دانشگاه فردوسی مشهد

پروژه‌ی نهایی درس مدل‌های گرافی احتمالاتی

مکان‌یابی دوبعدی ربات و همجوشی حسگرها با مدل MAP روی گراف فاکتوری

نگارنده: امیررضا تقدسی

استاد درس: دکتر احد هراتی

سال تحصیلی ۱۴۰۴–۱۴۰۵

خلاصه‌ی پروژه

در این پروژه، دانشجوها یک مسئله‌ی مکان‌یابی دوبعدی ربات را به زبان مدل‌های گرافی احتمالاتی فرمول‌بندی و حل می‌کنند. مسیر ربات پنهان است و اندازه‌گیری‌ها شامل اودومتری نویزی، مشاهده‌های موقعیت مطلق، مشاهده‌ی نقاط شاخص معلوم، و چند اندازه‌گیری بستن حلقه است. هدف، تخمین هم‌زمان کل مسیر با یک گراف فاکتوری و تحلیل این است که هر دسته از فاکتورها چه اطلاعاتی به مدل اضافه می‌کند.

تمرکز پروژه روی **مدل‌سازی احتمالاتی، فاکتورگیری پسین، استقلال‌های شرطی، تخمین MAP، تحلیل عدم‌قطعیت، و رفتار مدل در برابر داده‌های ناسازگار** است. پیاده‌سازی حل‌کننده‌ی عددی، تشخیص خودکار بستن حلقه، محاسبه‌ی ژاکوبین‌ها، و جزئیات پیچیده‌ی رباتیک هدف اصلی پروژه نیستند.

مرز دقیق پروژه

دانشجو باید گراف فاکتوری را خودش بسازد و توضیح دهد، اما مجاز است برای حل عددی از ابزار آماده مثل GTSAM، g2o یا `scipy.optimize.least_squares` استفاده کند. تابع‌های کمکی ساده‌ی SE(2) برای جلوگیری از درگیر شدن با جزئیات رباتیک در بسته‌ی داده قرار داده شده‌اند. این تابع‌ها جایگزین مدل‌سازی PGM، ساخت فاکتورها، تحلیل پسین، یا ارزیابی نیستند.

۱ هدف آموزشی

در یک سامانه‌ی رباتیک واقعی، هیچ حسگری به تنهایی مسیر کامل و بدون خطای ربات را نمی‌دهد. اودومتری به مرور رانش پیدا می‌کند، GPS یا حسگر موقعیت مطلق ممکن است کم‌تعداد و نویزی باشد، مشاهده‌ی نقاط شاخص فقط در بعضی نواحی ممکن است، و بستن حلقه اگر غلط باشد می‌تواند کل مسیر را خراب کند. این وضعیت یک نمونه‌ی طبیعی از ترکیب شواهد نویزی در یک مدل گرافی احتمالاتی است.

هدف آموزشی پروژه این است که دانشجو بتواند:

۱. متغیرهای پنهان و مشاهده‌ها را مشخص کند.

۲. توزیع پسین را به حاصل‌ضرب فاکتورهای محلی تبدیل کند.

۳. نشان دهد چرا MAP با نویز گاوسی به کمینه‌سازی مجموع خطاهای وزن‌دار تبدیل می‌شود.

۴. اثر هر فاکتور را با آزمایش حذف مؤلفه، تحلیل عدم‌قطعیت، و نمودار خطا توضیح دهد.

۵. برای اندازه‌گیری‌های پرت یا ناسازگار، یک مدل مقاوم یا روش gating طراحی و تحلیل کند.

۲ داده‌ی مرجع و فایل‌های ورودی

برای همه‌ی گروه‌ها یک دیتاست مرجع واحد داده می‌شود.

فایل	نقش در پروژه
`reference.yaml`	قرارداد واحدها، مسیر فایل‌ها، تعداد وضعیت‌ها و مدل‌های نویز پیشنهادی.
`initial_prior.csv`	اندازه‌گیری اولیه‌ی شروع مسیر. این فایل جایگزین استفاده از مسیر واقعی برای ساخت prior است.
`odometry.csv`	اندازه‌گیری‌های نسبی بین وضعیت‌های متوالی.
`gps.csv`	اندازه‌گیری‌های پراکنده و نویزی از مختصات دوبعدی.
`loop_closures.csv`	اندازه‌گیری‌های نسبی بین وضعیت‌های غیرمتوالی که توسط بخش front-end فرضی تولید شده‌اند.
`landmarks.csv`	مختصات نقاط شاخص معلوم در محیط.
`landmark_observations.csv`	اندازه‌گیری فاصله و زاویه‌ی نسبی ربات نسبت به نقاط شاخص معلوم.
`ground_truth.csv`	مسیر مرجع فقط برای محاسبه‌ی معیارهای نهایی و رسم مقایسه‌ی نهایی.
`se2_utils.py`	تابع‌های ساده‌ی wrap، ترکیب و تفاضل وضعیت‌ها در SE(2).

