

FACHHOCHSCHULE KARLSRUHE -
TECHNIK UND WIRTSCHAFT

SEMINARARBEIT

Harmonische Lage

Florian Neuweiler

betreut von
Prof. Dr. rer. nat. Frank Schaefer

2. Dezember 2016

INHALTSVERZEICHNIS

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
2 Die Harmonischen Lage	3
2.1 Ein geometrisches Beispiel	3
2.2 Definition	5
2.3 Die harmonische 13er Konfiguration	7
2.4 Erweiterung auf einen unendlich entfernten Punkt	10
3 Harmonische Lage rechnerisch	12
3.1 Teilverhältnisse	12
3.2 Das Doppelverhältnis	13
3.3 Harmonische Lage und Doppelverhältnis	14
3.4 Das Doppelverhältnis von vier Geraden	16
4 Harmonisches Mittel und harmonische Folge	18
4.1 Harmonisches Mittel	18
4.2 Harmonische Folge	20
5 Harmonische Lage und Goldener Schnitt	22
6 Harmonische Lage in der Gestaltung	24
6.1 Harmonie in der Malerei	24
6.2 Harmonische Lage in der heutigen Gestaltung	27
6.2.1 Satzspiegel	27
6.2.2 Gestaltungs raster	30
6.3 Gestaltung und Goldener Schnitt	32
7 Zusammenfassung	33
Literaturverzeichnis	35

1. EINLEITUNG

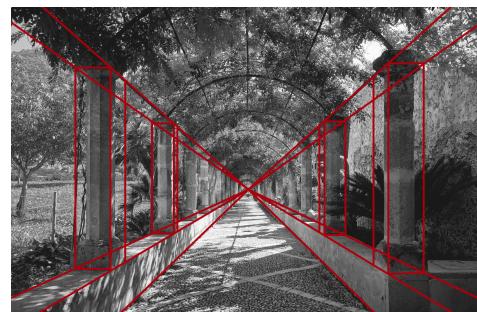
1 Einleitung

Harmonie... ein Wort mit dem wir Menschen das ausgewogene und ausgeglichene Zusammenspiel von Tönen, Verhältnissen und Maßen assoziieren. Hauptsächlich verwenden wir erst dann Begriffe wie „Harmonie“ oder „harmonisch“, wenn wir von einer Regelmäßigkeit in der Anordnung einzelner Objekte sprechen, zu der wir zusätzlich einen übergeordneten Sinn oder Sachverhalt vermuten (vgl. [13]).

Betrachten wir beispielsweise einen Säulengang wie in Abbildung 1, so würden wir die Anordnung der Säulen zum Horizont als „harmonisch“ bezeichnen. Dabei definiert die Anordnung der Säulen in unserem Bild ein bestimmtes Maß bzw. Netz, mit dem wir weitere Säulen harmonisch anreihen, oder zwischen zwei bereits vorhandenen Säulen platzieren können.



(a) Original¹



(b) Mit Netz

Abbildung 1: Ein harmonischer Säulengang

Dabei fällt uns auf, wenn wir eine weitere Säule platzieren und sich demselben Maß-System wie zuvor unterordnen, dass die Harmonie des Bildes nicht durchbrochen wird. Dieses Maß wird in der Mathematik als harmonische Lage bzw. harmonische Folge von Punkten genannt und ist das Thema der vorliegenden Arbeit.

Im Folgenden wird die harmonische Lage von Punkten und Geraden zuerst über ein geometrisches Beispiel eingeführt und später der rechnerische Zugang mithilfe des Teil- und Doppelverhältnisses beschrieben. Anschließend erweitern wir die harmonische Lage auf weitere mathematische Gebiete wie das harmonische Mittel, die harmonische Folge, sowie dem Goldenen Schnitt. Zuletzt wird die Anwendung der harmonischen Lage in der Malerei und heutigen Gestaltungsrichtlinien genauer betrachtet.

¹<http://www.feeistmeinname.de/wp-content/uploads/2016/06/20160616-Zentralperspektive-6.jpg>, 30.11.2016

2 Die Harmonischen Lage

2.1 Ein geometrisches Beispiel

„Harmonisch“ ist ein großes Wort; es bedeutet hier: Wenn die inneren und die äußeren Verhältnisse im Einklang sind. Es lohnt sich darüber nachzusinnen. [8, S. 53].

Tatsächlich handelt es sich bei der harmonischen Lage von Punkten und Geraden um einer der wichtigsten Begriffe der projektiven Geometrie. Ähnlich wie der Tastsinn des physischen Raumes bildet die harmonische Lage ein natürliches Maß für Bilder und dem Sehsinn. Zudem handelt es sich bei der harmonischen Lage um eine Invariante der projektiven Geometrie. Demnach bleibt die harmonische Lage bei allen projektiven Operationen erhalten, dazu aber später mehr. Doch was genau ist die harmonische Lage wirklich? Um dies zu veranschaulichen erläutern wir die harmonische Lage anhand eines Beispiels (Abb. 2):

Betrachten wir eine Gerade g , auf der sich drei Punkte A, B und D befinden, die willkürlich auf dieser Geraden positioniert wurden. Aus diesen drei Punkten auf g lässt sich nun eindeutig ein weiterer „harmonischer“ Punkt C konstruieren, der ebenso wie A, B und D auf g liegt. Um diesen Punkt C geometrisch zu konstruieren wird wie folgt vorgegangen: Zunächst werden von jedem der Punkte A, B und D aus eine Gerade gezogen. Diese drei Geraden haben drei Schnittpunkte. Nun werden zwei weitere Geraden gezogen: die eine führt durch den Punkt A und den Schnittpunkt R , die andere durch den Punkt B und den Schnittpunkt Q (hier gestrichelt dargestellt).

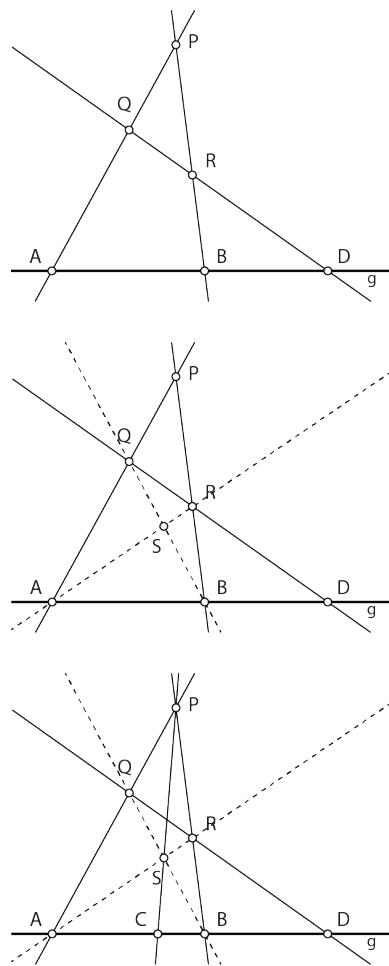


Abbildung 2: Geometrische Konstruktion der harmonischen Lage

2. DIE HARMONISCHEN LAGE

Durch den soeben entstandene Schnittpunkt S wird eine weitere Gerade gebildet, die auch durch den Schnittpunkt P geht. Der Punkt dieser Geraden, der auch auf der Geraden g liegt, ist der von uns gesuchte Punkt C . Diese Konstruktion wird auch harmonische Spiegelung von D an A und B genannt [vgl. 2, S. 34].

Egal wie wir die Geraden durch A , B und D ziehen, wir erhalten den Punkt C immer an ein und derselben Stelle. In anderen Worten: Der vierte Punkt C ist unabhängig von der Wahl der drei Geraden durch A , B und D (Abb. 3).

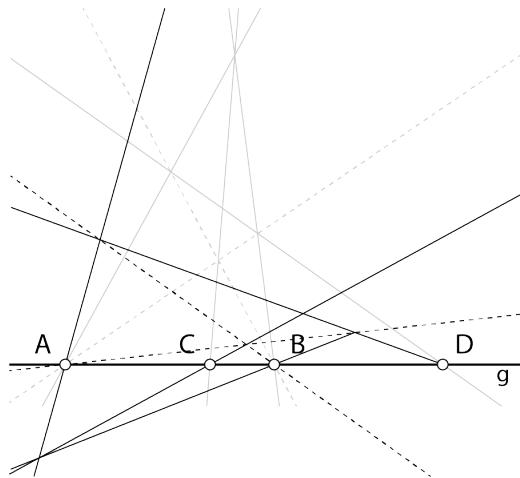


Abbildung 3: Eine andere Wahl der Geraden

2. DIE HARMONISCHEN LAGE

2.2 Definition

Anhand des oberen Beispiels lässt sich nun im allgemeinen die harmonische Lage definieren [8, S. 43, 45f].

Definition von vier Punkten:

Zwei Punktepaare (A, B) , (C, D) auf einer Geraden g „trennen sich harmonisch“, wenn sie so liegen wie die Ecken und die Nebenecken eines vollständigen Vierseits in einer Nebenseite.

Dabei versteht man unter einem vollständigen Vierseit eine Figur bestehend aus

- den vier Seiten (Geraden) a, b, c und d ,
- den sechs Ecken A, B, P, Q, R und T , die die Schnittpunkte der vier Seiten sind,
- den drei Nebenseiten g, h, i , die jene Ecken miteinander verbinden, die nicht auf der selben Seite liegen, sowie
- den drei Nebenecken C, D, T , die Schnittpunkte der Nebenseiten.

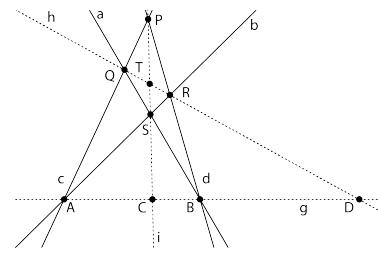


Abbildung 4: Vollständiges Vierseit

Definition von vier Geraden:

Zwei Geradenpaare (a, b) , (c, d) in einem Punkt P „trennen sich harmonisch“, wenn sie so liegen wie die Seiten und die Nebenseiten eines vollständigen Vierecks in einer Nebenecke.

