Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων – Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Μεταπτυχιακό Μάθημα
(Δ3) ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ
Ακαδημαϊκό Έτος 2023-2024

[**Εργασία 2**]

1 Εισαγωγή

Η χωροθέτηση εγκαταστάσεων (αποθηκών, μονάδων παραγωγής προϊόντων κ.λ.π.) αποτελεί βασικό και κρίσιμο στοιχείο της εφοδιαστικής αλυσίδας. Η βέλτιστη γεωγραφική τοποθέτηση συνεισφέρει στη μείωση του κόστους λειτουργίας των εταιρειών, κυρίως σε επίπεδο εφοδιασμού και διανομής προϊόντων, αλλά και στην εγγύτερη επαφή με τους πελάτες.

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί ένα πρόβλημα γεωγραφικής χωροθέτησης των αποθηκών μιας εταιρείας με στόχο την ελαχιστοποίηση του ημερήσιου κόστους λειτουργίας της. Το κόστος αυτό προέρχεται, αφενός, από την καθημερινή εξυπηρέτηση ενός αριθμού πελατών στην ευρύτερη περιοχή των Ιωαννίνων, στους οποίους διανέμονται προϊόντα με βάση τη ζήτησή τους, και, αφετέρου, από τη διαχείριση των παραγγελιών και τα πάγια έξοδα λειτουργίας των αποθηκών.

Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιηθούν γενετικοί αλγόριθμοι (genetic algorithms – GAs) και η μέθοδος σμήνους σωματιδίων (particle swarm optimization – PSO). Η απόδοση των αλγορίθμων θα αναλυθεί στατιστικά προκειμένου να προκύψουν συμπεράσματα για την ικανότητά τους να επιλύουν τον συγκεκριμένο τύπο προβλήματος.