دیتاست شامل ۲۶۰ وضعیت مکانی، چند حلقه و بازدید مجدد از نواحی قبلی، اودومتری دارای رانش، GPS پراکنده با نواحی افت کیفیت، بستن حلقه‌های درست و ناسازگار، نقاط شاخص معلوم، و مشاهده‌های فاصله‌ـزاویه است.

قانون استفاده از مسیر مرجع

فایل `ground_truth.csv` فقط در پایان کار و فقط برای محاسبه‌ی معیارهایی مثل RMSE، خطای نهایی، و رسم مقایسه‌ی نهایی مجاز است. استفاده از مسیر مرجع برای ساخت گراف، مقداردهی اولیه، تنظیم کوواریانس‌ها، انتخاب آستانه‌ی gating، پیدا کردن داده‌ی پرت، یا بهتر کردن جواب تخلف محسوب می‌شود.

۳ قرارداد وضعیت و اندازه‌گیری‌ها

حالت ربات در زمان t برابر است با

$$x_t = (x_t, y_t, \theta_t) \in \mathrm{SE}(2),$$

که در آن x_t, y_t بر حسب متر و θ_t بر حسب رادیان است. مسیر کامل ربات چنین تعریف می‌شود:

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_T\}.$$

برای اودومتری و بستن حلقه، اندازه‌گیری نسبی از وضعیت i به وضعیت j در دستگاه مختصات محلی وضعیت i تعریف می‌شود. اگر $p_i = (x_i, y_i)^T$ و $R(\theta_i)$ ماتریس چرخش باشد، تابع پیش‌بینی اندازه‌گیری نسبی چنین است:

$$h_{rel}(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} R(\theta_i)^T (p_j - p_i) \\ \mathrm{wrap}(\theta_j - \theta_i) \end{bmatrix}.$$

باقی‌مانده‌ی فاکتور نسبی برابر است با

$$r_{rel}(x_i, x_j; z_{ij}) = h_{rel}(x_i, x_j) - z_{ij},$$

با این شرط که مؤلفه‌ی زاویه‌ای باقی‌مانده نیز با wrap به بازه‌ی مناسب برگردانده شود.

مشاهده‌ی GPS فقط دو مؤلفه‌ی مکانی را اندازه می‌گیرد:

$$h_{gps}(x_t) = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}.$$

برای یک نقطه‌ی شاخص معلوم $\ell_j = (\ell_j^x, \ell_j^y)$، مشاهده‌ی فاصله و زاویه به شکل زیر است:

$$h_{lm}(x_t, \ell_j) = \begin{bmatrix} \sqrt{(\ell_j^x - x_t)^2 + (\ell_j^y - y_t)^2} \\ \mathrm{wrap}\left(\mathrm{atan2}(\ell_j^y - y_t, \ell_j^x - x_t) - \theta_t\right) \end{bmatrix}.$$

۴ مدل احتمالاتی و گراف فاکتوری

مجموعه‌ی مشاهده‌ها را به صورت زیر تعریف کنید:

$$Z = Z_{prior} \cup Z_{odom} \cup Z_{gps} \cup Z_{loop} \cup Z_{lm}.$$

توزیع پسین مسیر با فرض استقلال شرطی اندازه‌گیری‌ها، مشروط به متغیرهای مسیر، چنین فاکتورگیری می‌شود:

$$p(X \mid Z) \propto \phi_0(x_0) \prod_{t=1}^{T} \psi_t(x_{t-1}, x_t) \prod_{m \in G} \gamma_m(x_m) \prod_{(i,j) \in L} \lambda_{ij}(x_i, x_j) \prod_{(t,k) \in M} \eta_{tk}(x_t; \ell_k).$$

در این رابطه، ϕ_0 فاکتور پیشین، ψ_t فاکتور اودومتری، γ_m فاکتور موقعیت مطلق، λ_{ij} فاکتور بستن حلقه، و η_{tk} فاکتور مشاهده‌ی نقطه‌ی شاخص است.

