

Fundamentos de Investigación II

Luis Eudave

2020-10-16

Índice general

1	Introducción a la probabilidad	5
1.1	¿Cómo de diferentes son la probabilidad y la estadística?	6
1.2	¿Qué significa la probabilidad?	8
1.3	Teoría de probabilidad básica	14
1.4	La distribución binomial	17
1.5	La distribución normal	20
1.6	Otras distribuciones útiles	29
1.7	Resumen	36
2	Estimación	37
2.1	Muestras, poblaciones y muestreo	37
2.2	La ley de los grandes números	48
2.3	Distribuciones muestrales y el teorema del límite central	49

Capítulo 1

Introducción a la probabilidad

Para muchas personas, cuando piensan en estadística se les viene esto a la mente: calcular promedios, recopilar datos, elaborar gráficos y ponerlos todos en un informe en algún lugar. Mas o menos como coleccionar sellos o cucharillas, pero con números. Sin embargo, la estadística cubre mucho más que eso. De hecho, la estadística descriptiva es una de las partes más pequeñas de la estadística, y una de las menos poderosas (en cuanto a las conclusiones que puede aportar). La parte más importante y más útil de la estadística es aquella que permite hacer *inferencias* sobre los datos.

Una vez contemplada la estadística en estos términos, -que la estadística está ahí para ayudarnos a hacer inferencias a partir de datos- podemos ver ejemplos de ella en todas partes. Por ejemplo, aquí hay un pequeño extracto de un periódico mexicano:

“Tengo un trabajo difícil”, dijo el Presidente mexicano en respuesta a una encuesta que encontró que su gobierno ha pasado de gozar los mayores índices de popularidad en la historia ($>70\%$) a un 38 por ciento.

Este tipo de comentarios suele pasar como completamente irrelevante en los periódicos o en la vida cotidiana, pero pensemos brevemente sobre lo que implica. Una compañía encuestadora ha realizado una encuesta, presumiblemente una muy grande porque tiene los medios y puede permitírselo. Imaginemos que llamaron a 1.000 votantes al azar, y 380 (38%) de ellos afirmaron que tenían la intención de votar por el Presidente. En las últimas elecciones federales, la Instituto Electoral Mexicano confirmó la participación de 56.611.027 votantes; por lo tanto, las opiniones de los 56.610.027 votantes

restantes (aproximadamente el 99.998% de los votantes) siguen siendo desconocidas para la encuestadora (y para nosotros). Aún suponiendo que nadie mintió en la encuesta, lo único que podemos decir con un 100% de seguridad es que el verdadero voto primario al Presidente está en algún lugar entre $380/56.611.027$ (aproximadamente el 0.0007%) y $56.610.307/56.611.027$ (alrededor del 99.9987%), lo cual no aporta mucho. Entonces, ¿sobre qué base es legítimo para la empresa encuestadora, el periódico y el lectores concluir que la intención de voto al Presidente mexicano fue de sólo el 38%?

La respuesta a la pregunta es bastante obvia: si llamo a 1.000 personas al azar, y 380 de ellas dicen tienen la intención de votar por el Presidente, entonces parece muy poco probable que estas sean las *únicas* 380 personas del todo el público votante que realmente tiene la intención de hacerlo. En otras palabras, suponemos que los datos recopilados por la empresa encuestadora son bastante representativos de la población en general. ¿Pero qué tan representativo? ¿Nos sorprendería descubrir que la verdadera intención de voto es en realidad del 34%? ¿39%? ¿57%? En este punto nuestra intuición comienza a romperse un poco. Nadie se sorprendería si fuese el 34%, y todos lo harían con un 57%, pero es un poco difícil decir si el 39% es plausible. Necesitamos herramientas más poderosas que solo el mirar los números y adivinar.

La estadística inferencial proporciona las herramientas que necesitamos para responder a este tipo de preguntas, y ya que este tipo de preguntas se encuentran en el corazón del quehacer científico, ocupan una parte sustancial de cada curso introductorio sobre estadística y métodos de investigación. Sin embargo, la teoría sobre la estadística inferencial está construida sobre la **teoría de probabilidad**. Y es a la teoría de la probabilidad a la que ahora debemos prestar atención. La discusión de la teoría de la probabilidad en esta asignatura será básicamente de fondo: no hay mucho contenido estadístico *per se* en este capítulo. Sin embargo, debido a que gran parte de la estadística se sustenta en la teoría de la probabilidad, merece la pena ir cubriendo algunos de los conceptos básicos.

1.1 ¿Cómo de diferentes son la probabilidad y la estadística?

Antes de comenzar a hablar sobre la teoría de la probabilidad, es útil pensar un momento en la relación que existe entre probabilidad y estadística. Las dos disciplinas están estrechamente relacionadas, pero no son idénticas. La teoría de la probabilidad es “la doctrina de las posibilidades”. Es una rama de las matemáticas que te dice con qué frecuencia sucederán diferentes tipos de eventos. Por ejemplo, todas estas preguntas son cosas que puedes responder usando la teoría de la probabilidad:

- ¿Cuáles son las probabilidades de que al lanzar una moneda salga cara 10

1.1. ¿CÓMO DE DIFERENTES SON LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA?

veces seguidas?

- Si lanzo dos dados de seis caras, ¿qué probabilidad hay de que tire dos seises?
- ¿Qué probabilidad hay de que cinco cartas extraídas de un mazo perfectamente barajado sean todas de corazones?
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane la lotería?

Hay que tener en cuenta que todas estas preguntas tienen algo en común. En cada caso, existe y se conoce una “verdad sobre el mundo”, y la pregunta se refiere más bien al “qué tipo de eventos” sucederán. En la primera pregunta que sé que la moneda es justa (no es más pesada por uno de los lados, sesgando el resultado), por lo que hay un 50% de probabilidad de que cualquier lanzamiento de moneda salga cara. En la segunda pregunta, sé que la probabilidad de sacar un 6 en un solo dado es de 1 en 6. En la tercera pregunta sé que la baraja se baraja correctamente (no hay un acomodo de cartas). Y en la cuarta pregunta, sé que la lotería sigue unas reglas específicas. El punto clave aquí es que las preguntas probabilísticas comienzan con un *modelo* conocido del mundo, y usamos ese modelo para hacer algunos cálculos. El modelo subyacente puede ser bastante simple. Por ejemplo, en el ejemplo de lanzar monedas, podemos escribir el modelo de esta manera:

$$P(\text{cara}) = 0.5$$

que puedes leer como “la probabilidad de que salga cara es 0.5”. Como veremos más adelante, de la misma manera que los porcentajes son números que van del 0% al 100%, las probabilidades son solo números que van del 0 al 1. Cuando usamos este modelo de probabilidad para responder a la primera pregunta, en realidad no sé exactamente qué va a ocurrir. Tal vez obtenga 10 caras, como dice la pregunta. Pero quizás salgan sólo tres caras. Esta es la clave: con la teoría de la probabilidad, se conoce el *modelo*, pero no los *datos*.

Hemos visto lo que es la probabilidad. ¿Qué hay de la estadística? Las preguntas en estadística funcionan al revés. En estadística, nosotros *no* sabemos la verdad sobre el mundo. Todo lo que tenemos son los datos, y es a partir de esos datos que queremos *aprender* sobre la verdad del mundo. Las preguntas estadísticas tienden a parecerse más a estas:

- Si mi amigo lanza una moneda 10 veces y obtiene 10 caras, ¿me está engañando?
- Si las primeras cinco cartas de la parte superior del mazo son todas de corazones, ¿qué tan probable es que se haya barajado el mazo?
- Si el hijo del comisionado de la lotería gana la lotería, ¿qué tan probable es que el sorteo esté amañado?

Esta vez, lo único que tenemos son datos. Lo que sé es que vi a mi amigo lanzar la moneda 10 veces y salió cara en cada una de las veces. Y lo que quiero es

inferir si debería concluir que lo que acabo de ver es en realidad una moneda justa lanzada 10 veces seguidas, o si debería sospechar que mi amigo me está jugando una mala pasada. Los datos que tengo se ven así (cada C es una cara):

C C C C C C C C C C

y lo que estoy tratando de hacer es averiguar en qué “modelo de verdad del mundo” debería confiar. Si la moneda es justa, entonces el modelo que debo aceptar es uno que diga que la probabilidad de que salga cara es 0.5; es decir, $P(\text{cara}) = 0.5$. Si la moneda no es justa, entonces debo concluir que la probabilidad de que salga cara *no* es 0.5, lo cual escribiríamos como $P(\text{cara}) \neq 0.5$. En otras palabras, el objetivo de la inferencia estadística es decidir cual de estos modelos de probabilidad es el correcto. Vemos pues, que una pregunta en estadística no es la misma que una pregunta en probabilidad, pero están íntimamente conectados entre sí. Es por ello que una buena introducción a la teoría estadística comenzará con una discusión sobre qué es la probabilidad y cómo funciona.

1.2 ¿Qué significa la probabilidad?

Comencemos con la primera de estas preguntas. ¿Qué es la “probabilidad”? Puede parecer sorprendente, pero mientras que los estadísticos y matemáticos (en su mayoría) están de acuerdo sobre cuáles son las *reglas* de la probabilidad, hay mucho menos consenso sobre lo que realmente *significa* la palabra. Parece extraño porque todos usamos con soltura palabras como “posibilidad”, “probabilidad”, “posible” y “probable”, y además no parece que deba ser una pregunta difícil de responder. Si tuviéramos que explicar el concepto de “probabilidad” a un niño de cinco años, podríamos hacerlo sin muchos problemas. Pero si alguna vez lo has intentando en la vida real, podrías terminar esa conversación sintiendo que no lo has hecho muy bien y que (como con muchos conceptos cotidianos) resulta que *realmente* no sabemos de qué se trata.

Aún así, vamos a intentarlo. Supongamos que quiero apostar en un juego de fútbol entre dos equipos que en lugar de humanos están formados por robots: el *Tesla FC* y el *Real TikTok*. Según los datos de esta temporada, calculo que hay un 80% de probabilidad de que el *Tesla FC* gane. ¿Qué quiero decir realmente con eso? Tenemos tres posibilidades...

- Son equipos de robots, así que puedo hacer que jueguen una y otra vez, y si lo hiciera, el *Tesla FC* ganaría 8 de cada 10 juegos de media.
- En cada juego, sólo estaría de acuerdo en que apostar en este juego es “justo” si una apuesta de \$1 al *Real TikTok* da un pago de \$5 (es decir, recibo mi \$1 de vuelta más una recompensa de \$4 por haber acertado), al

igual que una apuesta de \$4 al *Tesla FC* también da un pago de \$5 (es decir, mi apuesta de \$4 más una recompensa de \$1).

- Mi “creencia” o “confianza” subjetiva en una victoria del *Tesla FC* es cuatro veces más fuerte que mi “creencia” o “confianza” en una victoria del *Real TikTok*.

Cada uno de estos enunciados parece correcto. Sin embargo, no son idénticos, y no todos los estadísticos respaldarían todos ellos por igual. La razón es que hay diferentes ideologías o visiones estadísticas y dependiendo de cual se escoja, se podría decir que algunas de estas declaraciones no tienen sentido o que son irrelevantes. En esta sección, se dará una breve introducción a dos de los enfoques principales que existen en la literatura estadística. Esto no significa que sean los únicos enfoques, pero sí los dos más importantes.

1.2.1 La visión frecuentista

El primero de los dos enfoques principales a la teoría de la probabilidad, y el más dominante en estadística, se le conoce como la **visión frecuentista**, y define a la probabilidad como una **frecuencia a largo plazo**. Supongamos que queremos intentar lanzar una moneda justa, una y otra vez. Por definición, esta es una moneda que tiene una $P(Cara) = 0.5$. ¿Qué resultado podremos observar? Una posibilidad es que los primeros 20 lanzamientos se vean así (donde C es cara y X cruz):

X,C,C,C,C,X,X,C,C,C,C,X,C,C,X,X,X,X,X,C

En este caso, en 11 de los 20 lanzamientos (55%) salió cara. Ahora supongamos que he ido guardando un registro con el número de caras (que llamaré N_C) que han salido, a lo largo de las primeras N lanzadas de moneda, además de calcular la proporción de caras N_C/N con cada registro. Este es el resultado que obtendría:

Número.de.lanzamientos	Número.de.caras	Proporción
1	0	0.00
2	1	0.50
3	2	0.67
4	3	0.75
5	4	0.80
6	4	0.67
7	4	0.57
8	5	0.63
9	6	0.67
10	7	0.70
11	8	0.73
12	8	0.67
13	9	0.69
14	10	0.71
15	10	0.67
16	10	0.63
17	10	0.59
18	10	0.56
19	10	0.53
20	11	0.55

Tengamos en cuenta que al comienzo de esta secuencia, la *proporción* de caras fluctúa enormemente, comenzando en .00 y subiendo tan alto como .80. Conforme aumenta el número de lanzamientos, uno tiene la impresión de que este efecto se amortigua un poco, mientras que los valores se aproximan cada vez más a la respuesta “correcta” de .50. Esta es la definición frecuentista de probabilidad en pocas palabras: lanzar una moneda justa una y otra vez, y a medida que N crece (se acerca al infinito, denotado como $N \rightarrow \infty$), la proporción de caras convergerá en el 50%. Tecnicismos matemáticos aparte, cualitativamente hablando, es así es como los frecuentistas definen la probabilidad. Desafortunadamente, no tengo un número infinito de monedas, o la paciencia infinita requerida para lanzar una moneda un número infinito de veces. Sin embargo, existen los ordenadores, y los ordenadores se destacan por la ejecución repetitiva de tareas sin sentido como esta. Entonces, al simular 1.000 lanzamientos de moneda y repetir este procesos 4 veces (para darle solidez a los resultados), podemos ver qué sucede con la proporción N_C/N a medida que N aumenta. Los resultados se muestran en la Figura 1.1 aunque también puedes hacer tú la simulación haciendo click [aquí](#). Podemos apreciar que la *proporción de caras observadas* deja de fluctuar conforme aumenta el número de lanzamientos; cuando lo hace, el número que finalmente obtenemos es el verdadera probabilidad de salga cara.

La definición frecuentista de probabilidad tiene algunas características que le hacen deseable. En primer lugar, es objetivo: la probabilidad de un evento se basa *necesariamente* en el mundo real. La única forma en que declaraciones

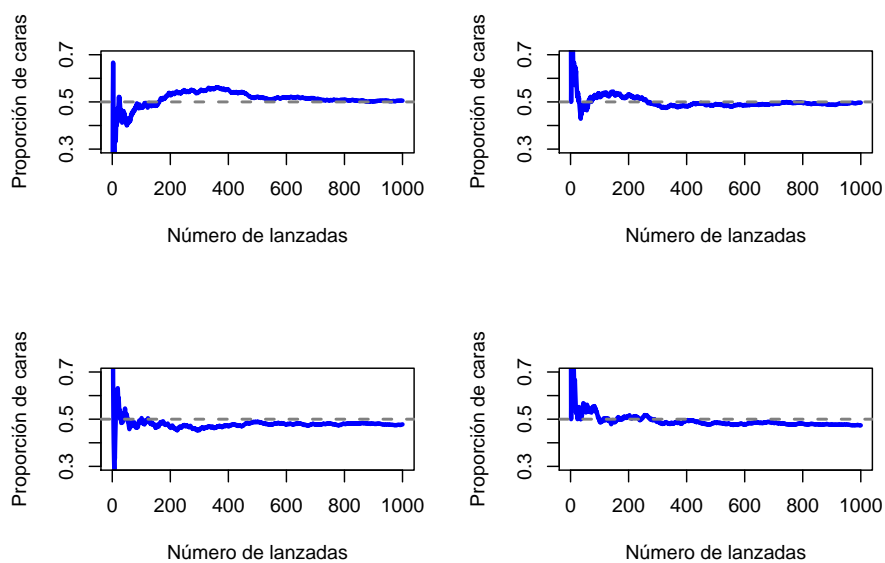


Figura 1.1: Una imagen de cómo funciona la probabilidad frecuentista. Si lanzas una moneda justa una y otra vez, la proporción de caras deja de fluctuar y converge hacia la probabilidad real de 0.5. Cada panel muestra uno de las cuatro simulaciones con 1.000 lanzamientos cada uno. Aunque ninguna de estas simulaciones terminó con un valor exacto de .5, si hubiéramos extendido el experimento por un número infinito de lanzamientos lo habríamos conseguido.

de probabilidad puedan tener sentido es si se refieren a (una secuencia de) eventos que ocurren en el universo físico. En segundo lugar, es inequívoco: dos personas que miran como se desarrolla la misma secuencia de eventos, al tratar de calcular la probabilidad de un evento, inevitablemente deberán llegar a la misma respuesta. Sin embargo, también tiene algunas características no tan deseables. En primer lugar, no existen secuencias infinitas en el mundo físico. Supongamos que has encontrado una moneda en el suelo y has comenzado a lanzarla varias veces. Cada vez que aterriza, impacta en el suelo. Cada impacto daña un poco la moneda; eventualmente, la moneda será inutilizable. Entonces, uno podría preguntarse si realmente tiene sentido fingir que una secuencia “infinita” de lanzamientos de monedas es un concepto significativo u objetivo. No podemos decir que una “secuencia infinita” de eventos es algo real en el universo físico, porque el universo físico no permite nada infinito. Así, podemos ver que la definición frecuentista tiene un alcance limitado. Hay muchas cosas por ahí a las que los seres humanos estamos felices de asignar probabilidades en el día a día, pero que no pueden (ni siquiera en teoría) ser planteadas como una secuencia hipotética de eventos. Por ejemplo, si un meteorólogo aparece en televisión y dice: “la probabilidad de lluvia en Pamplona el 2 de noviembre del 2048 es del 60%” nosotros podemos aceptarlo sin rechistar. Pero desde un punto de vista frecuentista, no queda tan claro cómo podemos definirlo. Sólo hay una ciudad de Pamplona (en Navarra), y sólo un 2 de noviembre del 2048. Aquí no hay una secuencia infinita de eventos, solo una cosa de una vez. La probabilidad frecuentista nos *prohíbe* hacer declaraciones de probabilidad sobre un solo evento. Desde la perspectiva frecuentista, lloverá mañana o no lloverá; no hay una “probabilidad” que se pueda adjuntar a un sólo evento no repetible. Sin embargo, existen algunos trucos que los frecuentistas pueden utilizar para solucionar esta situación. Una posibilidad es que el meteorólogo en realidad nos quiera decir algo así: “Existe una categoría de días para la que predigo un 60% probabilidad de lluvia; si miramos sólo esos días para los que hago esta predicción, entonces en el 60% de esos días lloverá realmente”. Es un poco extraño y contradictorio pensarlo de esta manera, pero los frecuentistas hacen esto a veces.