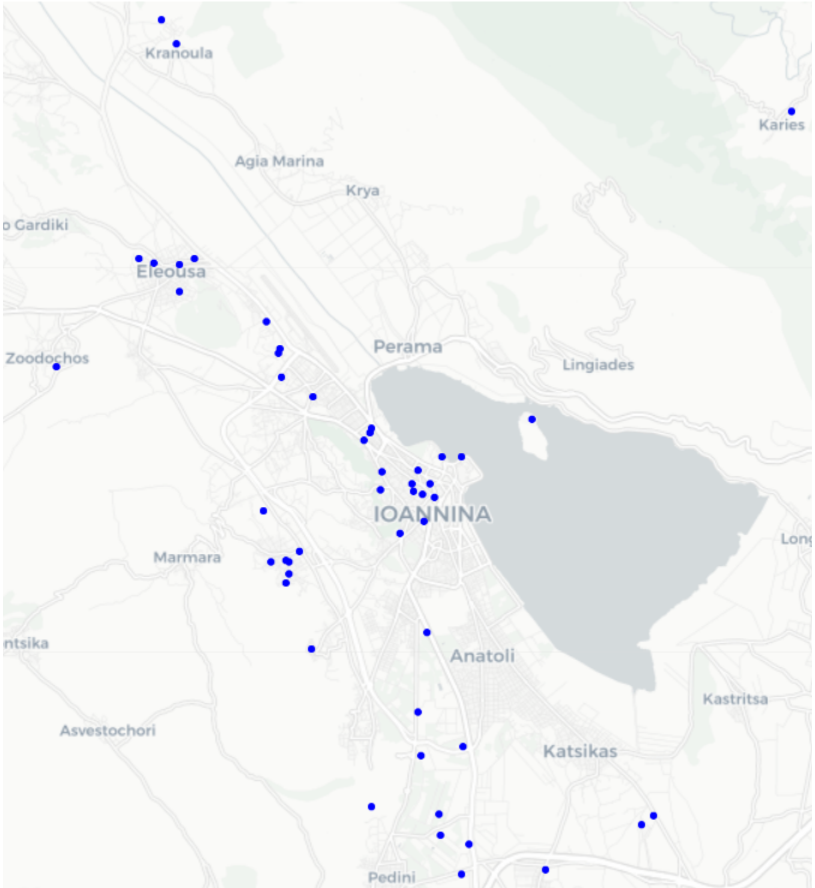
2 Αναλυτική περιγραφή

Μια εταιρεία εξυπηρετεί ημερησίως με διανομές ενός συγκεκριμένου προϊόντος ένα σύνολο 50 πελατών στην περιοχή των Ιωαννίνων. Στο παρεχόμενο αρχείο `customer_coordinates.xlsx` δίνονται οι γεωγραφικές συντεταγμένες (latitude και longtitude) των 50 πελατών καθώς και η μέση ημερήσια ζήτηση μονάδων προϊόντος του καθενός. Στο Σχήμα 1 αναπαρίστανται οι θέσεις των πελατών στον χάρτη.

Η εταιρεία σκοπεύει να εγκαταστήσει αποθήκες εντός της ορθογώνιας περιοχής που οριοθετείται από τις μέγιστες και ελάχιστες συντεταγμένες των πελατών. Οι δυνατότητες που εξετάζονται είναι η κατασκευή μίας ή δύο ή τριών αποθηκών στην περιοχή αυτή και η ανάθεση πελατών, αντιστοίχως, σε καθεμιά αποθήκη. Η διανομή των προϊόντων γίνεται αυθημερόν από την εκάστοτε αποθήκη και αυτόνομα για κάθε πελάτη. Δηλαδή, το όχημα διανομής ξεκινά από την αποθήκη, παραδίδει στον συγκεκριμένο πελάτη κι επιστρέφει πίσω στην αποθήκη για να παραλάβει την παραγγελία του επόμενου. Θεωρούμε ότι ο ρυθμός εξυπηρέτησης για κάθε αποθήκη είναι επαρκής για να καλύψει το σύνολο των ημερησίων διανομών που πρέπει να γίνουν από αυτή.

Το κόστος λειτουργίας κάθε αποθήκης υπολογίζεται από το άθροισμα των αποστάσεων (σε km) που διανύει ημερησίως το όχημα διανομής για να εξυπηρετήσει όλους τους πελάτες που έχουν ανατεθεί στη συγκεκριμένη αποθήκη, πολλαπλασιασμένο επί το μέσο κόστος λειτουργίας του οχήματος ανά χιλιόμετρο που καθορίζεται στα 1,97 €/km.

Επιπλέον αυτού του κόστους, υπάρχει ημερήσιο κόστος εξόδων συσκευασίας των διανεμόμενων μονάδων του προϊόντος, το οποίο υπολογίζεται (ανά αποθήκη) κλιμακωτά σε 0,05 €/μονάδα προϊόντος για αποθήκες που συσκευάζουν μέχρι και 500 μονάδες προϊόντος, 0,04 €/μονάδα προϊόντος για αποθήκες που συσκευάζουν από 501 μέχρι και 1000 μονάδες προϊόντος, και 0,03 €/μονάδα προϊόντος από 1001 μονάδες προϊόντος και πάνω. Η κλιμακωτή



Σχήμα 1: Οι θέσεις των 50 πελατών που εξυπηρετούνται καθημερινά από την εταιρεία.

χρέωση προκύπτει από έκπτωση στα έξοδα συσκευασίας ανάλογα με την προμηθευόμενη ποσότητα της αποθήκης. Τέλος, υπάρχουν πάγια ημερήσια έξοδα λειτουργίας καθεμιάς αποθήκης που ανέρχονται στα 20,00 € ημερησίως.

Το συνολικό ημερήσιο κόστος της εταιρείας θα είναι το άθροισμα όλων των παραπάνω κοστών για όλες τις αποθήκες που τελικά θα λειτουργήσουν (1 ή 2 ή 3). Για απλοποίηση του προβλήματος θεωρούμε ότι δεν υφίστανται άλλες δαπάνες εφοδιασμού των αποθηκών από τη μονάδα παραγωγής του προϊόντος ή περιορισμοί χωρητικότητας αποθηκών και οχημάτων. Το συνολικό ημερήσιο κόστος της εταιρείας πρέπει να ελαχιστοποιηθεί με ταυτόχρονη επιλογή (α) του αριθμού των αποθηκών που θα χρησιμοποιηθούν, (β) της βέλτιστης τοποθέτησής τους στον χάρτη και συγκεκριμένα στο ορθογώνιο που καθορίζεται από τις συντεταγμένες των πελατών, καθώς και (γ) της βέλτιστης ανάθεσης πελατών σε καθεμιά αποθήκη.

