

FACHHOCHSCHULE KARLSRUHE -  
TECHNIK UND WIRTSCHAFT

SEMINARARBEIT

**Harmonische Lage**

*Florian Neuweiler*

betreut von  
Prof. Dr. rer. nat. Frank Schaefer

30. November 2016

## INHALTSVERZEICHNIS

---

### Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2 Die Harmonischen Lage</b>	<b>3</b>
2.1 Definition . . . . .	4
2.2 Die harmonische 13er Konfiguration . . . . .	6
2.3 Erweiterung auf einen unendlich entfernten Punkt . . . . .	9
<b>3 Harmonische Lage rechnerisch</b>	<b>11</b>
3.1 Teilverhältnisse . . . . .	11
3.2 Das Doppelverhältnis . . . . .	12
3.3 Harmonische Lage und Doppelverhältnis . . . . .	13
3.4 Das Doppelverhältnis von vier Geraden . . . . .	14
<b>4 Harmonisches Mittel und harmonische Folge</b>	<b>16</b>
4.1 Harmonisches Mittel . . . . .	16
4.2 Harmonische Folge . . . . .	18
<b>5 Harmonische Lage und Goldener Schnitt</b>	<b>20</b>
<b>6 Harmonische Lage in der Gestaltung</b>	<b>22</b>
6.1 Harmonie in der Malerei . . . . .	22
6.2 Harmonische Lage in der heutigen Gestaltung . . . . .	25
6.2.1 Satzspiegel . . . . .	25
6.2.2 Gestaltungsraster . . . . .	27
<b>7 Zusammenfassung</b>	<b>29</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>31</b>

---

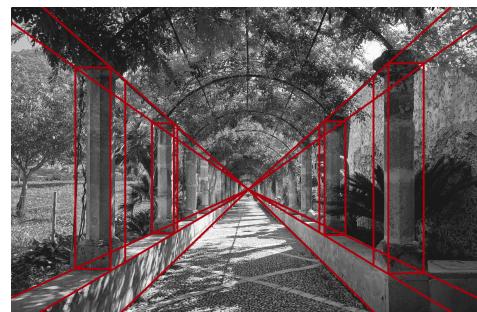
# 1 Einleitung

Harmonie... ein Wort, mit dem wir Menschen das ausgewogene und ausgeglichene Zusammenspiel von Tönen, Verhältnissen und Maßen verstehen. Hauptsächlich verwenden wir erst dann den Begriff „Harmonie“ oder bezeichnen etwas „harmonisch“, wenn wir von einer Regelmäßigkeit in der Anordnung einzelner Objekte sprechen, zu der wir zusätzlich einen übergeordneten Sinn oder Sachverhalt vermuten.

Betrachten wir beispielsweise einen Säulengang wie in Abbildung 1, so würden wir die Anordnung der Säulen zum Horizont als „harmonisch“ bezeichnen. Dabei definiert die Anordnung der Säulen in unserem Bild ein bestimmtes Maß bzw. Netz, mit dem wir weitere Säulen harmonisch anreihen, oder zwischen zwei bereits vorhandenen Säulen platzieren können.



(a) Original



(b) Mit Netz

Abbildung 1: Ein harmonischer Säulengang

Dabei fällt uns auf, wenn wir eine weitere Säule platzieren und sich demselben Maß-System wie zuvor unterordnet, dass diese die Harmonie des Bildes nicht durchbricht. Dieses Maß wird in der Mathematik als harmonische Lage bzw. harmonische Folge von Punkten genannt und ist das Thema der vorliegenden Arbeit.

I. Folgenden wird die harmonische Lage von Punkten und Geraden zuerst über ein geometrisches Beispiel eingeführt und später der rechnerische Zugang mithilfe des Teil- und Doppelverhältnisses beschrieben. Anschließend erweitern wir die harmonische Lage auf weitere mathematische Gebiete wie das harmonische Mittel, die harmonische Folge, sowie dem Goldenen Schnitt. Zuletzt wird die Anwendung der harmonischen Lage in der Malerei und heutigen Gestaltungsrichtlinien genauer betrachtet.

---

## 2 Die Harmonischen Lage

„Harmonisch“ ist ein großes Wort; es bedeutet hier: Wenn die inneren und die äußereren Verhältnisse im Einklang sind. Es lohnt sich darüber nachzusinnen. [7, S. 53].

Tatsächlich handelt es sich bei der harmonischen Lage von Punkten und Geraden um einer der wichtigsten Begriffe der projektiven Geometrie. Ähnlich wie der Tastsinn des physischen Raumes bildet die harmonische Lage ein natürliches Maß für Bilder und dem Sehsinn. Zudem handelt es sich bei der harmonischen Lage um eine Invariante der projektiven Geometrie. Demnach bleibt die harmonische Lage bei allen projektiven Operationen erhalten, dazu aber später mehr. Doch was genau ist die harmonische Lage wirklich? Um dies zu veranschaulichen erläutern wir die harmonische Lage anhand eines Beispiels (Abb. 2):

Betrachten wir eine Gerade  $g$ , auf der sich drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $D$  befinden, die willkürlich auf dieser Geraden positioniert wurden. Aus diesen drei Punkten auf  $g$  lässt sich nun eindeutig ein weiterer „harmonischer“ Punkt  $C$  konstruieren, der ebenso wie  $A$ ,  $B$  und  $D$  auf  $g$  liegt. Um diesen Punkt  $C$  geometrisch zu konstruieren wird wie folgt vorgegangen: Zunächst werden von jedem der Punkte  $A$ ,  $B$  und  $D$  aus eine Gerade gezogen. Diese drei Geraden haben drei Schnittpunkte. Nun werden zwei weitere Geraden gezogen: die eine führt durch den Punkt  $A$  und den Schnittpunkt der zwei Geraden durch  $B$  und  $D$ , die andere durch den Punkt  $B$  und den Schnittpunkt der zwei Geraden durch  $A$  und  $D$  (hier gestrichelt dargestellt). Durch den Schnittpunkt dieser zwei soeben gezeichneten Geraden wird eine weitere Gerade gebildet, die auch durch den Schnittpunkt der zwei Geraden durch  $A$  und  $B$  geht. Der Punkt dieser Geraden, der auch auf der Geraden

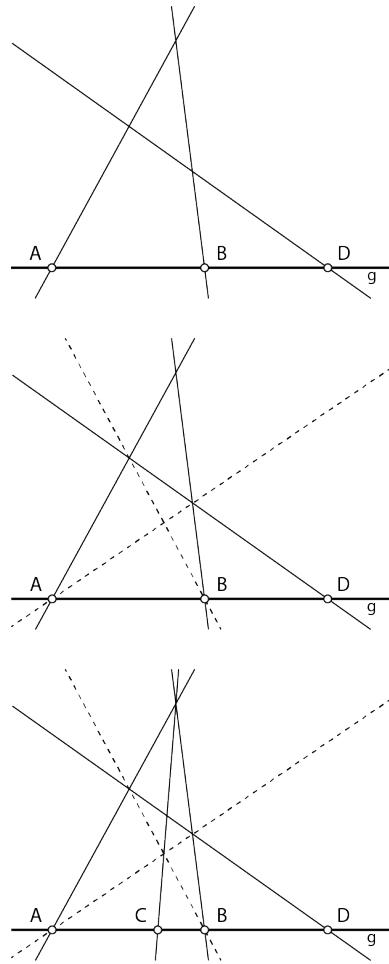


Abbildung 2: Geometrische Konstruktion der harmonischen Lage

## 2.1 Definition

---

$g$  liegt, ist der von uns gesuchte Punkt  $C$ . Diese Konstruktion wird auch harmonische Spiegelung von  $D$  an  $A$  und  $B$  genannt [vgl. 2, S. 34]. Egal, wie die Geraden durch  $A$ ,  $B$  und  $D$  gezogen wurden, es lässt sich immer wieder denselben Punkt  $C$ . In anderen Worten: Der vierte Punkt  $C$  ist unabhängig von der Wahl der drei Geraden durch  $A$ ,  $B$  und  $D$  (Abb. 3).

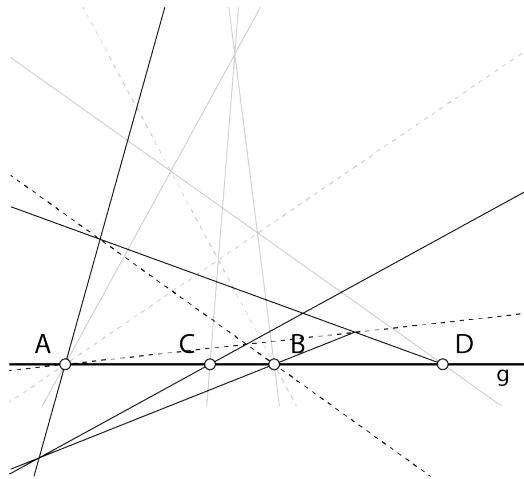


Abbildung 3: Eine andere Wahl der Geraden

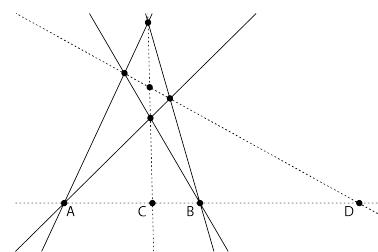
### 2.1 Definition

Anhand des oberen Beispiels lässt sich nun im allgemeinen die harmonische Lage definieren.

