whann;
filterhamming1 = (-f1*sinc(f1*m)+f2*sinc(f2*m)).*Whamming;
filterblackman1 = (-f1*sinc(f1*m2)+f2*sinc(f2*m2)).*Wblackman;

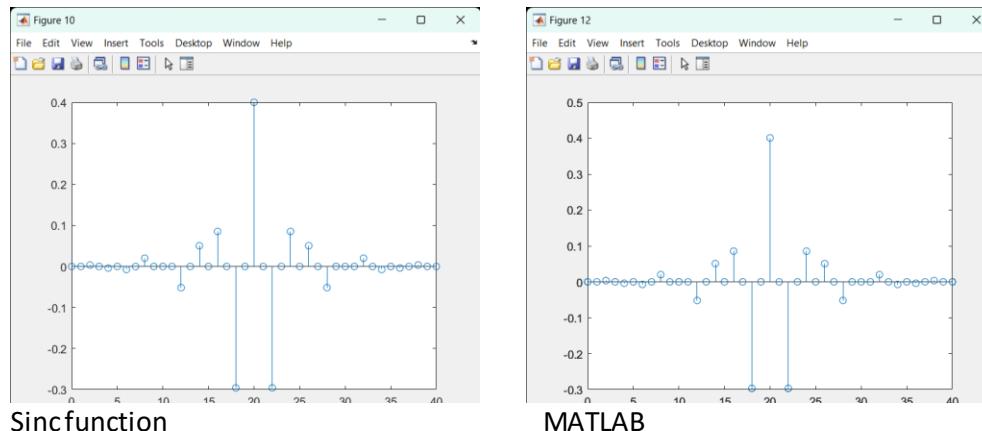
filterhann3 = fir1(Mhann, [f1 f2]);
filterhamming3 = fir1(Mhamming, [f1 f2]);
filterblackman3 = fir1(Mblackman, [f1 f2]);
```

Τέλος, μπορούμε να δούμε τις γραφικές παραστάσεις των φίλτρων για κάθε παράθυρο που προέκυψαν από τους δύο παραπάνω τρόπους.

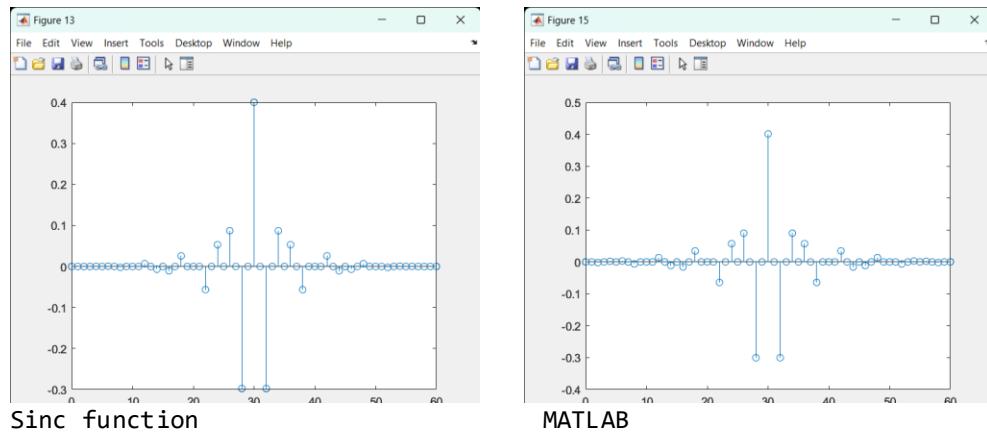
ΠΑΡΑΘΥΡΟ HANN



ΠΑΡΑΘΥΡΟ HAMMING



ΠΑΡΑΘΥΡΟ BLACKMAN

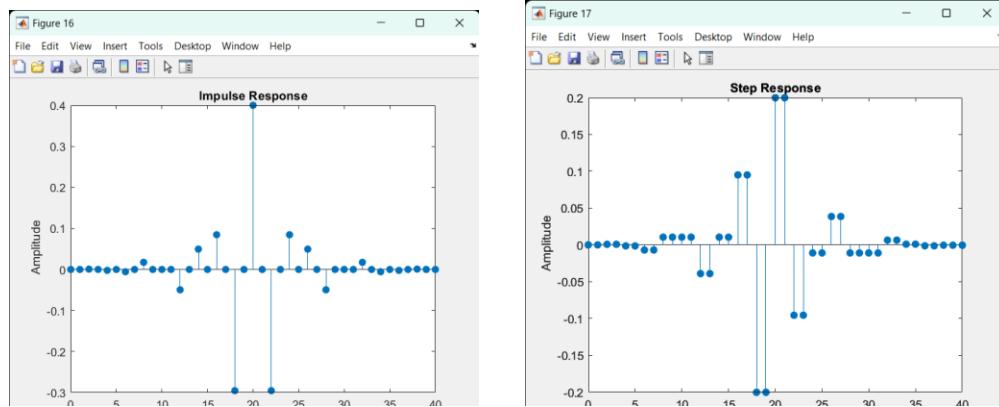


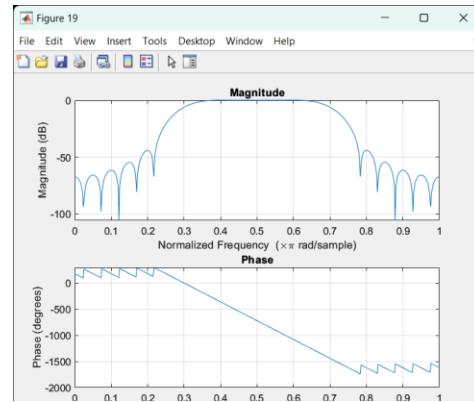
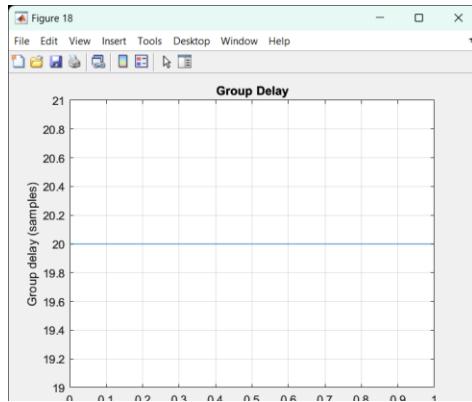
Παρατηρούμε ότι και το πρόβλημα της γραφικής παράστασης έχει λυθεί πλέον καθώς, και ότι οι δύο τρόποι βγάζουν παρόμοιο αποτέλεσμα. Να σημειωθεί ότι και ο 1^{o} τρόπος είχε ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα αν εξαιρέσουμε το συγκεκριμένο σημείο που δεν εμφανιζόταν στην γραφική παράσταση.