Ως προς την τοποθεσία των αποθηκών, η περιοχή των Ιωαννίνων εμφανίζει την ιδιαιτερότητα της λίμνης, εντός των ορίων της οποίας δεν μπορεί να τοποθετηθεί αποθήκη. Για να απλοποιηθεί το πρόβλημα, θα θεωρήσουμε ότι η λίμνη είναι ένα τρίγωνο που ορίζεται από τα τρία σημεία στο βόρειο-δυτικό άκρο, στο νότιο άκρο και στο ανατολικό άκρο (οι 3 μύτες που φαίνονται στο Σχήμα 1), τα οποία έχουν συντεταγμένες:

Σημείο	Latitude	Longtitude
North-West	39.688367	20.838671
South	39.632539	20.901448
East	39.666708	20.929109

Όλες οι τοποθεσίες που βρίσκονται στο εσωτερικό (και στο σύνορο) του τριγώνου θα πρέπει να θεωρούνται μη εφικτές από τον αλγόριθμο.

Για την αναλυτική μαθηματική περιγραφή του προβλήματος, ας συμβολίσουμε με:

$$C_{\text{km}} = 1.97, \qquad C_{\text{op}} = 20, \tag{1}$$

το κόστος λειτουργίας του οχήματος ανά km και το πάγιο κόστος ημερήσιας λειτουργίας μιας αποθήκης, αντίστοιχα. Επίσης, έστω:

$$C_{\text{pk}}(d) = \begin{cases} 0.05, & \text{αν } d \leqslant 500, \\ 0.04, & \text{αν } 500 < d \leqslant 1000, \\ 0.03, & \text{αν } d > 1000, \end{cases} \tag{2}$$

το κόστος συσκευασίας ανά μονάδα προϊόντος για κάθε αποθήκη, με $d > 0$ να είναι οι μονάδες προϊόντος (ζήτηση) που ημερησίως εξυπηρετεί η αποθήκη.

Έστω ότι κάθε πελάτης της εταιρείας καθορίζεται μονοσήμαντα από έναν αριθμό (id πελάτη) που για απλότητα θα υποθέσουμε ότι είναι ένας ακέραιος. Έτσι, αν έχουμε N πελάτες, το σύνολο πελατών της εταιρείας μπορεί να δοθεί απλά ως:

$$J = \{1, 2, \ldots, N\}\,. \tag{3}$$

Το αντίστοιχο σύνολο με τη μέση ημερήσια ζήτηση καθενός πελάτη μπορεί να αναπαρασταθεί ως:

$$D = \{d_1, d_2, \ldots, d_N\}\,, \tag{4}$$

με τα d_i να είναι οι αντίστοιχες τιμές που δίνονται στο αρχείο `customer_coordinates.xlsx` για $N = 50$. Η θέση καθενός πελάτη στον χάρτη καθορίζεται από το αντίστοιχο ζεύγος συντεταγμένων (latitude, longtitude) που δίνονται στο ίδιο αρχείο και θα συμβολίζεται ως:

$$p_j = \left(\text{lat}_j, \text{long}_j\right), \quad j \in J. \tag{5}$$

Έστω ότι η εταιρεία λειτουργεί με M αποθήκες και με w_i συμβολίζουμε την αντίστοιχη θέση της i αποθήκης για $i \in I = \{1, 2, \ldots, M\}$. Η θέση αυτή θα δίνεται επίσης ως ένα ζεύγος συντεταγμένων:

$$w_i = (\text{lat}_i, \text{long}_i)\,, \quad i \in I. \tag{6}$$

Αν $J_i \subseteq J$ είναι το σύνολο των πελατών που εξυπηρετούνται από την i αποθήκη, τότε προφανώς θα ισχύει ότι:

$$J = \cup_{i \in I} J_i \quad \text{και} \quad J_k \cap J_l = \varnothing,\ \forall k, l \in I,\ k \neq l. \tag{7}$$