Dabei versteht man unter einem vollständigen Viereck eine Figur bestehend aus

- den vier Ecken A, B, C und D ,
- den sechs Seiten a, b, e, f, g und h , die jeweils zwei der Ecken miteinander verbinden,
- den drei Nebenecken P, Q, R , die die fehlenden Schnittpunkte der sechs Geraden definieren, sowie

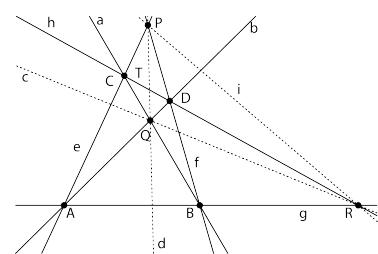


Abbildung 5: Vollständiges Viereck

2. DIE HARMONISCHEN LAGE

- den drei Nebenseiten c, d, i , die durch jeweils zwei Nebenecken verlaufen.

Die Bezeichnungen „trennen sich harmonisch“ ist gleichbedeutend zu den Aussagen wie „liegen harmonisch zueinander“, „sind in Harmonischer Lage“ oder „bilden einen harmonischen Wurf“[vgl. 8, S. 46].

Wir können zur Konstruktion vierer harmonischer Punkte wie in unserem Beispiel vorgehen. Es existieren aber noch andere Möglichkeiten zur Konstruktion des vierten harmonischen Punktes, auf die wir aber nicht genauer eingehen:

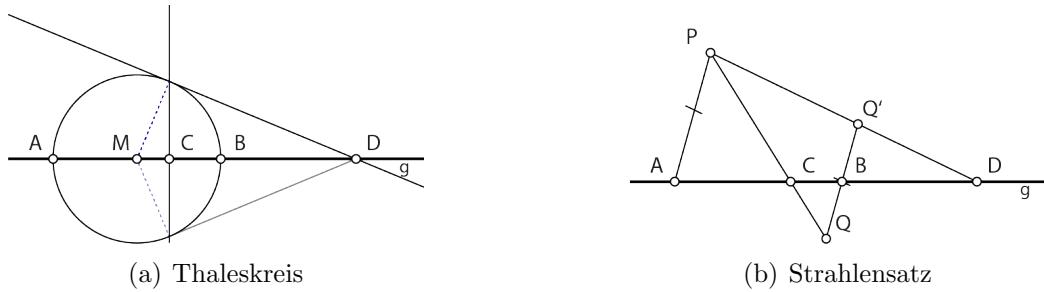


Abbildung 6: Bestimmung des 4. harmonischen Punktes D

2. DIE HARMONISCHEN LAGE

2.3 Die harmonische 13er Konfiguration

Wie wir schon in der Definition der harmonischen Lage gesehen haben, können sowohl Punkte als auch Geraden harmonisch zueinander liegen. Da in den Definitionen sowohl von vollständigen Vierseiten und Vierecke die Rede war und sich diese geometrischen Grundgebilde aufeinander inzidieren lassen, können wir daraus eine harmonische Grundfigur, die sogenannte „harmonische 13er Konfiguration“ bauen. Da wir sowohl ein Vierseit als auch ein Viereck diese Konfiguration beinhaltet, benötigen wir für die Konstruktion der Konfiguration insgesamt 13 Geraden und 13 Punkte, womit auch die Frage nach dem Namen geklärt wäre. Diese 13 Punkte und Geraden bilden sich zusammen

aus den 4 Seiten und 6 Ecken des vollständigen Vierseits,
den 6 Seiten und 4 Ecken des vollständigen Vierecks und
den 3 Seiten und Ecken des gemeinsamen Nebendreiecks/-seits.

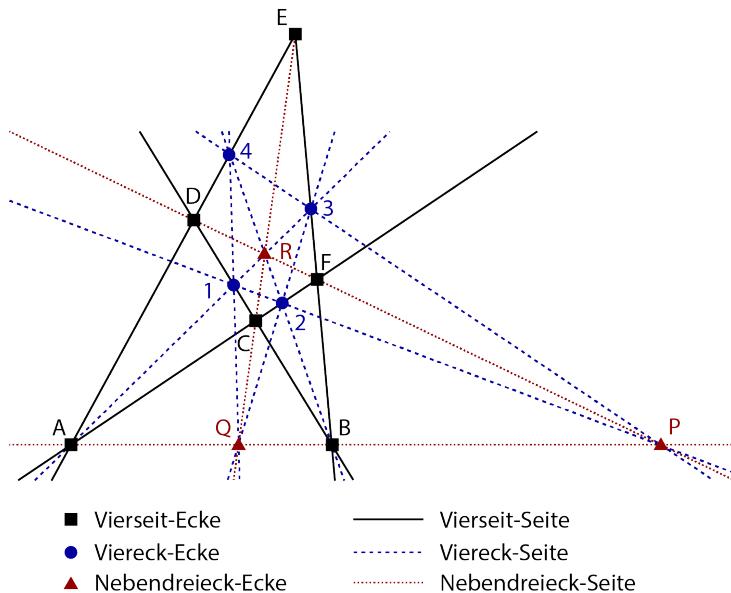
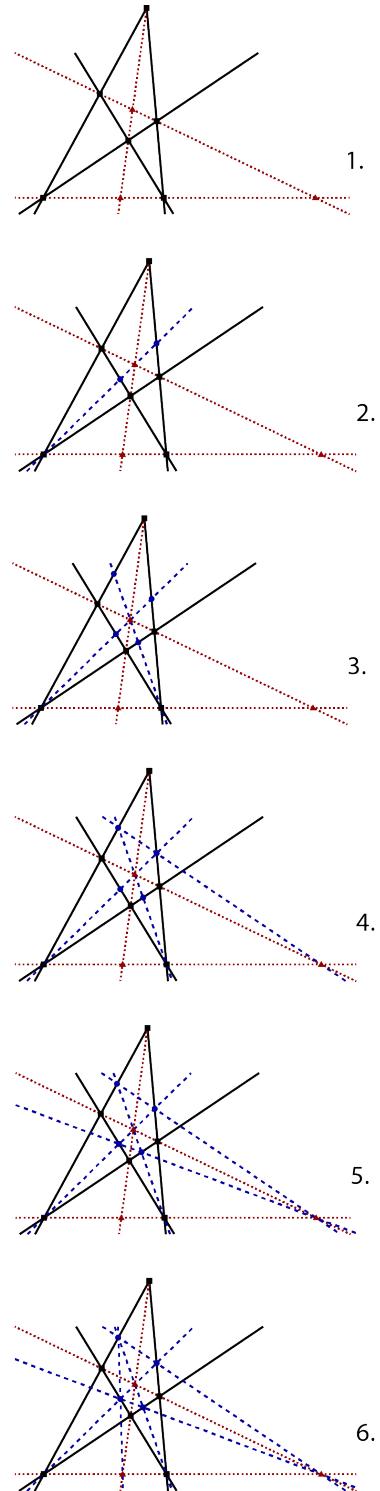


Abbildung 7: Beispiel einer harmonischen 13er Konfiguration

Für die Konstruktion der harmonischen 13er Konfiguration wäre es am einfachsten, mit einem dieser zwei geometrischen Gebilden zu beginnen und darauf die fehlenden Punkte und Geraden aufzubauen.

2. DIE HARMONISCHEN LAGE

In diesem Fall entscheiden wir uns für ein vollständiges Vierseit als Grundkonstrukt. Darin wollen wir nun die Punkte und Geraden eines vollständigen Vierecks bestimmen, das dasselbe Nebendreieck hat und dessen Seiten mit den Ecken inzidieren. Dazu gehen wir wie folgt vor: Zuerst betrachten wir die Ecken des Vierseits, in welche zwei Seiten des Vierseits und eine Seite des Nebendreiecks fallen. In unserer Abbildung wären das die Punkte A , B und E . Dabei lassen wir von diesen drei Punkten die Ecke wegfallen, die mit je einer Seite des Vierseits mit den anderen Punkten verbunden ist. Hier wäre das der Punkt E , sodass wir jetzt nur noch die Ecken A und B betrachten. Von diesen zwei Ecken ziehen wir je eine Gerade aus, die sich alle in derselben Ecke des Nebendreiecks schneiden, mit der sie sich nicht auf einer Nebenseite befinden. In unserem Beispiel ist das R . Dabei bilden die Schnittpunkte der Seiten des Vierseits mit den Geraden die vier Ecken des vollständigen Vierecks, wobei die Punkte A und B nicht dazu gehören. Auch sind die von uns konstruierten Geraden die Seiten unseres gesuchten Vierecks. Schließen wir nun das Viereck, indem wir nun alle Ecken des Vierecks so miteinander verbinden, das immer zwei Ecken auf eine Seite des Vierecks fallen. Damit hätten wir die harmonische Grundfigur geschaffen. In dieser Konstruktionsbeschreibung wurde jedoch der Beweis, dass die Seiten des Vierecks durch die Ecken des Nebendreiecks gehen müssen ausgelassen. Für eine genauere Konstruktion der harmonischen 13er Konfiguration ist das Buch *Projektive Geometrie* von Alexander Stolzenburg Seite 48f zu empfehlen.



2. DIE HARMONISCHEN LAGE

Wenn wir die Konfiguration genauer betrachten lässt sich erkennen, dass die Konfiguration aus lauter harmonische Lagebeziehungen besteht. Auch folgt aus der harmonischen 13er Konfiguration, dass bei den Geraden bzw. Punkten der harmonischen Lage das Dualitätsprinzip gilt: die harmonische Lage hängt nicht von einem ganz speziellen Vierseit/Viereck ab. Ebenso sind die Punktepaare gleichberechtigt, d.h., ob eine Seite/Ecke eine Nebenseite/-ecke oder nicht ist keine Rolle spielt.

Zur Erklärung hier unsere Grundfigur mit anderen hervorgehobenen Linien. Aus der von uns konstruierten Grundfigur können wir nicht nur ein Viereck und ein Vierseit erkennen, sondern gleich mehrere, die wir so nicht vorgesehen hatten. Zusätzlich lässt sich von zwei harmonischen Punkte-/Geradenpaaren eines als Nebenecke/-seite auffassen.

Es lässt sich daraus erkennen, dass jedes einzelne Konstrukt innerhalb unserer Konfiguration die geometrischen Bedingungen der harmonischen Lage erfüllt.
Zusammengefasst ist

- jede Projektion eines harmonischen Punktewurfes ein harmonischer Geradenwurf und
- jeder Schnitt eines harmonischen Geradenwurfs ein harmonischer Punktewurf.

Damit kommen wir zur Schlussfolgerung, dass die harmonische Lage eine projektive Invariante ist.