• A3

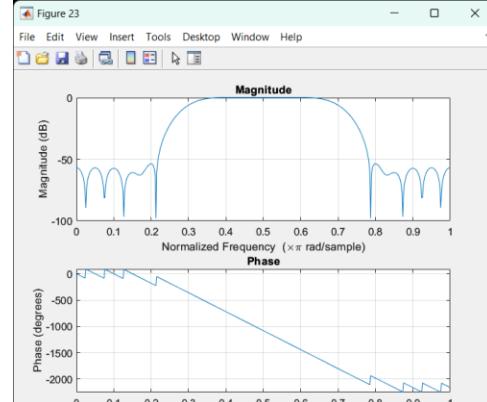
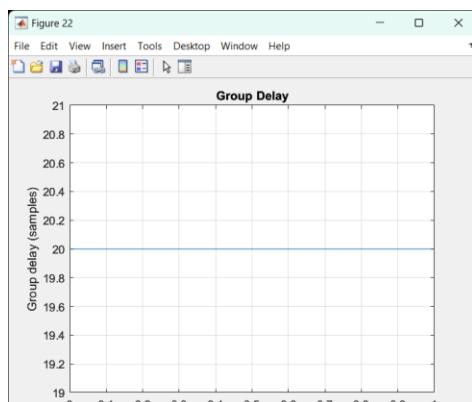
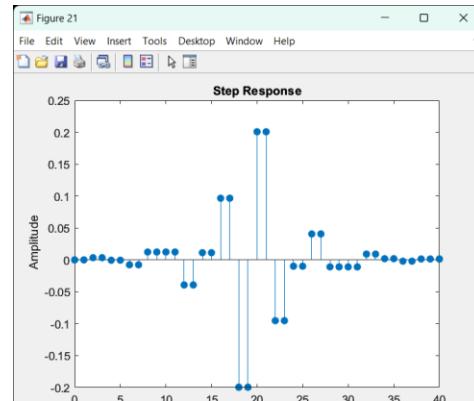
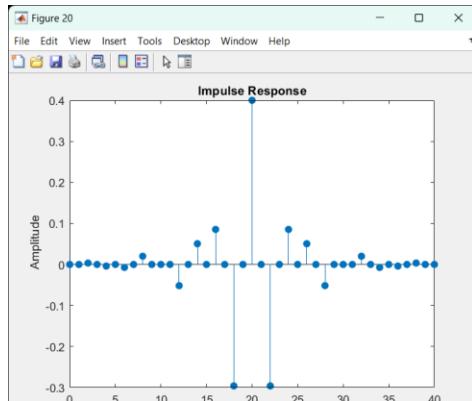
Προκειμένου να δούμε χαρακτηριστικά των φίλτρων όπως την βηματική απόκριση αυτού, το μέτρο της απόκρισης συχνότητάς τους σε λογαριθμική κλίμακα (σε dB), και την καθυστέρηση ομάδας τους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε το εργαλείο `fntool` είτε τις συναρτήσεις `freqz`, `impz`, `stepz`, `grpdelay`. Παρακάτω φαίνονται οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις για κάθε φίλτρο.

ΠΑΡΑΘΥΡΟ HANN

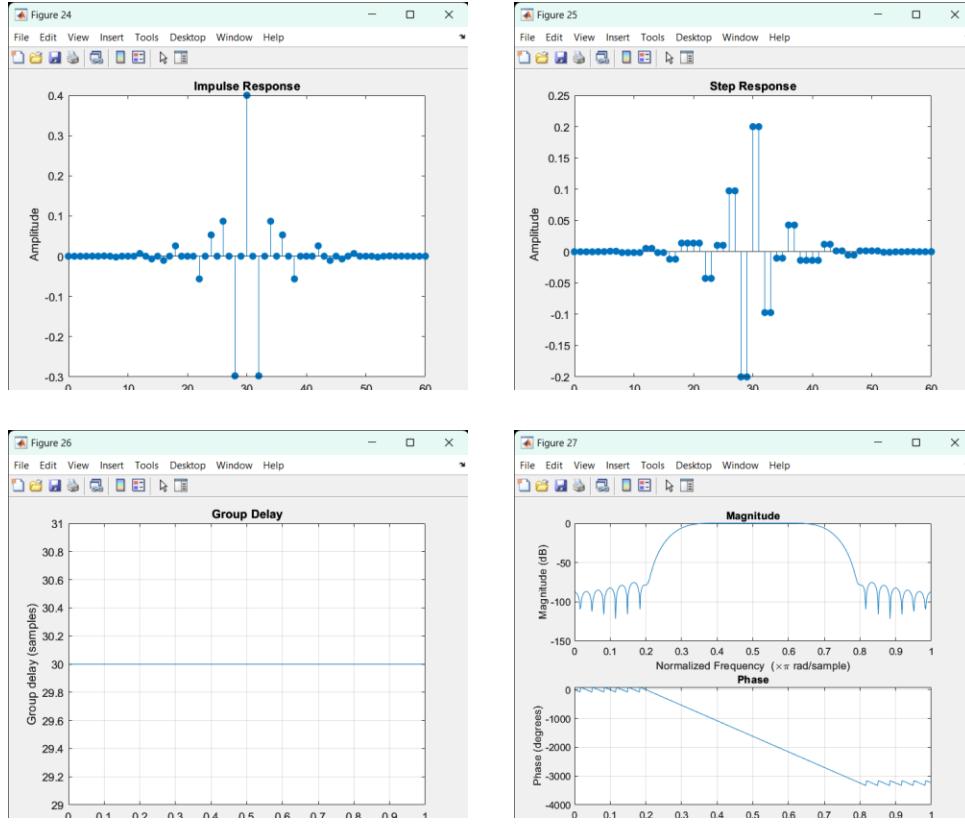




ΠΑΡΑΘΥΡΟ HAMMING



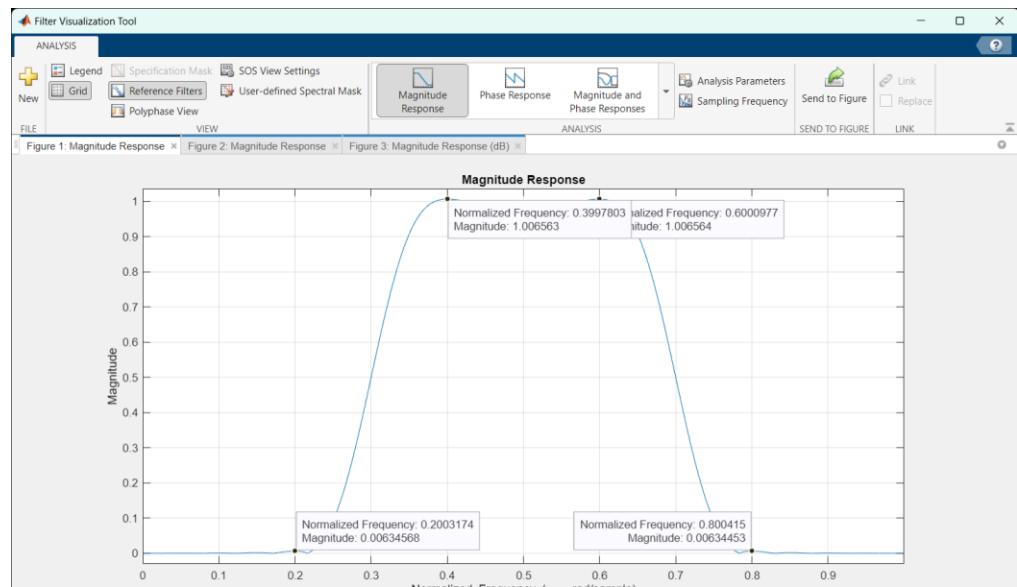
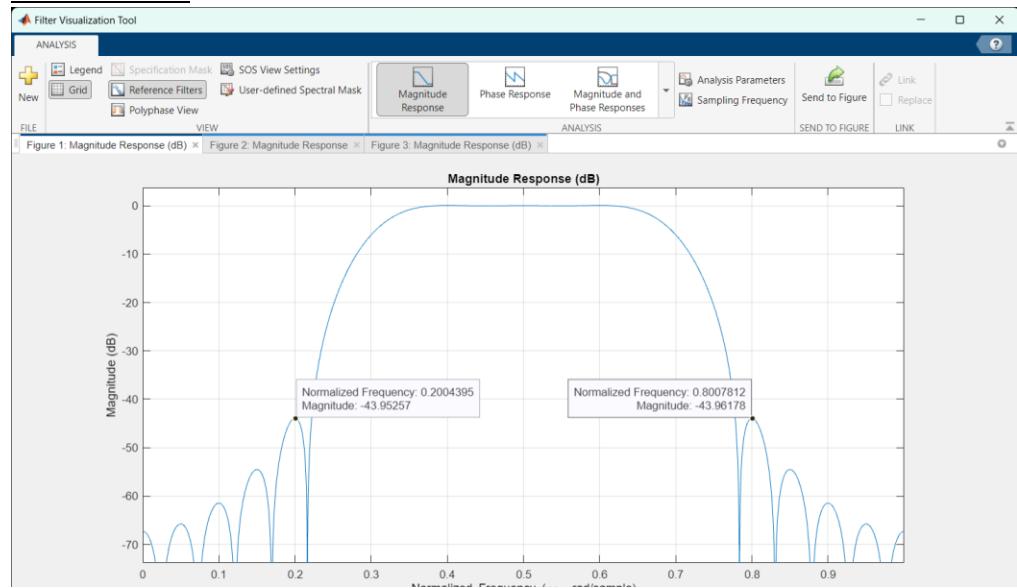
ΠΑΡΑΘΥΡΟ BLACKMAN



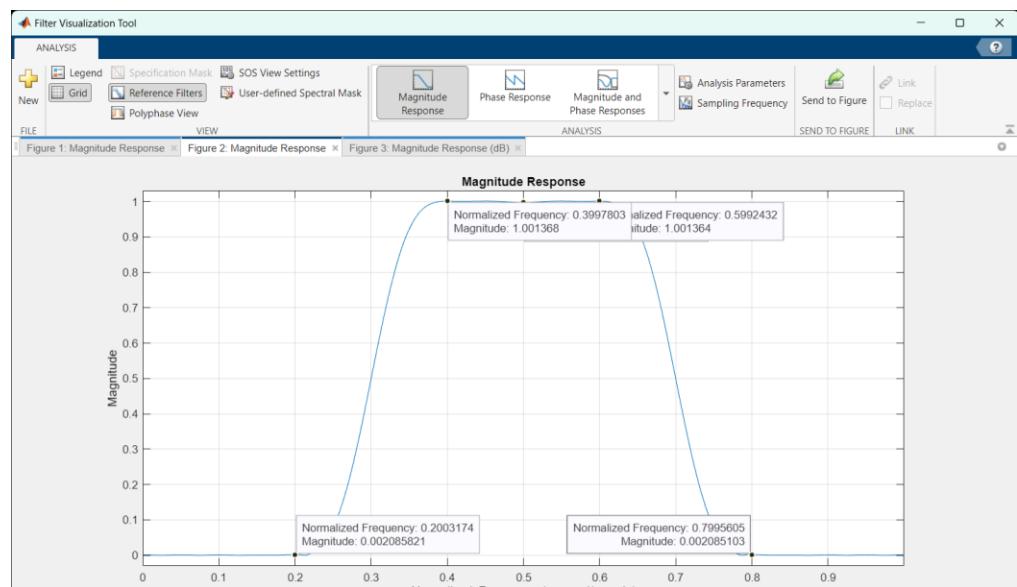
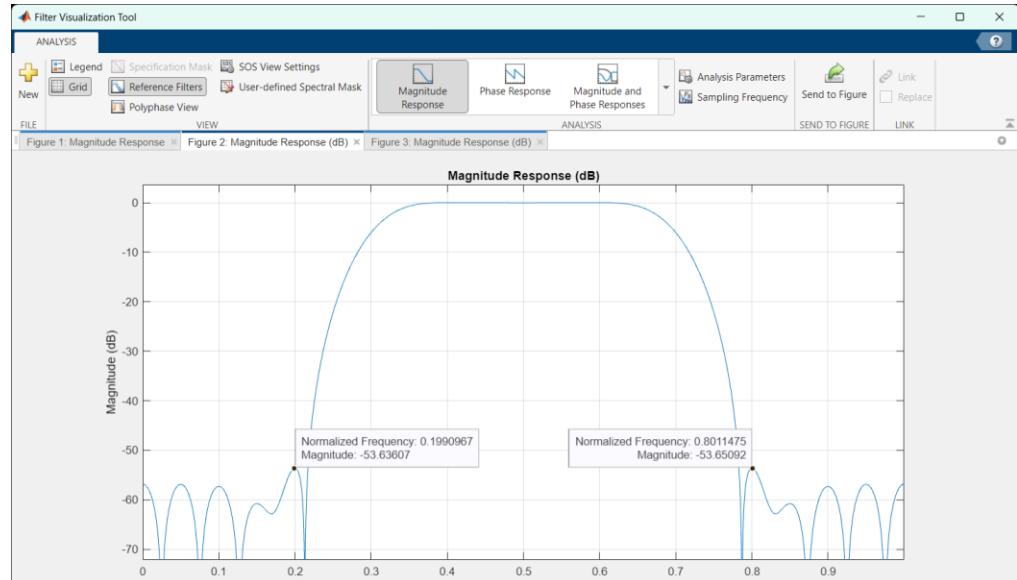