#### Definition von vier Punkten:

Zwei Punktpaare  $(A, B)$ ,  $(C, D)$  auf einer Geraden  $g$  „trennen sich harmonisch“, wenn sie so liegen wie die Ecken und die Nebenecken eines vollständigen Vierseits in einer Nebenseite.

Dabei versteht man unter einem vollständigen Vierseit eine Figur bestehend aus den Geraden bzw. Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$ , den sechs Ecken, die jeweils die Schnittpunkte von je zwei Seiten sind, den drei Nebenseiten, die jene Ecken verbinden, die nicht auf den Hauptseiten liegen, sowie drei Nebenecken (gegeben durch die Schnittpunkte der Nebenseiten untereinander).



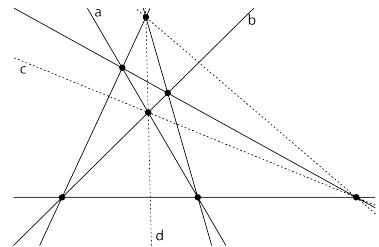
## 2.1 Definition

---

### Definition von vier Geraden:

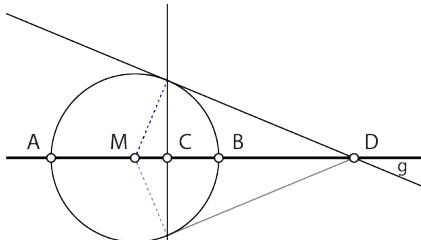
Zwei Geradenpaare  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  in einem Punkt  $P$  „trennen sich harmonisch“, wenn sie so liegen wie die Seiten und die Nebenseiten eines vollständigen Vierecks in einer Nebenecke.

Dabei versteht man unter einem vollständigen Viereck eine Figur bestehend aus den Ecken  $A, B, C$  und  $D$  (von denen nicht drei auf einer Geraden liegen), den sechs Seiten durch jeweils zwei der Ecken, den drei Nebenecken, die als Schnittpunkte dieser Seiten hinzukommen (gestrichelt dargestellt), sowie den Nebenseiten (gegeben durch die Nebenecken).

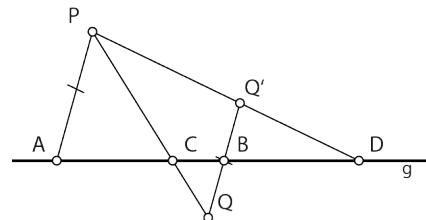


Die Bezeichnungen „trennen sich harmonisch“ ist gleichbedeutend zu den Aussagen wie „liegen harmonisch zueinander“, „sind in Harmonischer Lage“ oder „bilden einen harmonischen Wurf“.

Wir können zur Konstruktion vierer harmonischer Punkte wie in unserem Beispiel vorgehen. Es existieren aber noch andere Möglichkeiten zur Konstruktion des vierten harmonischen Punktes:



(a) Thaleskreis



(b) Strahlensatz

Abbildung 4: Bestimmung des 4. harmonischen Punktes  $D$

## 2.2 Die harmonische 13er Konfiguration

---

### 2.2 Die harmonische 13er Konfiguration

Wie wir schon in der Definition der harmonischen Lage gesehen haben, können sowohl Punkte als auch Geraden harmonisch zueinander liegen. Da in den Definitionen sowohl von vollständigen Vierseiten und Vierecke die Rede war und sich diese geometrischen Grundgebilde aufeinander inzidieren lassen, können wir daraus eine harmonische Grundfigur, die sogenannte „harmonische 13er Konfiguration“ bauen. Da wir sowohl ein Vierseit als auch ein Viereck diese Konfiguration beinhaltet, benötigen wir für die Konstruktion der Konfiguration insgesamt 13 Geraden und 13 Punkte - womit auch die Frage nach dem Namen geklärt wäre. Diese 13 Punkte und Geraden bilden sich zusammen

aus den 4 Seiten und 6 Ecken des vollständigen Vierseits,  
den 6 Seiten und 4 Ecken des vollständigen Vierecks und  
den 3 Seiten und Ecken des gemeinsamen Nebendreiecks/-seits.

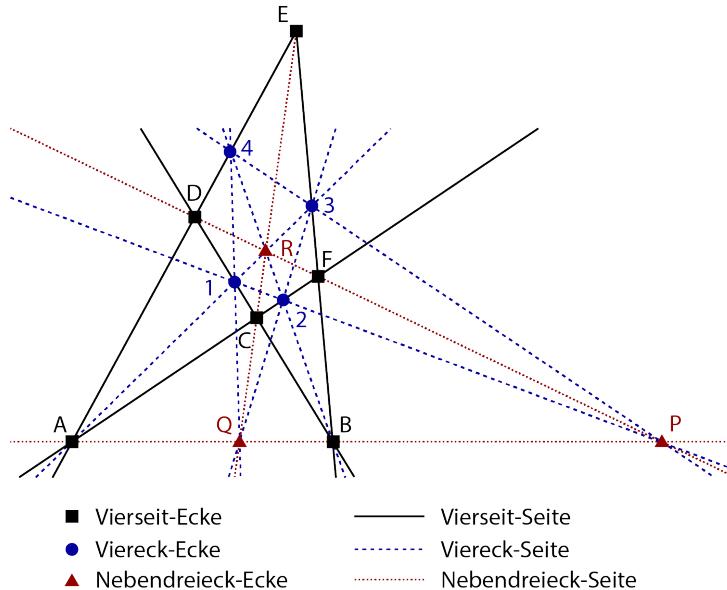


Abbildung 5: Beispiel einer harmonischen 13er Konfiguration

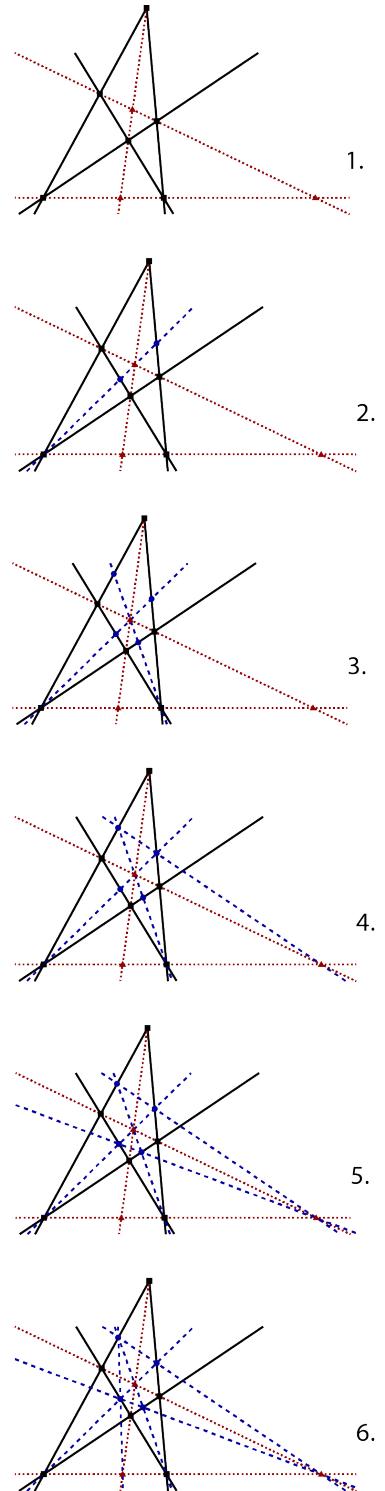
Für die Konstruktion der harmonischen 13er Konfiguration wäre es am einfachsten, mit einem vollständigen Viereck bzw. Vierseit zu beginnen und auf dieser die weiteren Punkte und Geraden aufzubauen.

## 2.2 Die harmonische 13er Konfiguration

---

In diesem Fall entscheiden wir uns für ein vollständiges Vierseit als Grundkonstrukt. Darin wollen wir nun die Punkte und Geraden eines vollständigen Vierecks bestimmen, das dasselbe Nebendreieck hat und dessen Seiten mit den Ecken inzidieren. Dazu gehen wir wie folgt vor: Zuerst betrachten wir die Ecken des Vierseits, in welche zwei Seiten des Vierseits und eine Seite des Nebendreiecks fallen. In unserer Abbildung wären das die Punkte A, B und E. Dabei lassen wir von diesen drei Punkten die Ecke wegfallen, die mit je einer Seite des Vierseits mit den anderen Punkten verbunden ist. Hier wäre das der Punkt E, sodass wir jetzt nur noch die Ecken A und B betrachten. Von diesen zwei Ecken ziehen wir je eine Gerade aus, die sich alle in derselben Ecke des Nebendreiecks schneiden, mit der sie sich nicht auf einer Nebenseite befinden. In unserem Beispiel ist das R. Dabei bilden die Schnittpunkte der Seiten des Vierseits mit den Geraden die vier Ecken des vollständigen Vierecks, wobei die Punkte A und B nicht dazu gehören. Auch sind die von uns konstruierten Geraden die Seiten unseres gesuchten Vierecks. Schließen wir nun das Viereck, indem wir nun alle Ecken des Vierecks so miteinander verbinden, das immer zwei Ecken auf eine Seite des Vierecks fallen.