Επίσης, η συνολική ζήτηση που εξυπηρετείται από την i αποθήκη θα δίνεται ως:

$$sd_i = \sum_{j \in J_i} d_j, \quad \forall i \in I. \tag{8}$$

Για κάθε πελάτη $j \in J$ θα συμβολίζουμε με $h_j \in I$ την αποθήκη στην οποία έχει αυτός ανατεθεί για να εξυπηρετηθεί. Οπότε και:

$$h_j = i \;\Leftrightarrow\; j \in J_i, \quad \forall i \in I, j \in J. \tag{9}$$

Έστω ότι η απόσταση μεταξύ του j πελάτη και της i αποθήκης (σε km) συμβολίζεται με:

$$t_{ij} = \text{distance}(w_i, p_j), \quad i \in I,\ j \in J_i. \tag{10}$$

Προκειμένου να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς και να αποφύγουμε τη χρήση του Google Maps για τον ακριβή υπολογισμό αποστάσεων, θα υποθέσουμε ότι η απόσταση υπολογίζεται προσεγγιστικά με χρήση του τύπου Haversine:

$$t_{ij} = 2\,R\,\arcsin\left(\sqrt{\sin^2\left(0.5\,\delta_{\text{lat}}\right) + \cos\left(\text{lat}_j\,m\right)\,\cos\left(\text{lat}_i\,m\right)\,\sin^2\left(0.5\,\delta_{\text{long}}\right)}\right), \tag{11}$$

για κάθε $i \in I$, $j \in J_i$, όπου:

$$\delta_{\text{lat}} = (\text{lat}_j - \text{lat}_i)\;m, \qquad \delta_{\text{long}} = \left(\text{long}_j - \text{long}_i\right)\;m, \tag{12}$$

με $m = 0.0174532925$ να είναι η τιμή μιας μοίρας σε ακτίνια και $R = 6371$ km η ακτίνα της Γης. Έτσι, η συνολική (προσεγγιστική) απόσταση που θα διανύσει ημερησίως το όχημα της i αποθήκης είναι:

$$st_i = \sum_{j \in J_i} t_{ij}, \quad i \in I. \tag{13}$$

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, το συνολικό ημερήσιο κόστος της i αποθήκης θα δίνεται ως εξής:

$$C_i = \underbrace{C_{\text{op}}}_{\text{operational cost}} + \underbrace{sd_i\, C_{\text{pk}}(sd_i)}_{\text{packing cost}} + \underbrace{st_i\, C_{\text{km}}}_{\text{delivery cost}}, \tag{14}$$

οπότε το αντίστοιχο πρόβλημα βελτιστοποίησης που πρέπει να επιλυθεί είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού ημερήσιου κόστους της εταιρείας:

$$\min_{M, w_i, J_i, i \in I} \; C_{\text{total}} \triangleq \sum_{i \in I} C_i. \tag{15}$$

Το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί με διάφορους τρόπους είτε ως πρόβλημα πραγματικών τιμών είτε ως μεικτών ακεραίων, ανάλογα με την επιλεχθείσα αναπαράσταση.

3 Θέματα υλοποίησης

Το διάνυσμα των αγνώστων θα πρέπει να κωδικοποιεί το πλήθος M των αποθηκών, το οποίο στην περίπτωσή μας είναι 1 ή 2 ή 3 (ακέραιη μεταβλητή), τις συντεταγμένες w_i, $i \in I = \{1, 2, \ldots, M\}$, καθεμιάς αποθήκης (ζεύγη πραγματικών αριθμών), αλλά και την ανάθεση καθενός πελάτη σε μία από τις αποθήκες (ακέραιες μεταβλητές).