1.2.2 La visión bayesiana

La alternativa a la visión frecuentista, la *visión bayesiana* de la probabilidad, a menudo se denomina visión subjetivista, y es una visión relativamente minoritaria entre los estadísticos, aunque ha ido ganando terreno constantemente a lo largo de las últimas décadas. Hay muchas formas de bayesianismo, lo que hace difícil decir exactamente cuál es “la” visión bayesiana. La forma más fácil de entender la probabilidad subjetiva es al definir la probabilidad de un evento como el *grado de creencia* que un agente inteligente y racional asigna a la verdad de ese evento. Desde esa perspectiva, las probabilidades no existen en el mundo, sino más bien en los pensamientos y suposiciones de las personas y otros seres inteligentes. Sin embargo, para que

este enfoque funcione, necesitamos una forma de operacionalizar este “grado de creencia”. Una forma de hacerlo es formalizándolo en términos de una “apuesta racional” aunque existen muchas otras formas. Supongamos que creo que existe una probabilidad de que llueva mañana de un 60%. Si alguien me hace una apuesta, si llueve mañana, gano \$5, pero si no llueve, pierdo \$5. Claramente, desde mi punto de vista, esta es una buena apuesta. Por otro lado, si creo que la probabilidad de lluvia es sólo del 40%, entonces es una mala apuesta. Por lo tanto, podemos poner en práctica la noción de una “probabilidad subjetiva” en términos de qué apuestas que estoy dispuesto a aceptar.

¿Cuáles son las ventajas y desventajas del enfoque bayesiano? La principal ventaja es que le permite asignar probabilidades a cualquier evento. No está limitado a aquellos eventos que son repetibles. La principal desventaja (para muchas personas) es que no podemos ser realmente objetivos - especificar una probabilidad requiere que especifiquemos la entidad que tiene el grado de creencia que estamos examinando. Esta entidad puede ser un humano, un extraterrestre, un robot o incluso un estadístico, pero tiene que ser un agente inteligente que sea capaz de creer en cosas. Para muchas personas esto representa un inconveniente: parece hacer que la probabilidad sea arbitraria. Si bien el enfoque bayesiano requiere que el agente en cuestión sea racional (es decir, que obedezca las reglas de la probabilidad), permite que todos tengan sus propias creencias; yo puedo creer que la moneda es justa mientras que otro no, aunque ambos seamos racionales. La visión frecuentista no permite que dos observadores atribuyan diferentes probabilidades al mismo evento: cuando eso sucede, al menos uno de ellos debe estar equivocado. La visión bayesiana no evita que esto ocurra. Dos observadores con diferentes conocimientos previos pueden tener creencias diferentes sobre el mismo evento. En otras palabras, mientras que la visión frecuentista se puede considerar como demasiado estrecha (prohíbe muchas cosas a las cuales queremos asignar probabilidades), la visión bayesiana puede resultar demasiado amplia (permite demasiadas diferencias entre observadores).

1.2.3 ¿Cuál es la diferencia? ¿Y quién tiene razón?

Ahora que hemos visto ambas visiones estadísticas de forma independiente, es necesario compararlas. Regresemos al hipotético juego de fútbol de robots que comentamos al comienzo del tema. ¿Que dirían un frecuentista y un bayesiano sobre las tres afirmaciones? ¿Qué enunciado sería la definición de probabilidad correcta para el frecuentista? ¿Y para el bayesiano? ¿Es posible que alguno de los enunciados no tenga sentido para cualquiera de los dos? Si entendemos ambas perspectivas, podemos intuir cómo responder a estas preguntas.

Entendiendo las diferencias, podemos preguntarnos a continuación cuál de dos enfoques es el *correcto*. Sin embargo, no existe una respuesta correcta. Matemáticamente hablando, no hay nada incorrecto sobre la forma en que los frecuentistas piensan sobre secuencias de eventos, ni hay nada incorrecto acerca

de la forma en que los bayesianos definen las creencias de un agente racional. De hecho, si vamos al detalle, los bayesianos y los frecuentistas en realidad están de acuerdo en muchas cosas. Muchos métodos frecuentistas conducen a decisiones que los bayesianos pensarían que toma un agente racional. Muchos métodos bayesianos tienen buenas propiedades frecuentistas.

En cualquier caso, la mayor parte de los métodos y análisis estadísticos en la literatura se basan en el enfoque frecuentista. Por lo tanto, el objetivo de esta asignatura es cubrir aproximadamente el mismo temario que una clase típica de estadística de pregrado en ciencias de la educación, y si queremos entender las herramientas estadísticas utilizadas por la mayoría de los educadores en investigación, necesitaremos una buena comprensión de los métodos frecuentistas.

1.3 Teoría de probabilidad básica

A pesar de los argumentos ideológicos entre bayesianos y frecuentistas, existe un consenso más o menos generalizado sobre las reglas que la probabilidad debe obedecer. Hay muchas formas de abordar estas reglas. El enfoque más utilizado se basa en el trabajo de Andrey Kolmogorov, uno de los grandes matemáticos soviéticos del siglo XX. No entraremos mucho en detalle, pero aprenderemos en qué consisten y cómo utilizarlas a través del siguiente ejemplo.

1.3.1 Introducción a las distribuciones de probabilidad

Un hecho comprobado sobre mi vida es que sólo tengo 5 pares de pantalones: tres pares de vaqueros, los pantalones de un traje y un par de pantalones de chándal. Lo más triste es que les he dado nombres: los llamo X_1 , X_2 , X_3 , X_4 y X_5 . Diariamente, por la mañana, elijo un único par de esos pantalones que voy a usar. Si yo tuviera que describir esta situación usando el lenguaje de la teoría de la probabilidad, me referiría a cada par de pantalones (es decir, a cada X) como un **evento elemental**. La característica clave de estos eventos elementales es que cada vez que hacemos una observación (por ejemplo, cada vez que escojo un par de pantalones), el resultado será uno y solo uno de estos eventos. Como he dicho antes, siempre uso exactamente sólo un par de pantalones, así que mis pantalones cumplen con esta restricción. Del mismo modo, al conjunto de todos los eventos posibles se le denomina **espacio muestral**. Siguiendo con el ejemplo, mi espacio muestral sería el armario que contiene los 5 pantalones.

Bien, ahora que tenemos un espacio muestral (un armario), que está construido a partir de muchas posibles eventos elementales (pantalones), lo que queremos hacer es asignar una **probabilidad** a cada uno de estos eventos elementales. Para un evento X , la probabilidad de ese evento $P(X)$ es un número que se encuentra entre 0 y 1. Cuanto mayor sea el valor de $P(X)$, más probable será

que ocurra el evento. Entonces, por ejemplo, si $P(X) = 0$, significa que el evento X es imposible (es decir, nunca uso esos pantalones). Por otro lado, si $P(X) = 1$ significa que el evento X es seguro que ocurra (es decir, siempre uso esos pantalones). Los valores de probabilidad intermedios, significan que a veces uso esos pantalones (y a veces no). Por ejemplo, una $P(X) = 0.5$ significa que uso esos pantalones la mitad de las veces.

Llegados a este punto, lo siguiente que debemos entender es que “algo siempre sucede”. Cada vez que me pongo unos pantalones, realmente termino usando esos pantalones. Lo que esto significa en términos probabilísticos, es que las probabilidades de todos los eventos elementales siempre suman 1. Esto se conoce como la **ley de probabilidad total**. Si se cumplen estos requisitos (tenemos número X de pantalones, cada par con una probabilidad $P(X)$ de usarlos que en total suman 1), entonces lo que tenemos es una **distribución de probabilidad**. Veamos un ejemplo de distribución de probabilidad

Pantalones	V..azules	V..grises	V..negros	Traje.negro	Chándal.azul
Nombre	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Probabilidad	$P(X_1) = .5$	$P(X_2) = .3$	$P(X_3) = .1$	$P(X_4) = 0$	$P(X_5) = .1$

Cada uno de estos eventos tiene una probabilidad que se encuentra entre 0 y 1, y si sumamos la probabilidad de todos eventos, suman 1. Incluso podemos dibujar un gráfico de barras para visualizar esta distribución, como se muestra en la Figura 1.2.

Es importante señalar que la teoría de probabilidades permite hablar acerca de eventos elementales pero también sobre los **eventos no elementales**. La forma más fácil de ilustrar este concepto es con un ejemplo. Siguiendo con el ejemplo de los pantalones, es perfectamente posible hablar sobre la probabilidad de usar vaqueros. Bajo esta premisa, podemos decir que el evento “yo uso vaqueros” es posible siempre y cuando ocurra alguno de los eventos elementales apropiados; en este caso “vaqueros azules”, “vaqueros negros” o “vaqueros grises”. En términos matemáticos, definimos al evento E “vaqueros” como el conjunto de eventos elementales (X_1, X_2, X_3) . Si se produce alguno de estos eventos elementales, también podemos decir que E ha ocurrido. Por lo tanto, podemos decir que la probabilidad $P(E)$ es simplemente la suma de esos tres eventos, así

$$P(E) = P(X_1) + P(X_2) + P(X_3)$$

y, dado que las probabilidades de los vaqueros azules, grises y negros son respectivamente .5, .3 y .1, la probabilidad total de usar vaqueros es igual a .9.

Todo esto parece obvio y simple. Sin embargo, a partir de estos simples comienzos, es posible construir algunas herramientas matemáticas más complejas y poderosas. En la siguiente Tabla se muestran algunas de las otras reglas que deben de cumplirse para poder calcular probabilidades.

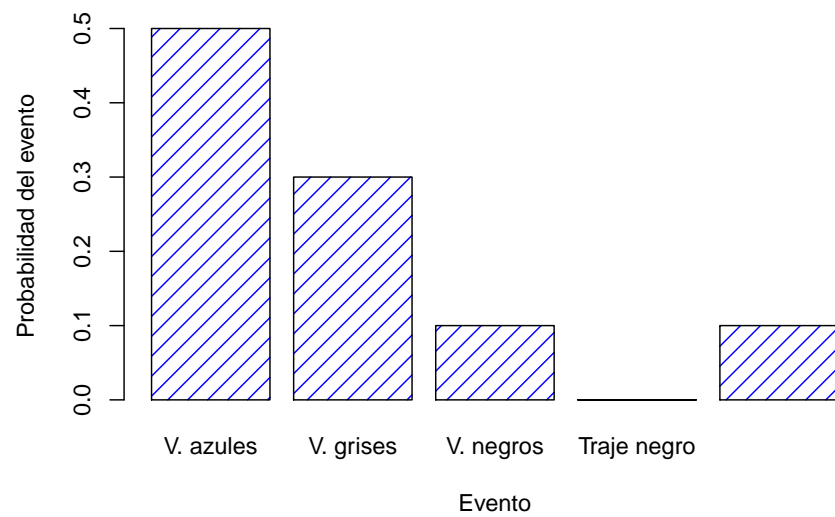


Figura 1.2: Demostración visual de la distribución de probabilidad de los “pantalones”. Existen 5 “eventos elementales”, que se corresponden con mis 5 pares de pantalones. Cada evento tiene una probabilidad de ocurrir: esta probabilidad es un número entre 0 y 1. La suma de estas probabilidades es 1.

Castellano	Notacion	Igual	Formula
No A	$P(\neg A)$	=	$1 - P(A)$
A o B	$P(A \cup B)$	=	$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A y B	$P(A \cap B)$	=	$P(A B)P(B)$

1.4 La distribución binomial

Como hemos visto, las distribuciones de probabilidad pueden variar enormemente, por lo que existe un gran número de distribuciones posibles. Sin embargo, no todas son igual de importantes. Las distribuciones más importantes, y de las que hablaremos en esta asignatura son cinco: la distribución binomial, la distribución normal, la distribución t , la distribución χ^2 (“chi-cuadrada”) y la distribución F . Daremos una breve introducción a las cinco, prestando especial atención a las distribuciones binomial y normal. Comenzaremos con la distribución más simple de las cinco, la distribución binomial.

1.4.1 Introducción al binomio

La teoría de la probabilidad se creó originalmente para intentar describir cómo funcionaban los juegos de azar, por lo que parece adecuado que nuestra discusión sobre la **distribución binomial** involucre una discusión sobre tirar dados y lanzar monedas. Imaginemos el siguiente “experimento”: tengo en mi poder 20 dados iguales de seis caras. En una de las caras de cada dado hay una imagen de una calavera; las otras cinco caras están en blanco. Si tiro los 20 dados, ¿cuál es la probabilidad de que obtenga exactamente 4 calaveras? Asumiendo que los dados son justos, sabemos que la probabilidad de que en un dado salga la calavera es de 1 en 6; dicho de otra forma, la probabilidad de que salga calavera en un solo dado es de aproximadamente .167. Esta información es suficiente para poder responder a nuestra pregunta anterior, así que veamos cómo hacerlo.

Primero, pondremos algunos nombres a los eventos con su respectiva notación. Dejaremos que N denote el número de dados que se tiran en nuestro experimento; a esto se le conoce como el **parámetro de tamaño** de nuestra distribución binomial. También usaremos θ para referirnos a la probabilidad de que al tirar un solo dado salga calavera, una cantidad que generalmente se denomina como la **probabilidad de éxito** del binomio.¹ Finalmente, usaremos X para referirnos a los resultados de nuestro experimento, es decir, la cantidad de calaveras que obtengo cuando lanzo los dados. Dado que el valor real de X

¹Hay que tener en cuenta que el término “éxito” es bastante arbitrario, y en realidad no implica que el resultado sea algo deseado. Si θ se refiriera a la probabilidad de que un pasajero se lesione en un accidente de autobús, seguiría siendo una probabilidad de éxito, aunque en realidad no queremos que la gente salga lastimada

Cuadro 1.3: Fórmulas para las distribuciones binomial y normal. En la ecuación de la binomial, $X!$ es una función factorial (es decir, multiplica todos los números enteros de 1 hasta X), y en la de la distribución normal "exp" se refiere a una función exponencial.