Damit hätten wir die harmonische Grundfigur geschaffen. In dieser Konstruktionsbeschreibung wurde jedoch der Beweis, dass die Seiten des Vierecks durch die Ecken des Nebendreiecks gehen müssen



## 2.2 Die harmonische 13er Konfiguration

---

ausgelassen. Für eine genauere Konstruktion der harmonischen 13er Konfiguration ist [7] Seite 48f zu empfehlen.

Wenn wir die Konfiguration genauer betrachten lässt sich erkennen, dass die Konfiguration aus lauter harmonische Lagebeziehungen besteht. Auch folgt aus der harmonischen 13er Konfiguration, dass bei den Geraden bzw. Punkten der harmonischen Lage das Dualitätsprinzip gilt: die harmonische Lage hängt nicht von einem ganz speziellen Vierseit/Viereck ab. Ebenso sind die Punktepaare gleichberechtigt, d.h., ob eine Seite/Ecke eine Nebenseite/-ecke oder nicht ist keine Rolle spielt.

Zur Erklärung hier unsere Grundfigur mit anderen hervorgehobenen Linien. Aus der von uns konstruierten Grundfigur können wir nicht nur ein Viereck und ein Vierseit erkennen, sondern gleich mehrere, die wir so nicht vorgesehen hatten. Folglich lässt sich von zwei harmonischen Punkte-/Geradenpaaren eines als Nebenecke/-seite auffassen.

Auch lässt sich daraus erkennen, dass jedes einzelne Konstrukt innerhalb unserer Konfiguration die geometrischen Bedingungen der harmonischen Lage erfüllt.

Zusammengefasst ist

jeder Schein eines harmonischen Punktewurfes ein harmonischer Geradenwurf

jeder Schnitt eines harmonischen Geradenwurfs ein harmonischer Punktewurf

Damit kommen wir zur Schlussfolgerung, dass die harmonische Lage eine projektive Invariante ist.

„Man kann also schneiden und verbinden, soviel man will - einmal harmonisch heißt immer harmonisch. [s. 7, S. 49]“

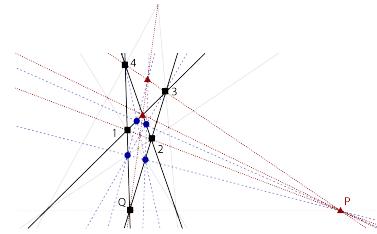


Abbildung 6: Weitere harmonische Grundfiguren in einer bereits vorhandenen

## 2.3 Erweiterung auf einen unendlich entfernten Punkt

---

### 2.3 Erweiterung auf einen unendlich entfernten Punkt

Unser bisher erlerntes Wissen können wir nun praktisch in die Tat umsetzen. Dabei lehnen wir uns an ein zeichnerisches Beispiel an, das den meisten aus der Schule bekannt vorkommen wird:

Wollen wir eine realistische Darstellung eines Gegenstandes auf Papier banen, so beginnen wir als erstes damit, dass wir die Umgebung mit einer Horizontlinie definieren. Auf dieser Linie wählen wir mindestens einen Punkt aus, zu dem sich unser Gegenstand hin „flüchtet“. Dieser wurde als sogenannter „Fluchtpunkt“ bezeichnet. Bezogen auf unser Thema ist dieser Punkt einer der Punkte, die wir zur Konstruktion der harmonischen Lage benötigen. Zur Konstruktion eines Gegenstandes (wählen wir dazu der Einfachheit eine quadratische Fläche) benötigen wir nur noch vier Geraden: zwei davon schneiden unseren Fluchtpunkt, während die anderen beiden, nach unserer Abbildung, parallel zum Horizont verlaufen. Die somit entstandene eingeschlossene Fläche ist unser Quadrat auf der projektiven Ebene.

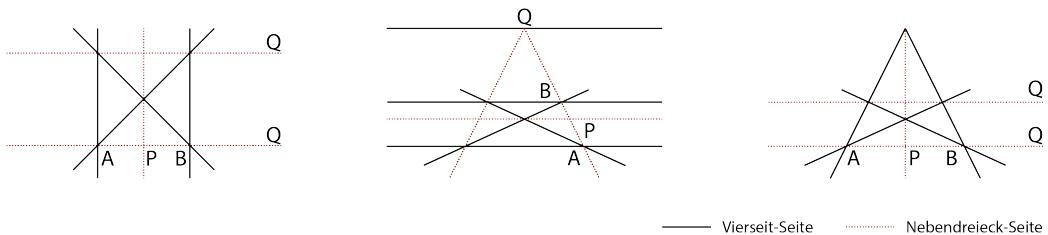


Abbildung 7: Ist der Punkt  $Q$  ein unendlicher Fernpunkt, so trennt  $P$  die Strecke  $\overline{AB}$  in der Mitte

Mit dieser Ausgangssituation können wir die harmonische Lage auf unser Quadrat anwenden. Dabei gehen wir genau so wie in unserem ersten Beispiel aus demselben Kapitel vor und erhalten eine harmonische Figur. Dabei lässt sich erkennen, dass die entstandene horizontale Gerade unser Quadrat in zwei Flächen teilt. Würden wir diese Situation senkrecht von oben betrachten würden wir erkennen, dass diese Gerade unser Quadrat genau in der Mitte teilt. Dabei handelt es sich nicht um einen Sonderfall. Jeder Punkt  $P$ , dessen Partner  $Q$  ein Fernpunkt ist, teilt die Strecke  $\overline{AB}$  immer genau in der Mitte.

Die Begründung ist einfach: Da die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes, wie wir in der harmonischen 13er Konfiguration gesehen haben, nicht von der Wahl des jeweiligen Vierseits abhängt, können wir es uns einfach machen: wir wählen uns ein symmetrisches Vierseit, dessen einen Nebenseite die Symmetrie-Achse ist. Die dritte Nebenseite ist dann parallel zur zweiten [vgl. 7, S. 50].

### 2.3 Erweiterung auf einen unendlich entfernten Punkt

Dabei taucht dieser Sachverhalt häufig in perspektivischen Abbildungen auf: Immer dann wenn wir eine Fläche in der Hälfte aufteilen, taucht die harmonische Lage auf, z.B. bei der Konstruktion eines Schachbretts. Dabei entsteht sogar, in Bezug zum Fluchtpunkt, eine Folge von harmonischen Punkten. Genaueres dazu wird in Kapitel 4 aufgegriffen.

---

### 3 Harmonische Lage rechnerisch

Um nicht nur geometrisch und zeichnerisch auf die harmonische Lage von Punkten und Geraden schließen zu können, sondern auch mit Koordinaten arbeiten zu können, wird im folgenden das sogenannte Doppelverhältnis eingeführt. Anders Da aber das Doppelverhältnis per Definition ein Verhältnis ist, das aus zwei Teilverhältnissen besteht, wird vorab auf die Definition von Teilverhältnissen eingegangen.

#### 3.1 Teilverhältnisse

Sehen wir uns aber zuvor uns drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  auf einer Geraden  $g$  an. Egal wie wir dieses drei Punkte auf dieser Geraden anordnen, es wird immer ein Punkt die Strecke zwischen seinen beiden Nachbarn in zwei kleinere Teilstrecken aufteilen. Dabei wird das Verhältnis dieser zwei Teilstrecken im allgemeinen definiert als

$$TV(ABC) = \overline{AC} : \overline{BC}$$

Wir sprechen hier vom sogenannten Teilverhältnis  $TV$ . Dabei soll  $\overline{AB}$  als gerichteter Abstand zwischen  $A$  und  $B$  verstanden werden. D.h.,  $\overline{AB}$  und  $\overline{BA}$  haben unterschiedliche Vorzeichen. Es gilt:

$$\overline{AB} = -\overline{BA}$$

Man sagt auch,  $C$  teilt das Punktpaar  $(A, B)$  (bzw. die Strecke  $\overline{AB}$ ) in diesem Verhältnis [7, S. 76]

Im Wesentlich haben wir, wenn wir vom Teilverhältnis sprechen, zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen:

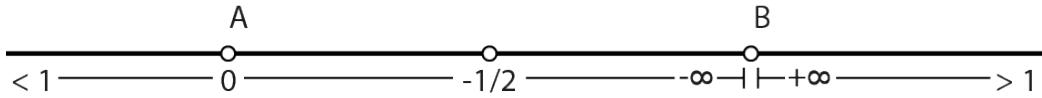
1. Befindet sich der Punkt  $C$  zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  (bzw. liegt auf  $\overline{AB}$ ), so ist das Teilverhältnis negativ. Wir sagen:  $C$  teilt das Punktpaar  $(A, B)$  „von innen“.
2. Befindet sich der Punkt  $C$  außerhalb den Punkten  $A$  und  $B$  (bzw. liegt auf  $\overline{AB}$ ), so ist das Teilverhältnis positiv. Wir sagen:  $C$  teilt das Punktpaar  $(A, B)$  „von außen“.