• A4

Για τον υπολογισμό του δ και του $20\log_{10}(\delta)$ αρκεί να πάμε στα αντίστοιχα διαγράμματα και να δούμε τις τιμές. Παρακάτω φαίνονται αυτά τα δεδομένα όπως λήφθηκαν από τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

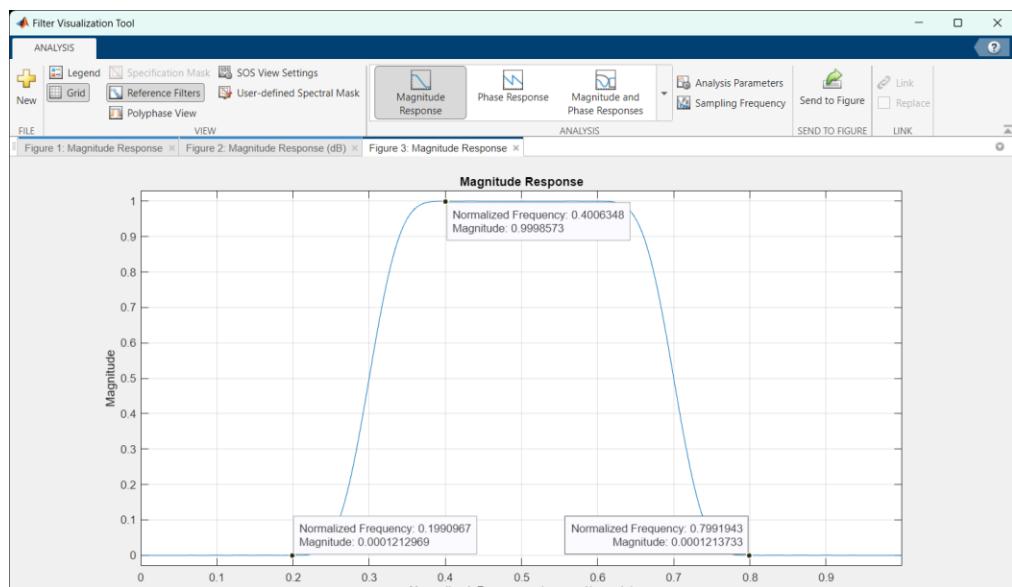
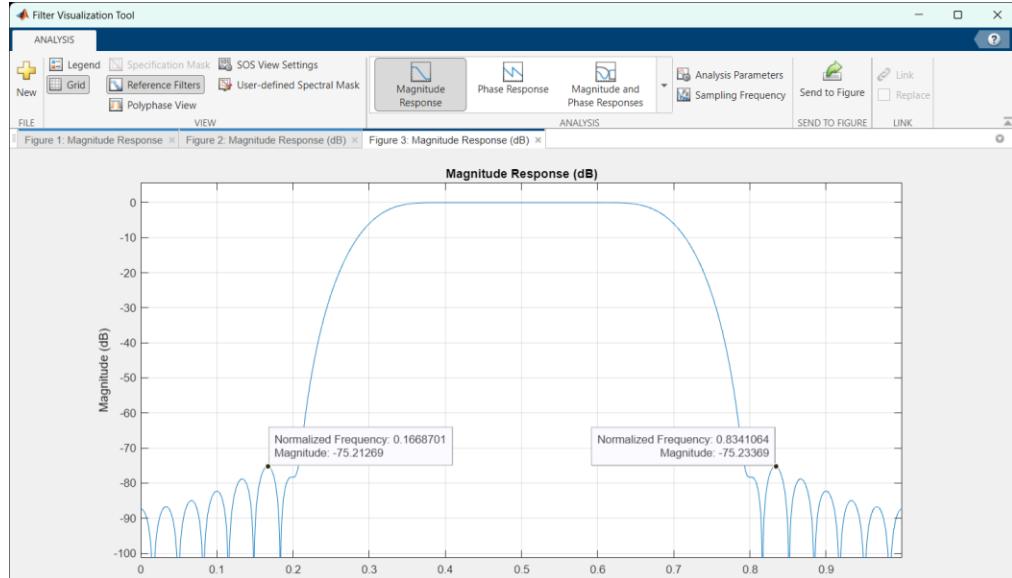
ΦΙΛΤΡΟ HANN



ΦΙΛΤΡΟ HAMMING



ΦΙΛΤΡΟ BLACKMAN

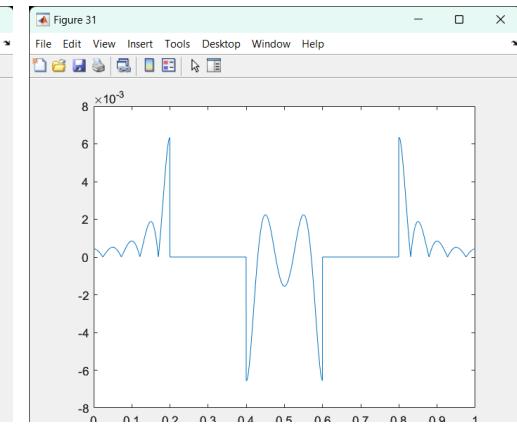
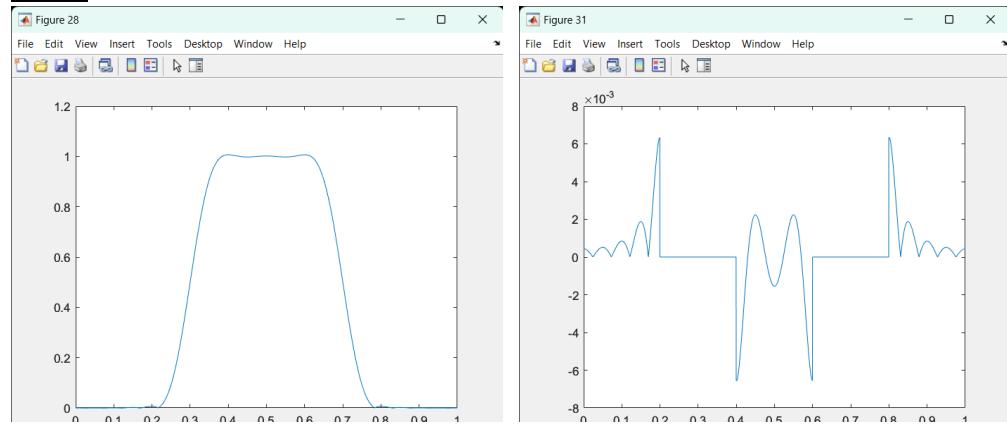


Βλέπουμε ότι οι τιμές των δ είναι σχεδόν ίδιες με αυτές του πίνακα του βιβλίου. Επίσης, για τον έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων μπορούμε εφαρμόζοντας τον τύπο $20\log_{10}(\delta)$ να δούμε ότι η τιμή του δ και η λογαριθμική τιμή του δ συμβαδίζουν για το ίδιο φίλτρο. Παρακάτω υπάρχει πίνακας με τις αναλυτικές μετρήσεις των δ .