Binomial	Normal
$P(X \theta, N) = \frac{N!}{X! (N-X)!} \theta^X (1-\theta)^{N-X}$	$p(X \mu, \sigma)$

se debe al azar, nos podemos referir a ella como una **variable aleatoria**. En cualquier caso, ahora que tenemos toda esta terminología y notación, podemos utilizarlos para exponer el problema que planteábamos en el párrafo anterior con mayor precisión. La cantidad que queremos calcular es la probabilidad de que $X = 4$ sabiendo que $\theta = .167$ y $N = 20$. La "forma" general de esta probabilidad que me interesa calcular podría escribirse como,

$$P(X | \theta, N)$$

donde estamos interesados en el caso específico donde $X = 4$, $\theta = .167$ y $N = 20$. Hace falta un elemento de notación más antes de continuar con la solución del problema. Si yo quiero decir que X se genera aleatoriamente a partir de una distribución binomial con los parámetros θ y N , la notación que usaría para expresarlo sería la siguiente:

$$X \sim \text{Binomial}(\theta, N)$$

Aunque no utilizaremos las fórmulas para hacer cálculos formalmente, dejaré la fórmula de la distribución binomial en la Tabla 1.3, ya que puede ser útil si se quieren entender temas más avanzados con algo de profundidad. Por lo pronto, analizaremos como se ve una distribución binomial (puedes hacerlo tú mismo si entras aquí). La Figura 1.3 dibuja la probabilidad binomial para todos los valores posibles de X de nuestro experimento de lanzamiento de dados, partiendo desde $X = 0$ (ninguna sale calavera) hasta $X = 20$ (salen todas calaveras). Hay que tener en cuenta que esto es básicamente un gráfico de barras, al igual que la gráfica de la "probabilidad de pantalones" de la Figura 1.2. En el eje horizontal tenemos todos los eventos posibles, y en el eje vertical podemos leer la probabilidad de que ocurra cada uno de esos eventos. Por lo tanto, la probabilidad de que salgan 4 calaveras al tirar 20 dados es de aproximadamente 0,20 (la respuesta exacta es 0,2022036, como veremos en un momento). En otras palabras, esperaríamos que ese evento suceda aproximadamente el 20% de las veces que se lleve a cabo este experimento.

Para darte una idea de cómo cambia la distribución binomial cuando modificamos los valores de θ y N , supongamos que en lugar de tirar dados, en realidad estoy lanzando monedas. Esta vez, mi experimento implica lanzar una moneda justa repetidamente, y el resultado que me interesa es la cantidad de caras que observo. En este escenario, la probabilidad de éxito ahora es de

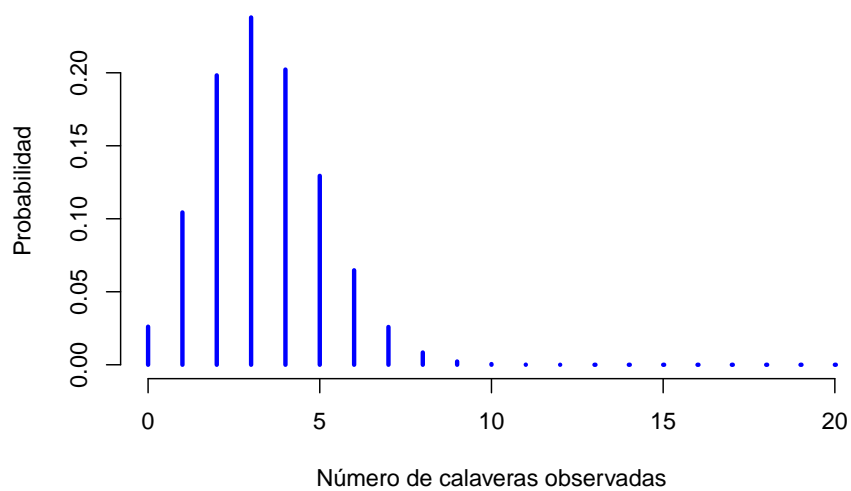


Figura 1.3: La distribución binomial con parámetro de tamaño de $N = 20$ y una probabilidad de éxito de $\theta = 1/6$. Cada barra vertical representa la probabilidad de un resultado específico (un valor posible de X). Ya que esta es una distribución de probabilidad, cada una de las probabilidades debe ser un número entre 0 y 1, y la altura de las barras también deben sumar 1.

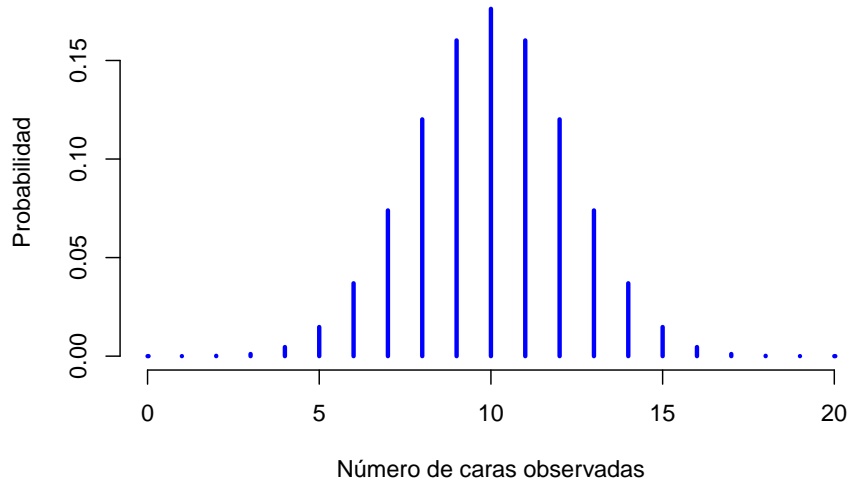


Figura 1.4: Dos distribuciones binomiales, que involucran un escenario en el que lanzo una moneda justa, donde la probabilidad de éxito es $\theta = 1/2$. Asumimos que estoy lanzando la moneda $N = 20$ veces.

$\theta = 1/2$. Supongamos que tirara la moneda $N = 20$ veces. En este ejemplo, he cambiado la probabilidad de éxito, pero mantuve el tamaño de la muestra del experimento. ¿Qué efecto tiene este cambio en nuestra distribución binomial? Bueno, como la Figura 1.4 muestra, el efecto principal fue el desplazamiento de toda la distribución hacia la derecha, como era de esperar. ¿Y si lanzamos una moneda $N = 100$ veces? En este caso obtendremos algo como lo de la Figura 1.5. La distribución se mantiene aproximadamente en el medio, pero hay un poco más de variabilidad en los posibles resultados.

1.5 La distribución normal

Si bien la distribución binomial es conceptualmente la distribución más sencilla de entender, no es la más importante. Ese honor le corresponde a la **distribución normal**, también conocida como “curva de campana” o como “distribución gaussiana” o “campana de Gauss”. Una distribución normal se describe utilizando dos parámetros, la media de la distribución μ y la desviación estándar de la distribución σ . La notación que utilizamos para decir que una variable X se distribuye normalmente es la siguiente:

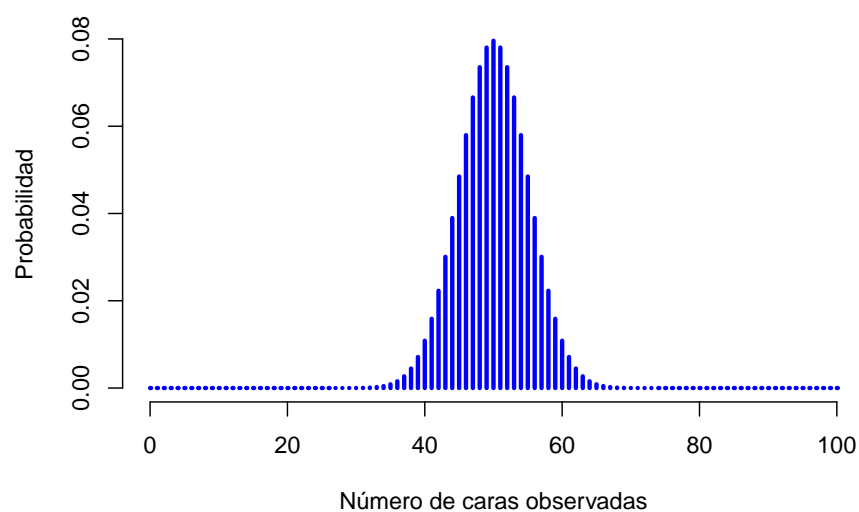


Figura 1.5: Dos distribuciones binomiales, que involucran un escenario en el lanzo una moneda justa, donde la probabilidad de éxito subyacente es $\theta = 1/2$. Asumimos que estoy lanzando la moneda $N = 100$ veces.

$$X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$$

Al igual que con la distribución binomial, he incluido la fórmula para la distribución normal en la tabla 1.3, porque creo que es lo suficientemente importante como para que todos los que aprenden algo de estadística al menos la conozcan, aunque no nos enfoquemos en ella.

Vamos intentar descifrar lo que significa que una variable esté normalmente distribuida. Echemos un vistazo a la Figura 1.6, que muestra una distribución normal con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$. Con un poco de imaginación, podemos apreciar de dónde viene el nombre “curva de campana”. A diferencia de los gráficos sobre la distribución binomial, la imagen de la distribución normal en la Figura 1.6 muestra una curva suave en lugar de barras “tipo histograma”. Esto no es arbitrario: la distribución normal es continua, mientras que la distribución binomial es discreta. Por ejemplo, en el experimento de tiro de dados de la sección anterior, es posible obtener 3 calaveras o 4 calaveras, mientras que un valor intermedio como 3.9 es imposible de obtener. Este hecho se ve reflejado en la Figura 1.3, donde tenemos una barra ubicada en $X = 3$ y otra en $X = 4$, pero entre ellas no hay nada. En cambio, los valores continuos no tienen esta restricción. Por ejemplo, supongamos que estamos hablando del tiempo. La temperatura de un día primavera podría ser de 23 grados, 24 grados, 23.9 grados o cualquier cosa intermedia, ya que la temperatura es una variable continua, por lo que una distribución normal podría ser la herramienta apropiada para describir las diferentes temperaturas en los días de primavera.²

Una vez visto esto, vamos a analizar cómo funciona una distribución normal. En primer lugar, veamos qué es lo que sucede cuando jugamos con los parámetros de la distribución (puedes hacerlo tú mismo si entras en este enlace). La Figura 1.7 muestra distribuciones normales que tienen medias diferentes, pero con la misma desviación estándar. Como es de esperar, todas estas distribuciones tienen la misma “anchura”. La única diferencia entre ellas es que se han desplazado hacia la izquierda o hacia la derecha. En todos los demás aspectos son idénticas. Por el contrario, si aumentamos la desviación estándar mientras mantenemos la media constante, el pico de la distribución permanece en el mismo lugar, pero la distribución se amplía, como podemos ver en la Figura 1.8. Sin embargo, cuando ampliamos la distribución, la altura del pico disminuye. Esto *tiene* que suceder: de la misma forma que las alturas de las barras de una distribución binomial discreta tienen que *sumar* 1, el total del *área bajo la curva* de una distribución normal debe ser igual a 1.

Antes de seguir adelante, quiero señalar una característica importante de la distribución normal. Independientemente de los valores de la media y la

²En la práctica, la distribución normal es tan útil que las personas tienden a usarla incluso cuando la variable no es continua. Siempre que haya suficientes categorías (por ejemplo, respuestas de escala Likert de un cuestionario), suele ser frecuente el uso de la distribución normal.

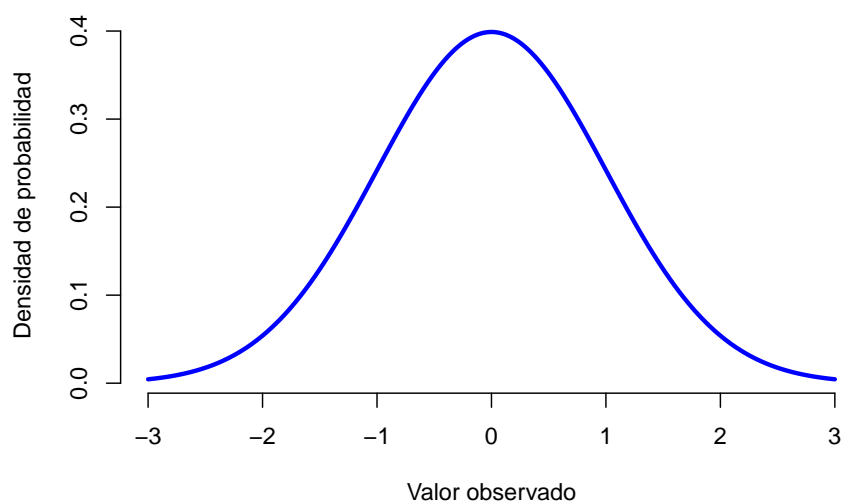


Figura 1.6: Distribución normal con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$. El eje x corresponde con el valor de alguna variable, y el eje y nos dice qué tan probable es que observemos ese valor. Sin embargo, vemos como el eje y se denomina “Densidad de Probabilidad” y no “Probabilidad”. La altura de la curva no representa como tal la probabilidad de observar un valor particular de x . Sin embargo, las alturas nos informan sobre qué valores de x son más probables (¡los más altos!).

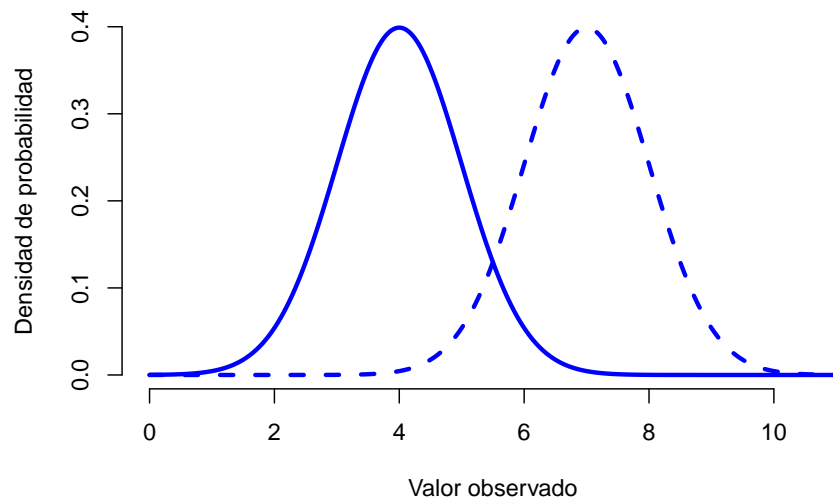


Figura 1.7: Gráfica que demuestra lo que sucede cuando se cambia la media de una distribución normal. La línea sólida representa una distribución normal con media de $\mu = 4$. La línea discontinua muestra una distribución normal con una media de $\mu = 7$. En ambos casos, la desviación estándar es de $\sigma = 1$. Vemos como las dos distribuciones tienen la misma forma, pero la distribución con la línea discontinua se desplaza hacia la derecha.

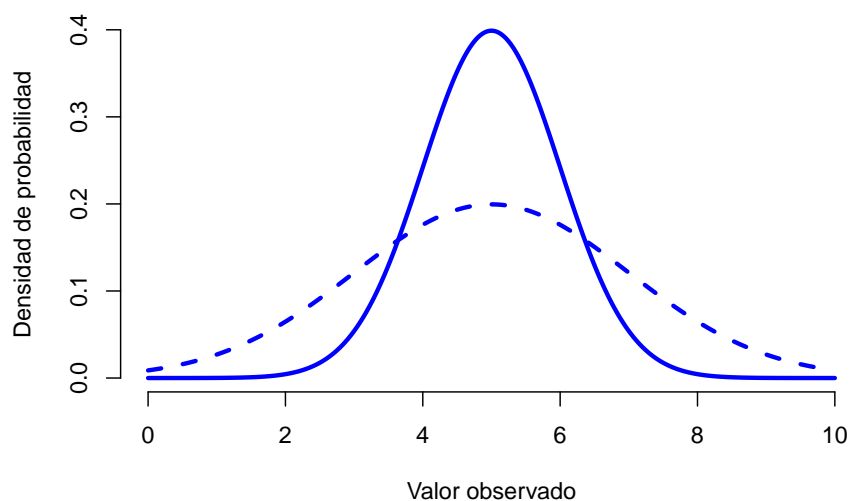
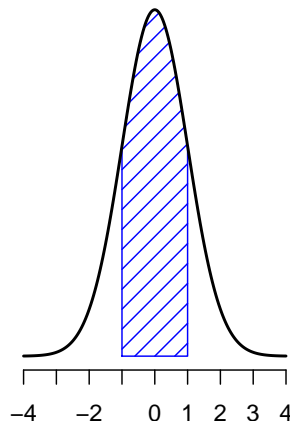


Figura 1.8: Una ilustración de lo que sucede cuando cambia la desviación estándar de una distribución normal. Ambas distribuciones tienen una media de $\mu = 5$, pero diferentes desviaciones estándar. La línea continua dibuja una distribución con una desviación estándar $\sigma = 1$, y la línea discontinua muestra una distribución con desviación estándar de $\sigma = 2$. Como consecuencia, ambas distribuciones están centradas en el mismo lugar, pero la distribución con la línea discontinua es más ancha que la otra.

Área bajo la curva = 68.3%



Área bajo la curva = 99.7%

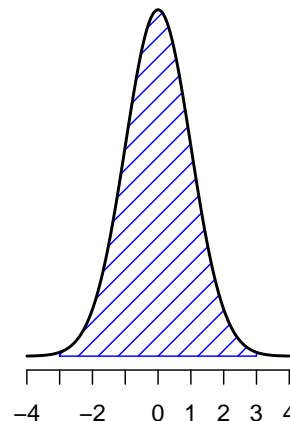


Figura 1.9: El área bajo la curva indica la probabilidad de que una observación se encuentre dentro de un rango determinado. La línea continua traza una distribución normal con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$. El área sombreada ilustra el ‘área bajo la curva’ para dos casos importantes. En el panel a, podemos ver que hay un 68.3% de probabilidad de que una observación caiga dentro de 1 desviación estándar sobre la media. En el panel b, vemos que existe una probabilidad del 95.4% de que una observación se encuentre dentro de 2 desviaciones estándar sobre la media.