Wenn wir nun  $C$  die gesamte Gerade durchlaufen lassen und beobachten den Wert  $TV$ , so können wir feststellen, dass der Wert von  $TV$  stets monoton fallend ist. Wenn allerdings der Punkt  $C$  auf  $B$  fällt, so hat  $TV$  den linksseitigen Grenzwert  $-\infty$  und den rechtsseitigen Grenzwert  $+\infty$ .

## 3.2 Das Doppelverhältnis

---

$C:$	Fernp.	vor $A$	$A$	zwi. $A, B$	[Mitte]	$B$	nach $B$	Fernp.
$TVt$	$t = 1 - o$	$0 < t < 1$	$t = 0$	$t < 0$	$[t = -1/2]$	$t = \pm\infty$	$t > 1$	$t = 1 + o$



Da wir nun wissen, was man unter Teilverhältnissen versteht, können wir nun das Doppelverhältnis einführen:

### 3.2 Das Doppelverhältnis

Wie schon oben erwähnt ist das Doppelverhältnis das Verhältnis von zwei Teilverhältnissen von vier Punkten. Genauer gesagt, ist das Doppelverhältnis  $DV$  von vier Punkten  $A, B, C, D$ , die auf einer Geraden  $g$  liegen, definiert als das Verhältnis von  $TV(ABC)$  und  $TV(ABD)$ :

$$DV(ABCD) = TV(ABC) : TV(ABD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

Anhand dieser Formel kann man erkennen, dass das Vorzeichen des Doppelverhältnisses

- negativ ist, wenn sich die Punktpaare  $(A, B)$  und  $(C, D)$  trennen. Dabei wird das Paar  $(A, B)$  von  $C$  und  $D$  einmal innen und einmal von außen geteilt. Wir erhalten in den jeweiligen Teilverhältnissen zwei unterschiedliche Vorzeichen.
- positiv ist, wenn sich die Punktpaare  $(A, B)$  und  $(C, D)$  nicht trennen. Beide Teilverhältnisse sind dann entweder nur positiv oder nur negativ.

Des Weiteren weist [7] auf folgende Merkmale des Doppelverhältnisses hin:  
Wenn  $A = B$  oder  $C = D$  ist und sonst keine Punkte zusammenfallen, dann ist das  $DV = 1$ .

Wenn  $A = C$  oder  $B = D$  ist und sonst keine Punkte zusammenfallen, dann ist das  $DV = 0$ .

Wenn  $A = D$  oder  $B = C$  ist und sonst keine Punkte zusammenfallen, dann ist das  $DV = \pm\infty$ .

Zusätzlich weist obige Formel ein paar interessante Eigenschaften auf, wenn Punkte in dieser Gleichung vertauscht werden [vgl. 7, S. 77]. Das Doppelverhältnis ändert sich nicht, wenn

- die Punkte innerhalb des 1. und zugleich des 2. Paars vertauscht werden,

### 3.3 Harmonische Lage und Doppelverhältnis

---

- b) das 1. mit dem 2. Paar vertauscht wird, und
- c) sowohl die Paare als auch die Punkte innerhalb beider Paare vertauscht werden; also a) und b) zugleich.

Somit gilt:

$$DV(ABCD) = DV(CDAB) = DV(BADC) = DV(DCBA)$$

Damit ergeben sich auch aus den 24 Kombinationsmöglichkeiten von  $A, B, C$  und  $D$  folgende sechs verschiedene Zahlwerte [s. 7, S. 77f]:

$$z, \quad \frac{1}{z}, \quad 1-z, \quad \frac{1}{1-z}, \quad \frac{z}{z-1}, \quad \frac{z-1}{z}$$

Hierbei ist  $z = DV(ABCD)$ .

### 3.3 Harmonische Lage und Doppelverhältnis

Da wir jetzt die wichtigsten Eigenschaften des Doppelverhältnisses kennen, stellt sich uns nun die Frage, wie wir den Bogen zur harmonischen Lage schlagen. Betrachten wir die erste geometrische Konstruktion im Kapitel 2 dieser Arbeit nochmal an. Wir haben gesehen, dass wir zu jedem Punktpaar  $(A, B)$  und einem Punkt  $D$  einen weiteren Punkt  $C$  bestimmen konnten, wobei die Punkte  $A, B$  und  $D$  festlagen. Wählen wir jetzt nur das Punktpaar  $(A, B)$  fest und wählen irgendwo auf  $g$  einen beliebigen Punkt  $D$ , so können wir auch sagen, dass es zu jedem  $D$  genau ein Punkt  $C$  gibt, sodass die Punkte  $A, B, C, D$  in harmonischer Lage stehen bzw. sich harmonisch teilen.

Betrachten wir nun die zwei Teilverhältnisse  $TV(ABC)$  und  $TV(ABD)$ , so müssen wir feststellen, dass egal wie wir  $D$  wählen,  $TV(ABC) = -TV(ABD)$ . [7] beweist diesen Sachverhalt mithilfe des Strahlensatzes. Dabei stellt sich der Autor die Frage, ob es zu einem gegebenen Punktpaar  $(A, B)$  zwei Punkte  $P$  und  $Q$  gibt, die dieses Punktpaar im gleichen Verhältnis teilen, wobei  $(A, B)$  einmal von innen und einmal von außen geteilt werden, sodass

$$TV(ABP) = -TV(ABQ)$$



Abbildung 8: Harmonische Lage mit den parallelen Geraden  $a, b$  und  $p$

### 3.4 Das Doppelverhältnis von vier Geraden

---

gelten müsste (vgl. S. 52f). Dabei wird von folgender Ausgangssituation ausgegangen: Auf einer Geraden  $g$  befinden sich zwei beliebige Punkte  $A$  und  $B$  und ein weiterer Punkt  $P$ . Es soll ein Punkt  $Q$  konstruiert werden, sodass

$$\begin{aligned} TV(ABP) &= -TV(ABQ) \\ \iff \overline{AQ} : \overline{BQ} &= -\overline{AP} : \overline{BP} \end{aligned}$$

Für einen einfacheren Umgang und besser mit Verhältnissen rechnen zu können, wurde eine Ausgangssituation mit zueinander parallelen Geraden gewählt, um Strahlensätze anwenden zu können (Abb. 8). Mithilfe der Strahlensatzgesetze können wir anhand von  $A, B$  und  $P$ , einen Punkt  $Q$  konstruieren:

$$\begin{aligned} &\overline{AP} : \overline{BP} \\ &= \overline{AR} : \overline{B_1R} \\ &= \overline{AA_1} : \overline{B_1B} \\ &= \overline{QA} : \overline{QB} \end{aligned}$$

Daraus lässt sich schließen, dass die zwei Punkte  $A$  und  $B$  von  $P$  und  $Q$  von innen und von außen gleich getrennt werden, wenn die Punktpaare in harmonischer Lage sind. Zusätzlich ergibt sich aus der Gleichung, dass zwei Punktpaare  $(A, B)$  und  $(P, Q)$  genau dann in harmonischer Lage sind, wenn das Doppelverhältnis  $-1$  beträgt:

$$\begin{aligned} TV(ABP) = -TV(ABQ) &\iff TV(ABP) : TV(ABQ) = -1 \\ &\iff DV(ABPQ) = -1 \end{aligned}$$

### 3.4 Das Doppelverhältnis von vier Geraden

Bisher haben wir nur das Doppelverhältnis von Punkten betrachtet, die sich alle auf ein und derselben Gerade befanden. Jedoch kann man die Definition des Doppelverhältnisses zusätzlich auf vier Geraden erweitern. Wie bei dem Doppelverhältnis von vier Punkten, bei der die Ausgangssituation darauf festgelegt war, dass sich diese Punkte auf einer Gemeinsamen Geraden befinden, gilt für das Doppelverhältnis vierer Geraden  $a, b, c$  und  $d$ , dass sich diese in einem gemeinsamen Punkt  $P$  schneiden (Abb. 9). Dabei wird  $P$  auch Projektionszentrum genannt.