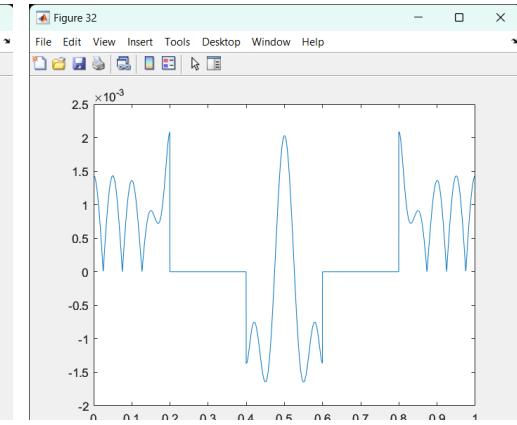
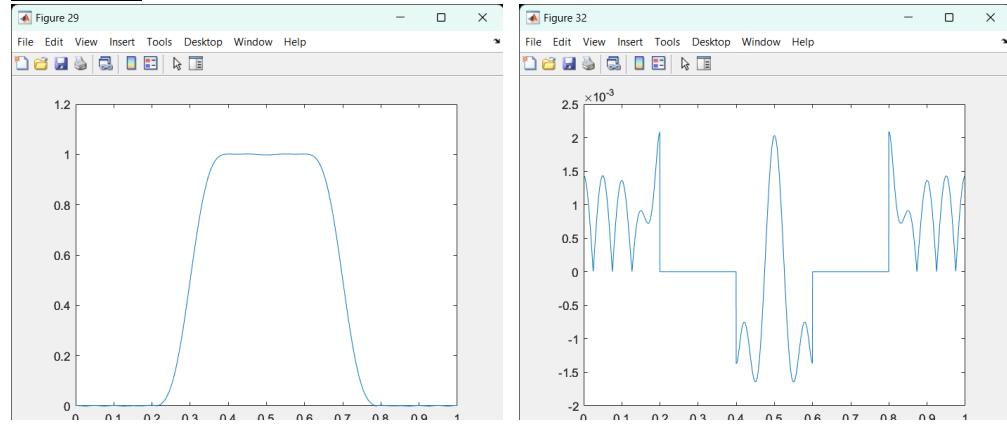
| HANN | | HAMMING | | BLACKMAN | |
|----------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|-----------------------|
| δ | $20\log_{10}(\delta)$ | δ | $20\log_{10}(\delta)$ | δ | $20\log_{10}(\delta)$ |
| 0.0065 | -43.96 | 0.002 | -53.65 | 0.00015 | -75.2 |

Προφανώς υπάρχει ένα περιθώριο λάθους μιας και οι μετρήσεις δεν έχουν γίνει με απόλυτη ακρίβεια. Για την σχεδίαση της συνάρτησης λάθους αρχικά υπολογίστηκε ο DFT της κρουστικής απόκρισης των φίλτρων με κατάλληλο μήκος προκειμένου να πάρουμε την απόκριση συχνότητάς τους. Στην συνέχεια, υπολογίστηκε το μέτρο αυτού του μεγέθους καθώς αυτό χρειάζεται στην εξίσωση του σφάλματος. Ακολουθούν εικόνες με την απόκριση συχνότητας του κάθε φίλτρου καθώς και την συνάρτηση σφάλματος για όλα τα φίλτρα.