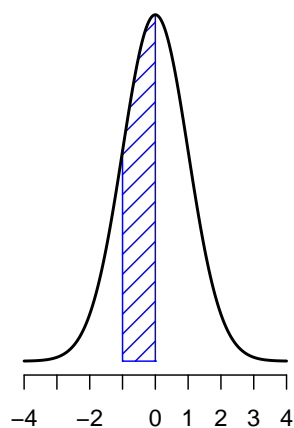
desviación estándar, un 68.3% del área de la curva cae dentro de 1 desviación estándar sobre la media. Del mismo modo, el 95.4% de la distribución cae dentro de 2 desviaciones estándar sobre la media, y el 99.7% de la distribución está dentro de 3 desviaciones estándar. Esta idea se ilustra en las Figuras 1.9 y 1.10.

1.5.1 Densidad de probabilidad

A lo largo de la discusión sobre la distribución normal, ha habido un par de cosas que parecen no tener sentido. Quizás hayas notado que el eje y en estas Figuras se denomina como “Densidad de probabilidad” en lugar de “Probabilidad”. Tal vez notaste que utilizamos $p(X)$ en lugar de $P(X)$ en la fórmula de la distribución normal.

Si utilizamos la Figura y calculamos (siguiendo la fórmula) la probabilidad de x

Área bajo la curva = 34.1%



Área bajo la curva = 15.9%

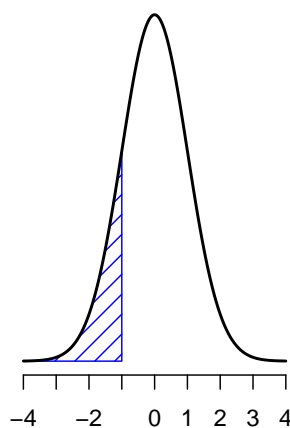


Figura 1.10: Dos ejemplos más sobre el concepto del ‘área bajo la curva’. Existe un 15.9% de probabilidad de que una observación se encuentre 1 desviación estándar o menos por debajo de la media (panel a), y una probabilidad del 34.1% de que una observación sea mayor que una desviación estándar por debajo de la media pero menor que la media (panel b). Si sumamos estos dos valores, obtendremos $15.9\% + 34.1\% = 50\%$. Para datos que estén normalmente distribuidos, existe un 50% de probabilidad de que una observación caiga por debajo de la media. Esto implica que existe un 50% de probabilidad de que caiga por encima de la media.

$= 1$, para una variable normalmente distribuida con `media = 1` y desviación estándar `sd = 0.1`, nos arrojará como resultado una probabilidad de 3.99. Sin embargo, hemos visto anteriormente que las probabilidades *no* pueden ser mayores que 1. Entonces, ¿qué es lo que hemos calculado?

Lo que hemos calculado aquí en realidad no es una probabilidad: Para entender qué es ese algo, tenemos que pensar qué es lo que realmente *significa* decir que X es una variable continua. Digamos que estamos hablando de la temperatura otra vez. El termómetro me dice que hacen 23 grados, pero yo sé que eso no es del todo cierto. No hacen 23 grados *exactamente*. Quizás sea algo más cercano a los 23.1 grados o, si seguimos, en realidad podrían ser 23.095 grados. Esto es lo que sucede con los valores continuos: nunca se sabe el valor exacto.

Ahora pensemos en lo que esto implica cuando hablamos de probabilidades. Supongamos la temperatura máxima para mañana se toma de una distribución normal con media 23 y desviación estándar 1. ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura sea *exactamente* 23 grados? La respuesta es “cero”, o posiblemente, “un número tan cercano a cero que bien podría ser cero”. ¿Por qué es esto? Es como intentar tirar un dardo en un tablero de dardos con dianas infinitamente cada vez más pequeñas: no importa cuán buena sea tu puntería, nunca acertarás. En la vida real nunca obtendremos el valor exacto de 23. Siempre será 23.1 o 22.99998 o algo así. En otras palabras, no tiene sentido hablar de la probabilidad de que la temperatura sea exactamente 23 grados. Sin embargo, en el día a día, si el termómetro indica 23 grados pero en realidad hacen 22.9998 grados, probablemente no nos importe demasiado. Esto es porque en el día a día, “23 grados” por lo general significa algo así como “en algún lugar entre 22.5 y 23.5 grados”. Y aunque no parezca muy importante preguntar por la probabilidad de que la temperatura sea exactamente 23 grados, lo que sí lo parece es preguntar sobre la probabilidad de que la temperatura se encuentre entre 22.5 y 23.5, o entre 20 y 30, o cualquier otro rango de temperaturas en el que estemos interesados.

El objetivo de esta explicación es dejar claro que, cuando hablamos de distribuciones continuas, no tiene sentido hablar sobre la probabilidad de un valor específico. Sin embargo, sí que *podemos* hablar sobre la probabilidad de que el valor se encuentre dentro de un rango particular de valores. Para encontrar probabilidad asociada con un rango particular, lo que debe hacer es calcular el “área bajo la curva”. Este concepto lo conocemos: en la Figura 1.9, las áreas sombreadas representan probabilidades genuinas (por ejemplo, la Figura 1.9 muestra la probabilidad de observar un valor que cae dentro de 1 desviación estándar sobre la media).

Para finalizar, volveremos con la fórmula para $p(x)$ que vimos anteriormente. Los resultados de $p(x)$ no describe una probabilidad, sino una ***densidad de probabilidad***, que en las gráficas corresponde a la altura de la curva. De la misma forma en que las probabilidades son números no-negativos que deben sumar 1, las densidades de probabilidad son números no-negativos que deben integrar a 1 (donde la integral se toma a través de todos los valores posibles

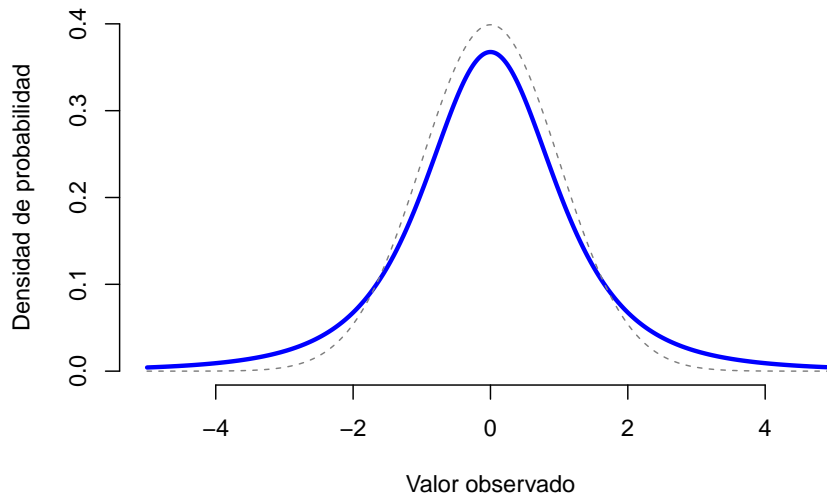


Figura 1.11: Una distribución t con 3 grados de libertad (línea continua). Se asemeja a una distribución normal, pero no es igual (línea discontinua). Ten en cuenta que las “colas” de la distribución t son más “pesadas” (es decir, se extienden más hacia afuera, conteniendo más valores que se alejan de la media) que las colas de la distribución normal.

de X). Para calcular la probabilidad de que X caiga entre a y b calculamos la integral definida de la función de densidad sobre el rango correspondiente, $\int_a^b p(x) dx$. Se trata simplemente de otra forma de llegar al mismo resultado.

1.6 Otras distribuciones útiles

La distribución normal es la distribución más utilizada por los estadísticos (por razones que se discutirán más adelante), y la distribución binomial es útil muchos escenarios. Sin embargo, existen otros tipos de distribuciones de probabilidad. Revisaremos brevemente 3 de ellas: la distribución t , la distribución χ^2 y la distribución F . La **distribución** t es una distribución continua que se parece mucho a una distribución normal, pero que tiene colas más pesadas (ver Figura 1.11). Esta distribución tiende a surgir en situaciones en las que piensa que los datos siguen una distribución normal, pero no se conoce la media o la desviación estándar.

- La **distribución** χ^2 es otra distribución que podemos encontrar con

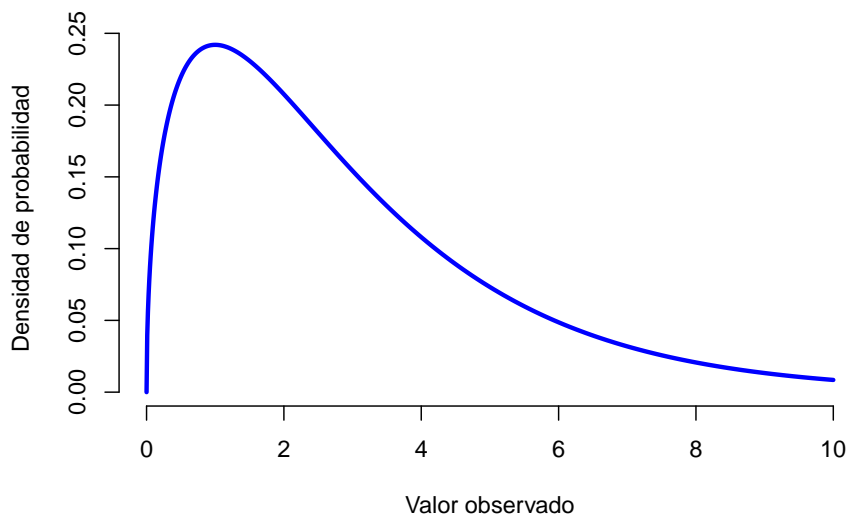


Figura 1.12: Una distribución χ^2 con 3 grados de libertad (3 repeticiones, lo explicaremos más adelante). Observa que los valores siempre deben ser mayores que cero (los valores se elevan al cuadrado y se suman), y que la distribución es bastante sesgada (en este caso hacia la derecha). Estas son las características clave de una distribución chi-cuadrado.

cierta frecuencia. Es habitual encontrarla cuando hacemos análisis de datos categóricos. Los valores de una distribución χ^2 se consiguen al elevar al cuadrado los valores de una variable distribuida normalmente y luego sumarlos (un procedimiento denominado “suma de cuadrados”). Después veremos porqué es útil hacer una “suma de cuadrados”. La apariencia de una distribución χ^2 la puedes encontrar en la Figura 1.12.

- La **distribución F** se parece un poco a la distribución χ^2 y surge cada vez que necesitamos comparar dos distribuciones χ^2 entre sí. Es decir, si queremos comparar dos “sumas de cuadrados” diferentes, nos encontraremos con una distribución F . Aún no hemos visto un ejemplo de todo lo que implica una suma de cuadrados, pero lo veremos cuando hablemos sobre ANOVAs, donde nos encontraremos nuevamente con la distribución F .

Debido a que estas distribuciones están estrechamente relacionadas con la distribución normal y entre sí, y porque se convertirán en las distribuciones

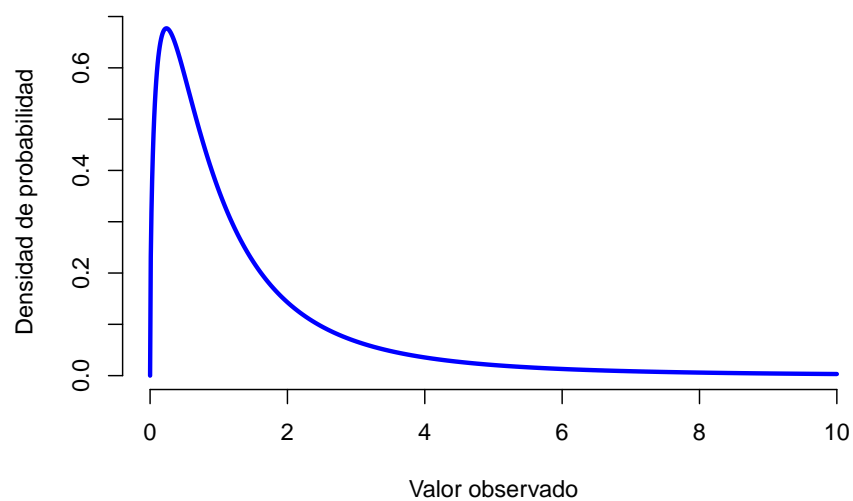


Figura 1.13: Una distribución F con 3 y 5 grados de libertad. Cualitativamente hablando, es similar a una distribución de chi-cuadrado, pero por lo general el significado no es el mismo.

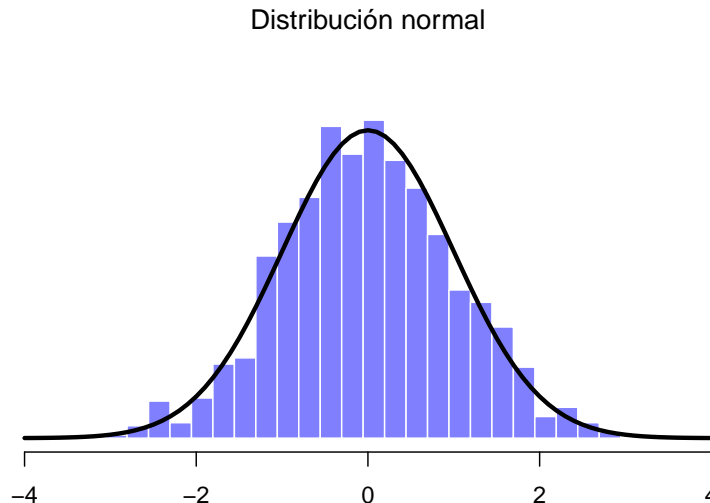


Figura 1.14: Distribución normal de la Muestra A (histograma), junto con la distribución normal verdadera (línea sólida)

importantes al hacer análisis estadísticos inferenciales en este curso, creo que es útil hacer una pequeña demostración de cómo estas distribuciones realmente están relacionadas entre sí. Primero, imagina que tenemos un conjunto de 1,000 observaciones aleatorias distribuidas normalmente al cual llamaremos “Muestra A”.

Esta “Muestra A” es una variable que contiene 1,000 números que se distribuyen normalmente y tienen una media de 0 y desviación estándar de 1. En la Figura 1.14 podemos ver un histograma con la distribución de los valores organizados por columnas, así como una línea negra sólida que representa la distribución verdadera de los datos (es decir, una distribución normal con valores infinitos con media 0 y desviación estándar 1). Así podemos comparar los datos recién generados con los de una distribución normal verdadera.

En la Figura anterior podemos observar cómo han sido generados muchos valores distribuidos normalmente que luego han sido comparados con la distribución de probabilidad verdadera (línea sólida). Supongamos que ahora queremos una distribución chi-cuadrada con 3 grados de libertad. Como hemos mencionado anteriormente, una distribución chi-cuadrada con k grados de libertad es el resultado de tomar k variables (o muestras) normalmente distribuidas (con media 0 y desviación estándar 1), elevarlas al cuadrado y sumarlas. Como queremos una distribución de chi-cuadrada con 3 grados de

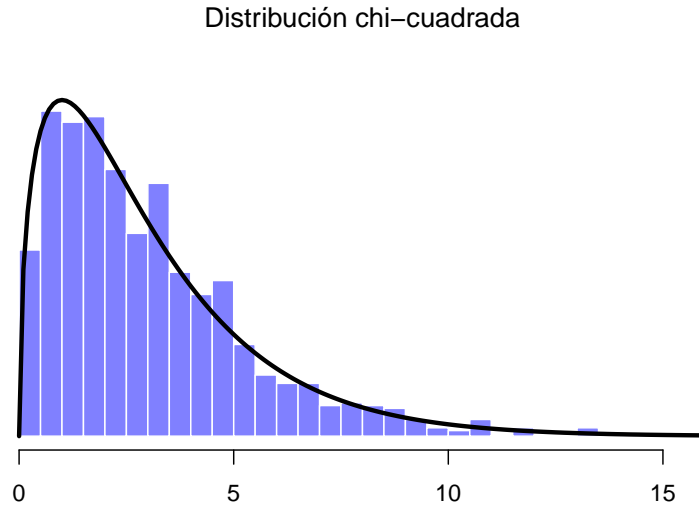


Figura 1.15: Distribución chi-cuadrada. Incluye a las Muestras A, B y C (3 grados de libertad)

libertad, además de nuestra “Muestra A”, necesitamos dos conjuntos más de valores (también distribuidos normalmente). A estas nuevas dos variables las llamaremos “Muestra B” y “Muestra C”:

Una vez que tenemos las tres variables, la teoría dice que debemos elevarlos al cuadrado y sumarlos, con lo que obtendremos 1,000 observaciones que siguen una distribución de chi-cuadrada con 3 grados de libertad. Visualmente, obtendremos una distribución como en la Figura 1.15.