Schneiden wir nun diese vier Strahlen mit einer beliebigen Geraden  $g$ , wobei diese nicht durch den Punkt  $P$  gehen darf, so erhalten wir vier Schnittpunkte

### 3.4 Das Doppelverhältnis von vier Geraden

---

$A, B, C$  und  $D$ . Weiter fällen wir die Lote von  $A$  und  $C$  auf  $b$  und  $d$  mit den Schnittpunkten  $Q_1, Q_2$  und  $R_1, R_2$ . Es entstehen rechtwinklige Dreiecke. Mit dem Strahlensatz sowie dem Sinus (insbesondere dem Verhältnis von Gegenkathete und Hypotenuse) lässt sich jetzt unsere vorher bekannte Definition des Doppelverhältnisses auf folgende Formel umändern [s. 7, S. 80]:

$$\begin{aligned}
 DV(ABCD) &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \\
 &= \frac{\overline{AQ_1}}{\overline{BQ_2}} : \frac{\overline{AR_1}}{\overline{BR_2}} \\
 &= \frac{\overline{AP} * \sin(ab)}{\overline{BP} * \sin(cb)} : \frac{\overline{AP} * \sin(ad)}{\overline{BP} * \sin(bd)} \\
 &= \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}
 \end{aligned}$$

Somit können wir nicht nur das Doppelverhältnis nur anhand von Punkten auf einer Geraden  $g$  bestimmen, sondern auch durch die Geraden der Punkte, die sich auf einem von  $g$  außerhalb liegenden Punkt schneiden. Das bedeutet auch, dass egal was für eine Gerade wir nehmen, die die Geraden  $a, b, c$  und  $d$  schneiden und nicht durch  $P$  gehen, das Doppelverhältnis das Gleiche ist. Damit ist auch das Doppelverhältnis eine projektive Invariante. Mithin trifft dies auch auf die harmonische Lage zu, was wir aber auch durch Invarianzen in Kapitel 2.2 gesehen haben.

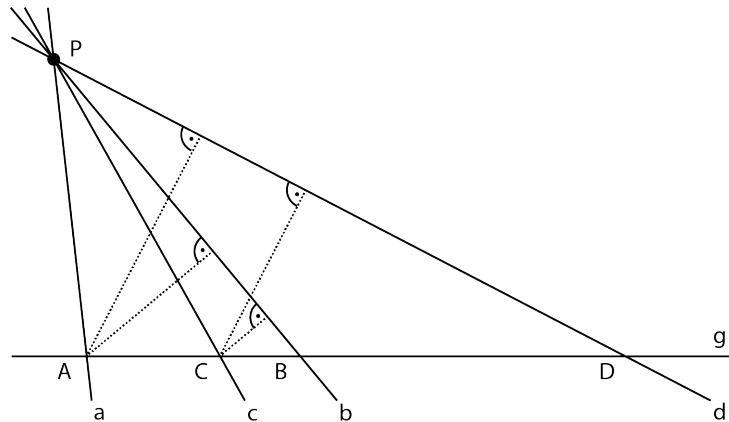


Abbildung 9: Ermittlung der harmonischen Lage durch vier Geraden

---

## 4 Harmonisches Mittel und harmonische Folge

Die Bezeichnung „harmonisch“ taucht nicht nur in der projektiven Geometrie auf. Allerdings können wir diese mit diesem Themengebiet in Verbindung bringen:

### 4.1 Harmonisches Mittel

Der Begriff des arithmetischen Mittels ist ein sehr geläufiger Begriff. Dabei handelt es sich beim arithmetischen Mittel um den Mittelwert, der die Summe der betrachteten Zahlen durch dessen Anzahl geteilt wird.

$$x_a = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

Ebenso bekannt in der Mathematik ist auch der sogenannte harmonische Mittelwert. Das harmonische Mittel ist das Gegenstück zum arithmetischen Mittel, bzw. der Kehrwert des harmonischen Mittels das arithmetische Mittel der Kehrwerte:

$$\frac{1}{x_h} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}}{n}$$

Somit ist das harmonische Mittel

$$x_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}}.$$

Der Zusammenhang zwischen der harmonischen Lage und dem harmonischen Mittel lässt sich einfach miteinander verbinden. Denn vom Kapitel über das Doppelverhältnis wissen wir, dass sich zwei Punktepaare  $(A, B)$  und  $(C, D)$  sich harmonisch trennen, wenn sie sich innen und außen gleich teilen:

$$|TV(ABC)| = |TV(ABD)|$$

Definieren wir  $b = |\overline{AB}|$ ,  $c = |\overline{AC}|$  und  $d = |\overline{AD}|$ . Durch umformen ergibt sich

## 4.1 Harmonisches Mittel

---

$$\begin{aligned}
 |TV(ABC)| &= |TV(ABD)| \\
 \iff \frac{c}{b-c} &= \frac{d}{d-b} \\
 \iff cd - cb &= db - cd \\
 \iff 2cd &= d(c+b) \\
 \iff \frac{2cd}{c+d} &= b,
 \end{aligned}$$

woraus wir erkennen können, dass  $b$  das harmonische Mittel von  $c$  und  $d$  ist. Indem wir einen Punkt auf unserer Geraden festlegen und mithilfe zweier Abstände zu gegebenem Punkt zwei weitere Punkte bestimmen, können wir mit dem harmonischen Mittelwert den vierten Punkt berechnen. Legen wir Punkt  $A$  als Nullpunkt fest, können wir die Abstände als Koordinaten definieren.

Ein Sonderfall bei der Auswahl unseres Punktes tritt dann auf, wenn wir den vierten Punkt so wählen, dass dieser ein Fernpunkt ist. Ist dies der Fall tritt hier sogar das arithmetische Mittel auf. Dies liegt daran, dass wir zwar immer noch das harmonische Mittel vorliegen haben, aber unser gewählter Punkt im Bezug zum Fernpunkt  $\infty$  steht.

Diese Sachverhalte sind gut in den sogenannten Möbius'sche Netze nachzuvollziehen (Abb. 4). Indem wir ein solches Netz aufbauen, können wir unendlich viele 4. harmonische Punkte hinzu konstruieren: in die eine Richtung verdichtend, in die andere ausdehnend. Definieren wir unsere 3 Grundpunkte als  $0, 1$  und  $\infty$ , lassen sich sehr schöne Zahlenfolgen Konstruieren. Dabei fällt auf, wenn wir von einer ausgesuchten Zahl  $n$  unserer Konstruktion seine beiden Nachbarn  $n-1$  und  $n+1$  betrachten, dass  $n$  das harmonische Mittel von  $n-1$  und  $n+1$  ist. Somit ist das harmonische Mittel Bestandteil harmonischer Lage-Beziehungen von Punkten.

## 4.2 Harmonische Folge

---

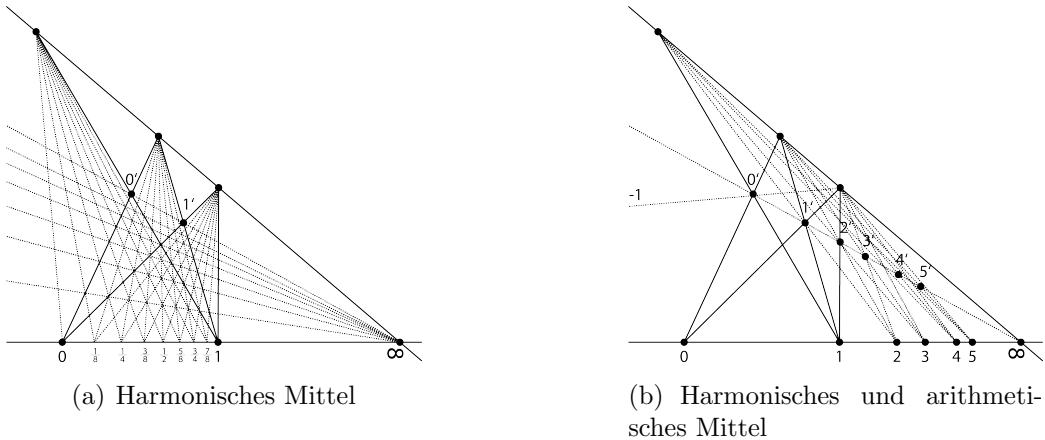


Abbildung 10: Möbius'sche Netze in Verdichtung und Dehnung

## 4.2 Harmonische Folge

Auch bekannt im Bereich der Zahlenfolgen ist die harmonische Folge. Dabei ist jedes Glied dieser Folge der Kehrwert der positiven ganzen Zahlen und somit Kehrwert der Glieder einer arithmetischen Folge:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad n \geq 1$$

Des Weiteren ist jedes Glied der Folge (mit der Voraussetzung  $n \geq 2$ ) das harmonische Mittel seiner beiden Nachbarglieder. Betrachten wir die harmonische Folge als Funktion, so konvergiert diese gegen 0:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Auch zu beachten bei der harmonischen Folge ist, wenn jedes Folgenglied mit einer Konstanten multipliziert wird, dass daraus wieder eine harmonische Folge entsteht.