„Man kann also schneiden und verbinden, soviel man will - einmal harmonisch heißt immer harmonisch. [s. 8, S. 49]“

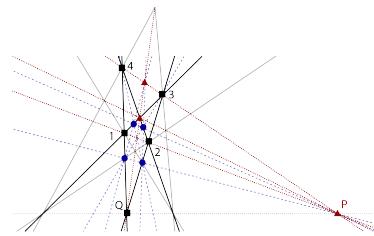


Abbildung 8: Weitere harmonische Grundfiguren in einer bereits vorhandenen

2. DIE HARMONISCHEN LAGE

2.4 Erweiterung auf einen unendlich entfernten Punkt

Unser bisher erlerntes Wissen können wir nun praktisch in die Tat umsetzen. Dabei lehnen wir uns an ein zeichnerisches Beispiel an, das den meisten aus der Schule bekannt sein wird:

Wollen wir eine realistische Darstellung eines Gegenstandes auf Papier banen, so beginnen wir als erstes damit, dass wir die Umgebung mit einer Horizontlinie definieren. Auf dieser Linie wählen wir mindestens einen Punkt aus, zu dem sich unser Gegenstand hin „flüchtet“. Dieser wurde als sogenannter „Fluchtpunkt“ bezeichnet. Bezogen auf unser Thema ist dieser Punkt einer der Punkte, die wir zur Konstruktion der harmonischen Lage benötigen. Zur Konstruktion eines Gegenstandes, wählen wir dazu der Einfachheit eine quadratische Fläche, benötigen wir nur noch vier Geraden: zwei davon schneiden unseren Fluchtpunkt, während die anderen beiden parallel zum Horizont verlaufen (Abb. 9). Die somit entstandene eingeschlossene Fläche ist unser Quadrat auf der projektiven Ebene.

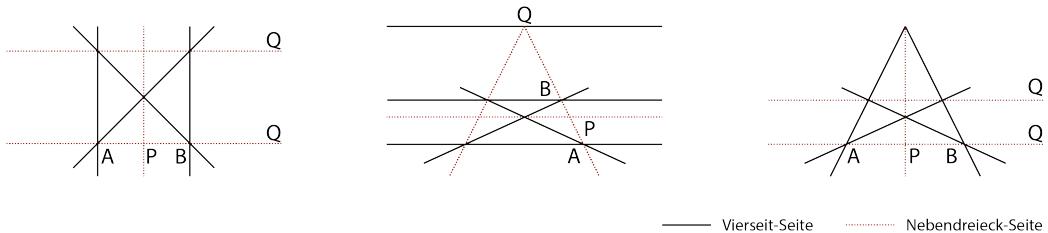


Abbildung 9: Ist der Punkt Q ein unendlicher Fernpunkt, so trennt P die Strecke \overline{AB} in der Mitte

Mit dieser Ausgangssituation können wir die harmonische Lage auf unser Quadrat anwenden. Dabei gehen wir genau so wie in unserem ersten Beispiel aus demselben Kapitel vor und erhalten eine harmonische Figur. Dabei lässt sich erkennen, dass die entstandene horizontale Gerade unser Quadrat in zwei Flächen teilt. Würden wir diese Situation senkrecht von oben betrachten würden wir erkennen, dass diese Gerade unser Quadrat genau in der Mitte teilt. Dabei handelt es sich nicht um einen Sonderfall. Jeder Punkt P , dessen Partner Q ein Fernpunkt ist, teilt die Strecke \overline{AB} immer genau in der Mitte.

Die Begründung ist einfach: Da die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes, wie wir in der harmonischen 13er Konfiguration gesehen haben, nicht von der Wahl des jeweiligen Vierseits abhängt, können wir es uns einfach machen: wir wählen uns ein symmetrisches Vierseit, dessen einen Nebenseite die Symmetrie-Achse ist. Die dritte Nebenseite ist dann parallel zur zweiten [vgl. 8, S. 50].

2. DIE HARMONISCHEN LAGE

Dabei taucht dieser Sachverhalt häufig in perspektivischen Abbildungen auf: Immer dann wenn wir eine Fläche in der Hälfte aufteilen, taucht die harmonische Lage auf, z.B. bei der Konstruktion eines Schachbretts. Dabei entsteht sogar, in Bezug zum Fluchtpunkt, eine Folge von harmonischen Punkten. Genaueres dazu wird in Kapitel 4 aufgegriffen.

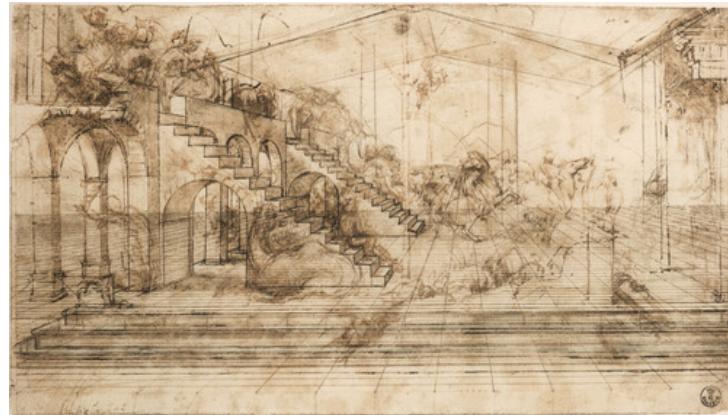


Abbildung 10: Perspektivische Zeichnung von da Vinci, *Perspective Study for The Adoration of the Magi*²

²<http://wtfarthistory.com/post/47457315645/a-start-to-da-vincis-demons>, 30.11.2016

3 Harmonische Lage rechnerisch

Um nicht nur geometrisch oder zeichnerisch auf die harmonische Lage von Punkten/Geraden zu schließen, sondern auch mit Koordinaten arbeiten zu können, wird im folgenden das sogenannte Doppelverhältnis eingeführt. Per Definition ist das Doppelverhältnis das Verhältnis zweier Teilverhältnisse. Da vermutlich einigen Personen der mathematische Hintergrund zu diesem Thema nicht so vertraut sein wird, werden wir uns zuerst mit dem Teilverhältnis beschäftigen.

3.1 Teilverhältnisse

Sehen wir uns drei Punkte A , B und C auf einer Geraden g an. Egal wie wir dieses drei Punkte auf dieser Geraden anordnen, es wird immer ein Punkt die Strecke zwischen seinen beiden Nachbarn in zwei kleinere Teilstrecken aufteilen. Dabei wird das Verhältnis dieser zwei Teilstrecken im allgemeinen definiert als

$$TV(ABC) = \overline{AC} : \overline{BC}$$

Wir sprechen hier vom sogenannten Teilverhältnis TV . Dabei soll \overline{AB} als gerichteter Abstand zwischen A und B verstanden werden. D.h., \overline{AB} und \overline{BA} haben unterschiedliche Vorzeichen. Es gilt:

$$\overline{AB} = -\overline{BA}$$

Man sagt auch, C teilt das Punktpaar (A, B) , bzw. die Strecke \overline{AB} , in diesem Verhältnis [8, S. 76]

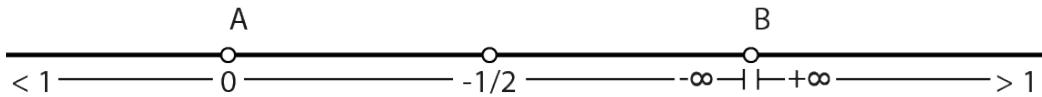
Im Wesentlichen haben wir, wenn wir vom Teilverhältnis sprechen, zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen:

1. Befindet sich der Punkt C zwischen den Punkten A und B (bzw. liegt auf \overline{AB}), so ist das Teilverhältnis negativ. Wir sagen: C teilt das Punktpaar (A, B) „von innen“.
2. Befindet sich der Punkt C außerhalb der Punkte A und B (bzw. liegt nicht auf \overline{AB}), so ist das Teilverhältnis positiv. Wir sagen: C teilt das Punktpaar (A, B) „von außen“.

Wenn wir nun C die gesamte Gerade durchlaufen lassen und beobachten zeitgleich den Wert TV , so können wir feststellen, dass der Wert von TV stets monoton fallend ist. Wenn allerdings der Punkt C auf B fällt, so hat TV den linksseitigen Grenzwert $-\infty$ und den rechtsseitigen Grenzwert $+\infty$.

3. HARMONISCHE LAGE RECHNERISCH

$C:$	Fernp.	vor A	A	zwi. A, B	[Mitte]	B	nach B	Fernp.
TVt	$t = 1 - o$	$0 < t < 1$	$t = 0$	$t < 0$	$[t = -1/2]$	$t = \pm\infty$	$t > 1$	$t = 1 + o$



Da wir nun wissen, was man unter Teilverhältnissen versteht, können wir nun das Doppelverhältnis einführen:

3.2 Das Doppelverhältnis

Wie schon oben erwähnt ist das Doppelverhältnis das Verhältnis von zwei Teilverhältnissen von vier Punkten. Genauer gesagt, ist das Doppelverhältnis DV von vier Punkten A, B, C, D , die auf einer Geraden g liegen, definiert als das Verhältnis von $TV(ABC)$ und $TV(ABD)$:

$$DV(ABCD) = TV(ABC) : TV(ABD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

Anhand dieser Formel kann man erkennen, dass das Vorzeichen des Doppelverhältnisses

- negativ ist, wenn sich die Punktpaare (A, B) und (C, D) trennen. Dabei wird das Paar (A, B) von C und D einmal innen und einmal von außen geteilt. Wir erhalten in den jeweiligen Teilverhältnissen zwei unterschiedliche Vorzeichen.
- positiv ist, wenn sich die Punktpaare (A, B) und (C, D) nicht trennen. Beide Teilverhältnisse sind dann entweder nur positiv oder nur negativ.

Im Buch *Projektive Geometrie* weist der Autor auf folgende Merkmale des Doppelverhältnisses hin:

Wenn $A = B$ oder $C = D$ ist und sonst keine Punkte zusammenfallen, dann ist das $DV = 1$.

Wenn $A = C$ oder $B = D$ ist und sonst keine Punkte zusammenfallen, dann ist das $DV = 0$.

Wenn $A = D$ oder $B = C$ ist und sonst keine Punkte zusammenfallen, dann ist das $DV = \pm\infty$.