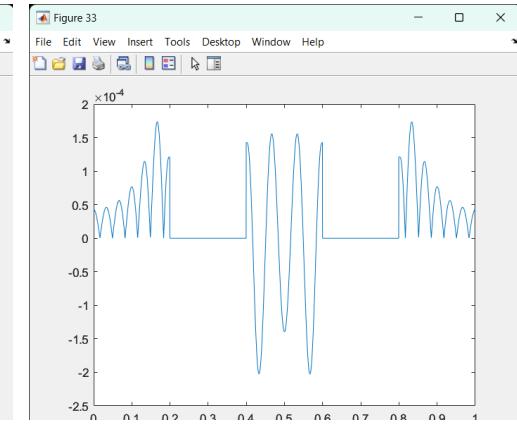
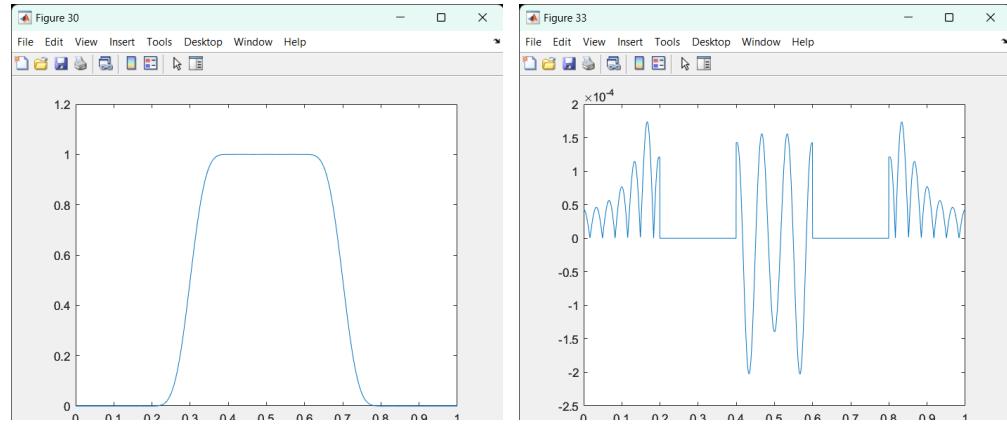
HANN



HAMMING



BLACKMAN



Συγκρίνοντας τα παράθυρα βάσει των αποτελεσμάτων μας και βάσει των στοιχείων του πίνακα του βιβλίου, θα λέγαμε ότι το ορθογώνιο παράθυρο έχει τον στενότερο κύριο λοβό και συνεπώς για δοσμένο μήκος θα πρέπει να αποφέρει τις ισχυρότερες μεταπτώσεις του $H(e^{j\omega})$ στην ασυνέχεια του $H_d(e^{j\omega})$. Παρ' όλα αυτά, ο πρώτος πλευρικός λοβός είναι μόνο 13dB κάτω από την κύρια κορυφή με αποτέλεσμα ταλαντώσεις του $H(e^{j\omega})$ σημαντικού μεγέθους γύρω από τις ασυνέχειες του $H_d(e^{j\omega})$. Με ομαλή σταδιακή μείωση του παραθύρου γύρω από το 0 στα παράθυρα Hann, Hamming και Blackman οι πλευρικοί λοβοί μειώνονται αισθητά κατά πλάτος. Οστόσο, το καταβληθέν τίμημα είναι ένας πολύ εντονότερος κύριος λοβός και συνεπώς ευρύτερες μεταβάσεις στις ασυνέχειες του $H_d(e^{j\omega})$.

Μέρος Β – Ανάλυση σημάτων με DFT

- B1

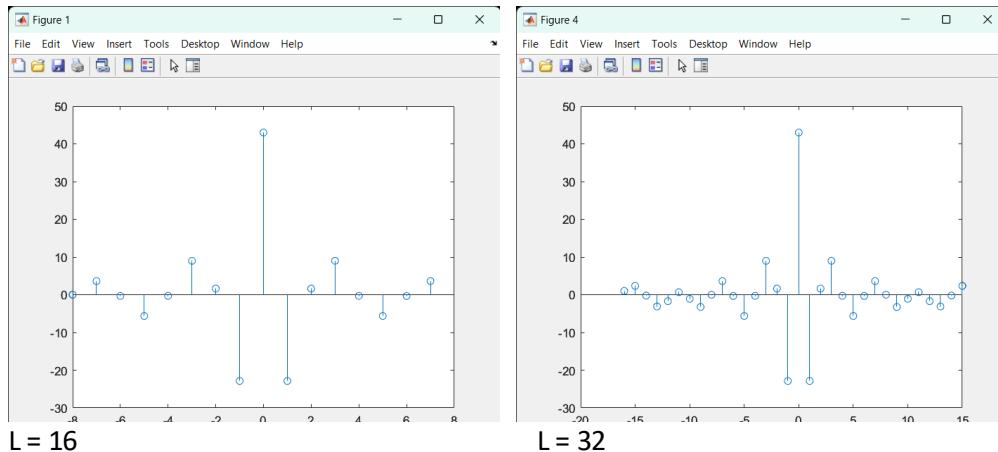
Αρχικά εκφράζουμε το σήμα μας. Ο πρώτος όρος μπορεί να εκφραστεί με την χρήσειτου sinc function οπότε τελικά παίρνουμε:

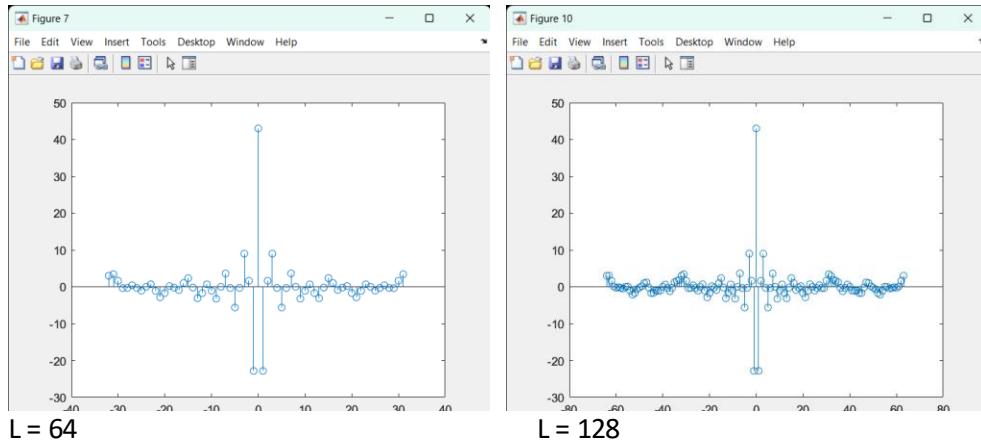
$$x = -40*sinc(n/2) + cos(pi*n/16) + cos(pi*n/8) + cos(pi*n/4);$$

Σε αυτόν τον τύπο δεν πρέπει να ξεχάσουμε να προσθέσουμε το 80δ[η]. Τελικά ο τύπος που προκύπτει είναι:

$$x = -40*sinc(n/2) + cos(pi*n/16) + cos(pi*n/8) + cos(pi*n/4); \\ x(L/2+1) = x(L/2+1) + 80;$$

Τα σήματα που έχουν προκύψει για κάθε L φαίνονται παρακάτω.





Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το L με τόση μεγαλύτερη ευκρίνεια σχεδιάζεται το σήμα μας.

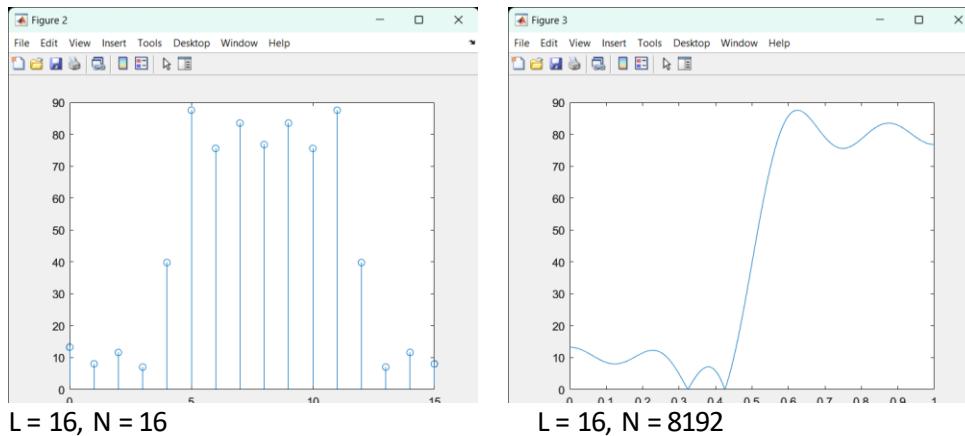
• B2

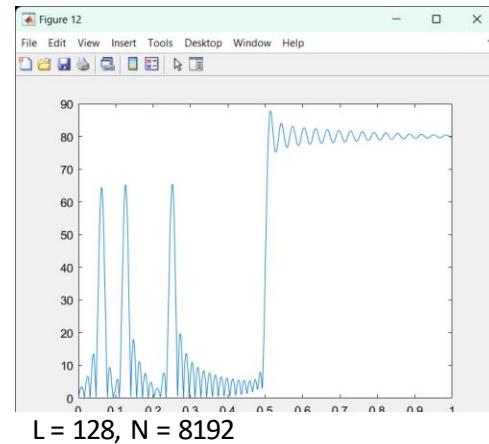
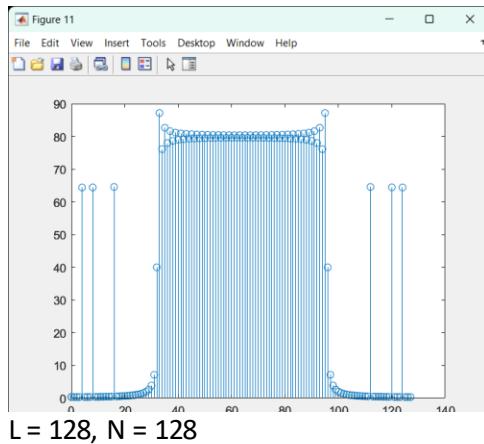
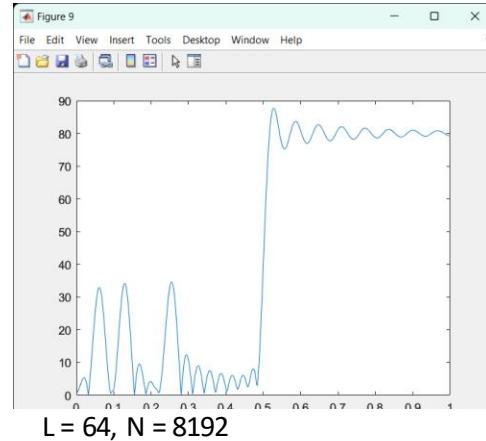
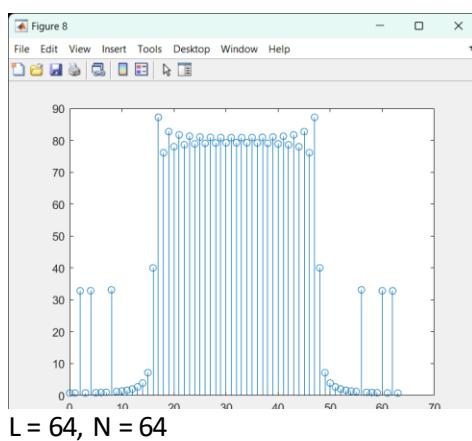
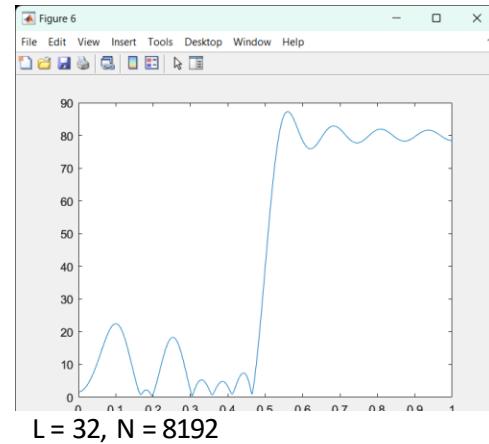
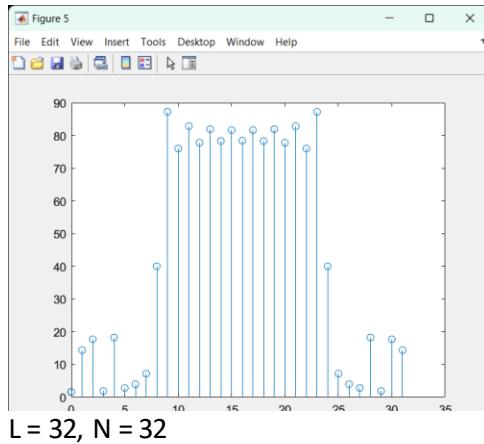
Ο υπολογισμός των DFTs γίνεται πολύ εύκολα με συγκεκριμένη εντολή του MATLAB. Όσον αφορά την απεικόνιση με `plot` για μεγάλο $N = 8192$, εφόσον θέλουμε να απεικονίσουμε μέχρι στο διάστημα $[0, \pi]$ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μόνο τις τιμές/δεδομένα του σήματος από το 0 ως το $N/2+1$, δηλαδή τις μισές. Τέλος ρυθμίζουμε το βήμα κατάλληλα ώστε να έχει το ίδιο μέγεθος με το σήμα μας. Ο κώδικας για τις παραπάνω λειτουργίες φαίνεται παρακάτω.