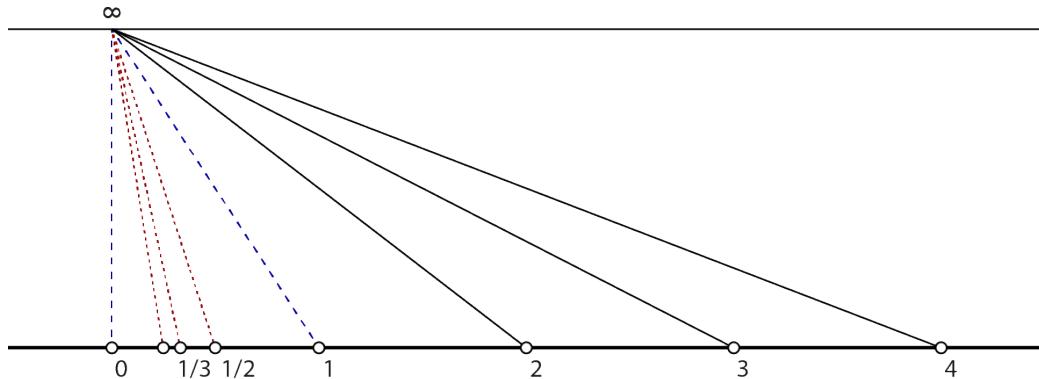
Beziehen wir die harmonische Folge auf die harmonische Lage von Punkten: Zur Vereinfachung legen wir  $A$  als Nullpunkt fest, damit wir anstelle von Abständen mit Koordinaten arbeiten können. Der Partner von  $A$  sei der Punkt  $B$ , den wir mit 1 identifizieren. Legen wir nun einen Punkt  $D$  fest, der Folgenglied einer arithmetischen Folge ist, so erhalten wir mithilfe des Kehrwertes den Punkt  $C$ . Dabei trennt  $B$  die Punkte  $C$  und  $D$  im harmonischen Mittel. Wir können also für  $D \geq 1$  immer das passende harmonische

## 4.2 Harmonische Folge

---

Folgenglied finden und erhalten somit zwischen 0 und 1 für alle Punkte von  $C$  eine harmonische Folge. Dabei ist der Gegenpunkt von  $C$  - der Punkt  $D$  - das Folgenglied einer arithmetischen Folge. Wenn wir demnach eine Skala zeichnen, auf der wir die harmonische sowie die arithmetische Folge haben, und verbinden die Punkte der Skala mit einem beliebigen Punkt  $P$  außerhalb davon, so erhalten wir einen Wurf harmonischer Geraden. Dabei treten folgende harmonische Punktpaar-Beziehungen für die harmonische Folge  $\frac{1}{n}$  und die arithmetische Folge  $n$  mit jeweils  $n \geq 1$  auf:

- $(0, 1)$  und  $\left(\frac{1}{n}, n\right)$  für  $n \geq 1$ ,
- $(n - 1, n + 1)$  und  $(n, \infty)$  für  $n \geq 2$ , sowie
- $\left(0, \frac{1}{n}\right)$  und  $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$  für  $n \geq 2$ .



---

## 5 Harmonische Lage und Goldener Schnitt

Bevor wir den theoretischen Teil beenden und uns der Praxis zuwenden können, fehlt uns noch ein einzelner Aspekt in der geometrischen und arithmetischen Mathematik, bei dem wir ebenfalls die harmonische Lage vorfinden: nämlich dem Phänomen des Goldenen Schnittes.

Der Goldene Schnitt tritt seit der Antike in vielen Bereichen der Geometrie, Architektur, Musik, Kunst sowie der Philosophie auf aber er erscheint auch heutzutage in den Gebieten von Design und Technik. Dabei ist der Goldene Schnitt kein isoliertes Phänomen, sondern in vielen Fällen das erste und somit einfachste nichttriviale Beispiel im Rahmen weiterführender Verallgemeinerungen [s. 8, S. 5].

Dabei ist der Goldene Schnitt ein Teilverhältnis (wir erinnern uns Kapitel 3.1), welches in verschiedenen geometrischen und arithmetischen Situationen erscheint. Dieses Teilverhältnis ist definiert als das Verhältnis zweier Streckenabschnitte zueinander, die sich genauso verhalten wie die der längere Abschnitt zur gesamten Strecke:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$$

Setzen wir  $c = 1$ , können wir das Verhältnis des Goldenen Schnittes bestimmen:

$$\frac{1-x}{x} = x$$

Durch umformen erhalten wir eine quadratische Gleichung

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Diese hat die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618$$

und

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,618$$

Da  $x$  positiv sein muss, muss  $x_1$  unsere Lösung sein. Somit ist die Zahl des Goldenen Schnittes  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Der Kehrwert ist dann  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

---

Da wir sowohl bei der harmonischen Lage als auch beim Goldenen Schnitt von von Teilverhältnissen sprechen, können wir diese zwei geometrischen Aspekte miteinander verbinden.

Nehmen wir dazu folgende Situation an: Auf einer Geraden befinden sich zwei Punkte  $A$  und  $B$ , deren Strecke  $\overline{AB}$  von einem weiteren Punkt  $C$  im Goldenen Schnitt geteilt wird. Demnach ist das Teilverhältnis  $TV(ABC) = \overline{AC} : \overline{BC}$  gleich dem Teilverhältnis  $TV(CBA) = \overline{CA} : \overline{BA}$ . Dies kann auch anhand der Vertauschungsregeln aus Kapitel 3.1 nachgeprüft werden:

Sei  $TV(ABC) = z$ , so ist

$$\begin{aligned} TV(ABC) &= \overline{AC} : \overline{BC} \\ &= \frac{z}{1-z} \\ &= TV(CBA). \end{aligned}$$

Hier ist aber zu beachten, dass wir hier ungerichtete Abstände betrachten. Indem wir nun mithilfe der harmonischen Lage weitere Punkte und Abstände bestimmen können, die zueinander im Goldenen Schnitt stehen, erhalten wir dadurch eine Folge von Abständen mit dem Teilverhältnis  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Daraus lässt sich schließen, wenn wir eine Folge von Längen und Abständen begegnen, die im Goldenen Schnitt sind, so ist diese Folge auch harmonisch.

---

## 6 Harmonische Lage in der Gestaltung

Nach so viel Theorie wollen wir uns den praktischen Bezug der harmonischen Lage genauer ansehen. Hierbei legen wir unser Augenmerk in Richtung Kunst und Design. Zum Einstieg für die harmonische Lage in der Kunst können wir unser Wissen aus den vorherigen Kapiteln nutzen, wobei wir für die harmonische Lage im Design noch einen kurzen Einstieg in den Goldenen Schnitt erfordert.

### 6.1 Harmonie in der Malerei

Vielen von uns ist der Begriff der Perspektive wahrscheinlich größtenteils mit fotorealistischen Gemälden und Bildern gekoppelt. Tatsächlich fand die Perspektive nach ihrer Wiederentdeckung im 15. Jahrhundert, wahrscheinlich um 1413 [5, S. 27], neben der Geometrie auch hauptsächlich in der Bildenden Kunst bzw. der Malerei Anwendung. Vor ihrer Entdeckung mussten sich die Maler an einem Kanon von Regeln halten, denen es erlaubte, einigermaßen räumliche Szenen darzustellen. Jedoch beruhten diese auf keinerlei wissenschaftlich gesicherten Einsichten.

Fangen wir also ganz zu Beginn an:

Die ersten Aufzeichnungen der Wiederentdeckung der Perspektive lassen sich in den Schriften vom Biographen Antonio Mannetti finden. Diese handeln allerdings nicht von Erkenntnissen, die Mannetti entdeckt hatte, sondern beschreiben die Arbeiten des Bildhauers und Architekten Filippo Brunelleschi. Dieser hatte in einem seiner ersten Experimente ein Miniaturenbild der Florentiner Taufkapelle, die von ihm so exakt wie möglich gezeichnet wurde. Zusätzlich legt er den Himmel mit poliertem Silber aus, um den realen Himmel darauf abilden zu können. Doch benutzte er das Werk nicht zur Zurschaustellung, sondern für ein Experiment: Brunelleschi Bohrte in den Eingangsbereich der Taufkapelle ein Loch. Durch dieses Loch sollte ein Betrachter von der Rückseite des Bildes auf das Gebäude sehen. Dabei sollte der Betrachter an einer von Brunelleschi bestimmten Stelle stehen. Der zweite Teil des Experimentes bestand darin, einen Spiegel zwischen Gebäude und Abbildung zu stellen, sodass die Sicht vom Spiegel verdeckt wurde. Al-

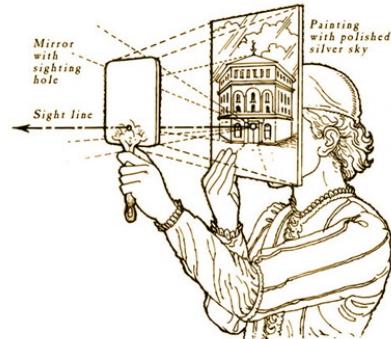


Abbildung 11: Das Spiegelexperiment

## 6.1 Harmonie in der Malerei

---

lerdings sah der Betrachter nun die von Brunelleschi hergestellte Abbildung. Die illusionistische Wirkung musste überwältigend gewesen sein [5, S. 28f]. Interessant ist jedoch hier, dass Brunelleschi es geschafft hatte, die mathematische Theorie des Sehens von Euklid mit der Theorie der Zentralprojektion zu verbinden. Dabei befindet sich das Guckloch des Bildes genau im Projektionszentrum und Hauptfluchtpunkt des Bildes [5, S. 30].