Podemos extender esta demostración y tratar de entender el origen de la distribución t y la distribución F . Antes, hemos dicho que la distribución t está relacionada con la distribución normal cuando se desconoce la media o la desviación estándar. Sin embargo, existe una relación más precisa entre las distribuciones normal, chi-cuadrada y t . Supongamos que “escalamos” nuestros datos anteriores de la chi-cuadrada al dividirla entre sus 3 grados de libertad.

Si tomamos un conjunto de variables normalmente distribuidas (pensemos ahora en una “Muestra D”) y las dividimos por (la raíz cuadrada de) nuestra variable chi-cuadrada “escalada” que tenía $k = 3$ grados de libertad, la operación dará como resultado una distribución t con 3 grados de libertad. Si trazamos el histograma de esta nueva distribución t , observaremos algo parecido al de la Figura 1.16.

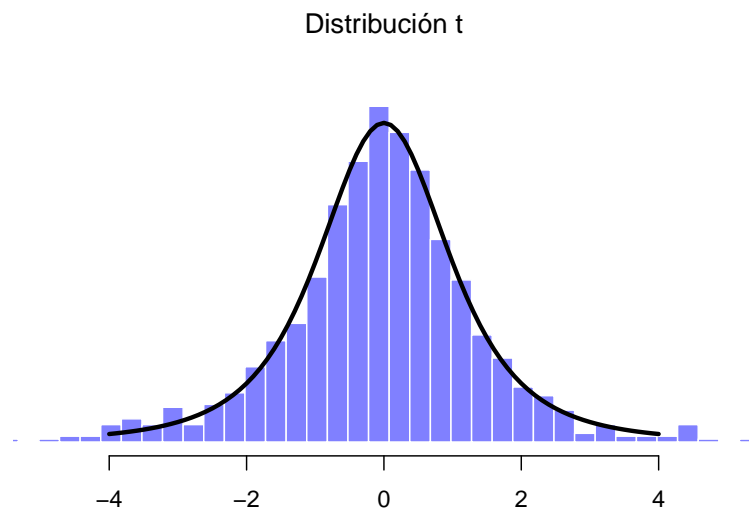


Figura 1.16: Distribución t. Es el resultado de dividir una distribución normal (en este caso la Muestra D) entre una variable chi-cuadrada escalada

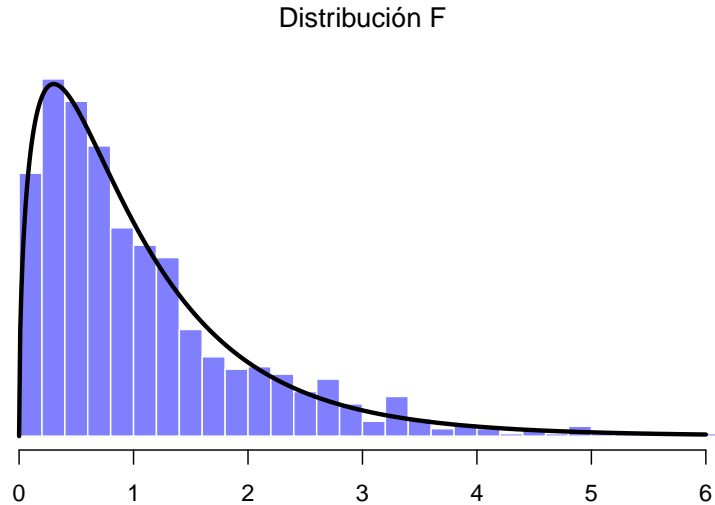


Figura 1.17: Distribución F. En este ejemplo hipotético, se compara la distribución chi-cuadrada de 3 grados de libertad previa con otra distribución chi-cuadrada con 20 grados de libertad (es decir, que incluye 20 muestras o variables)

Del mismo modo, podemos obtener una distribución F al dividir dos distribuciones chi-cuadrada “escaladas”. Supongamos, por ejemplo, que deseamos generar datos que sigan una distribución F con 3 y 20 grados de libertad (es decir, con 3 y 20 variables respectivamente). La división de los valores de ambas distribuciones nos da como resultado una nueva variable $F_{3,20}$ y su distribución es la que se muestra en la Figura 1.17.

Hemos visto tres nuevas distribuciones: χ^2 , t y F . Todas son distribuciones continuas, y todas están estrechamente relacionadas con la distribución normal. Hemos hablado un poco sobre la naturaleza de esta relación. Sin embargo, la clave no es que tengas una comprensión profunda y detallada de todas estas diferentes distribuciones, ni que recuerdes las relaciones precisas que existen entre ellas. Lo más importante es entender la idea básica de que estas distribuciones están profundamente relacionadas entre sí y a su vez con la distribución normal. Más adelante en el curso nos vamos a encontrar con datos que se distribuyen normalmente, o que al menos suponemos que se distribuyen normalmente. Por lo tanto, si suponemos que nuestros datos se distribuyen normalmente, debemos saber reconocer las distribuciones χ^2 , t y F .

1.7 Resumen

En este capítulo hemos hablado de probabilidad. Hemos hablado de lo que significa la probabilidad y por qué los estadísticos no están muy de acuerdo en lo que significa. Hablamos sobre las reglas que las probabilidades tienen que obedecer. Hemos introducido la idea de una distribución de probabilidad y conocido algunas de las distribuciones de probabilidad más importantes con las que nos podemos encontrar. Los temas han sido los siguientes:

- Teoría de probabilidad vs estadística (Sección 1.1)
- Visión frecuentista vs visión bayesiana de probabilidad (Sección 1.2)
- Conceptos básicos de la teoría de probabilidad (Sección 1.3)
- Distribución binomial (Sección 1.4), distribución normal (sección 1.5), y otras distribuciones (Sección 1.6)

Esto es una simple introducción dentro de un gran tema. La teoría de la probabilidad es una rama de las matemáticas, completamente separada de su aplicación a la estadística y al análisis de datos. Como tales, hay miles de libros escritos sobre el tema y las universidades generalmente ofrecen clases dedicadas por completo a la teoría de la probabilidad. En este capítulo se han descrito cinco distribuciones de probabilidad estándar, pero existen *muchas* más que esas. Afortunadamente, estas distribuciones bastarán por el momento.

Los conceptos básicos que hemos adquirido en este capítulo servirán como fundamento para los siguientes dos. Existen muchas reglas sobre lo que se nos “permite” decir cuando hacemos inferencia estadística, y muchas de ellas pueden parecer arbitrarias. Sin embargo, veremos que comienzan a tener sentido si tenemos en cuenta estos conceptos básicos que hemos aprendido.

Capítulo 2

Estimación

Al comienzo del capítulo inicial, vimos la distinción que existe entre la *estadística descriptiva* y la *estadística inferencial*. El papel de la estadística descriptiva es resumir de manera concisa lo que *ya sabemos*. Por otro lado, el propósito de la estadística inferencial es “aprender lo que no sabemos a partir de lo que hacemos”. Ahora que tenemos cierto conocimiento sobre la teoría de la probabilidad, podemos pensar en el problema de la inferencia estadística. ¿Qué tipo de información nos gustaría conocer o aprender? ¿Y cómo lo aprendemos? Estas son las preguntas que se encuentran en el corazón de la estadística inferencial y tradicionalmente se dividen en dos “grandes ideas”: la estimación y la prueba o contraste de hipótesis. El objetivo de este capítulo es presentar la primera de estas grandes ideas, la teoría de la estimación. Pero antes, hablaré sobre la teoría del muestreo, ya que la teoría de la estimación no tiene sentido hasta que no se comprende el muestreo. Como consecuencia, este capítulo se divide en dos partes, las secciones 2.1 a 2.3 se centran en la teoría del muestreo, y las secciones ?? y ?? hacen uso de esa teoría del muestreo para discutir cómo piensan los estadísticos sobre la estimación.

2.1 Muestras, poblaciones y muestreo

Antes hemos hablado sobre el proceso de inducción inferencial, donde recalamos que *todo* aprendizaje (o aquello que queremos llegar a conocer) requiere que hagamos suposiciones. Aceptando que esto es cierto, hemos de aceptar algunas suposiciones generales sobre los datos que hemos adquirido para poder utilizarlos. Aquí es donde entra en juego la **teoría del muestreo**. Si la teoría de la probabilidad representa los cimientos sobre los que se construye toda la teoría estadística, la teoría del muestreo es el marco alrededor del cual se puede construir el resto de la casa. La teoría del muestreo juega un papel muy importante en la especificación de los supuestos en los que se basan sus

inferencias estadísticas. Y para hablar sobre “hacer inferencias” de la forma en que los estadísticos lo piensan, debemos ser un poco más explícitos acerca de *qué* es lo que estamos extrayendo (la muestra) y *sobre qué* es de lo que estamos haciendo inferencias (la población).

En casi todas las situaciones de interés, lo que tenemos a nuestra disposición como investigadores es una *muestra* de datos. Podríamos, por ejemplo, haber realizado un experimento con un cierto número de participantes; una empresa de encuestas podría haber telefoneado a algunas personas para hacer preguntas sobre las intenciones de voto, etc. Independientemente de cual sea el caso, el conjunto de datos disponibles que tengamos es finito e incompleto. No podemos conseguir que todas las personas del mundo realicen nuestro experimento; una empresa de encuestas no tiene el tiempo ni el dinero para llamar a todos los votantes del país, etc. Para la estadística descriptiva esta muestra es lo único que importa. Con la estadística inferencial daremos un paso más allá.

2.1.1 Definición de una población

Una muestra es una cosa muy concreta. Puedes abrir un archivo de Excel y ahí podrás encontrar los datos de una muestra. Una **población**, por otro lado, es una idea más abstracta. Se refiere al conjunto de todas las personas posibles, o todas las observaciones posibles, sobre las que desea sacar conclusiones y, en general, es *mucho* más grande que la muestra. En un mundo ideal, el investigador comenzaría el estudio con una idea clara de cuál es la población de interés, ya que el proceso de diseñar un estudio y probar una hipótesis sobre los datos que produce depende de la población sobre la que se quiere hacer afirmaciones. Sin embargo, en la práctica esto no sucede siempre: por lo general, el investigador tiene una idea bastante vaga de lo que es la población y diseña el estudio lo mejor que puede sobre esa base.

A veces es fácil indicar cuál es la población de interés. En el ejemplo de la “empresa de encuestas” que vimos en el capítulo anterior, la población consistía en todos los votantes inscritos en un momento del estudio: varios millones de personas. En cambio, la muestra fue un conjunto de 1,000 personas que pertenecen todas a esa población. Sin embargo, en la mayoría de los casos, definir esta muestra/población no es tan fácil. En estudios o experimentos con seres humanos, determinar la población de interés es un poco más complicado. Supongamos que realizo un experimento con 100 estudiantes de pregrado que representan mi muestra. Mi objetivo es, por ejemplo, intentar aprender algo sobre cómo una intervención educativa modifica la dinámica de una clase. Tomando en cuenta a la muestra que tenemos, ¿cuál de las siguientes opciones contará como “la población”?:

- ¿Todos los estudiantes de educación de la Universidad de Navarra?

- ¿Estudiantes de grado en educación en general, de cualquier parte del mundo?
- ¿Españoles vivos actualmente?
- ¿Españoles de edades similares a las de mi muestra?
- ¿Hispanoparlantes?
- ¿Cualquier persona viva actualmente?
- ¿Cualquier ser humano, pasado, presente o futuro?

Cada una de estas opciones define un grupo real de personas, las cuales podrían ser todas de interés para mí como investigador en educación, y no es tan obvio cuál debería ser la verdadera población de interés.

2.1.2 Muestras aleatorias simples

Independientemente de cómo definamos a una población, la clave es que la muestra es un subgrupo de esa población, y nuestro objetivo es utilizar nuestro conocimiento de la muestra para hacer inferencias sobre las propiedades de la población. La relación que exista entre los dos dependerá del *procedimiento* mediante el cual se seleccionó la muestra. Este procedimiento se conoce como **método de muestreo** y es importante comprender su importancia.

Pongamos un ejemplo sencillo. Imaginemos que tenemos una bolsa que contiene 10 fichas. Cada ficha tiene una letra única impresa, con la que la podemos distinguir de entre las otras 10 fichas. Las fichas vienen en dos colores, blanco y negro. Este conjunto de fichas es la población de interés y se muestra gráficamente a la izquierda de la Figura 2.1. Como podrás ver en la imagen, tenemos 4 fichas negras y 6 fichas blancas, pero recuerda que en la vida real esto no lo sabríamos a menos que miráramos en la bolsa. Ahora imagina que realizas el siguiente “experimento”: agitas la bolsa, cierras los ojos y sacas 4 fichas sin devolver ninguna de ellas a la bolsa. Primero sale la ficha *a* (negra), seguida de la ficha *c* (blanca), luego la *j* (blanca) y finalmente la ficha *b* (negra). Una vez extraídas 4 fichas, podrás volver a poner todas las fichas en la bolsa y repetir el experimento, como se muestra en el lado derecho de la Figura 2.1. Cada vez que repites el experimento obtienes resultados diferentes, pero el procedimiento es idéntico en cada caso. El hecho de que el mismo procedimiento pueda dar lugar a resultados diferentes cada vez, lo define como un proceso *aleatorio*. Y debido a que hemos agitado la bolsa antes de sacar las fichas, parece razonable pensar que todas las fichas tienen las mismas posibilidades de ser seleccionadas. Un procedimiento en el que todos los miembros de la población tienen las mismas posibilidades de ser seleccionados se denomina **muestra aleatoria simple**. El hecho de que se *no* se devuelvan las fichas a la bolsa después de salir, significa que no podremos observar la misma ficha dos veces, y en tales casos se dice que ha habido un muestreo *sin remplazo*.

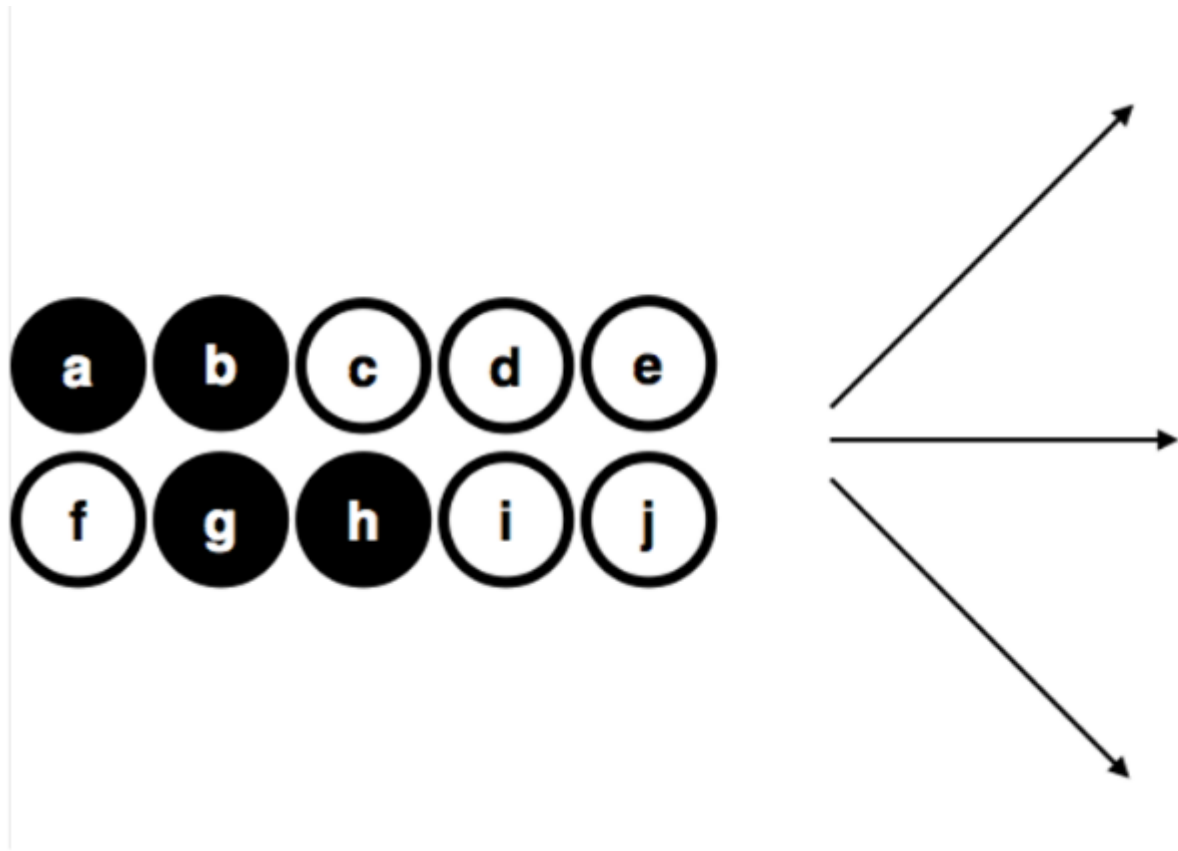


Figura 2.1: Muestreo aleatorio simple *sin* reemplazo de una población finita.