اگر فاکتورها را گاوسی فرض کنیم، تخمین MAP به مسئله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$X^* = \arg\min_X \sum_{a\in\mathcal{F}} \rho_a \left(\|r_a(X_a; z_a)\|^2_{\Sigma_a^{-1}} \right),$$

که در حالت گاوسی ساده $\rho_a(s) = s$ است. در مدل مقاوم، ρ_a می‌تواند تابعی مثل Huber یا Cauchy باشد. اگر گروه از gating استفاده کند، باید آن را به عنوان یک تصمیم مبتنی بر باقی‌مانده‌ی نرمال‌شده توضیح دهد، نه به عنوان خواندن برچسب پرت از داده.

نگاه PGM به داده‌ی پرت

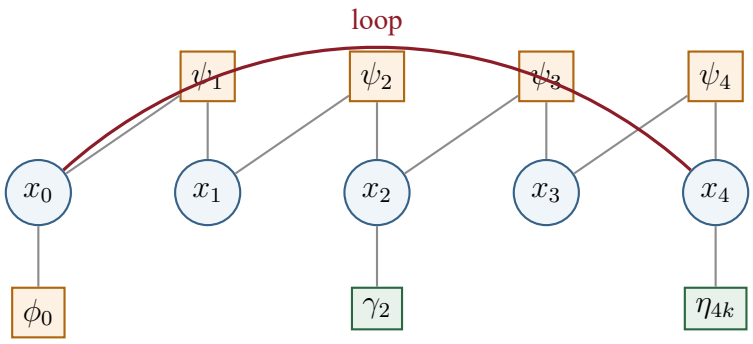
یک راه نظری برای توضیح داده‌های پرت، معرفی متغیر نهان قابلیت اعتماد $s_m \in \{0,1\}$ برای اندازه‌گیری m است. برای مثال می‌توان نوشت:

$$p(z_m \mid X) = \pi\,\mathcal{N}(r_m; 0, \Sigma_m) + (1-\pi)\,\mathcal{N}(r_m; 0, \kappa\Sigma_m), \quad \kappa \gg 1.$$

لازم نیست دانشجو حتماً این مدل آمیخته را کامل پیاده‌سازی کند، اما باید در گزارش توضیح دهد robust loss یا gating چگونه به این دیدگاه احتمالاتی مربوط می‌شود.

۵ نمایش گراف فاکتوری

شکل زیر یک بخش کوچک از گراف را نشان می‌دهد. مسیر واقعی پروژه بزرگ‌تر است، اما همین الگو برای کل مسیر تکرار می‌شود.



شکل ۱: نمونه‌ی کوچک از ساختار گراف فاکتوری پروژه

دانشجو باید در گزارش توضیح دهد Markov blanket یک وضعیت میانی x_t شامل کدام همسایه‌ها و فاکتورهای متصل به آن است. برای مثال، اگر x_t فقط به اودومتری، GPS و یک loop closure وصل باشد، آنگاه x_t مشروط به متغیرها و فاکتورهای همسایه، از بقیه‌ی مسیر مستقل شرطی می‌شود.

۶ خواسته‌های پروژه و خروجی‌های مورد انتظار

۱. **خواندن و اعتبارسنجی داده:** همه‌ی فایل‌های دیتاست را بخوانید، قرارداد واحدها و ستون‌ها را رعایت کنید، و نشان دهید کد با یک دستور یا یک دفترچه‌ی اجرایی از ابتدا تا انتها اجرا می‌شود.

۲. **تعریف متغیرها و مشاهده‌ها:** در گزارش مشخص کنید متغیرهای پنهان، مشاهده‌ها، دامنه‌ی هر متغیر، و نوع هر حسگر چیست. برای هر فاکتور بنویسید به کدام متغیرها وصل است.

۳. **فاکتورگیری پسین:** فرمول کامل $p(X \mid Z)$ را برای دیتاست بنویسید و توضیح دهید هر حاصل‌ضرب مربوط به کدام فایل داده است. استقلال‌های شرطی فرض‌شده را صریح بیان کنید.

۴. **تعریف باقی‌مانده‌ها و مدل نویز:** برای prior، اودومتری، GPS، بستن حلقه، و مشاهده‌ی نقطه‌ی شاخص، تابع پیش‌بینی، باقی‌مانده، و کوواریانس یا انحراف معیار استفاده‌شده را گزارش کنید.