Im Jahre 1435/36 veröffentlichte Leon Battista Alberti in seinen *Drei Bücher über die Malerei* die theoretischen Grundlagen, die Filippo Brunelleschi verwendet hatte. Dabei beschrieb er den Horizont und den Fluchtpunkt. Aus Brunelleschis Experimenten erfuhr Alberti, dass parallel verlaufende Strecken auf einen Punkt hin konvergieren, der unendlich weit vom Betrachter weg scheint. Um aber ein Maß zwischen Bildfläche und Fluchtpunkt bestimmen zu können, um Distanzen auf der perspektivischen Zeichenfläche besser darzustellen, ging Alberti wie folgt vor:

Um ein anschauliches Maß zu finden betrachtete Alberti quadratische Fliesen auf dem Boden. Er legte fest, dass ein Mensch, oder genauer gesagt die Augenhöhe eines Menschen, durchschnittlich 3 *braccia* (ital. für „Arme“) beträgt. Dabei entsprechen drei *braccia* ungefähr 174cm. Mit dieser Angabe legte er die Horizontlinie fest. Den unteren Rand des Bildes unterteilte Alberti gleichmäßig in die Anzahl der Fliesen in der horizontalen. Dann wurde der Hauptfluchtpunkt festgelegt, der nach Alberti auf Augenhöhe liegen musste. Somit musste dieser Punkt auf der Horizontlinie liegen. Mit diesen Punkten verband Alberti die maßgebenden Punkten am unteren Bildrand, so dass mehrere Pyramiden entstanden. Damit wären schon mal die Parallelen Linien in die Tiefe geschaffen.

Bisher wurde immer die Pyramiden im Verhältnis 2 : 3 geteilt, womit ein abgefälschtes Maß für Linien entstanden, die parallel zum Horizont liegen. Denn je nach dem sich der Betrachter von der Bildfläche entfernt, so mussten die Abstände zwischen diesen Parallelen der Abstand in einem natürlichen Maß kleiner werden. Alberti nahm sich dazu im Gegensatz zur bisherigen Vorgehensweise was anderes vor. Er konstruierte sich eine Seitenansicht des Geschehens, wo sich Bild, Kacheln und sogar der Betrachter der Szene befinden. Indem er wusste, mit welchem Abstand sich der Betrachter vom Bild weg befindet, konnte er den Augenpunkt exakt bestimmen. Die Strecke hinter der Bildfläche unterteilte Alberti wieder in der Anzahl der Fliesen. Diese Unterteilungspunkte verband er mit dem Augenpunkt. Dabei gaben die Schnittpunkte der Verbindungsstrecken mit der Bildfläche die Positionen der Parallelensysteme im Bild an (Abb. 12, [vgl. 5, S. 31ff]).

Mit dieser sehr geschickt gewählten Methode war es ab sofort möglich, jegliche Gegenstände perspektivisch korrekt darzustellen. Im Laufe der Jahre wurde Albertis perspektivische Konstruktion von Personen wie Albrecht

## 6.1 Harmonie in der Malerei

---

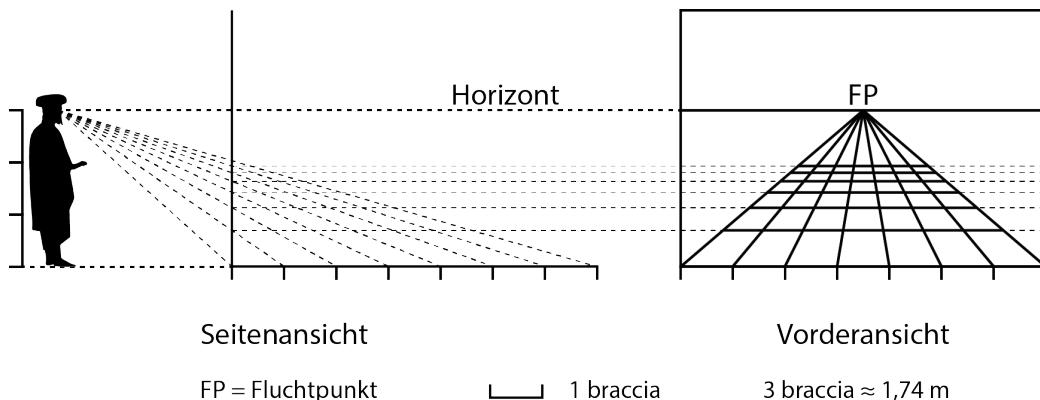


Abbildung 12: Zeichnerischer Weg zur Zentralperspektive nach Leon Battista Alberti

Dürer und Leonardo DaVinci auf mehrere Fluchtpunkte ausgeklügelt und mathematisch begründet. Doch kann dies als Grundstein für die nachkommenden perspektivischen Werke in der Kunstgeschichte betrachtet werden. Dabei kann die Konstruktion solcher perspektivischen Raster nicht nur zum Bildrand parallele Flächen angewandt werden, sondern sie kann auch für vertikale und schräge Raster verwendet werden.

Tatsächlich sollte auch hier unser nun geschultes Auge erkennen, dass solche und andere perspektivischen Konstruktionen unserer Definition von harmonischen Punkten und Geraden entsprechen. Hier taucht sogar die Harmonische Lage mehrfach auf: Zum einen in der fertigen Konstruktion, zum anderen aber auch bei den Verbindungslinien zwischen der Skala und dem Augenpunkt (s. Kapitel 4.2).

Egal ob wir nur einen oder mehrere Fluchtpunkte in unserem Bild haben, alle auf diesen Punkt konvergierende Geraden stehen immer in harmonischer Lage zueinander. Indem wir ähnlich Alberti perspektivische Raster durch die Konstruktion harmonischer Punkte erhalten, ist die Harmonische Lage ein Maß für den menschlichen Sehsinn, den wir auch für Bilder, Gemälde o.ä. verwenden können.

## 6.2 Harmonische Lage in der heutigen Gestaltung

---

### 6.2.2 Harmonische Lage in der heutigen Gestaltung

#### 6.2.2.1 Satzspiegel



Abbildung 13: Konstruktion nach Van de Graaf bei einem mittelalterlichen Manuskript

Die Kunstgeschichte zeigt, dass in sämtlichen Bereichen der Gestaltung versucht wurde, sei es die Malerei, die Architektur o.Ä., harmonische Strukturen zu erfassen und zu nutzen. Hierbei bildet der Druck, die klassische Art der Gestaltung, keine Ausnahme: hat sich der Typograph für ein Seitenformat entschieden, so gilt es als nächstes, einen Satzspiegel zu wählen. Dabei musste der Typograph die Verhältnisse und Kompositionen der Ränder zueinander so wählen, dass sie zusammen ein harmonisches Gesamtbild ergeben. Nach einer Formel für eine harmonische Zusammensetzung der Ränder und des Satzspiegels haben Typographen wie Raúl Rosarivo und Jan Tschichold gesucht. Dazu haben sie sich die schönsten Manuskripte ausgesucht und anhand dieser die ihnen zugrunde liegenden Muster zu harmonischen Konstruktionen zusammen.

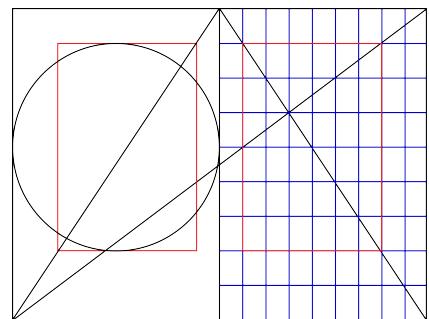


Abbildung 14: Satzspiegelkonstruktion nach Jan Tschichold (links) und Pául Rosarivo (rechts)

## 6.2 Harmonische Lage in der heutigen Gestaltung

---

Nach Jan Tschichold (Abb. 14) lag den schönsten Manuskripten ein Kanon zugrunde, nach dem die Höhe des Satzspiegels von der Breite der Seite abhängt. Rosarivos Konstruktion dagegen basierte auf einer Neunerteilung der Seite. Dabei waren Außensteg und Fußsteg stets doppelt so groß wie ihre gegenüberliegenden Partner. Dem Kanon nach Van de Graaf hingegen genügten stets nur Wenige Linien, um die Proportionen eines harmonischen Satzspiegels zu erhalten.