Zusätzlich weist obige Formel ein paar interessante Eigenschaften auf, wenn Punkte in dieser Gleichung vertauscht werden [vgl. 8, S. 77]. Das Doppelverhältnis ändert sich nicht, wenn

3. HARMONISCHE LAGE RECHNERISCH

- a) die Punkte innerhalb des 1. und zugleich des 2. Paars vertauscht werden,
- b) das 1. mit dem 2. Paar vertauscht wird, und
- c) sowohl die Paare als auch die Punkte innerhalb beider Paare vertauscht werden; also a) und b) zugleich.

Somit gilt:

$$DV(ABCD) = DV(CDAB) = DV(BADC) = DV(DCBA)$$

Damit ergeben sich auch aus den 24 Kombinationsmöglichkeiten von A, B, C und D folgende sechs verschiedene Zahlwerte [s. 8, S. 77f]:

$$z, \quad \frac{1}{z}, \quad 1-z, \quad \frac{1}{1-z}, \quad \frac{z}{z-1}, \quad \frac{z-1}{z}$$

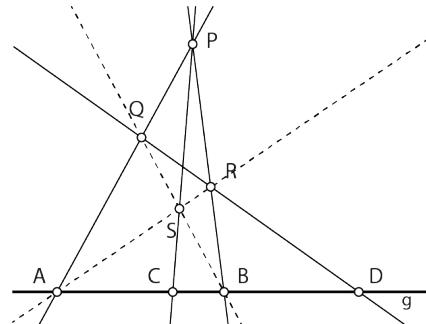
Hierbei ist $z = DV(ABCD)$.

3.3 Harmonische Lage und Doppelverhältnis

Da wir jetzt die wichtigsten Eigenarten des Doppelverhältnisses kennen, stellt sich uns die Frage, wie wir den Bogen zur harmonischen Lage schlagen. Betrachten wir die erste geometrische Konstruktion im Kapitel 2 dieser Arbeit nochmal an. Wir haben gesehen, dass wir zu jedem Punktpaar (A, B) und einem Punkt D einen weiteren Punkt C bestimmen konnten, wobei die Punkte A, B und D festlagen. Wählen wir jetzt nur das Punktpaar (A, B) fest und wählen irgendwo auf g einen beliebigen Punkt D , so können wir auch sagen, dass es zu jedem D genau ein Punkt C gibt, sodass die Punkte A, B, C, D in harmonischer Lage stehen bzw. sich harmonisch teilen.

Betrachten wir nun die zwei Teilverhältnisse $TV(ABC)$ und $TV(ABD)$, so müssen wir feststellen, dass $TV(ABC) = -TV(ABD)$, egal wie wir D wählen.

Stolzenburg beweist diesen Sachverhalt mithilfe des Strahlensatzes. Dabei stellt sich der Autor die Frage, ob es zu einem gegebenen Punktpaar (A, B) zwei Punkte P und Q gibt, die dieses Punktpaar im gleichen Verhältnis



3. HARMONISCHE LAGE RECHNERISCH

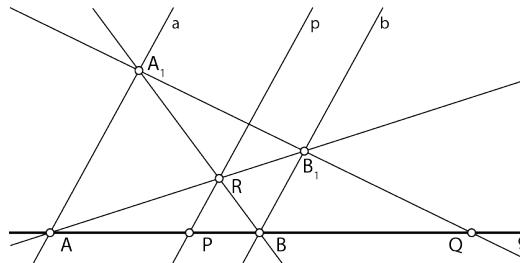


Abbildung 11: Harmonische Lage mit den parallelen Geraden a , b und p

teilen, wobei (A, B) einmal von innen und einmal von außen geteilt werden, sodass

$$TV(ABP) = -TV(ABQ)$$

gelten müsste (vgl. S. 52f). Dabei wird von folgender Ausgangssituation aus gegangen: Auf einer Geraden g befinden sich zwei beliebige Punkte A und B und ein weiterer Punkt P . Es soll ein Punkt Q konstruiert werden, sodass

$$\begin{aligned} TV(ABP) &= -TV(ABQ) \\ \iff \quad \overline{AP} : \overline{BP} &= -\overline{AQ} : \overline{BQ} \end{aligned}$$

Zum besseren Verständnis und besser mit Verhältnissen rechnen zu können, wurde eine Ausgangssituation mit zueinander parallelen Geraden gewählt, um Strahlensätze anwenden zu können (Abb. 11). Mithilfe der Strahlensatzgesetze können wir anhand von A, B und P , einen Punkt Q konstruieren:

$$\begin{aligned} &\overline{AP} : \overline{BP} \\ &= \overline{AR} : \overline{B_1R} \\ &= \overline{AA_1} : \overline{B_1B} \\ &= \overline{QA} : \overline{QB} \\ &= -\overline{AQ} : \overline{BQ} \end{aligned}$$

Daraus lässt sich schließen, dass die zwei Punkte A und B von P und Q von innen und von außen gleich getrennt werden, wenn die Punktpaare in harmonischer Lage sind. Zusätzlich ergibt sich aus der Gleichung, dass zwei Punktpaare (A, B) und (P, Q) genau dann in harmonischer Lage sind, wenn das Doppelverhältnis -1 beträgt:

$$\begin{aligned} TV(ABP) = -TV(ABQ) &\iff TV(ABP) : TV(ABQ) = -1 \\ \iff & DV(ABPQ) = -1 \end{aligned}$$

3. HARMONISCHE LAGE RECHNERISCH

3.4 Das Doppelverhältnis von vier Geraden

Bisher haben wir nur das Doppelverhältnis von Punkten betrachtet, die sich alle auf ein und derselben Gerade befinden. Jedoch kann man die Definition des Doppelverhältnisses zusätzlich auf vier Geraden erweitern.

Wie bei dem Doppelverhältnis von vier Punkten, bei der die Ausgangssituation darauf festgelegt ist, dass diese Punkte sich auf einer gemeinsamen Geraden befinden, gilt für das Doppelverhältnis vierer Geraden a, b, c und d , dass sich diese in einem gemeinsamen Punkt P schneiden (Abb. 12). Dabei wird P auch Projektionszentrum genannt.

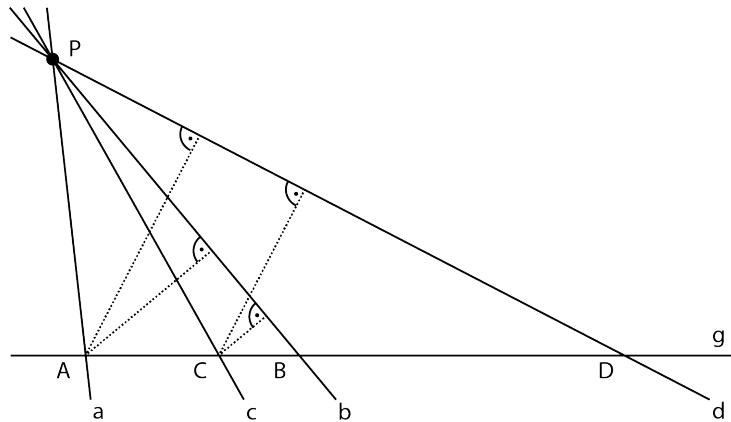


Abbildung 12: Ermittlung der harmonischen Lage durch vier Geraden

Schneiden wir nun diese vier Strahlen mit einer beliebigen Geraden g , wobei diese nicht durch den Punkt P gehen darf, so erhalten wir vier Schnittpunkte A, B, C und D . Weiter fällen wir die Lote von A und C auf b und d mit den Schnittpunkten Q_1, Q_2 und R_1, R_2 . Es entstehen rechtwinklige Dreiecke. Mit dem Strahlensatz sowie dem Sinus (insbesondere dem Verhältnis von Gegenkathete und Hypotenuse) lässt sich jetzt unsere vorher bekannte Definition des Doppelverhältnisses auf folgende Formel umändern [s. 8, S. 80]:

$$\begin{aligned}
 DV(ABCD) &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \\
 &= \frac{\overline{AQ}_1}{\overline{BQ}_2} : \frac{\overline{AR}_1}{\overline{BR}_2} \\
 &= \frac{\overline{AP} * \sin(ab)}{\overline{BP} * \sin(cb)} : \frac{\overline{AP} * \sin(ad)}{\overline{BP} * \sin(bd)} \\
 &= \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}
 \end{aligned}$$

3. HARMONISCHE LAGE RECHNERISCH

Somit können wir nicht nur das Doppelverhältnis anhand von Punkten auf einer Geraden g bestimmen, sondern auch durch die Geraden der Punkte, die sich auf einem von g außerhalb liegenden Punkt schneiden. Das bedeutet auch, egal was für eine Gerade wir nehmen, dass das Doppelverhältnis das Gleiche ist. Vorausgesetzt, dass sich die Geraden a, b, c und d in P schneiden und g nicht durch P geht. Daran können wir auch erkennen, dass das Doppelverhältnis eine projektive Invariante ist. Ebenso trifft dies auf die harmonische Lage zu, was wir aber auch durch Invarianzen in Kapitel 2.3 gesehen haben.

4 Harmonisches Mittel und harmonische Folge

Die Bezeichnung „harmonisch“ taucht nicht nur in der projektiven Geometrie auf. Allerdings können wir diese zwei auf den ersten Blick unterschiedliche Themengebiete in Verbindung bringen:

4.1 Harmonisches Mittel

Der Begriff des arithmetischen Mittels ist ein sehr geläufiger Begriff. Dabei handelt es sich beim arithmetischen Mittel um den Mittelwert, der die Summe der betrachteten Zahlen durch dessen Anzahl geteilt wird.

$$x_a = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

Ebenso bekannt in der Mathematik ist auch der sogenannte harmonische Mittelwert. Das harmonische Mittel ist das Gegenstück zum arithmetischen Mittel, bzw. der Kehrwert des harmonischen Mittels das arithmetische Mittel der Kehrwerte:

$$\frac{1}{x_h} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}}{n}$$

Somit ist das harmonische Mittel

$$x_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}}.$$

Betrachten wir zwei Werte a und b , so genügt uns die Formel

$$x_h = \frac{2ab}{a+b}.$$

Der Zusammenhang zwischen der harmonischen Lage und dem harmonischen Mittel lässt sich einfach miteinander verbinden. Denn vom Kapitel über das Doppelverhältnis wissen wir, dass sich zwei Punktepaare (A, B) und (C, D) sich harmonisch trennen, wenn sie sich innen und außen gleich teilen:

$$|TV(ABC)| = |TV(ABD)|$$

Definieren wir $b = |\overline{AB}|$, $c = |\overline{AC}|$ und $d = |\overline{AD}|$. Durch umformen ergibt sich

4. HARMONISCHES MITTEL UND HARMONISCHE FOLGE

$$\begin{aligned}
 |TV(ABC)| &= |TV(ABD)| \\
 \iff \frac{c}{b-c} &= \frac{d}{d-b} \\
 \iff cd - cb &= db - cd \\
 \iff 2cd &= d(c+b) \\
 \iff \frac{2cd}{c+d} &= b,
 \end{aligned}$$

woraus wir erkennen können, dass b das harmonische Mittel von c und d ist. Indem wir einen Punkt auf unserer Geraden festlegen und mithilfe zweier Abstände zu gegebenem Punkt zwei weitere Punkte bestimmen, können wir mit dem harmonischen Mittelwert den vierten Punkt berechnen. Legen wir Punkt A als Nullpunkt fest, können wir die Abstände als Koordinaten definieren.