```
X1 = abs(fft(x,L));
X2 = abs(fft(x,N));
```

```
figure(2); stem([0:1:L-1],X1);
figure(3); plot([0:1/(N/2):1],X2(1:N/2+1));
```

Αυτός είναι ίδιος για κάθε διαφορετικό L . Παρακάτω φαίνονται και οι γραφικές παραστάσεις των DFTs για τα διάφορα L και N .





• B3

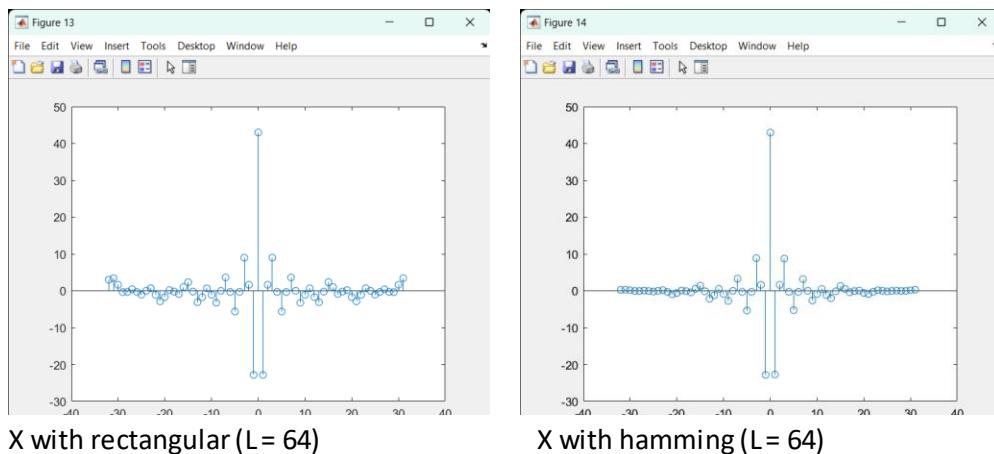
Γενικά προτιμούμε να παίρνουμε σχετικά μεγάλο μήκος παραθύρου L για καλύτερο resolution του σήματος. Επιπλέον, πιο επιθυμητό είναι ένα μεγάλο μήκος N του μετασχηματισμού για την καλύτερη δυνατή αποτύπωση του DFT. Μεγαλύτερα N παρέχουν καλύτερη δειγματοληψία.

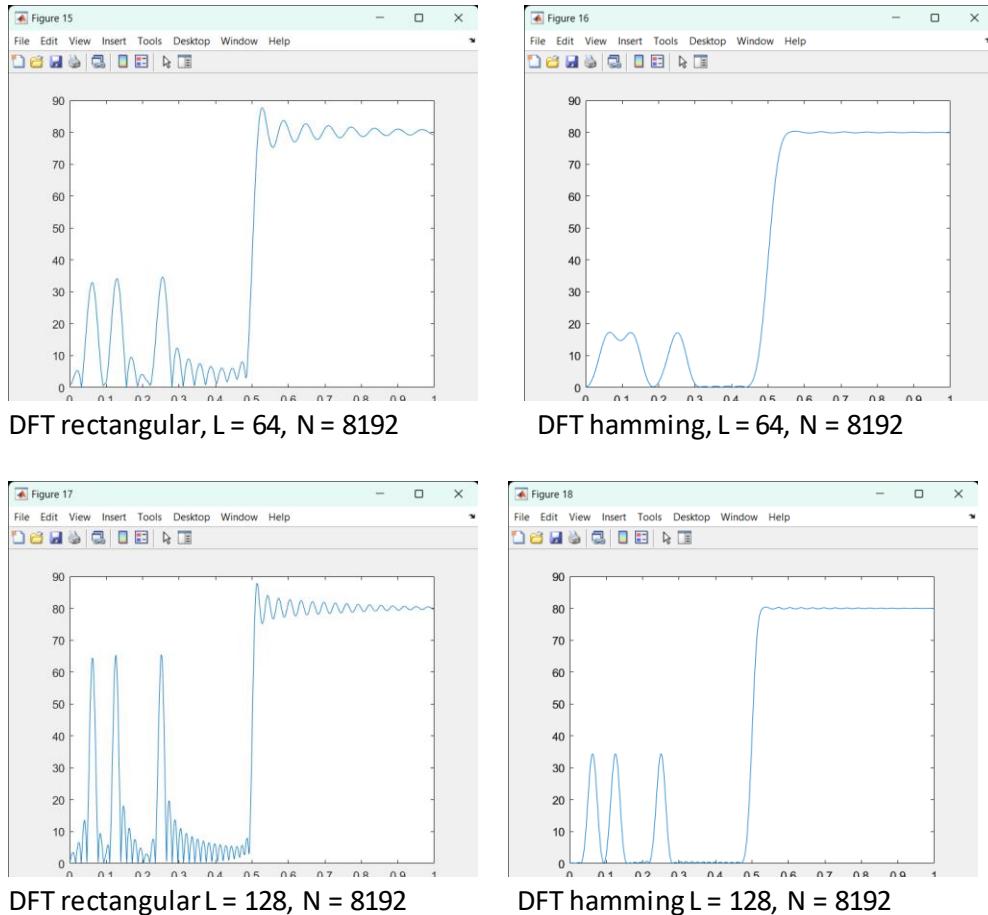
Τα παράθυρα επηρεάζουν το αποτέλεσμα στο πεδίο της συχνότητας όσον αφορά την ευκρίνεια (resolution), λόγω του εύρους του κύριου λοβού τους και την “διαρροή” (leakage), λόγω του ύψους των δευτερευόντων λοβών τους. Για ορθογώνιο παράθυρο μήκους L , η ευκρίνεια είναι $4\pi/L$.

Πιο συγκεκριμένα, βλέπουμε στις παραπάνω εικόνες ότι όντως οι εικόνες που έχουν σχεδιαστεί με μεγαλύτερο N είναι πολύ πιο ευκρινείς από τις αντίστοιχες με μικρότερο. Επίσης, παρατηρούμε ότι όσο μικρότερο είναι το μήκος του παραθύρου L , τόσο μικρότερο είναι το resolution του σήματος. Όντως, στις περιπτώσεις όπου το $L = 16$ & $L = 32$ δεν φαίνονται τα σημεία στην συχνότητα που προκύπτουν από τα \cos του σήματος μας. Αντίθετα, στις περιπτώσεις όπου $L = 64$ & $L = 128$ βλέπουμε ξεκάθαρα τα αντίστοιχα σημεία λόγω καλύτερου resolution. Όσον αφορά παρολαυτα το N σε όλες τις περιπτώσεις πλην της τελευταίας δεν είναι επαρκές (είναι μικρό) και δεν καταφέρνει να αποτυπώσει τα δείγματα στις σωστές συχνότητές τους. Τέλος, μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε την ύπαρξη μεγάλου leakage λόγω του ύψους των δευτερευόντων λοβών του ορθογώνιου παραθύρου. Αυτός είναι και ένας λόγος που γενικά δεν προτιμούμε το ορθογώνιο παράθυρο.