Δεδομένου ότι το πλήθος των αποθηκών M είναι μεταβλητή απόφασης, το διάνυσμα των αγνώστων θα έπρεπε να έχει μεταβαλλόμενο μέγεθος. Ωστόσο, ένας απλός τρόπος να κωδικοποιηθεί όλη η παραπάνω πληροφορία με πραγματικούς αριθμούς χωρίς να αλλάζει το μέγεθος του διανύσματος κάθε φορά είναι να θεωρήσουμε ένα διάνυσμα πραγματικών αριθμών μέγιστου μήκους $N + 2\,M + 1$, δηλαδή στην περίπτωσή μας μήκους 57 για $N = 50$, $M = 3$:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_{57}) \tag{16}$$

με τις συνιστώσες του ως εξής:

Θέση:	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$	57
Συνιστώσα:	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\cdots$	x_{57}
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\cdots$	$\downarrow$
Μεταβλητή:	M	lat_1	long_1	lat_2	long_2	lat_3	long_3	h_1	$\cdots$	h_{50}
		συντεταγμένες των 3 αποθηκών						*αναθέσεις πελατών*		

Η πρώτη θέση του διανύσματος κωδικοποιεί τη μεταβλητή M, οι επόμενες 6 θέσεις (θέσεις 2–7) κωδικοποιούν τα ζεύγη συντεταγμένων των τριών αποθηκών και οι υπόλοιπες 50 θέσεις (θέσεις 8–57) κωδικοποιούν τις μεταβλητές h_j των πελατών, δηλαδή σε ποια αποθήκη έχει ανατεθεί ο καθένας. Το διάνυσμα x περιέχει τη μέγιστη δυνατή πληροφορία (δηλαδή για $M = 3$). Αν το M πάρει τιμή μικρότερη του 3, τότε οι πλεονάζουσες συνιστώσες του διανύσματος x μπορούν να αγνοηθούν στον υπολογισμό του κόστους.

Ένα άλλο ζήτημα είναι η αναπαράσταση των ακεραίων με πραγματικούς αριθμούς. Γενικά, μια ακέραιη μεταβητή $u \in \{1, 2, \ldots, U\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί με μια πραγματική μεταβλητή $y \in [0.0, 1.0]$ διαμερίζοντας το διάστημα $[0.0, 1.0]$ σε U ισομεγέθη υποδιαστήματα. Στη συνέχεια, η u λαμβάνει την ακέραια τιμή που δηλώνει η y ως εξής:

$$u_y = \begin{cases} 1, & \text{αν } y \in [0.0, 1/U], \\ 2, & \text{αν } y \in (1/U, 2/U], \\ 3, & \text{αν } y \in (2/U, 3/U], \\ \vdots & \vdots \\ U, & \text{αν } y \in ((U-1)/U, 1.0]. \end{cases} \tag{17}$$

Κατ΄ αυτόν τον τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνιστώσα x_1 του διανύσματος απόφασης x, όπως το ορίσαμε παραπάνω, θα παίρνει τιμές στο διάστημα $[0.0, 1.0]$ και αυτές θα αποκωδικοποιούνται ως τιμές της ακέραιης μεταβλητής M ως εξής:

$$M = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_1 \in [0.0, 1/3], \\ 2, & \text{αν } x_1 \in (1/3, 2/3], \\ 3, & \text{αν } x_1 \in (2/3, 1.0]. \end{cases} \tag{18}$$

Οι συντεταγμένες lat_i, long_i, $i \in I$ (συνιστώσες $x_2, \ldots, x_7$) είναι από μόνες τους πραγματικοί αριθμοί οπότε δεν χρειάζονται αποκωδικοποίηση. Αντίθετα, οι συνιστώσες h_j είναι επίσης ακέραιοι και παίρνουν τιμές στο σύνολο $I = \{1, 2, \ldots, M\}$. Οπότε, αφού αποκωδικοποιηθεί το x_1 και καθοριστεί η τιμή του M, καθεμιά από αυτές μπορεί να πάρει μια ακέραιη τιμή από 1 εώς M αποκωδικοποιώντας τις αντίστοιχες συνιστώσες του διανύσματος x ως εξής:

$$h_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_{7+j} \in [0.0, 1/M], \\ 2, & \text{αν } x_{7+j} \in (1/M, 2/M], \\ \vdots & \vdots \\ M, & \text{αν } x_{7+j} \in ((M-1)/M, 1.0], \end{cases} \qquad \forall j \in J. \tag{19}$$