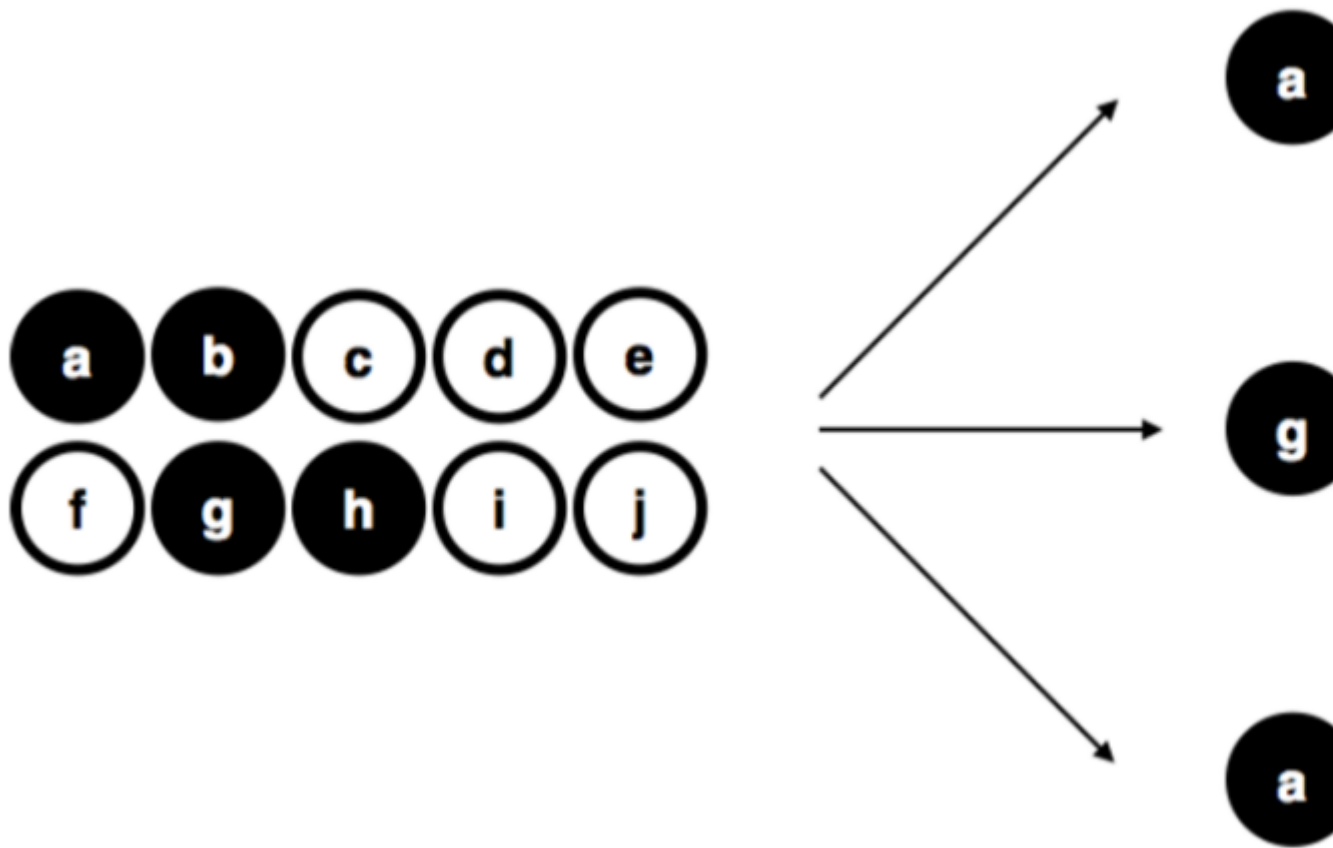


Figura 2.2: Muestreo sesgado sin reemplazo de una población finita.

Para comprender la importancia del procedimiento de muestreo, consideremos ahora una forma alternativa en la que podría haberse realizado el experimento. Supongamos que mi sobrino de 3 años coge la bolsa y decide sacar las cuatro fichas negras (le gusta el color negro) sin devolverlas la bolsa. Este esquema de muestreo *sesgado* se muestra en la Figura 2.2. Ahora considera el valor que tiene obtener una muestra con 4 fichas negras y 0 fichas blancas siguiendo el procedimiento de mi sobrino. Vemos pues, como el valor dependerá mucho del método de muestreo. Si sabemos que el método de muestreo está sesgado para seleccionar únicamente fichas negras, entonces una muestra que consta únicamente de fichas negras no dice mucho sobre nuestra población de fichas. Por esta razón, los estadísticos prefieren que un conjunto de datos provenga de una muestra aleatoria simple, ya que facilita *mucho* el análisis de los datos.

Vale la pena mencionar un tercer procedimiento. Esta vez cerramos los ojos, agitamos la bolsa y sacamos una ficha. Sin embargo, esta vez registramos la

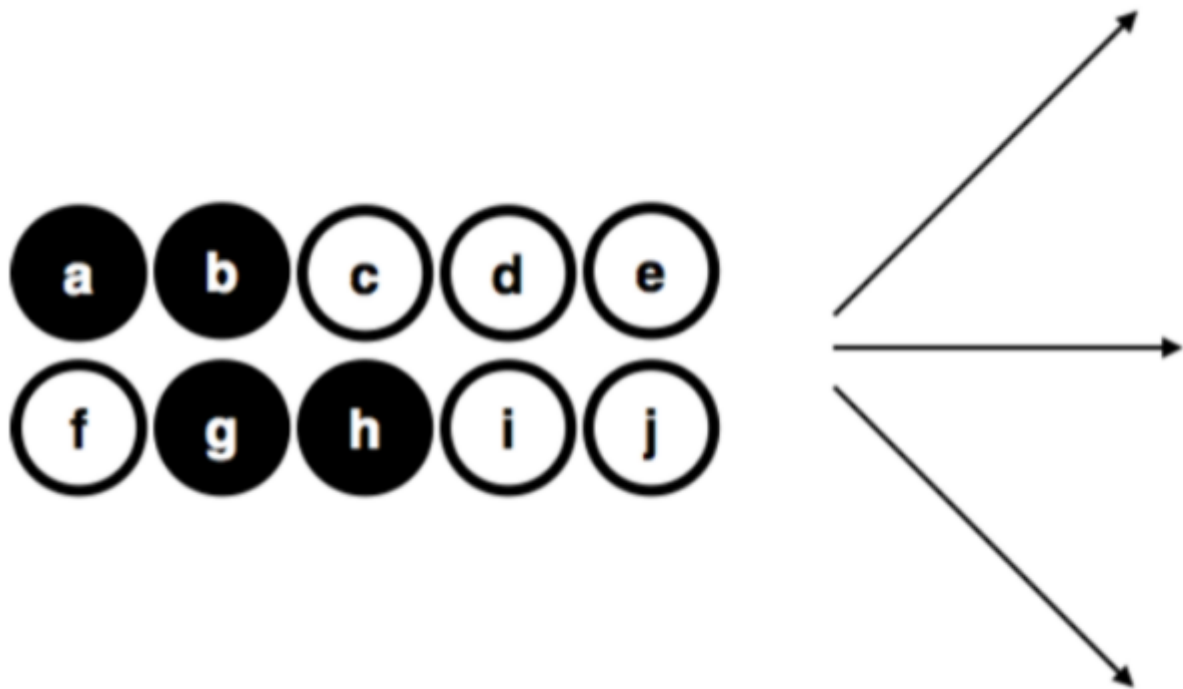


Figura 2.3: Muestreo aleatorio simple *con* reemplazo de una población finita.

observación y luego volvemos a poner la ficha dentro de la bolsa. Nuevamente, cerramos los ojos, agitamos la bolsa y sacamos otra ficha. Repetimos este procedimiento hasta que tengamos 4 fichas. Los conjuntos de datos que hemos generado de esta manera siguen siendo muestras aleatorias simples, pero debido a que volvemos a meter las fichas dentro de la bolsa inmediatamente después de haberlas sacado, se denomina como una muestra **con reemplazo**. La diferencia entre este caso y el primero es que es posible observar al mismo elemento de la población varias veces (en este caso la misma ficha), tal como se ilustra en la Figura 2.3.

Por lo general, la mayoría de los experimentos que veamos en ciencias de la educación tienden a tomar muestras sin reemplazo, ya que la misma persona no puede participar en el experimento dos veces. Sin embargo, una gran parte de la teoría estadística se basa en el supuesto de que los datos surgen de una muestra aleatoria simple **con reemplazo**. En la vida real, esto rara vez importa. Si la población de interés es grande, la diferencia entre el muestreo con y sin reemplazo es demasiado pequeña como para preocuparnos. Sin embargo, la diferencia que existe entre muestras aleatorias simples y muestras sesgadas no es algo que podemos ignorar tan fácilmente.

2.1.3 La mayoría de las muestras no son muestras aleatorias simples

Si miras la lista anterior de posibles poblaciones, te darás cuenta que es casi imposible obtener una muestra aleatoria simple de la mayoría de esas poblaciones de interés. Cuando hacemos experimentos con estudiantes universitarios, el obtener una verdadera muestra aleatoria de estos estudiantes los podemos considerar como un milagro menor, aunque al final se trate de una población muy específica a partir de la cual generalizar. Mencionaré brevemente algunos de los otros tipos de muestreo que existen y que solemos encontrar con frecuencia:

- *Muestreo estratificado*. Supongamos que tu población está (o puede estar) dividida en varias subpoblaciones o *estratos* diferentes. Quizás sea porque estás realizando un estudio en varios países diferentes, por ejemplo. En lugar de intentar tomar una muestra aleatoria de toda la población en su conjunto, recolectamos una muestra aleatoria de cada una de las subpoblaciones o estratos. El muestreo estratificado suele ser más fácil de llevar a cabo que el muestreo aleatorio simple, especialmente cuando la población ya está dividida en los distintos estratos. También puede ser más eficiente que el muestreo aleatorio simple, especialmente cuando algunas de las subpoblaciones son raras o poco frecuentes. Por ejemplo, en el estudio de la esquizofrenia, resulta más sencillo dividir la población en dos estratos (con-esquizofrenia y sin-esquizofrenia) y adquirir una muestra de cada grupo. Si seleccionamos personas al azar,

obtendríamos tan pocas personas con esquizofrenia en la muestra que el estudio resultaría inútil.

- *Muestreo de bola de nieve.* Es una técnica que es especialmente útil cuando se toman muestras de una población “oculta” o de difícil acceso, y es especialmente común en las ciencias sociales. Por ejemplo, supongamos que los investigadores quieren realizar una encuesta de opinión a personas VIH positivo. Es posible que el equipo de investigación solo tenga los datos de contacto de algunas personas VIH positivo, por lo que la encuesta comienza pidiéndoles a esas personas que participen (etapa 1). Al final de la encuesta, se pide a los participantes que proporcionen los datos de contacto de otras personas que podrían querer participar. En la etapa 2, se encuesta a estos nuevos contactos. El proceso continúa hasta que los investigadores obtengan datos suficientes. La gran ventaja del muestreo de bola de nieve es que es capaz de proporcionar datos en situaciones que de otro modo serían imposibles de obtener. Desde el punto de vista estadístico, la principal desventaja es que la muestra es altamente no aleatoria y no aleatoria en formas que son difíciles de abordar.
- *Muestreo de conveniencia.* En este tipo de muestreo las muestras se eligen de una forma conveniente para el investigador, sin que exista una selección al azar a partir de la población de interés. El muestreo de bola de nieve es un tipo de muestreo de conveniencia, pero hay muchos otros. Un ejemplo son los estudios que se basan en estudiantes de universitarios. Estas muestras generalmente no son aleatorias desde dos puntos de vista: en primer lugar, depender de una muestra de estudiantes universitarios significa automáticamente que estos datos están restringidos a una sola subpoblación. En segundo lugar, los estudiantes suelen elegir los estudios en los que participan, por lo que la muestra es un subconjunto de estudiantes autoseleccionado, no un subconjunto seleccionado al azar. En general, la mayoría de los estudios incluyen muestras de conveniencia de una forma u otra. A veces, puede suponer una limitación en la interpretación de los resultados, pero no siempre.

2.1.4 ¿Cuánto importa si no se tiene una muestra aleatoria simple?

Hemos visto que en muchos casos no es posible recolectar muestras aleatorias simples. ¿Eso qué impacto tiene? Un ejemplo de ese impacto lo podemos apreciar con la diferencia que existe entre las Figuras 2.1 y 2.2. Sin embargo, no es tan malo como parece. Algunos tipos de muestras sesgadas no representan ningún problema. Por ejemplo, cuando utilizamos el muestreo estratificado, realmente sabemos *cuál* es el sesgo ya que lo hemos creado deliberadamente, con la intención de *aumentar* la efectividad de su estudio, y existen técnicas estadísticas que podemos utilizar para ajustar estos sesgos que hemos introducido. En estos casos, por lo tanto, no tenemos un problema.

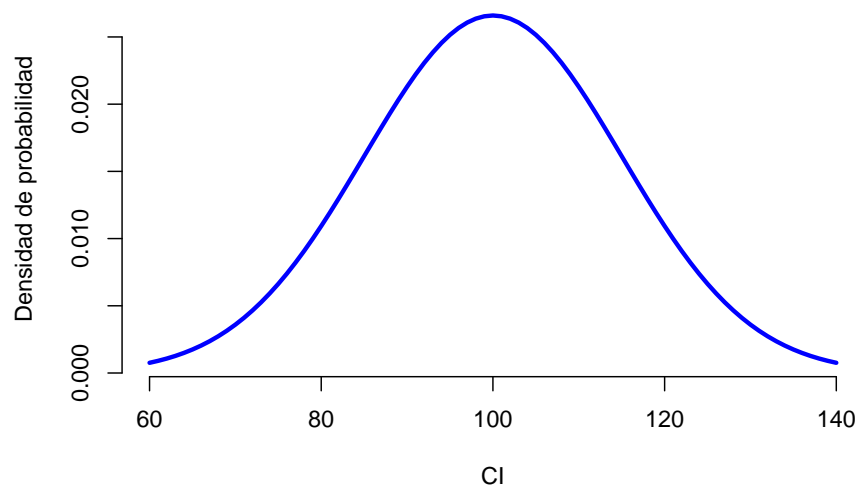
Sin embargo, es importante recordar que el muestreo aleatorio es un medio para un fin, no el fin en sí mismo. Supongamos que recolectamos una muestra de conveniencia y, como tal, podemos asumir que está sesgada. Un sesgo en el método de muestreo solo es un problema si nos hace sacar conclusiones equivocadas. Desde esta perspectiva, podemos afirmar que no necesitamos que la muestra sea aleatoria en *todos* los aspectos: necesitamos que sea aleatoria con respecto al fenómeno de interés que buscamos estudiar. Supongamos que estoy haciendo un estudio sobre la capacidad de atención sostenida en niños de 6 años. En el estudio 1, tengo la capacidad de tomar muestras al azar de todos los niños de 6 años del mundo actualmente vivos, con una pequeña excepción: sólo puedo incluir niños nacidos en lunes. En el estudio 2, puedo tomar una muestra al azar de la población española. Con estos estudios quiero generalizar mis resultados a la población de todos los niños de 6 años. ¿Qué estudio es mejor? La respuesta, obviamente, es el estudio 1. ¿Por qué? Porque no tenemos ninguna razón para pensar que “nacer en lunes” influye en la capacidad de atención sostenida. Por otro lado, puedo pensar en varias razones por las que “ser español” podría ser importante. España es un país rico e industrializado con un sistema educativo muy desarrollado. Las personas que crecieron con este sistema habrán tenido experiencias de vida mucho más similares a las experiencias de vida de las personas que diseñaron las pruebas de capacidad de atención sostenida. Esta experiencia compartida podría traducirse fácilmente en creencias similares sobre cómo se debe “realizar una prueba”, entre otras razones. Este tipo de características son importantes y podrían, por ejemplo, llevar a una imagen engañosa de lo que es la capacidad atención sostenida.