• B4

Η διαδικασία σχεδίασης του σήματος είναι η ίδια με παραπάνω. Αυτή την φορά δεν ξεχνάμε να δημιουργήσουμε το παράθυρο Hamming και να το μετατοπίσουμε κατάλληλα. Ο κώδικας παραλείπεται λόγω ομοιότητας με αυτόν από προηγούμενα ερωτήματα που έχει ήδη αναλυθεί. Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα του συγκεκριμένου ερωτήματος.





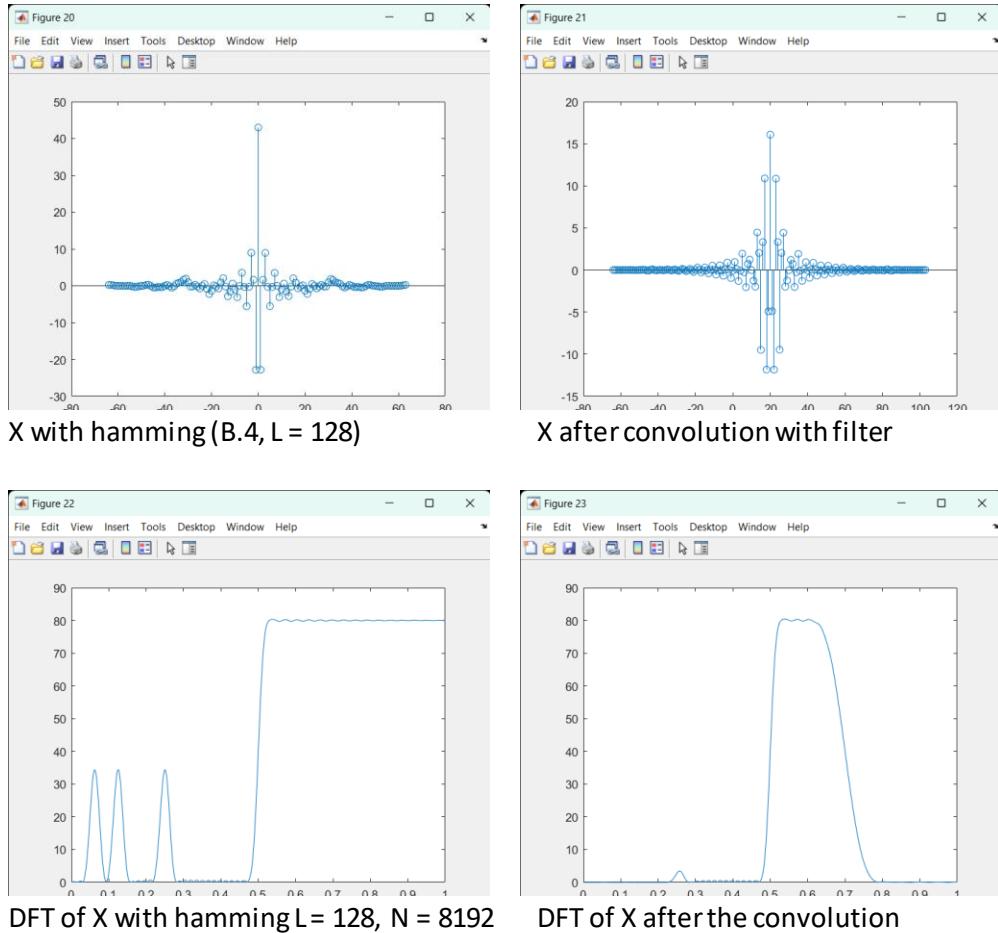
Το ορθογώνιο παράθυρο έχει καλύτερο resolution από το Hamming (2x). Η ευκρίνεια του παραθύρου hamming ισούται με $8\pi/(L-1)$. Το παράθυρο Hamming έχει μικρότερο leakage από το ορθογώνιο.

Αυτά τα αποτελέσματα επιβεβαιώνονται και από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις. Συγκεκριμένα, οι DFTs που έχουν σχεδιαστεί με hamming βλέπουμε ότι έχουν λιγότερο θόρυβο σε σχέση με τους αντίστοιχους του ορθογωνίου παραθύρου. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του μικρότερου leakage λόγω του μικρότερου ύψους των δευτερεύοντων λοβών του παραθύρου hamming. Τέλος, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε το καλύτερο resolution του ορθογωνίου παραθύρου. Για L=64 βλέπουμε ξεκάθαρα τα σημεία του DFT ότι έχουν ευκρινώς αποτυπωθεί στο ορθογώνιο παράθυρο ενώ στο hamming είναι συγκεχυμένα.

• B5

Μιας και ασχοληθήκαμε με Hamming σε αυτό το μέρος θα προτιμήσουμε το φίλτρο που προέκυψε από το παράθυρο hamming από το πρώτο ερώτημα. Εφόσον το σήμα περνάει ως είσοδος στο φίλτρο, αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε συνέλιξη στο πεδίο του διακριτού χρόνου. Η συνέλιξη μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με

κατάλληλη εντολή του MATLAB. Επίσης, σημαντικό είναι να υπολογίσουμε σωστά το μήκος του σήματος που έχει προκύψει από την συνέλξη για να μπορέσουμε να το απεικονίσουμε. Ο κώδικας παραλείπεται καθώς και η δημιουργία το φίλτρου και η σχεδίαση των DFTs έχουν εξηγηθεί σε προηγούμενα ερωτήματα. Παρακάτω φαίνονται αποτελέσματα του συγκεκριμένου ερωτήματος.



Γνωρίζουμε ότι το φίλτρο είναι ζωνοπερατό και έχει ζώνη διάβασης στις συχνότητες [0,4, 0,6]. Επειδή όμως η μετάβαση από την ζώνη αποκοπής στην ζώνη διάβασης δεν γίνεται ακαριαία, μέτρο (διάφορο του 0) υπάρχει και στις συχνότητες (0,2 0,4) ή (0,6 0,8). Το αποτέλεσμα επομένως δεν μας εκπλήσσει. Είναι λογικό το φίλτρο να «κόβει» τις συχνότητες στις περιοχές αποκοπής και να επιτρέπει τις συχνότητες στην ζώνη διάβασης. Επίσης στην ζώνη διάβασης [0,4 0,6] που το μέτρο του φίλτρου τείνει στο 1, το φίλτρο περνάει αυτούσιο το σήμα. Αυτό φαίνεται εύκολα και στην γραφική παράσταση. Αντίθετα, στις «περιοχές μετάβασης» που μεταξύ των ζωνών διάβασης και αποκοπής βλέπουμε μια αλλοίωση του σήματος μέχρι αυτό να μηδενιστεί ή να περάσει από το φίλτρο αντίστοιχα (ζώνη αποκοπής ζώνη διάβασης). Παρακάτω φαίνεται και η γραφική παράσταση με το μέτρο του φίλτρου για την καλύτερη κατανόηση της εξήγησης.