Με την παραπάνω αναπαράσταση, οι περισσότερες συνιστώσες του x ανήκουν στο διάστημα $[0.0, 1.0]$. Οπότε, θα ήταν βολικό να ανήκουν και οι υπόλοιπες συνιστώσες στο ίδιο διάστημα, δηλαδή και οι συντεταγμένες των αποθηκών που δίνονται από τις συνιστώσες $x_2, \ldots, x_7$. Αυτό μπορεί να γίνει πολύ εύκολα αν υποθέσουμε ότι $x_2, \ldots, x_7 \in [0.0, 1.0]$ και οι συντεταγμένες προκύπτουν από τον μετασχηματισμό:

$$\mathrm{lat}_i = x_l\, \Delta_{\mathrm{lat}} + \mathrm{lat}_{\min}, \qquad \mathrm{long}_i = x_{l+1}\, \Delta_{\mathrm{long}} + \mathrm{long}_{\min}, \tag{20}$$

με $i = 1, 2, 3$, $l = 2\,i$, και:

$$\Delta_{\mathrm{lat}} = \mathrm{lat}_{\max} - \mathrm{lat}_{\min}, \qquad \Delta_{\mathrm{long}} = \mathrm{long}_{\max} - \mathrm{long}_{\min}, \tag{21}$$

με $\mathrm{lat}_{\max} = 39.7506861$, $\mathrm{long}_{\max} = 20.9345622$, να είναι οι μέγιστες και $\mathrm{lat}_{\min} = 39.6003201$, $\mathrm{long}_{\min} = 20.7660648$, οι ελάχιστες τιμές των latitude και longtitude των πελατών που δόθηκαν στο αρχείο `customer_coordinates.xlsx`. Έτσι, το διάστημα $[0.0, 1.0]$ ουσιαστικά μετασχηματίζεται στο ορθογώνιο που καθορίζεται από τις συντεταγμένες των πελατών.

Με βάση τα παραπάνω, το διάνυσμα απόφασης x αποτελείται από συνιστώσες που θα παίρνουν τιμές αποκλειστικά στο διάστημα $[0.0, 1.0]$ και μπορούμε πλέον να λύσουμε εύκολα το πρόβλημα με οποιοδήποτε αλγόριθμο. Ως παράδειγμα αποκωδικοποίησης του διανύσματος απόφασης, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μόνο 8 πελάτες (για συντομία αναπαράστασης) και το διάνυσμα απόφασης:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
0.097	0.823	0.695	0.317	0.950	0.034	0.439	0.382	0.766	0.795	0.187	0.490	0.446	0.646	0.709

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $x_1 \leqslant 0.3333$ άρα $M = 1$ (μία αποθήκη) και το υπόλοιπο διάνυσμα αποκωδικοποιείται ως εξής: οι συνιστώσες που δίνουν τις συντεταγμένες της μοναδικής αποθήκης είναι οι $x_2 = 0.823$ και $x_3 = 0.695$. Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό της Σχέσης (20) αυτές μεταφράζονται σε:

$$\mathrm{lat}_1 = 39.724071318, \qquad \mathrm{long}_1 = 20.890857054.$$

Οι υπόλοιπες συνιστώσες που αντιστοιχούν σε συντεταγμένες αποθηκών (δηλαδή οι $x_4 - x_7$) αγνοούνται. Επίσης, απευθείας θέτουμε όλα τα $h_j = 1$ αφού έχουμε $M = 1$ (δεν απαιτείται αποκωδικοποίηση των $x_8 - x_{15}$).

Εναλλακτικά, αν αντί της παραπάνω τιμής είχαμε $0.333 < x_1 \leqslant 0.666$, π.χ. $x_1 = 0.567$, τότε το $M = 2$ και θα είχαμε πλέον συντεταγμένες και για τη δεύτερη αποθήκη, οι οποίες θα προέκυπταν από τις συνιστώσες $x_4 = 0.317$ και $x_5 = 0.950$ ως εξής:

$$\text{lat}_2 = 39.647986122, \qquad \text{long}_2 = 20.93664414.$$

Επίσης, η ανάθεση του j πελάτη σε αποθήκη θα ήταν $h_j = 1$ (αποθήκη 1) αν $x_{7+j} \leqslant 0.5$ και $h_j = 2$ (αποθήκη 2) αν $x_{7+j} > 0.5$, για $j = 1, \ldots, 8$. Οπότε στην αποθήκη 1 θα πήγαιναν οι πελάτες 8, 11, 12 και 13, ενώ στην αποθήκη 2 θα πήγαιναν οι 9, 10, 14 και 15.