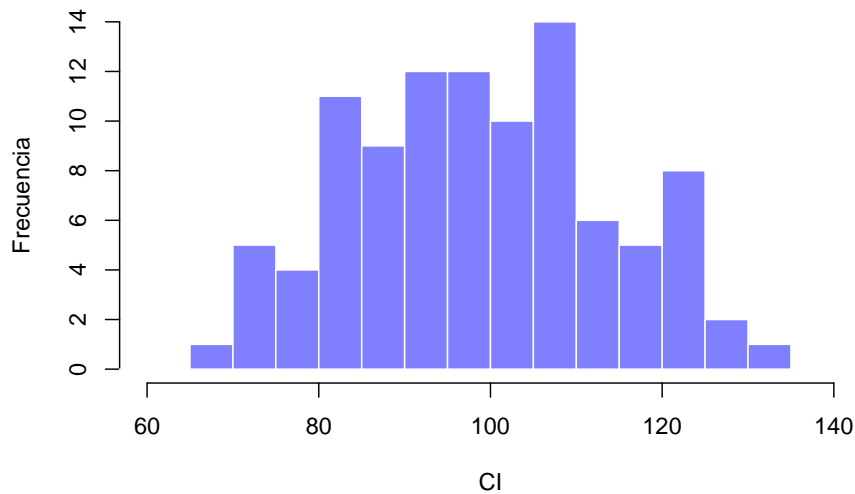
Existe una reflexión clave oculta en esta discusión. Al diseñar estudios, es importante pensar en la población de interés y en esforzarse por elegir un método de muestreo que sea apropiado para esa población. En la práctica, muchas veces nos veremos obligados a utilizar una “muestra de conveniencia” (por ejemplo, estudiantes de unos pocos centros), pero deberíamos, al menos, dedicar un tiempo a pensar en los riesgos e implicaciones de esta práctica.

2.1.5 Parámetros poblacionales y estadísticos muestrales

Hasta ahora hemos estado hablando de poblaciones como lo haría un científico. Para un educador, una población puede ser un grupo de niños. Para un ecologista, una población puede ser un grupo de osos. En la mayoría de los casos, las poblaciones son cosas concretas que realmente existen en el mundo real. Los estadísticos, sin embargo, tienen un interés dual. Por un lado, *están* interesados en los datos del mundo real de la misma forma que los científicos. Por otro lado, también operan en el ámbito de la abstracción pura como lo hacen los matemáticos. En consecuencia, la teoría estadística puede ser un poco abstracta cuando define una población. Para ello, los estadísticos operacionalizan el concepto de “población” en términos de objetos matemáticos los cuales ya conocemos: se llaman distribuciones de probabilidad.

La idea es muy simple. Digamos que estamos hablando (otra vez) de puntajes de coeficiente intelectual (CI). Para un educador, la población de interés es un grupo de humanos reales que tienen puntajes de CI. Un estadístico “simplifica” esto al definir operativamente a la población como la distribución de probabilidad representada en la Figura ???. Las pruebas de CI están *diseñadas* de tal forma que la media sea 100, que la desviación estándar sea 15 y que la distribución de los puntajes sea normal. Estos valores se denominan **parámetros poblacionales** porque son característicos de toda la población. Es decir, decimos que la media de la población μ es 100, y la desviación estándar de la población σ es 15.





Supongamos que hacemos un experimento. Seleccionamos 100 personas al azar para que elaboren nuestro test de CI, lo cual me dará una muestra aleatoria de la población. Mi muestra consistirá en una serie de números como estos:

106 101 98 80 74 ... 107 72 100

Estos puntajes forman parte de una muestra extraída de una población con distribución normal, media de 100 y desviación estándar de 15. Si trazamos un histograma de esta muestra, obtendremos algo como el que se muestra en la Figura ???. Podemos ver que el histograma tiene una forma *aproximadamente* normal, pero aún queda como una aproximación burda de la verdadera distribución de la población que se muestra en la Figura ??. Si calculamos la media muestral, obtendremos un número que está bastante cerca de la media de la población 100, pero no es idéntico. En este caso, vemos que las personas de mi muestra tienen un CI medio de 98,5 y la desviación estándar de sus puntuaciones de CI es de 15,9. Estos **estadísticos muestrales** nos presentan una descripción de nuestro conjunto de datos y, aunque son bastante similares a los valores reales de población, no son iguales. En general, los estadísticos muestrales son lo que podemos calcular a partir de un conjunto de datos mientras que los parámetros poblacionales son las cosas sobre las que deseamos aprender. Más adelante, hablaremos sobre cómo podemos estimar los parámetros poblacionales utilizando sus estadísticos muestrales (Sección ??) así como qué tan seguros estamos de esos estimadores (Sección ??) pero antes necesitamos conocer algunos conceptos adicionales sobre la teoría de muestreo.

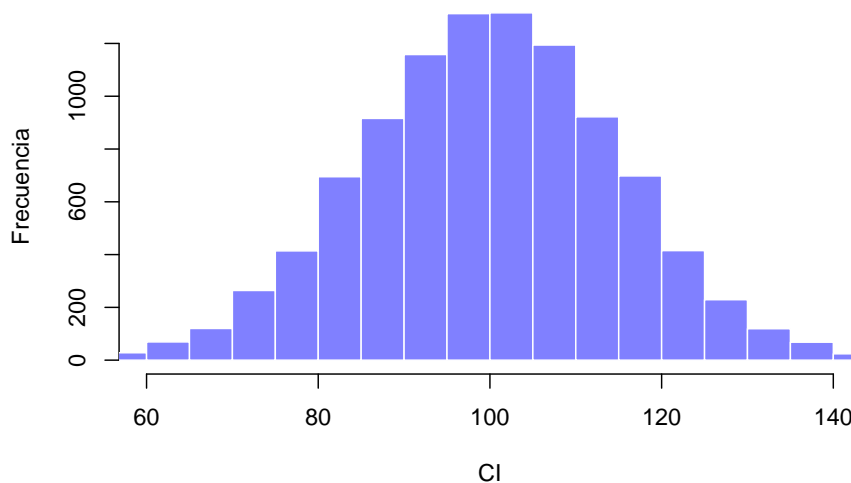


Figura 2.4: Muestra con 10,000 observaciones provenientes de la distribución poblacional previa.

2.2 La ley de los grandes números

En la sección anterior vimos los resultados de un experimento ficticio con un tamaño de muestra de $N = 100$. Los resultados fueron algo alentadores: la media real de la población es 100, mientras que la media muestral fue de 98.5, una aproximación razonable. En muchos estudios científicos, este nivel de precisión es perfectamente aceptable, pero existen situaciones en las que nos gustaría ser bastante más precisos. Si queremos que nuestros estadísticos muestrales se acerquen más a los parámetros poblacionales, ¿qué podemos hacer al respecto?

La respuesta lógica sería recolectar más datos. Supongamos que hacemos un experimento más grande, en el cual medimos el CI de 10,000 personas. Si entras aquí podrás hacer una simulación. El histograma de esta simulación se muestra en la Figura 2.4. Una inspección rápida nos revelará que una muestra de mayor tamaño representa una mejor aproximación a la distribución poblacional real, especialmente si la comparamos con la muestra más pequeña. Esto también se ve reflejado en los estadísticos muestrales: el CI medio de la muestra grande es de 99.9 y su desviación estándar es de 15.1. Estos valores son muy cercanos a los valores reales de la población.

Con esto, podemos observar algo que parece obvio: entre más datos tengamos, mejores resultados obtendremos. Esta intuición tan evidente que compartimos

todos, los estadísticos la definen como la **ley de los grandes números**. La ley de los grandes números es una ley matemática que aplica a muchos estadísticos muestrales, pero la forma más sencilla de entenderla es a través de la ley aplicada a las medias. Cuando se aplica a la media muestral, la ley de los grandes números nos dice que conforme aumenta el tamaño de muestra, el valor de la media muestral se acercará al valor de la media poblacional real. O, para ser más precisos, conforme el tamaño muestral se aproxima al infinito (escrito como $N \rightarrow \infty$) la media muestral se aproximará a la media poblacional ($\bar{X} \rightarrow \mu$).¹

Espero que quede patente la importancia de la ley de los grandes números como una herramienta elemental en la teoría estadística. Esta ley de los grandes números es nuestro argumento para justificar nuestra creencia de que recolectar cada vez más y más datos nos acercará a la verdad. Para cualquier conjunto de datos, los estadísticos muestrales que calculemos estarán equivocados, pero la ley de los grandes números nos dice que si seguimos recolectando datos esos estadísticos muestrales tenderán a acercarse más y más a los parámetros poblacionales reales.

2.3 Distribuciones muestrales y el teorema del límite central

La ley de los grandes números es una herramienta muy poderosa, pero no será suficiente para responder a todas nuestras preguntas. Entre otras cosas, lo que nos da esta ley es una “garantía a largo plazo”. A largo plazo, si pudiéramos recolectar una cantidad infinita de datos, la ley de los grandes números nos garantiza que los estadísticos muestrales serán correctos.

Sin embargo, esta “garantía a largo plazo” es de poca utilidad en la vida real: no basta con decir que *con el tiempo* llegaremos a la respuesta correcta cuando calculemos la media muestral. Saber que un conjunto de datos infinitamente largo me dará el valor exacto de la media poblacional es inconciliable con el *hecho* de que mi conjunto de datos tiene un tamaño de muestra de $N = 100$. En la vida real, tenemos que saber algo más sobre el comportamiento de la media muestral de una muestra modesta como la nuestra.

2.3.1 Distribución muestral de la media

Abandonemos por un momento la idea de tener tamaños de muestra de 10,000 y pensemos en un experimento más modesto. Esta vez extraemos una muestra de $N = 5$ personas y medimos su CI. Este es el resultado:

¹Técnicamente, la ley de los grandes números es aplicable a cualquier estadístico muestral que pueda ser descrito como un promedio de cantidades independiente. La varianza muestral, por ejemplo, puede ser representado como un tipo de promedio y por ello, sujeto a la ley de los grandes números. Sin embargo, el valor mínimo muestral no puede ser interpretado como un promedio de nada, y por tanto, no es gobernado por la ley de los grandes números.

90 82 94 99 110

El CI medio de esta muestra es exactamente 95. Esta muestra nos revela un valor mucho menos preciso que en el experimento previo. Ahora imagina que decides *replicar* este mismo experimento. Es decir, quieres repetir el mismo procedimiento de tal forma que selecciones una nueva muestra aleatoria de 5 personas y obtener su CI una vez más. Estos son los CI de nuestra nueva muestra:

78 88 111 111 117

Al calcular la media de esta muestra vemos que es de 101. Si repetimos el experimento 10 veces más obtendremos los resultados que se muestran en la siguiente Tabla. Con ella podrás ver que la media muestral cambia con cada replicación del experimento.

.	P1	P2	P3	P4	P5	Media.Muestral
Rep 1	90	82	94	99	110	95.0
Rep 2	78	88	111	111	117	101.0
Rep 3	111	122	91	98	86	101.6
Rep 4	98	96	119	99	107	103.8
Rep 5	105	113	103	103	98	104.4
Rep 6	81	89	93	85	114	92.4
Rep 7	100	93	108	98	133	106.4
Rep 8	107	100	105	117	85	102.8
Rep 9	86	119	108	73	116	100.4
Rep 10	95	126	112	120	76	105.8

Supongamos ahora que decidimos continuar con este procedimiento, replicando el experimento de “5 puntuaciones de CI” una y otra vez. Y cada vez, obtendremos una media muestral diferente, que en el caso de los 10 experimentos que ya hemos hecho corresponderían con los siguientes valores:

95.0 101.0 101.6 103.8 104.4 ...

¿Qué pasaría si continuamos y recolectamos 10,000 medias muestrales y trazamos un histograma con ellas? Obtendríamos un resultado como el que vemos en la Figura 2.5. En esta imagen podemos apreciar que la media muestral de “5 puntuaciones de CI” se encuentra, por lo general, entre 90 y 110. Pero lo más interesante de esta Figura es que demuestra el hecho de que si repetimos el experimento una y otra vez, ¡lo que obtenemos es una *distribución* de las medias muestrales! Esta distribución recibe un nombre especial en estadística: se le llama ***distribución muestral de la media***.

Las distribuciones muestrales son una idea teórica importante en la estadística, y además, son cruciales si queremos entender cómo se comportan las muestras pequeñas. Por ejemplo, cuando realizamos el primer experimento con 5

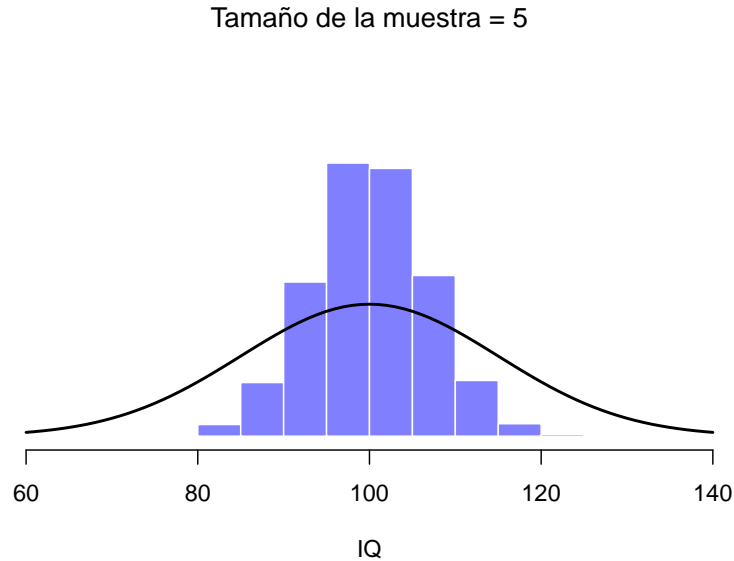


Figura 2.5: La distribución muestral de la media en el experimento con 5 puntuaciones de CI. Si obtenemos una muestra aleatoria de 5 personas y calculamos la *media* de sus puntajes, obtendremos casi con seguridad un valor entre 80 y 120, aunque existen individuos que tienen un CI mayor de 120 o menor de 80. La línea negra dibuja la distribución poblacional de los puntajes de CI para comparar.

puntuaciones de CI, la media muestral fue de 95. Sin embargo, lo que la distribución muestral nos dice en la Figura 2.5, es que este experimento con 5 puntuaciones no es muy preciso. Si repetimos el experimento muchas veces, la distribución muestral nos dice que podemos esperar que la media muestral esté entre 80 y 120.

2.3.2 Existen distribuciones muestrales para cualquier estadístico muestral

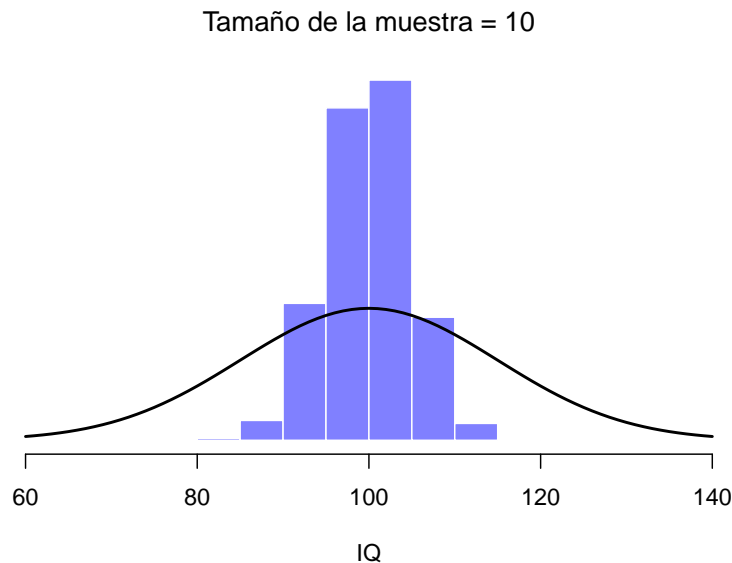
Una cosa que debemos tener en cuenta cuando pensemos sobre las distribuciones muestrales es que es posible estimarlos a partir de *cualquier* estadístico muestral. Por ejemplo, supongamos que en cada una de las veces que replicamos el “experimento con 5 puntajes de CI” también tomamos nota del valor de CI máximo en cada experimento. Esto daría como resultado una serie de número que empezaría de esta forma:

110 117 122 119 113 ...

Si hacemos esto una y otra vez obtendremos una distribución muestral muy diferente, concretamente la *distribución muestral del valor máximo*. La distribución muestral del valor máximo de 5 puntajes de CI se muestra en la Figura 2.6. No es de sorprender, que si escogemos a 5 personas al azar y seleccionamos a la persona con el puntaje más alto, este tenga un CI superior a la media. Y de hecho, la mayoría de las veces nos encontraremos con puntajes de CI en el rango entre 100 y 140.

2.3.3 El teorema del límite central

A continuación verás una serie de ilustraciones en las que podremos observar como influye el tamaño de la muestra en las distribuciones muestrales. Estas distribuciones muestrales se han generado a partir 10,000 muestras de datos sobre el CI, donde se ha calculado la media muestral de cada una de esas muestras. Los histogramas muestran la distribución de esas medias muestrales (en otras palabras, son distribuciones muestrales de la media). Cada valor individual de CI fue extraído de una distribución normal con media de 100 y desviación estándar de 15, que se muestra como una línea sólida de color negro.