Ein Sonderfall bei der Auswahl unseres Punktes tritt dann auf, wenn wir den vierten Punkt so wählen, dass dieser ein Fernpunkt ist. Ist dies der Fall tritt hier sogar das arithmetische Mittel auf. Dies liegt daran, dass wir zwar immer noch das harmonische Mittel vorliegen haben, aber unser gewählter Punkt im Bezug zum Fernpunkt ∞ steht [s. 2, S. 44].

Diese Sachverhalte sind gut in den sogenannten Möbius'sche Netze nachzuvollziehen (Abb. 4). Indem wir ein solches Netz aufbauen, können wir unendlich viele harmonische Punkte hinzu konstruieren: in die eine Richtung verdichtend, in die andere ausdehnend. Definieren wir unsere 3 Grundpunkte als $0, 1$ und ∞ , lassen sich sehr schöne Zahlenfolgen konstruieren. Dabei fällt auf, wenn wir von einer ausgesuchten Zahl n unserer Konstruktion seine beiden Nachbarn $n-1$ und $n+1$ betrachten, dass n das harmonische Mittel von $n-1$ und $n+1$ ist. Somit ist das harmonische Mittel Bestandteil harmonischer Lage-Beziehungen von Punkten.

4. HARMONISCHES MITTEL UND HARMONISCHE FOLGE

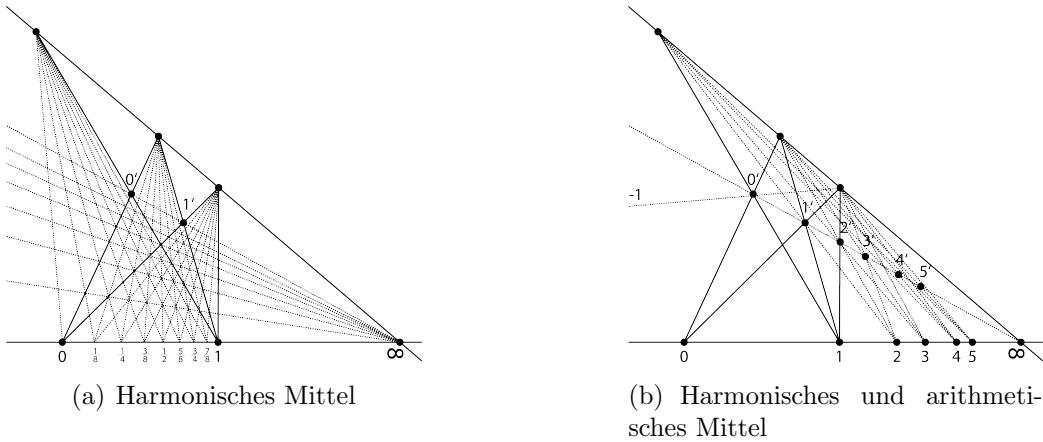


Abbildung 13: Möbius'sche Netze in Verdichtung und Dehnung

4.2 Harmonische Folge

Auch bekannt im Bereich der Zahlenfolgen ist die harmonische Folge. Dabei ist jedes Glied dieser Folge der Kehrwert der positiven ganzen Zahlen und somit Kehrwert der Glieder einer arithmetischen Folge:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad n \geq 1$$

Des Weiteren ist jedes Glied der Folge (mit der Voraussetzung $n \geq 2$) das harmonische Mittel seiner beiden Nachbarglieder. Betrachten wir die harmonische Folge als Funktion, so konvergiert diese gegen 0:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

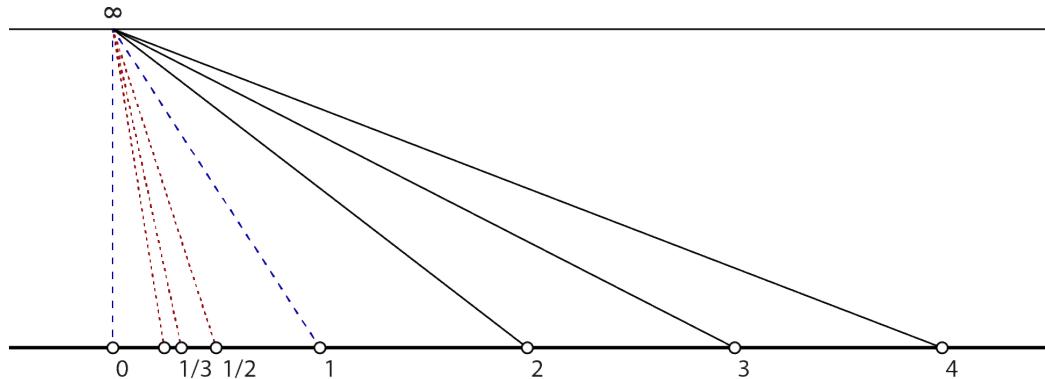
Auch zu beachten bei der harmonischen Folge ist, wenn jedes Folgenglied mit einer Konstanten multipliziert wird, dass daraus wieder eine harmonische Folge entsteht.

Beziehen wir die harmonische Folge auf die harmonische Lage von Punkten: Zur Vereinfachung legen wir A als Nullpunkt fest, damit wir anstelle von Abständen mit Koordinaten arbeiten können. Der Partner von A sei der Punkt B , den wir mit 1 identifizieren. Legen wir nun einen Punkt D fest, der Folgenglied einer arithmetischen Folge ist, so erhalten wir mithilfe des Kehrwertes den Punkt C . Dabei trennt B die Punkte C und D im harmonischen Mittel. Wir können also für $D \geq 1$ immer das passende harmonische

4. HARMONISCHES MITTEL UND HARMONISCHE FOLGE

Folgenglied bestimmen und erhalten zwischen 0 und 1 für alle Punkte von C eine harmonische Folge. Dabei ist der Gegenpunkt von C , nämlich der Punkt D , das Folgenglied einer arithmetischen Folge. Wenn wir demnach eine Skala zeichnen, auf der wir die harmonische sowie die arithmetische Folge haben, und verbinden die Punkte der Skala mit einem beliebigen Punkt P außerhalb davon, so erhalten wir einen Wurf harmonischer Geraden. Dabei treten folgende harmonische Punktpaar-Beziehungen für die harmonische Folge $\frac{1}{n}$ und die arithmetische Folge n mit jeweils $n \geq 1$ auf:

- $(0, 1)$ und $\left(\frac{1}{n}, n\right)$ für $n \geq 1$,
- $(n - 1, n + 1)$ und (n, ∞) für $n \geq 2$, sowie
- $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ und $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$ für $n \geq 2$.



5 Harmonische Lage und Goldener Schnitt

Bevor wir den theoretischen Teil beenden und uns der Praxis zuwenden können, fehlt uns noch ein einzelner Aspekt in der geometrischen und arithmetischen Mathematik, bei dem wir ebenfalls die harmonische Lage vorfinden: nämlich dem Phänomen des Goldenen Schnittes.

Der Goldene Schnitt tritt seit der Antike in vielen Bereichen der Geometrie, Architektur, Musik, Kunst sowie der Philosophie. Heutzutage treffen wir den Goldenen Schnitt auch in Technik und Gestaltung an. Dabei ist der Goldene Schnitt kein isoliertes Phänomen, sondern in vielen Fällen das erste und somit einfachste nichttriviale Beispiel im Rahmen weiterführender Verallgemeinerungen [s. 11, S. 5].

Beim Goldenen Schnitt handelt es sich um ein Teilverhältnis (wir erinnern uns Kapitel 3.1), welches in verschiedenen geometrischen und arithmetischen Situationen erscheint. Dieses Teilverhältnis ist definiert als das Verhältnis zweier Streckenabschnitte zueinander, die sich genauso verhalten wie die der längere Abschnitt zur gesamten Strecke:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$$

Setzen wir $c = 1$, können wir das Verhältnis des Goldenen Schnittes bestimmen:

$$\frac{1-x}{x} = x.$$

Durch umformen erhalten wir eine quadratische Gleichung

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Diese hat die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618$$

und

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,618.$$

Da x positiv sein muss, muss x_1 unsere Lösung sein. Somit ist die Zahl des Goldenen Schnittes $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Der Kehrwert ist dann $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

5. HARMONISCHE LAGE UND GOLDENER SCHNITT

Da wir sowohl bei der harmonischen Lage als auch beim Goldenen Schnitt von Teilverhältnissen sprechen, können wir diese zwei geometrischen Aspekte miteinander verbinden.

Nehmen wir dazu folgende Situation an: Auf einer Geraden befinden sich zwei Punkte A und B , deren Strecke \overline{AB} von einem weiteren Punkt C im Goldenen Schnitt geteilt wird. Demnach ist das Teilverhältnis $TV(ABC) = \overline{AC} : \overline{BC}$ gleich dem Teilverhältnis $TV(CBA) = \overline{CA} : \overline{BA}$. Dies kann auch anhand der Vertauschungsregeln aus Kapitel 3.1 nachgeprüft werden:

Sei $TV(ABC) = z$, so ist

$$\begin{aligned} TV(ABC) &= \overline{AC} : \overline{BC} \\ &= \frac{z}{1-z} \\ &= TV(CBA). \end{aligned}$$

Hier ist aber zu beachten, dass wir hier ungerichtete Abstände betrachten. Indem wir nun mithilfe der harmonischen Lage weitere Punkte und Abstände bestimmen können, die zueinander im Goldenen Schnitt stehen, erhalten wir dadurch eine Folge von Abständen mit dem Teilverhältnis $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Daraus lässt sich schließen, wenn wir eine Folge von Längen und Abständen im Goldenen Schnitt begegnen, so ist diese Folge auch harmonisch.