۵. **ساخت گراف فاکتوری و حل MAP:** گراف را از روی فایل‌های اندازه‌گیری بسازید و با یک حل‌کننده‌ی آماده حل کنید. مسیر اولیه، مقدار تابع هدف قبل و بعد از بهینه‌سازی، زمان اجرا، و وضعیت همگرایی را گزارش کنید.

۶. **روش پایه‌ی dead reckoning:** مسیر حاصل از زنجیره کردن اودومتری را محاسبه کنید و آن را با مسیر بهینه‌شده مقایسه کنید. این روش پایه باید در همه‌ی نمودارهای اصلی و جدول معیارها حضور داشته باشد.

۷. **آزمایش حذف مؤلفه‌های حسگری:** حداقل این مدل‌ها را با مقدار اولیه‌ی یکسان مقایسه کنید: فقط اودومتری، اودومتری و GPS، اودومتری و بستن حلقه، اودومتری و نقاط شاخص، همه‌ی فاکتورها با زیان گاوسی، و همه‌ی فاکتورها با روش مقاوم.

۸. **تحلیل داده‌های ناسازگار:** مدل گاوسی ساده را با مدلی مقاوم مثل Huber/Cauchy یا یک روش gating مبتنی بر باقی‌مانده‌ی نرمال‌شده مقایسه کنید. توضیح دهید کدام فاکتورها بیشترین ناسازگاری را ایجاد کردند و چرا استفاده از برچسب پرت مجاز نیست.

۹. **حساسیت به نویز:** برای حداقل سه تنظیم متفاوت از کوواریانس یک یا چند حسگر، مسیر، معیار خطا، تابع هدف، و عدم‌قطعیت را مقایسه کنید. تحلیل باید نشان دهد اعتماد بیش از حد یا کمتر از حد به یک حسگر چه اثری روی پسین دارد.

۱۰. **تحلیل عدم‌قطعیت:** برای چند وضعیت منتخب، کوواریانس حاشیه‌ای و بیضی کوواریانس دوبعدی رسم کنید. سپس توضیح دهید بستن حلقه، GPS، یا مشاهده‌ی نقطه‌ی شاخص چگونه عدم‌قطعیت را کم یا زیاد می‌کند.

۱۱. **تحلیل PGM:** علاوه بر نتایج عددی، حداقل یک تحلیل درباره‌ی Markov blanket، استقلال شرطی، یا اثر ترتیب حذف متغیرها بر پراکندگی ماتریس اطلاعات ارائه کنید. این بخش باید نشان دهد پروژه فقط اجرای یک کتابخانه‌ی رباتیک نیست.

۱۲. **نمودارها و جدول‌ها:** حداقل این خروجی‌ها لازم است: مسیر مرجع، مسیر اودومتری خام و مسیر بهینه‌شده روی یک شکل؛ خطای مکانی بر حسب زمان؛ نمایش بستن حلقه‌ها؛ چند بیضی کوواریانس؛ جدول ablation؛ جدول حساسیت به نویز؛ و

جدول مقایسه‌ی مدل گاوسی و مقاوم.

۱۳. **گزارش شکست‌ها و محدودیت‌ها:** در گزارش توضیح دهید مدل در چه نواحی یا شرایطی بد عمل کرد، چه فرض‌هایی غیرواقعی هستند، و اگر داده‌ی پرت یا بستن حلقه‌ی غلط زیاد شود چه اتفاقی می‌افتد.

۱۴. **راهنمای اجرای دقیق:** نسخه‌ی کتابخانه‌ها، دستور نصب، دستور اجرای کامل، محل تولید شکل‌ها و فایل‌های خروجی را بنویسید. همه‌ی شکل‌های گزارش باید از کد تولید شوند، نه با ویرایش دستی.

۷ معیارهای عددی و نموداری

حداقل معیارهای عددی که باید گزارش شوند عبارت‌اند از:

معیار	توضیح
RMSE / ATE	ریشه‌ی میانگین مربعات خطای مکانی نسبت به مسیر مرجع.
Final drift	فاصله‌ی وضعیت نهایی تخمین‌زده‌شده از وضعیت نهایی مرجع.
Relative error	خطای حرکت نسبی در پنجره‌های کوتاه برای بررسی سازگاری محلی مسیر.
Objective value	مقدار تابع هدف قبل و بعد از حل، برای مدل‌های مختلف.
Runtime	زمان ساخت گراف، زمان حل، و تعداد تکرارها.
Uncertainty summary	میانگین یا بیشینه‌ی مساحت بیضی کوواریانس برای چند وضعیت منتخب.