All diese unterschiedlichen Konstruktionen basieren auf einem Seitenformat von 2:3, 5:8 oder 34:21, also der Annäherung des Goldenen Schnittes nach Fibonacci. Doch liegt all diesen Konstruktionen ein ähnliches geometrisches Grundgerüst vor: Wenn wir nur einmal die Diagonalen der einzelnen Seiten und der Doppelseite betrachten, erkennen wir hier unsere harmonische Konstruktion wieder:

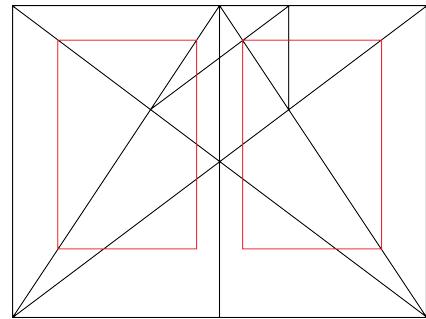


Abbildung 15: Satzspiegel von Van de Graf

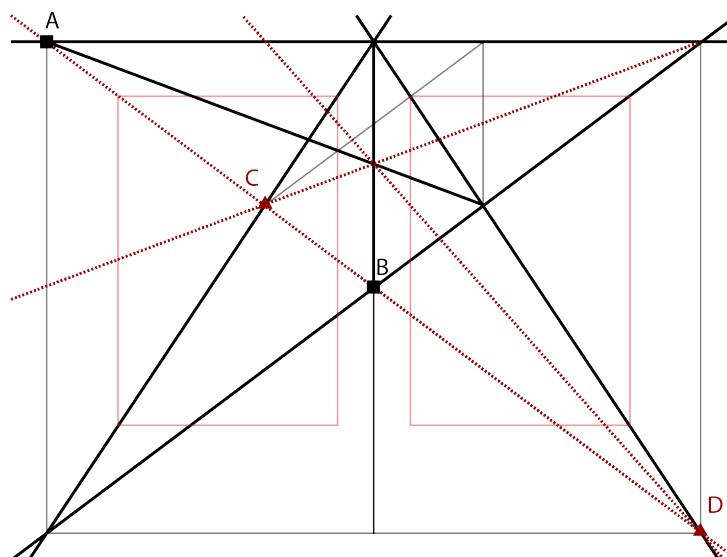


Abbildung 16: Harmonische Lage im Satzspiegel

Doch diese drei Konstruktionen zur Bestimmung einer harmonischen Seiten-Komposition sind keine wahren Neu entdeckungen: bereits im 13. Jahrhundert beschrieb der Architekt Villard de Honnecourt einen ähnlichen Kanon wie die drei oben beschriebenen. Jedoch hat er diesen Kanon so ausgelegt, dass dieser eine Seite in ein 3er, 6er, 9er

## 6.2 Harmonische Lage in der heutigen Gestaltung

oder 12er Raster teilt. Auch diese Konstruktion entspricht einer Anordnung harmonischer Punkt und Geraden.

Mittels solcher Konstruktionen Fußsteg und Außensteg einer Seite breiter festgelegt als Bund- und Kopfsteg. Dies bewirkt aber den gewünschten Effekt, dass die Hand, die das Buch oder die Seite meist im untersten Bereich festhält, nie Platz zum Lesen beansprucht. Daher wenden selbst heutzutage viele Layouter immer noch solche oder ähnliche Randverhältnisse in der Praxis an.

Ab dem Zuge der sogenannten Schweizer Schule wurden bezüglich des Seitenaufbaus Experimente durchgenommen, um neue Formen zur Gestaltung von Satzspiegel und Raster hervorzubringen. Unter anderem wurde das Prinzip der Übertragung eingeführt, bei dem die Symmetrie am Bund aufgehoben wird. Dennoch basieren moderne Prinzipien immer noch relativ häufig auf den historischen Konstruktionen oder werden leicht umgewandelt.



Abbildung 17: Modernes Anwendungsbeispiel des Van de Graaf'schen Kanons

### 6.2.2 Gestaltungs raster

In den vorherigen Kapiteln haben wir räumliche Strukturen mithilfe der harmonischen Lage in Raster unterteilt und diese in einem zweidimensionalen Bild abgebildet. Im Prinzip haben wir einen ähnlichen Vorgang, wenn wir uns Rastersysteme in der Gestaltung von Flächen ansehen. Wir sprechen hier von Gestaltungsrästern, wie sie sowohl im Web- als auch Seitenlayout Anwendung findet. Wie im projektiven Raum wenden Typographen und Ge-

## 6.2 Harmonische Lage in der heutigen Gestaltung

---

stalter bei zu gestaltenden Flächen Raster an, um so ein harmonische und systematische Organisation der Gestaltungselemente zu erzielen.

Wie im Kapitel 6.1 zu sehen war, haben wir den Raum in ein gleichmäßiges Netz von Feldern unterteilt, um darauf später Gegenstände, Personen oder Gebäude platzieren zu können. Gleiches Vorgehen nutzen wir auch im Gestaltungsraster, jedoch beziehen sich hier unsere Maßen nicht nur auf Koordinaten, sondern auf Punkt, Cicero und Pixel.

Wie gehen wir also vor, wenn wir unser Format festgelegt haben? Dabei steht immer an erster Stelle die Analyse des Problems: welches Format soll genutzt werden, was liegt mir alles an Bild- und Textmaterial vor, welche Schriftart wähle ich, etc.. Nachdem die meisten dieser Fragen beantwortet sind, lohnt es sich Skizzen zu zeichnen. Dabei stellt sich uns die Frage, in wie viele Spalten/Kolonnen das Format unterteilt werden soll. Dabei bieten mehr Spalten einen größeren Gestaltungsspielraum als weniger Spalten. Jedoch bewirken zu viele Spalten, dass die Textzeilen relativ schmal werden und die Schriftgrade dementsprechend kleiner gewählt werden.

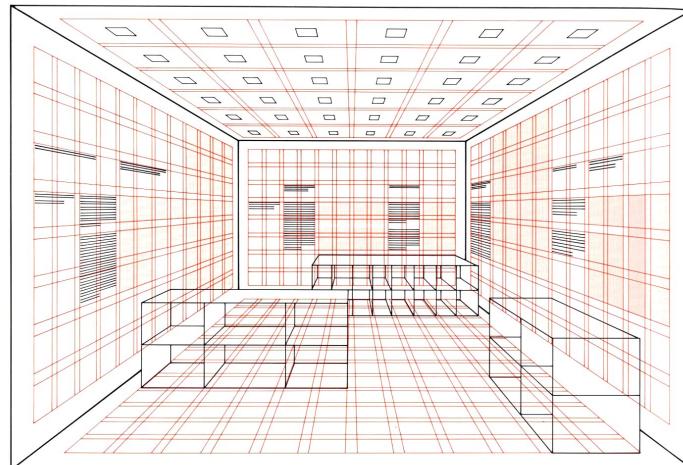


Abbildung 18: Gestaltungsraster im Raum von [3, S. 148]

---

## 7 Zusammenfassung

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

### **Abbildungsverzeichnis**

1	Ein harmonischer Säulengang . . . . .	2
2	Geometrische Konstruktion der harmonischen Lage . . . . .	3
3	Eine andere Wahl der Geraden . . . . .	4
4	Bestimmung des 4. harmonischen Punktes $D$ . . . . .	5
5	Beispiel einer harmonischen 13er Konfiguration . . . . .	6
6	Weitere harmonische Grundfiguren in einer bereits vorhandenen	8
7	Ist der Punkt Q ein unendlicher Fernpunkt, so trennt P die Strecke $\overline{AB}$ in der Mitte . . . . .	9
8	Harmonische Lage mit den parallelen Geraden $a$ , $b$ und $p$ . . .	13
9	Ermittlung der harmonischen Lage durch vier Geraden . . . . .	15
10	Möbius'sche Netze in Verdichtung und Dehnung . . . . .	18
11	Das Spiegelexperiment . . . . .	22
12	Zeichnerischer Weg zur Zentralperspektive nach Leon Battista Alberti . . . . .	24
13	Konstruktion nach Van de Graaf bei einem mittelalterlichen Manuskript . . . . .	25
14	Satzspiegelkonstruktion nach Jan Tschichold (links) und Pául Rosarivo (rechts) . . . . .	25
15	Satzspiegel von Van de Graf . . . . .	26
16	Harmonische Lage im Satzspiegel . . . . .	26
17	Modernes Anwendungsbeispiel des Van de Graaf'schen Kanons	27
18	Gestaltungs raster im Raum von [3, S. 148] . . . . .	28

## LITERATUR

---

### Literatur

- [1] Ute Rosenbaum Albrecht Beutelspacher. *Projektive Geometrie*. vieweg studium, 1992.
- [2] Hansjörg Bögle. *Die harmonische Lage von vier Punkten bzw. vier Geraden*. JUPITER, 2014.
- [3] Josef Müller-Brockmann. *Rastersysteme für die visuelle Gestaltung*. Niggli Verlag, 1981.
- [4] Bodo Pareigis. *Analytische und projektive Geometrie für die Computergrafik*. B. G. Teubner Stuttgart, 1990.
- [5] Klaus Rehkämper. *Bilder, Ähnlichkeit und Perspektive*. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2002.
- [6] Jürgen Richter-Gebert. *Perspectives on Projective Geometrie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [7] Alexander Stolzenburg. *Projektive Geometrie*. edition waldorf, 2009.
- [8] Hans Walser. *Der Goldene Schnitt*. B. G. Teubner Stuttgart, Leipzig; vdf, Hoschulverlag an der ETH, 1996.
- [9] Hans Walser. *Projektive Abbildungen, zeichnerischer Zugang*. 2002.