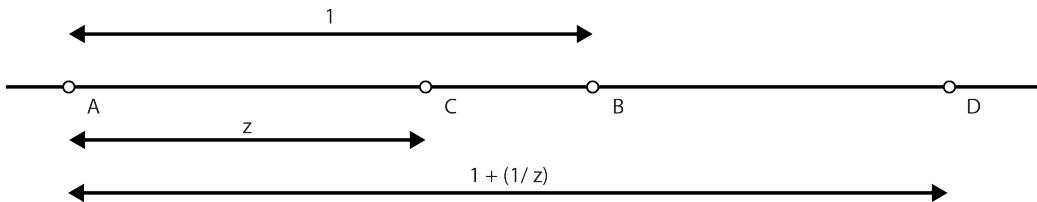


Abbildung 14: Goldener Schnitt und harmonische Lage

6 Harmonische Lage in der Gestaltung

6.1 Harmonie in der Malerei

Viele von uns verbinden den Begriff der Perspektive meist mit fotorealistischen Gemälden und Bildern. Tatsächlich fand die Perspektive nach ihrer Wiederentdeckung im 15. Jahrhundert, wahrscheinlich um 1413 [6, S. 27], neben der Geometrie auch hauptsächlich in der Bildenden Kunst bzw. der Malerei Anwendung. Vor ihrer Entdeckung mussten sich die Maler an einem Kanon von Regeln halten. Mit diesen Regeln sollte es den Künstlern möglich sein, einigermaßen räumliche Szenen darzustellen. Jedoch beruhten diese auf keinerlei wissenschaftlich gesicherten Einsichten.

Fangen wir also ganz zu Beginn an: Die ersten Aufzeichnungen der Wiederentdeckung der Perspektive lassen sich in den Schriften vom Biographen Antonio Mannetti finden. Diese handeln allerdings nicht von Erkenntnissen, die Mannetti entdeckt hatte, sondern beschreiben die Arbeiten des Bildhauers und Architekten Filippo Brunelleschi. Dieser hatte in einem seiner ersten Experimente ein Miniaturenbild der Florentiner Taufkapelle möglichst genau im kleineren Maßstab gezeichnet. Zusätzlich legte er den Himmel mit poliertem Silber aus, um den realen Himmel darauf abbilden zu können. Doch benutzte er das Werk nicht zur Zurschaustellung: Brunelleschi bohrte in den Eingangsbereich der Taufkapelle ein Loch. Durch dieses Loch sollte ein Betrachter von der Rückseite des Bildes auf das Gebäude sehen. Dabei sollte der Betrachter an einer von Brunelleschi bestimmten Stelle stehen. Der zweite Teil des Experiments bestand darin, einen Spiegel zwischen Gebäude und Abbildung zu stellen, sodass die Sicht vom Spiegel verdeckt wurde. Allerdings sah der Betrachter nun die von Brunelleschi hergestellte Abbildung. Die illusionistische Wirkung musste überwältigend gewesen sein [6, S. 28f].

Interessant ist jedoch hier, dass Brunelleschi es geschafft hatte, die mathematische Theorie des Sehens von Euklid mit der Theorie der Zentralprojektion zu verbinden. Dabei befindet sich das Guckloch des Bildes genau im Projek-

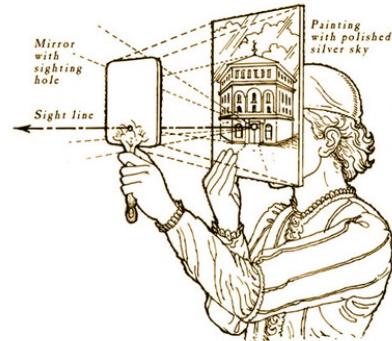


Abbildung 15: Das Spiegelexperiment³

³www.medien-gesellschaft.de/html/geschichte_des_sehens.html, 30.11.2016

6. HARMONISCHE LAGE IN DER GESTALTUNG

tionszentrum und Hauptfluchtpunkt des Bildes [6, S. 30].

Im Jahre 1435/36 veröffentlichte Leon Battista Alberti in seinen *Drei Bücher über die Malerei* die theoretischen Grundlagen, die Filippo Brunelleschi verwendet hatte. Dabei beschrieb er den Horizont und den Fluchtpunkt. Aus Brunelleschis Experimenten erfuhr Alberti, dass parallel verlaufende Strecken auf einen Punkt hin konvergieren, der unendlich weit vom Betrachter weg scheint. Um aber ein Maß zwischen Bildfläche und Fluchtpunkt bestimmen zu können und Distanzen auf der perspektivischen Zeichenfläche besser darzustellen, ging Alberti wie folgt vor:

Für ein anschauliches Maß betrachtete Alberti quadratische Fliesen auf dem Boden. Er legte fest, dass ein Mensch, oder genauer gesagt die Augenhöhe eines Menschen, durchschnittlich 3 *braccia* (ital. für „Arme“) beträgt. Dabei entsprechen drei *braccia* ungefähr 174 cm. Mit dieser Angabe legte er die Horizontlinie fest. Den unteren Rand des Bildes unterteilte Alberti gleichmäßig in die Anzahl der Fliesen in der horizontalen. Dann wurde der Hauptfluchtpunkt festgelegt, der nach Alberti auf Augenhöhe liegen musste. Somit musste dieser Punkt auf der Horizontlinie liegen. Mit diesen Punkt verband Alberti die maßgebenden Punkten am unteren Bildrand, sodass mehrere Pyramiden entstanden. Damit wären schon mal die Parallelen Linien in die Tiefe geschaffen.

Bisher wurde immer die Pyramiden im Verhältnis 2 : 3 geteilt, womit ein abgefalschtes Maß der Linien entstanden, die parallel zum Horizont liegen. Denn je nach dem wie weit sich der Betrachter von der Bildfläche entfernt, mussten die Abstände zwischen diesen Parallelen in einem natürlichen Maß verkleinert werden. Alberti nahm sich dazu im Gegensatz zur bisherigen Vorgehensweise was anderes vor. Er konstruierte sich eine Seitenansicht des Geschehens, wo sich Bild, Kacheln und sogar der Betrachter der Szene befinden. Indem er wusste, mit welchem Abstand sich der Betrachter vom Bild weg befindet, konnte er den Augenpunkt exakt bestimmen. Die Strecke hinter der Bildfläche unterteilte Alberti wieder in der Anzahl der Fliesen. Diese Unterteilungspunkte verband er mit dem Augenpunkt. Dabei gaben die Schnittpunkte der Verbindungsstrecken mit der Bildfläche die Positionen der Parallelen im Bild an (Abb. 16, [vgl. 6, S. 31ff]).

Mit dieser sehr geschickt gewählten Methode war es ab sofort möglich, jegliche Gegenstände perspektivisch Korrekt darzustellen. Im Laufe der Jahre wurde Albertis perspektivische Konstruktion von Personen wie Albrecht Dürer und Leonardo DaVinci (s. Abb. 10) auf mehrere Fluchtpunkte ausgedehnt und mathematisch begründet. Doch kann dies als Grundstein für die nachkommenden perspektivischen Werke in der Kunstgeschichte betrachtet werden. Dabei kann die Konstruktion solcher perspektivischen Raster nicht nur zum Bildrand parallele Flächen angewandt werden, sondern sie kann

6. HARMONISCHE LAGE IN DER GESTALTUNG

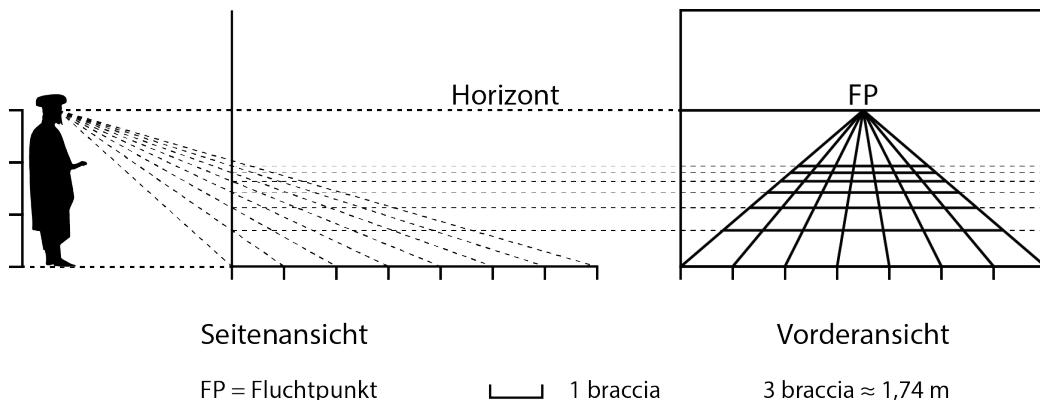


Abbildung 16: Zeichnerischer Weg zur Zentralperspektive nach Leon Battista Alberti

auch für vertikale und schräge Raster verwendet werden.

Tatsächlich sollte auch hier unser geschultes Auge erkennen, dass solche und andere perspektivischen Konstruktionen unserer Definition von harmonischen Punkten und Geraden entsprechen. Hier taucht sogar die Harmonische Lage mehrfach auf: Zum einen in der fertigen Konstruktion, zum anderen aber auch bei den Verbindungslinien zwischen der Skala und dem Augenpunkt (s. Kapitel 4.2).

In dem wir weitere harmonische Geraden bilden, können wir unser Netz verfeinern. Zusätzlich können wir das Wissen über die Bildung einer harmonischen Geraden bezüglich eines Fernpunktes dazu verwenden, um die Mitte von Abständen zu berechnen.

Egal ob wir nur einen oder mehrere Fluchtpunkte in unserem Bild haben, alle auf diesen Punkt konvergierende Geraden stehen immer in harmonischer Lage zueinander. Indem wir ähnlich Alberti perspektivische Raster durch die Konstruktion harmonischer Punkte erhalten, ist die Harmonische Lage ein Maß für den menschlichen Sehsinn, den wir auch für Bilder, Gemälde o.ä. verwenden können.