Αν η x_1 είχε τιμή $x_1 > 0.666$, π.χ. $x_1 = 0.823$, τότε το $M = 3$ και θα είχαμε συντεταγμένες και για την τρίτη αποθήκη, οι οποίες θα προέκυπταν από τις συνιστώσες $x_6 = 0.034$ και $x_7 = 0.439$ ως εξής:

$$\text{lat}_3 = 39.605432544, \qquad \text{long}_3 = 20.844890411.$$

Επίσης, η ανάθεση του j πελάτη σε αποθήκη θα ήταν $h_j = 1$ (αποθήκη 1) αν $x_{7+j} \leqslant 0.333$, $h_j = 2$ (αποθήκη 2) αν $0.333 < x_{7+j} \leqslant 0.666$ και $h_j = 3$ (αποθήκη 3) αν $x_{7+j} > 0.666$, για κάθε j. Οπότε στην αποθήκη 1 θα πήγαινε ο πελάτης 11, στην αποθήκη 2 θα πήγαιναν οι πελάτες 8, 12, 13 και 14, ενώ στην αποθήκη 3 θα πήγαιναν οι 9, 10 και 15. Άρα καταλαβαίνουμε ότι το ίδιο διάνυσμα συνιστωσών μπορεί να αποκωδικοποιηθεί διαφορετικά ανάλογα με την τιμή της συνιστώσας x_1 που καθορίζει το M.

Ένα άλλο σημείο που απαιτεί προσοχή είναι το τρίγωνο που οριοθετεί τη λίμνη, στο οποίο δεν επιτρέπεται η τοποθέτηση αποθηκών. Κατά συνέπεια, αρχικά θα πρέπει να μετασχηματιστούν οι συντεταγμένες των 3 σημείων που ορίζουν τη λίμνη, σε αντίστοιχες τιμές στο διάστημα $[0.0, 1.0]$. Στη συνέχεια, θα πρέπει να γίνει έλεγχος για κάθε θέση αποθήκης που είναι ενεργή στο διάνυσμα απόφασης x και, αν αυτή βρίσκεται εντός του τριγώνου, να προστίθεται μια ποινή $pen > 0$ στην τιμή του υπολογισθέντος κόστους C_{total} στη Σχέση (15). Η ποινή θα μπορούσε να είναι μια μεγάλη σταθερή τιμή, π.χ. $pen = 1000$. Επίσης, στη σύγκριση διανυσμάτων μπορούν να εφαρμοστούν οι κανόνες σύγκρισης εφικτών/μη εφικτών λύσεων που αναφέρθηκαν στο μάθημα.

Όλα τα παραπάνω αποτελούν συστάσεις κι όχι υποχρεωτικές αποφάσεις που πρέπει να ακολουθήσει ο φοιτητής. Οπότε μπορούν να προσαρμοστούν κατάλληλα στις εκάστοτε επιλογές που θα γίνουν (αναπαράσταση, αποκωδικοποίηση λύσης κ.λ.π.).

4 Εφαρμογή

Η επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης θα πρέπει να γίνει με:

(1) Γενετικό αλγόριθμο (GA) με διαφορετικές παραμετροποιήσεις (roulette-wheel και tournament selection).

(2) Μέθοδο σμήνους σωματιδίων (PSO) (μοντέλα gbest και lbest ακτίνας 1).

Οι αλγόριθμοι θα πρέπει να υλοποιηθούν πλήρως από τον φοιτητή. Η αναπαράσταση του GA (δυαδική ή πραγματική) είναι επιλογή του φοιτητή.

Κάθε αλγόριθμος θα πρέπει να εκτελεστεί 25 φορές με τυχαίο αρχικό πληθυσμό κάθε φορά. Η εκτέλεση του αλγορίθμου θα πρέπει να ολοκληρώνεται στους 200000 συναρτησιακούς υπολογισμούς (υπολογιστικό budget) και θα πρέπει να μελετηθούν πληθυσμοί μεγέθους 50, 100 και 200. Η ρύθμιση των παραμέτρων του αλγορίθμου, όταν αυτό απαιτείται, αποτελεί αντικείμενο της εργασίας.