Espero que con esta demostración, tengas un mejor idea de lo que son las distribuciones muestrales, y en particular lo que es la distribución muestral de la media. En esta sección hablaremos de cómo la distribución muestral de la media cambia en función del tamaño muestral. Intuitivamente tú ya conoces

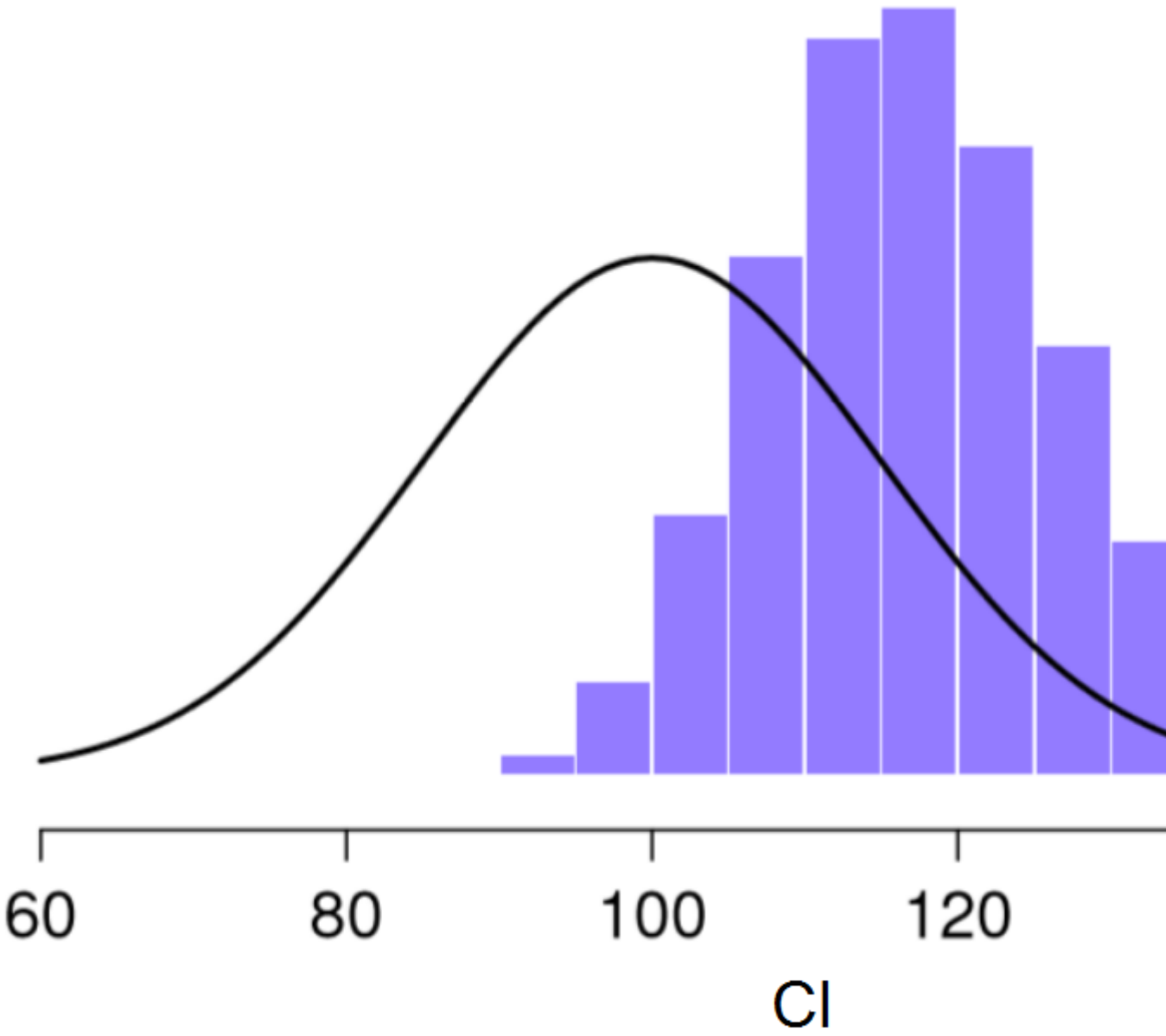


Figura 2.6: Distribución muestral del valor máximo de CI

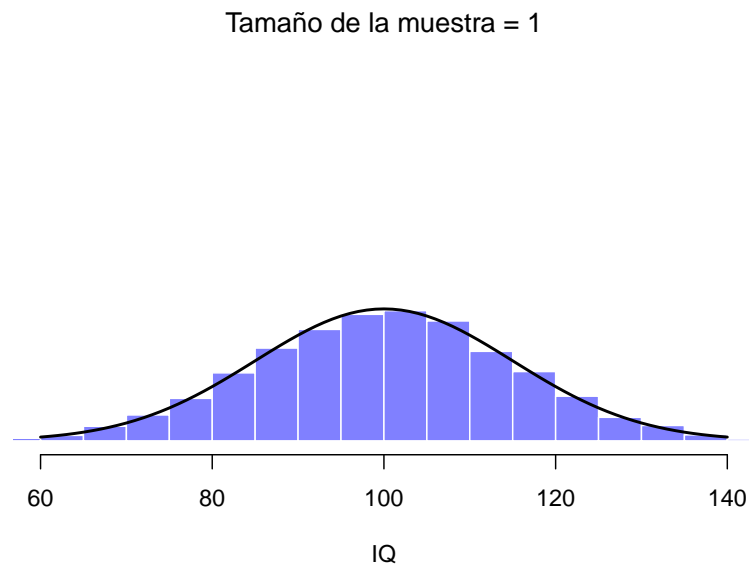


Figura 2.7: Esta distribución muestral parte de una sola observación (tamaño muestral de 1), de forma que la media muestral es el puntaje de CI de una persona. Como consecuencia, la distribución muestral de la media es idéntica a la distribución poblacional de los valores de CI.

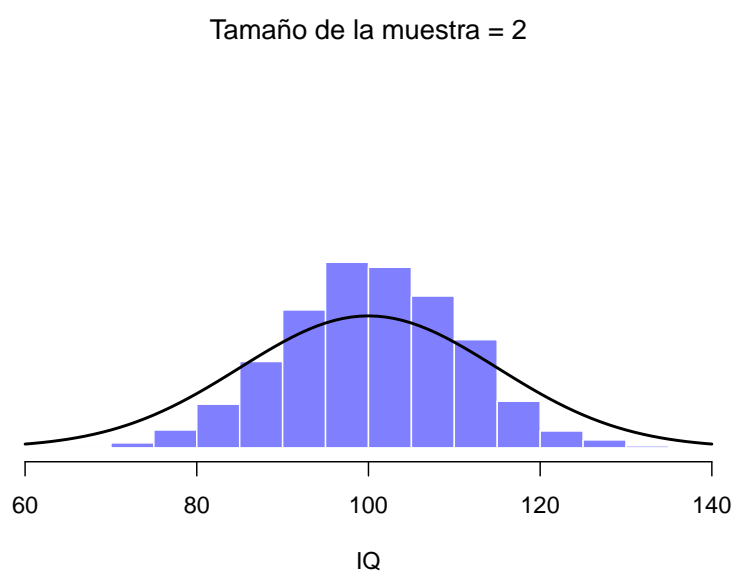
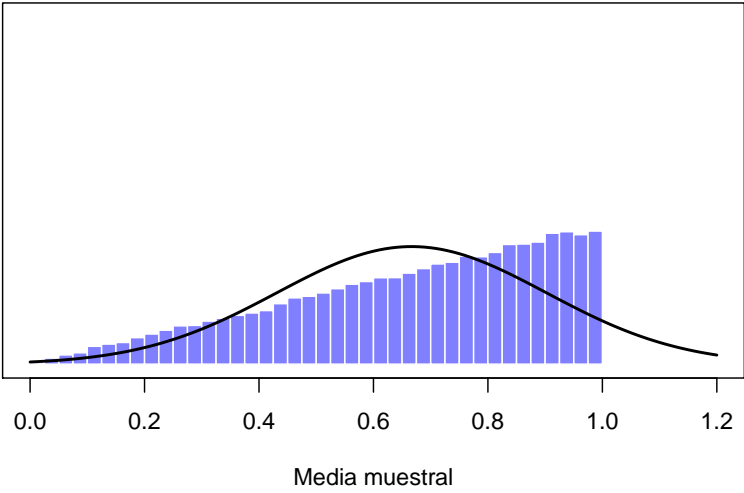


Figura 2.8: Cuando aumentamos el tamaño de la muestra a 2, la media de cualquier muestra tiende a acercarse más a la media poblacional que a un puntaje individual de CI, por lo que el histograma (distribución muestral) es un poco más estrecho que el de la distribución de la población.

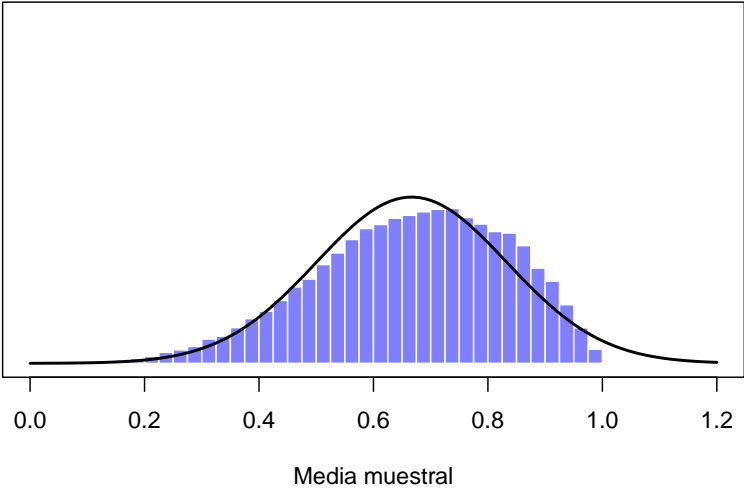
la respuesta: si tenemos sólo unas cuantas observaciones, es probable que la media muestral no sea muy precisa. Si replicas este experimento con una muestra pequeña y vuelves a calcular la media obtendrás, casi con seguridad, una respuesta muy diferente. En otras palabras, su distribución muestral es muy ancha. Por otro lado, si replicas un experimento con un tamaño muestral grande y calculas la media muestral varias veces, es muy probable que obtengas la misma respuesta, o al menos muy aproximada, por lo que la distribución muestral será muy estrecha. Esto lo puedes apreciar visualmente con las Figuras 2.7, 2.8 y ?? : entre más grande sea la muestra, más estrecha será la distribución muestral. Podemos cuantificar este efecto si calculamos la desviación estándar de la distribución muestral, mejor conocida como el **error estándar**. El error estándar de la media se denota como σ con el subíndice \bar{X} (o SEM en inglés). Y como puedes ver y confirmar con las figuras, conforme aumenta el tamaño muestral N , el error estándar disminuye.

De momento hemos visto cómo se comportan las distribuciones muestrales de los puntajes de CI, que es un parámetro que tiene una distribución poblacional normal. Pero, ¿qué pasa con aquellos datos que no guardan una distribución normal? Esta es la clave: sin importar la forma de la distribución de la población, si aumentamos N , su distribución muestral siempre será como la que hemos visto con la distribución normal. Por ejemplo, en la Figura ?? verás que una distribución poblacional que tiene forma de rampa (los valores más altos son los más frecuentes). Si comparas esta forma con la de la distribución normal (la línea sólida negra), podrás confirmar que no se parecen en nada. Si repetimos el mismo procedimiento que hemos hecho anteriormente, y extraemos un número elevado de muestras (10,000) con un tamaño muestral de $N = 2$ y calculamos sus medias muestrales, obtendremos la distribución muestral de la media que puedes ver en la Figura ?? . Esta distribución cambia de forma de manera importante, y aunque no es normal, se aproxima bastante, sobre todo si la comparamos con la distribución poblacional original (Figura ??). Si aumentamos el tamaño muestral a $N = 4$, la distribución muestral de la media se acerca más a una distribución normal (Figura ?? , y con un tamaño muestral de $N = 8$ esta ya es perfectamente normal. En otras palabras, siempre y cuando el tamaño de tu muestra no sea diminuto, la distribución muestral de la media será normal, ¡sin importar la forma de la distribución poblacional!

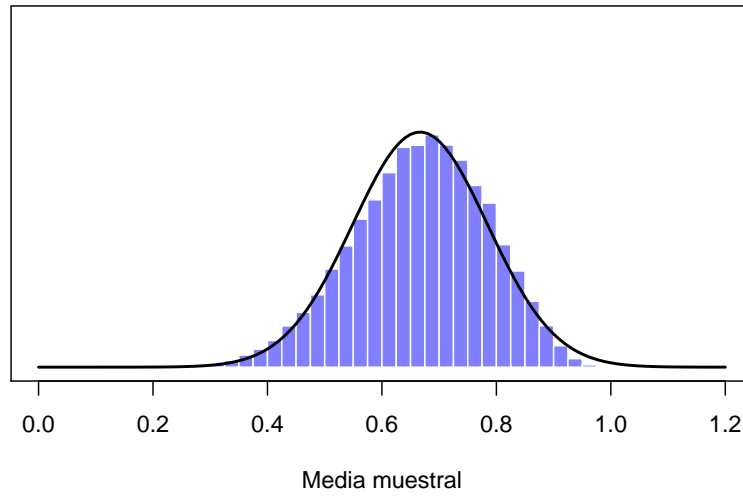
Tamaño muestral = 1



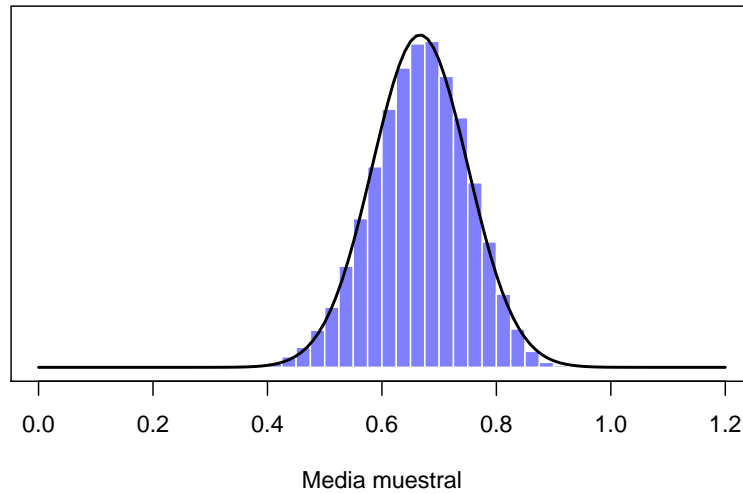
Tamaño muestral = 2



Tamaño muestral = 4



Tamaño muestral = 8



Con base en estas figuras, parece que tenemos evidencia suficiente para sustentar las siguientes afirmaciones sobre las distribuciones muestrales de la media:

- La media de una distribución muestral es igual a la media poblacional
- La desviación estándar de una distribución muestral (el error estándar)

disminuye conforme aumenta el tamaño muestral

- La forma de una distribución muestral adquiere una forma normal o de campana conforme aumenta el tamaño muestral

Estas tres afirmaciones que hemos deducido, pueden ser comprobadas a través de un teorema muy famoso en estadística, conocido como el **teorema del límite central**. Entre otras cosas, el teorema del límite central nos dice que si una distribución poblacional tiene una media μ y una desviación estándar σ , entonces la distribución muestral de la media también tendrá una media μ y un error estándar de la media:

$$\text{SEM} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Ya que en esta fórmula se divide la desviación estándar de la población σ por la raíz cuadrada del tamaño muestral N , el error estándar disminuye conforme aumenta el tamaño muestral. También nos dice que la forma de la distribución muestral se vuelve normal.²

Este resultado es útil por muchas razones. Nos dice porqué los experimentos con un tamaño muestral más grande son más confiables que aquellos con muestras pequeñas, además de darnos una fórmula para el error estándar que nos permite cuantificar *qué tanto* más confiable es ese experimento. Nos dice que porque la distribución normal, es... *normal*. Cuando hacemos un experimento, muchas de las cosas que medimos son en realidad un promedio de muchas otras medidas (por ejemplo, la inteligencia “general” que mide el CI es un promedio de un gran número de habilidades “específicas”), y cuando eso pasa, la cantidad promediada debe seguir una distribución normal. Es por esta ley matemática que la distribución normal aparece con tanta frecuencia en los datos que recogemos del mundo real.

²Hemos explicado el caso de la media muestral que satisface el teorema del límite central. Sin embargo, existen otros estadísticos muestrales que también lo hacen, y que no revisaremos, al ser esto una introducción.