6. HARMONISCHE LAGE IN DER GESTALTUNG

6.2 Harmonische Lage in der heutigen Gestaltung

6.2.1 Satzspiegel



Abbildung 17: Konstruktion nach Van de Graaf bei einem mittelalterlichen Manuskript⁴

Die Kunstgeschichte zeigt, dass in sämtlichen Bereichen der Gestaltung versucht wurde, sei es die Malerei, die Architektur o.Ä., harmonische Strukturen zu erfassen und zu nutzen. Hierbei bildet der Druck, die klassische Art von Design, keinerlei Ausnahme: hat sich der Typograph für ein Seitenformat entschieden, so gilt es als nächstes, einen Satzspiegel zu wählen. Dabei muss der Typograph die Verhältnisse und Kompositionen der Ränder zueinander so wählen, dass sie zusammen ein harmonisches Gesamtbild ergeben. Für eine allgemeine Formel einer harmonischen Zusammenstellung der Ränder und des Satzspiegels haben zahlreiche Typogra-

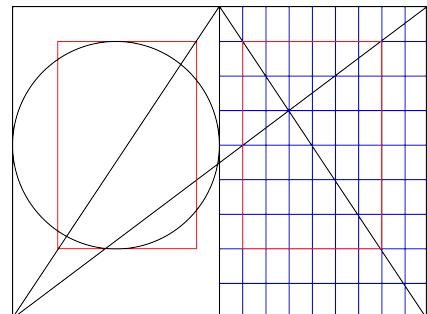


Abbildung 18: Satzspiegelkonstruktion nach Jan Tschichold (links) und Pául Rosarivo (rechts)⁵

⁴<http://2.bp.blogspot.com/-T1sKx1wT9js/URJxAQ28tvI/AAAAAAAADI/cvYVApTef0/s1600/van+de+graaf+5+-+Resurreccion+de+lazaro.jpg>, 30.11.2016

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Canons_of_page_construction, 30.11.2016

6. HARMONISCHE LAGE IN DER GESTALTUNG

phen unterschiedliche Regeln und Kanons aufgestellt. Zu den bekanntesten des 20. Jahrhunderts zählen Raúl Rosarivo und Jan Tschichold. Dazu haben sie sich die schönsten Manuskripte ausgesucht und anhand dieser die ihnen zugrunde liegenden Muster zu harmonischen Konstruktionen zusammen gestellt.

Nach Jan Tschichold lag den schönsten Manuskripten ein Kanon zugrunde, nach dem die Höhe des Satzspiegels von der Breite der Seite abhängt (Abb. 18). Rosarivos Konstruktion dagegen basierte auf einer Neunerteilung der Seite, sodass eine Seite in 81 gleiche Felder strukturiert wird. Dabei waren Außensteg und Fußsteg stets doppelt so groß wie die von ihnen gegenüberliegenden Ränder (Bundsteg und Kopfsteg). Dem Kanon nach Van de Graaf hingegen genügten stets nur Wenige Linien, um die Proportionen eines harmonischen Satzspiegels zu erhalten [10, S. 44].

All diese unterschiedlichen Konstruktionen basieren auf einem Seitenformat von 2:3, 5:8 oder 34:21, also der Annäherung des Goldenen Schnittes nach Fibonacci [9]. Doch liegt all diesen Konstruktionen ein ähnliches geometrisches Grundgerüst vor. Wenn wir nur einmal die Diagonalen der einzelnen Seiten und der Doppelseite betrachten, erkennen wir hier unsere harmonische Konstruktion wieder:

Doch diese drei Konstruktionen zur Bestimmung einer harmonischen Seiten-

Komposition sind keine wahren Neuentdeckungen: bereits im 13. Jahrhundert beschrieb der Architekt Villard de Honnecourt einen ähnlichen Kanon wie die drei oben beschriebenen. Jedoch hat er diesen Kanon so ausgelegt, dass dieser eine Seite in ein 3er, 6er, 9er oder 12er Raster teilt. Auch diese Konstruktion entspricht einer Anordnung harmonischer Punkte und Geraden[3, S. 28].

Mittels solcher Konstruktionen Fußsteg und Außensteg einer Seite breiter festgelegt als Bund- und Kopfsteg. Dies bewirkt aber den gewünschten Effekt, dass die Hand, die das Buch oder die Seite meist im untersten Bereich festhält, nie Platz zum Lesen beansprucht. Daher wenden selbst heutzutage viele Layouter immer noch solche oder ähnliche Randverhältnisse in der Praxis an.

Ab dem Zuge der sogenannten Schweizer Schule wurden bezüglich des Seiten-

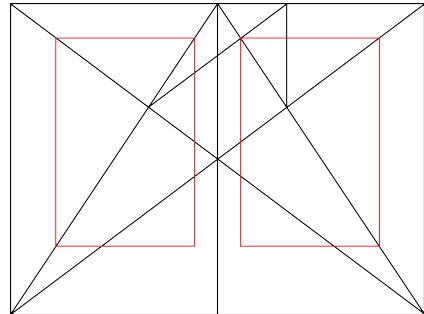


Abbildung 19: Satzspiegel von Van de Graf⁶

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Canons_of_page_construction, 30.11.2016

6. HARMONISCHE LAGE IN DER GESTALTUNG

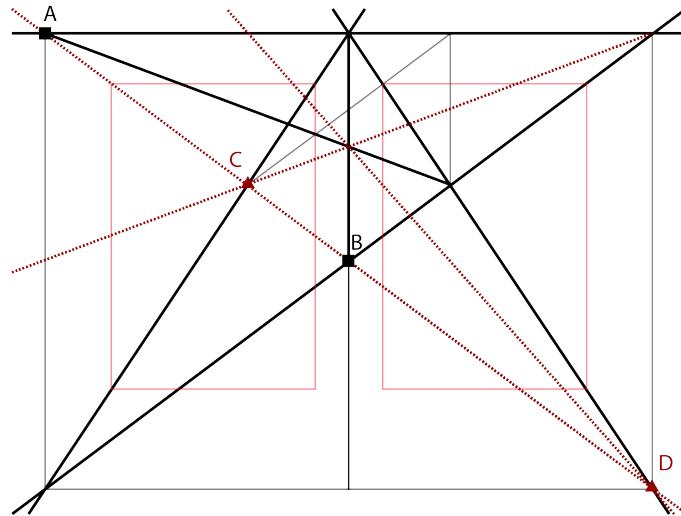


Abbildung 20: Harmonische Lage im Satzspiegel

aufbaus Experimente durchgenommen, um neue Formen zur Gestaltung von Satzspiegel und Raster hervorzubringen. Unter anderem wurde das Prinzip der Übertragung eingeführt, bei dem die Symmetrie am Bund aufgehoben wird. Dennoch basieren moderne Prinzipien immer noch relativ häufig auf den historischen Konstruktionen oder werden leicht umgewandelt.



Abbildung 21: Modernes Anwendungsbeispiel des Van de Graaf'schen Kanons⁷

⁷<http://4.bp.blogspot.com/Y3C80iBqw/TnMRcN2yYgI/AAAAAAAAC7k/r2AEp1IYXrU/s1600/spread1.jpg>, 30.11.2016

6. HARMONISCHE LAGE IN DER GESTALTUNG

6.2.2 Gestaltungsraster

In den vorherigen Kapiteln haben wir räumliche Strukturen mithilfe der harmonischen Lage in Raster unterteilt und diese in einem zweidimensionalen Bild abgebildet. Im Prinzip haben wir einen ähnlichen Vorgang, wenn wir uns Rastersysteme in der Gestaltung von Flächen ansehen. Wir sprechen hier von Gestaltungsrastern, wie sie sowohl im Web- als auch Seitenlayout Anwendung finden. Wie im projektiven Raum wenden Typographen und Gestalter bei zu gestaltenden Flächen Raster an, um so ein harmonische und systematische Organisation der Gestaltungselemente zu erzielen.

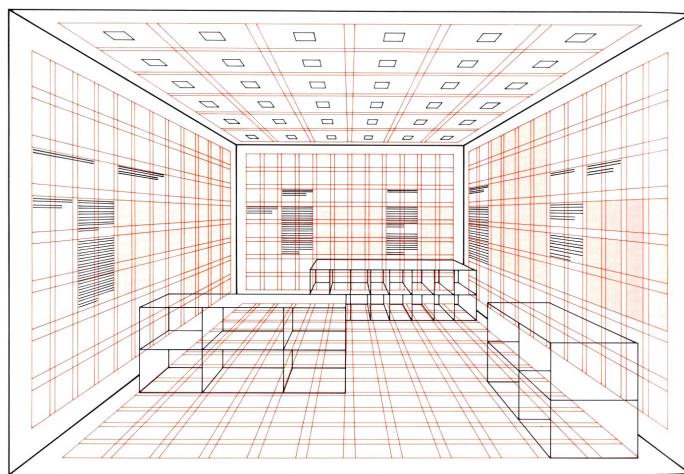


Abbildung 22: Gestaltungsraster im Raum von [4, S. 148]

Wie im Kapitel 6.1 zu sehen war, haben wir den Raum in ein gleichmäßiges Netz von Feldern unterteilt, um darauf später Gegenstände, Personen oder Gebäude platzieren zu können. Gleiches Vorgehen nutzen wir auch im Gestaltungsraster, jedoch beziehen sich hier unsere Maßen nicht nur auf Koordinaten, sondern auf Punkt, Cicero und Pixel.

Wie gehen wir also vor, wenn wir unser Format festgelegt haben? Dabei steht immer an erster Stelle die Analyse des Problems: welches Format soll genutzt werden, was liegt mir alles an Bild- und Textmaterial vor, welche Schriftart wähle ich, ...

Sind die meisten dieser Fragen beantwortet, lohnt es sich Skizzen zu zeichnen. Zuerst sollte sich uns die Frage stellen, in wie viele Spalten/Kolonnen das Format unterteilt werden soll. Dabei bieten mehr Spalten einen größeren Gestaltungsspielraum als weniger Spalten. Jedoch bewirken zu viele Spalten, dass die Textzeilen relativ schmal werden und die Schriftgrade dementsprechend kleiner gewählt werden. Hier ist zu beachten, dass zwischen den

6. HARMONISCHE LAGE IN DER GESTALTUNG

Spalten ein Durchschuss berücksichtigt werden muss. Im Allgemeinen orientiert sich der Zeilen- oder Spalten-Durchschuss, ob vertikal oder horizontal, an der Höhe einer einzelnen Textzeile. Dabei wird diese Höhe anhand der Schriftgröße inklusive Durchschuss bestimmt (Abb. 23).