Σε κάθε πείραμα θα πρέπει να καταγράφεται σε ένα αρχείο η τελική λύση (βέλτιστο διάνυσμα απόφασης x^*) και σε άλλο αρχείο η βέλτιστη τιμή κόστους, η εφικτότητα αυτής (1=εφικτή, 0=μη εφικτή), και το πλήθος συναρτησιακών υπολογισμών που απαιτήθηκαν για την εύρεση της λύσης (last-improvement time). Οπότε κάθε αρχείο θα αντιστοιχεί σε μια παραλλαγή του εκάστοτε αλγορίθμου και θα περιέχει 25 γραμμές, μία για καθε πείραμα, με τις αντίστοιχες πληροφορίες. Ένα ενδεικτικό αρχείο αποτελεσμάτων είναι το παρεχόμενο `sample_results.txt` που περιέχει πληροφορίες από 10 πειράματα και συγκεκριμένα τον αριθμό του πειράματος (1η στήλη), την τιμή της βέλτιστης λύσης (2η στήλη), την εφικτότητα (3η στήλη) και το απαιτούμενο budget συναρτησιακών υπολογισμών (4η στήλη), το οποίο εδώ δίνεται ως ποσοστό % του μέγιστου budget.

Αφού ολοκληρωθούν τα πειράματα, θα πρέπει οι αλγόριθμοι να αναλυθούν στατιστικά και οι εκδοχές με ίδιο μέγεθος πληθυσμού να συγκριθούν μεταξύ τους και να σχολιαστούν τα συμπεράσματα που προκύπτουν. Για τον σκοπό αυτό θα πρέπει να υπολογιστούν στατιστικά μεγέθη όπως mean, median, standard deviation, minimum και maximum για τις βέλτιστες τιμές λύσης και για το απαιτούμενο budget. Τα αντίστοιχα δείγματα θα πρέπει να αναπαρασταθούν γραφικά με boxplots. Οι συγκρίσεις θα πρέπει να γίνουν με χρήση μη παραμετρικών στατιστικών ελέγχων (π.χ. Wilcoxon ranksum test), ως προς τις βέλτιστες τιμές λύσης και, σε περίπτωση ισοπαλίας, ως προς το απαιτούμενο budget. Για τη στατιστική ανάλυση μπορούν να χρησιμοποιηθούν έτοιμες ρουτίνες (π.χ. από Matlab, Python, R ή άλλες).

Τα κριτήρια βαθμολόγησης της εργασίας είναι:

- Η κατάλληλη εφαρμογή και παραμετροποίηση των αλγορίθμων.
- Η ποιότητα της αναφοράς και της επιστημονικής ανάλυσης.
- Η ποιότητα του κώδικα.
- Η αξιοποίηση γνώσεων από το μάθημα.
- Η πρωτοβουλία και αυτονομία του φοιτητή.

Τα παραδοτέα της εργασίας είναι:

(1) **Αναλυτική αναφορά**: εκτενές κείμενο στο οποίο θα επεξηγείται επακριβώς η μεθοδολογία, όλες οι λεπτομέρειες εφαρμογής της και τα αποτελέσματα σε πλήρη παρουσίαση και σχολιασμό.

(2) **Κώδικας**: ο σχετικός κώδικας και οδηγίες εφαρμογής του. Θα πρέπει να αποθηκεύσετε όλες τις λεπτομέρειες που είναι αναγκαίες για πλήρη αναπαραγωγή των πειραμάτων σας (π.χ. αρχικά σημεία, συνθήκη τερματισμού κ.λ.π.).

Όλα τα παραπάνω θα πρέπει να αποσταλούν σε ένα αρχείο ZIP μέχρι την παρακάτω καταληκτική ημερομηνία. Οι υλοποιήσεις μπορούν να γίνουν σε γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας ανάμεσα στις ακόλουθες: C/C++, Java, Fortran, Matlab/Octave, Python, R.

Ημερομηνία παράδοσης: 31 Ιανουαρίου 2024