اگر $\hat{p}_t$ موقعیت تخمین‌زده‌شده و p_t موقعیت مرجع باشد، خطای RMSE چنین است:

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T} \|\hat{p}_t - p_t\|_2^2}.$$

این معیار باید برای dead reckoning، مدل‌های ablation، مدل گاوسی کامل، و مدل مقاوم گزارش شود.

۸ ابزارها

برای اینکه پروژه به جای جزئیات رباتیک روی PGM متمرکز بماند، این موارد مجاز و توصیه‌شده‌اند:

۱. استفاده از تابع‌های آماده‌ی بسته‌ی داده برای wrap angle، ترکیب وضعیت و محاسبه‌ی وضعیت نسبی.

۲. استفاده از GTSAM یا ابزار مشابه برای حل عددی MAP و محاسبه‌ی کوواریانس حاشیه‌ای.

۳. استفاده از NumPy/Pandas/Matplotlib برای خواندن داده، محاسبه‌ی معیارها و رسم شکل‌ها.

۴. استفاده از robust loss آماده‌ی کتابخانه، مشروط بر اینکه مدل احتمالاتی و اثر آن در گزارش توضیح داده شود.

این موارد هدف پروژه نیستند و لازم نیست از صفر پیاده‌سازی شوند: front-end تشخیص بستن حلقه، استخراج ویژگی تصویری، محاسبه‌ی تحلیلی ژاکوبین‌ها، نوشتن حل‌کننده‌ی Gauss-Newton، و طراحی دیتاست جدید.

محدودیت مهم ابزارها

استفاده از یک سامانه‌ی کامل SLAM که کل front-end، ساخت گراف، مدل نویز، حل، و نمایش را پنهان انجام دهد مجاز نیست. دانشجو باید خودش فاکتورها را از فایل‌های داده بسازد، scopes آن‌ها را توضیح دهد، مدل نویز را انتخاب کند، و تحلیل PGM ارائه دهد.

۹ ساختار گزارش نهایی

گزارش باید این بخش‌ها را داشته باشد:

۱. تعریف مسئله، متغیرها، مشاهده‌ها و قرارداد اندازه‌گیری.

۲. مدل گرافی، فاکتورگیری پسین، scopes فاکتورها و استقلال‌های شرطی.

۳. روش حل، ابزار استفاده‌شده، مقدار اولیه، مدل نویز و تنظیمات مهم.

۴. آزمایش‌ها: حذف مؤلفه، حساسیت به نویز، اثر بستن حلقه، داده‌ی ناسازگار و مدل مقاوم.

۵. نتایج عددی و نموداری.

۶. تحلیل عدم‌قطعیت و بیضی کوواریانس.

۷. بحث PGM: Markov blanket، حاشیه‌سازی، sparsity، یا ارتباط زیان مقاوم با متغیر نهان قابلیت اعتماد.

۸. محدودیت‌ها، شکست‌ها و راهنمای اجرای دقیق.

هر شکل باید پیام تحلیلی داشته باشد. برای مثال، صرفاً نوشتن «مسیرها در شکل نشان داده شده‌اند» کافی نیست؛ باید توضیح داده شود کدام فاکتور باعث کاهش خطا یا عدم‌قطعیت شده و کدام اندازه‌گیری‌ها مدل را به اشتباه انداخته‌اند.

۱۰ چک‌لیست نهایی قبل از تحویل

پیش از تحویل، گروه باید بتواند به این سؤال‌ها پاسخ روشن بدهد:

۱. اگر فقط اودومتری داشته باشیم، رانش چگونه رشد می‌کند؟

۲. کدام فاکتور بیشترین اثر را روی کاهش خطا دارد؟ GPS، نقطه‌ی شاخص، یا بستن حلقه؟

۳. اگر کوواریانس یک حسگر را خیلی کوچک یا خیلی بزرگ انتخاب کنیم چه اتفاقی می‌افتد؟

۴. بستن حلقه‌ی درست چه کمکی می‌کند و بستن حلقه‌ی ناسازگار چه خطری دارد؟

۵. عدم‌قطعیت مسیر در کدام بخش‌ها بیشتر است و چرا؟

۶. مدل مقاوم چگونه از دید PGM با متغیر نهان قابلیت اعتماد یا توزیع آمیخته قابل توضیح است؟

۷. آیا جواب به مقدار اولیه حساس است؟ در چه شرایطی؟

۸. کدام فرض‌های مدل در دنیای واقعی ممکن است نقض شوند؟