Abbildung 23: Berechnung der Textzeilenhöhe

Ist die Anzahl der Spalten festgelegt, müssen diese im folgenden Schritt in mehrere Zeilen unterteilt werden, um unsere Rasterfelder zu erhalten. Hier gilt ebenso wie bei den Spalten die Berücksichtigung eines Durchschusses nach Ende einer Zeile, mit Ausnahme der letzten. Zur Bestimmung der Höhe unserer einzelnen Rasterfelder muss beachtet werden, dass diese einer geraden Anzahl an Textzeilen entsprechen. Zusätzlich muss die Summe aller Textzeilen und Zeilendurchschüsse eine gerade Zahl ergeben, die unserem Rahmen entspricht. Als Ergebnis erhalten wir ein harmonisches Flächenraster, auf dem wir unsere Gestaltungselemente aufbauen können.

Bekannte und häufig in der Anwendung zu finden sind Raster mit 8, 20 oder 32 Feldern. Dabei bieten sich dem Gestalter bei der Wahl seiner Module ein reiches Angebot an Variationsmöglichkeiten.

Auch können wir hier die harmonische Lage von Geraden vorfinden: betrachten wir die Diagonalen unserer Module und legen fest, dass sie sich alle in einem Punkt schneiden, so bilden diese einen harmonischen Geradenwurf. Dabei steht dieser harmonische Wurf in Bezug zu der Seite der Module, die den Diagonalen gegenüberliegt. Wie in Kapitel 4.2 haben wir eine arithmetische Folge von Koordinaten gegeben und wie wir gesehen haben stehen diese in harmonischer Lage. Somit stehen alle Module in einem harmonischen Kontext.

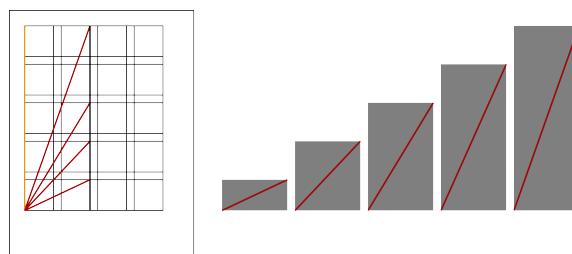


Abbildung 24: Harmonische Lage im Raster

6. HARMONISCHE LAGE IN DER GESTALTUNG

6.3 Gestaltung und Goldener Schnitt

Der Goldene Schnitt ist die ideale Relation, die wir so in der Natur vorfinden. Gerade wegen dieser natürlichen Schönheit findet der Goldene Schnitt immer noch Anwendung in Kunst und Design. Jedoch wird meist nicht der reine Goldene Schnitt sondern seine Annäherung der Fibonacci-Zahlen praktiziert. Dafür sprechen wir hier nur von einer angenäherter Form harmonischer Proportionen. Trotzdem bietet die Fibonacci-Folge ein übergeordnetes System an, nach dem wir Objekte anordnen können. So können wir diese harmonische Annäherung für die Gestaltung von Rastern, Logos oder Schriftsätze verwenden.



Abbildung 25: Logogestaltung⁸

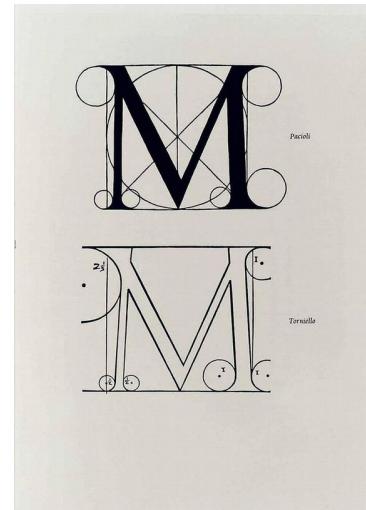
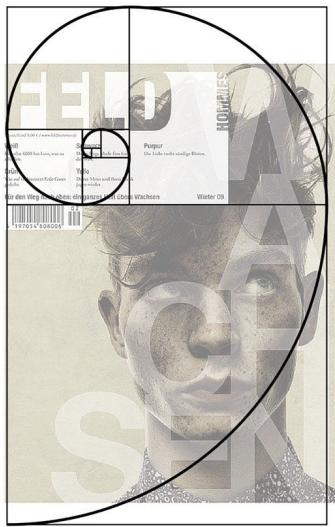


Abbildung 26: Links: Die Goldene Spirale im Gestaltungsraster, Rechts: Konstruktion eines Buchstabens mithilfe des Goldenen Schnitts⁹

⁸<https://www.behance.net/gallery/43218905/Logo-Collection-with-Golden-Ratio-2016>, 30.11.2016

⁹<http://www.invaluable.com/artist/bodoni-giambattista-epx6zw0xcj>, 30.11.2016;

<https://designschool.canva.com/blog/what-is-the-golden-ratio/>, 30.11.2016

7. ZUSAMMENFASSUNG

7 Zusammenfassung

Immer wenn wir perspektivische Abbildungen betrachten, seien es Fotos, Gemälde oder unsere alltägliche Wahrnehmung, können wir Strukturen der harmonischen Lage erfassen. Daher können wir ihr zu recht eine fundamentale Bedeutung zuschreiben.

Es gibt verschiedene Wege, auf die harmonische Lage von Punkten und Geraden zu schließen. Zum einen wären da die geometrisch zeichnerischen Zugänge über das vollständige Viereck/Vierseit, den Thaleskreis oder auch den Strahlensatz. Zum anderen haben wir auch einen rechnerischen Weg über das Doppelverhältnis kennengelernt, mit dessen Hilfe wir sogar die einzelnen Punkte bestimmen können.

Gemeinsam haben aber alle Zugänge, dass ein gegebenes Punkte- oder Geradenpaar von zwei weiteren im selben Verhältnis innen und außen geteilt haben. Zusätzlich lässt sich aus einer gegebenen harmonischen Konstruktion weitere harmonische Figuren bilden, sodass sich daraus ein harmonisches Raster ergibt.

Wie wir auch im Kapitel des Goldenen Schnittes gesehen haben, hängt auch die harmonische Lage mit der natürlichen Schönheit von Objekten zusammen. In der Gestaltung können wir dies dazu nutzen, um schöne und harmonische Raster zu konstruieren. Gerade aber in der Gestaltung dienen solche Raster als Richtlinien und zur Orientierung, damit wir Module und Objekte in einem harmonischen Kontext anordnen zu können. Wie gesagt, diese Strukturen dienen nur als Richtlinien. Das letzte Wort in der Grafik-Gestaltung obliegt am Ende immer dem persönlichen Empfinden des Gestalters.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildungsverzeichnis

1	Ein harmonischer Säulengang	2
2	Geometrische Konstruktion der harmonischen Lage	3
3	Eine andere Wahl der Geraden	4
4	Vollständiges Vierseit	5
5	Vollständiges Viereck	5
6	Bestimmung des 4. harmonischen Punktes D	6
7	Beispiel einer harmonischen 13er Konfiguration	7
8	Weitere harmonische Grundfiguren in einer bereits vorhandenen	9
9	Ist der Punkt Q ein unendlicher Fernpunkt, so trennt P die Strecke \overline{AB} in der Mitte	10
10	Perspektivische Zeichnung von da Vinci, <i>Perspective Study for The Adoration of the Magi</i> ²	11
11	Harmonische Lage mit den parallelen Geraden a , b und p . . .	15
12	Ermittlung der harmonischen Lage durch vier Geraden	16
13	Möbius'sche Netze in Verdichtung und Dehnung	20
14	Goldener Schnitt und harmonische Lage	23
15	Das Spiegelexperiment ³	24
16	Zeichnerischer Weg zur Zentralperspektive nach Leon Battista Alberti	26
17	Konstruktion nach Van de Graaf bei einem mittelalterlichen Manuskript ⁴	27
18	Satzspiegelkonstruktion nach Jan Tschichold (links) und Pául Rosarivo (rechts) ⁵	27
19	Satzspiegel von Van de Graaf ⁶	28
20	Harmonische Lage im Satzspiegel	29
21	Modernes Anwendungsbeispiel des Van de Graaf'schen Kanons ⁷	29
22	Gestaltungs raster im Raum von [4, S. 148]	30
23	Berechnung der Textzeilenhöhe	31
24	Harmonische Lage im Raster	31
25	Logogestaltung ⁸	32
26	Links: Die Goldene Spirale im Gestaltungs raster, Rechts: Kon- struktion eines Buchstabens mithilfe des Goldenen Schnitts ⁹ . .	32

LITERATUR

Literatur

- [1] Ute Rosenbaum Albrecht Beutelspacher. *Projektive Geometrie*. vieweg studium, 1992.
- [2] Hansjörg Bögle. *Die harmonische Lage von vier Punkten bzw. vier Geraden*. JUPITER, 2014.
- [3] Paul Harris Gavin Ambrose. *Das Layout-Buch*. Stiebner Verlag GmbH, 2015.
- [4] Josef Müller-Brockmann. *Rastersysteme für die visuelle Gestaltung*. Niggli Verlag, 1981.
- [5] Bodo Pareigis. *Analytische und projektive Geometrie für die Computergrafik*. B. G. Teubner Stuttgart, 1990.
- [6] Klaus Rehkämper. *Bilder, Ähnlichkeit und Perspektive*. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2002.
- [7] Jürgen Richter-Gebert. *Perspectives on Projective Geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [8] Alexander Stolzenburg. *Projektive Geometrie*. edition waldorf, 2009.
- [9] Typolexikon. *Villardscher-Teilungskanon*.
<http://www.typolexikon.de/villardscher-teilungskanon/>, 02.12.2016.
- [10] Damien und Claire Gautier. *Gestaltung, Typografie etc. - Ein Handbuch*. Niggli Verlag, 1981.
- [11] Hans Walser. *Der Goldene Schnitt*. B. G. Teubner Stuttgart, Leipzig; vdf, Hoschulverlag an der ETH, 1996.
- [12] Hans Walser. *Projektive Abbildungen, zeichnerischer Zugang*. 2002.
- [13] Wertesysteme.de. *Harmonie*. <http://www.wertesysteme.de/alle-werte-definitionen/g-h-i-j/harmonie/>, 30.11.2016.